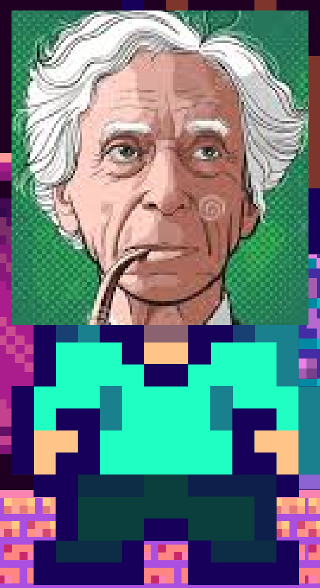
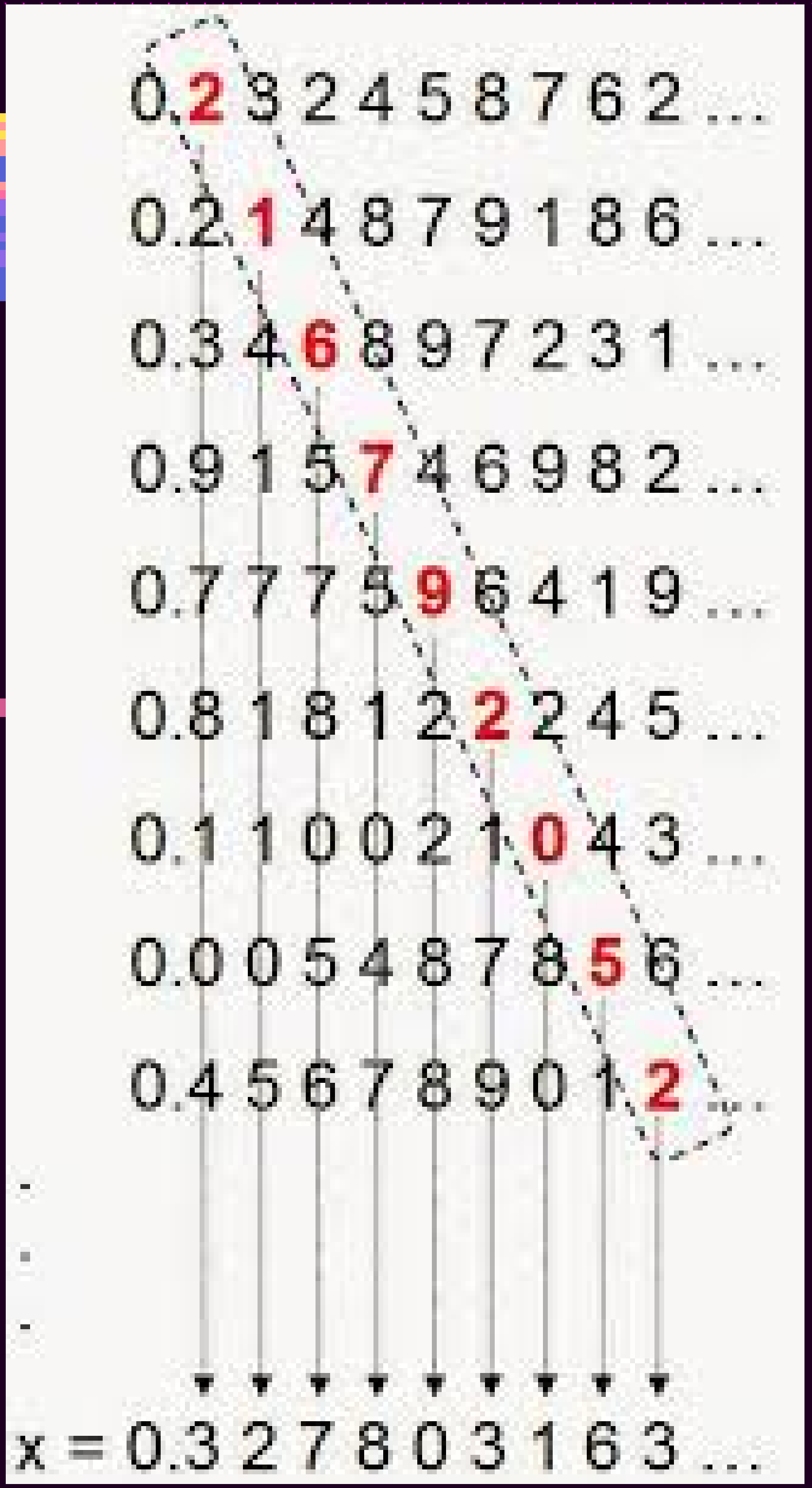
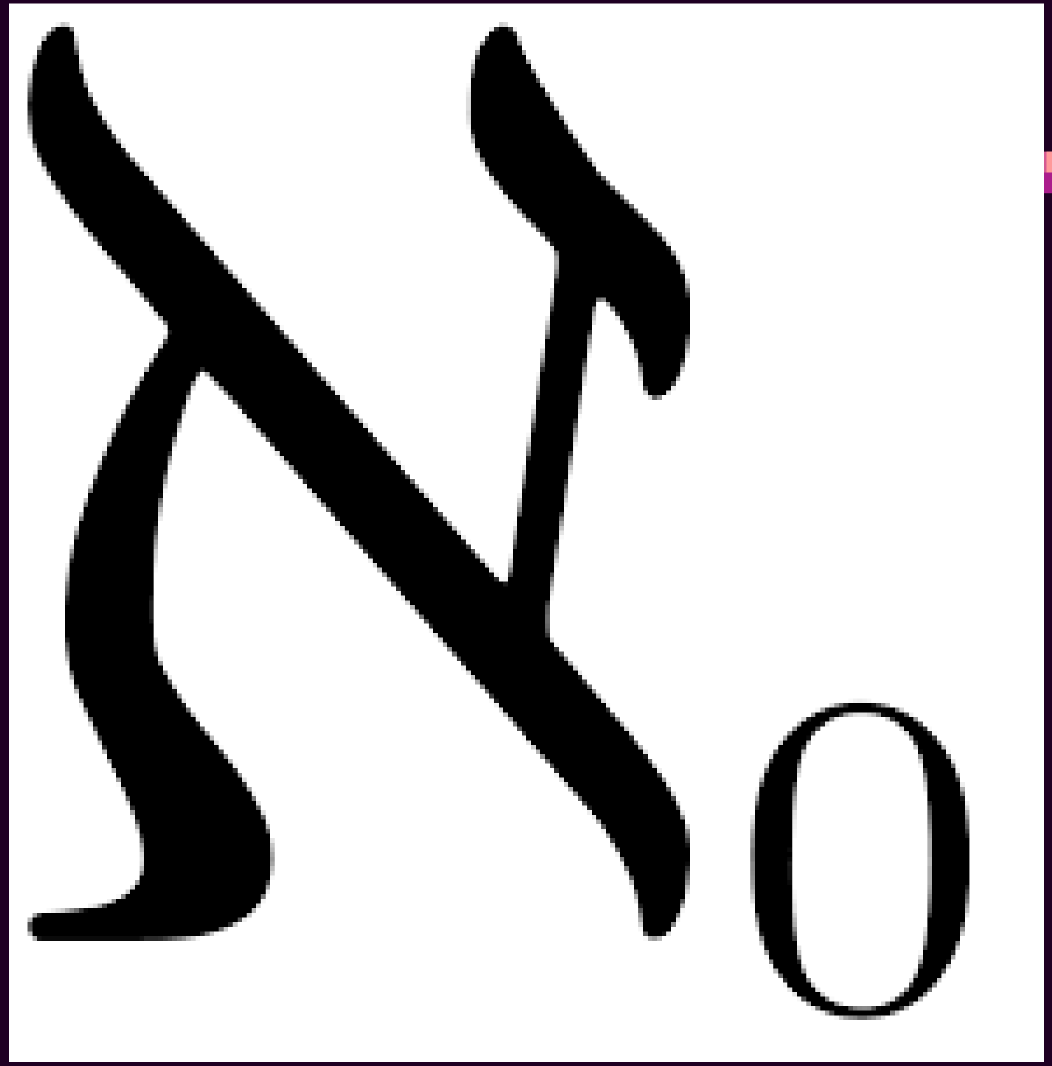
LA BUSQUEDA DE LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMATICAS

HILBERT Y RUSSELL

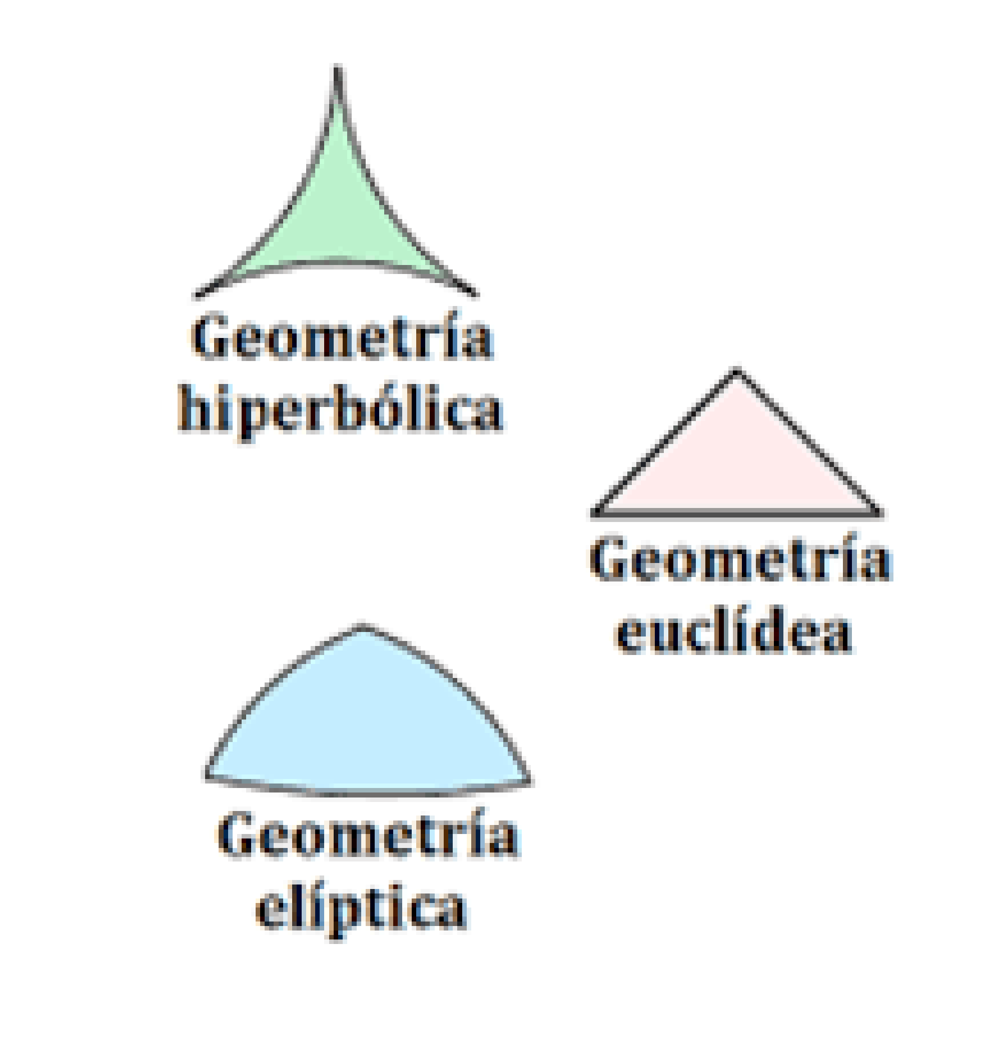


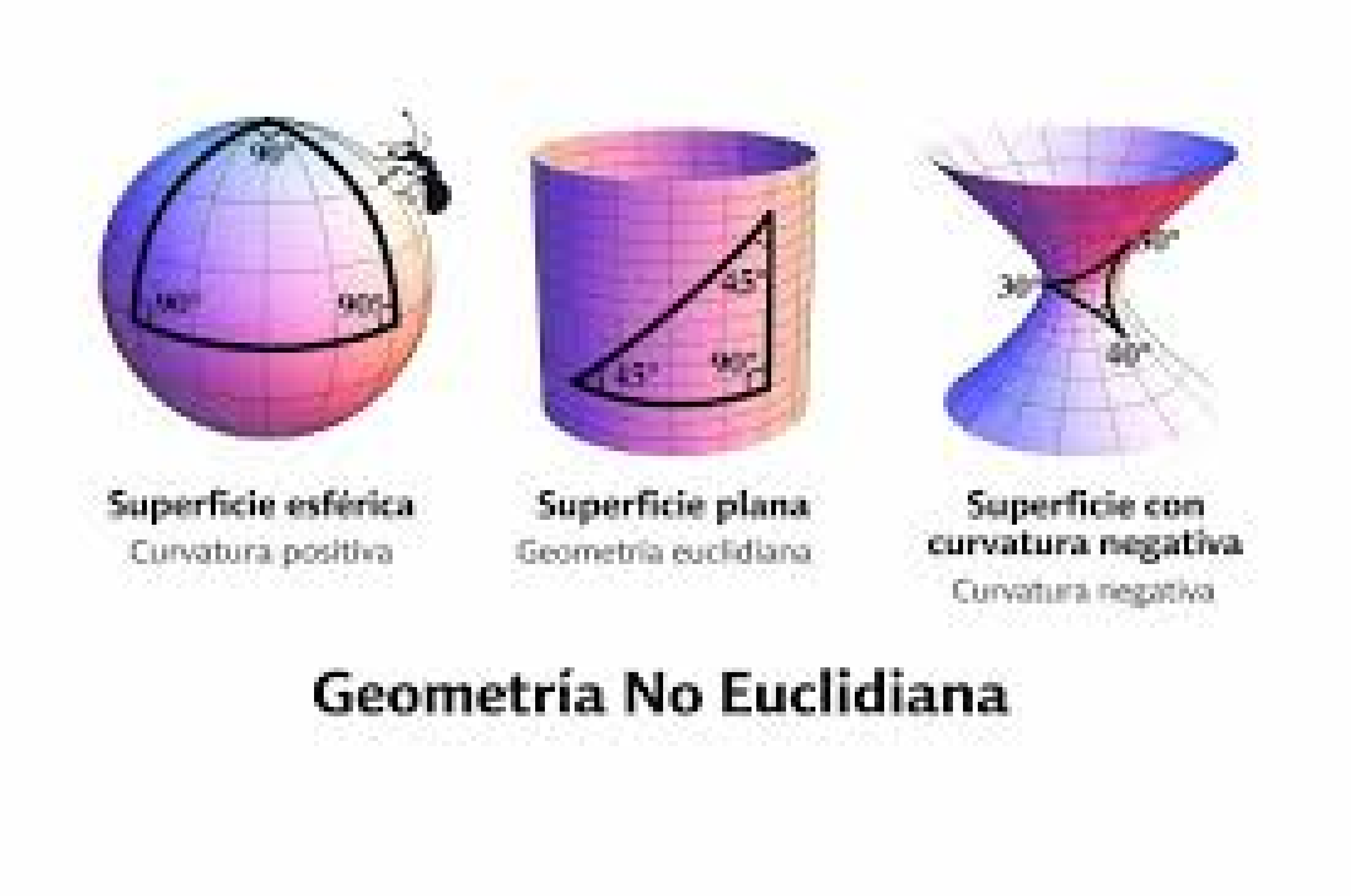
ESTADO DE LAS MATEMATICAS EN EL SIGLO XIX



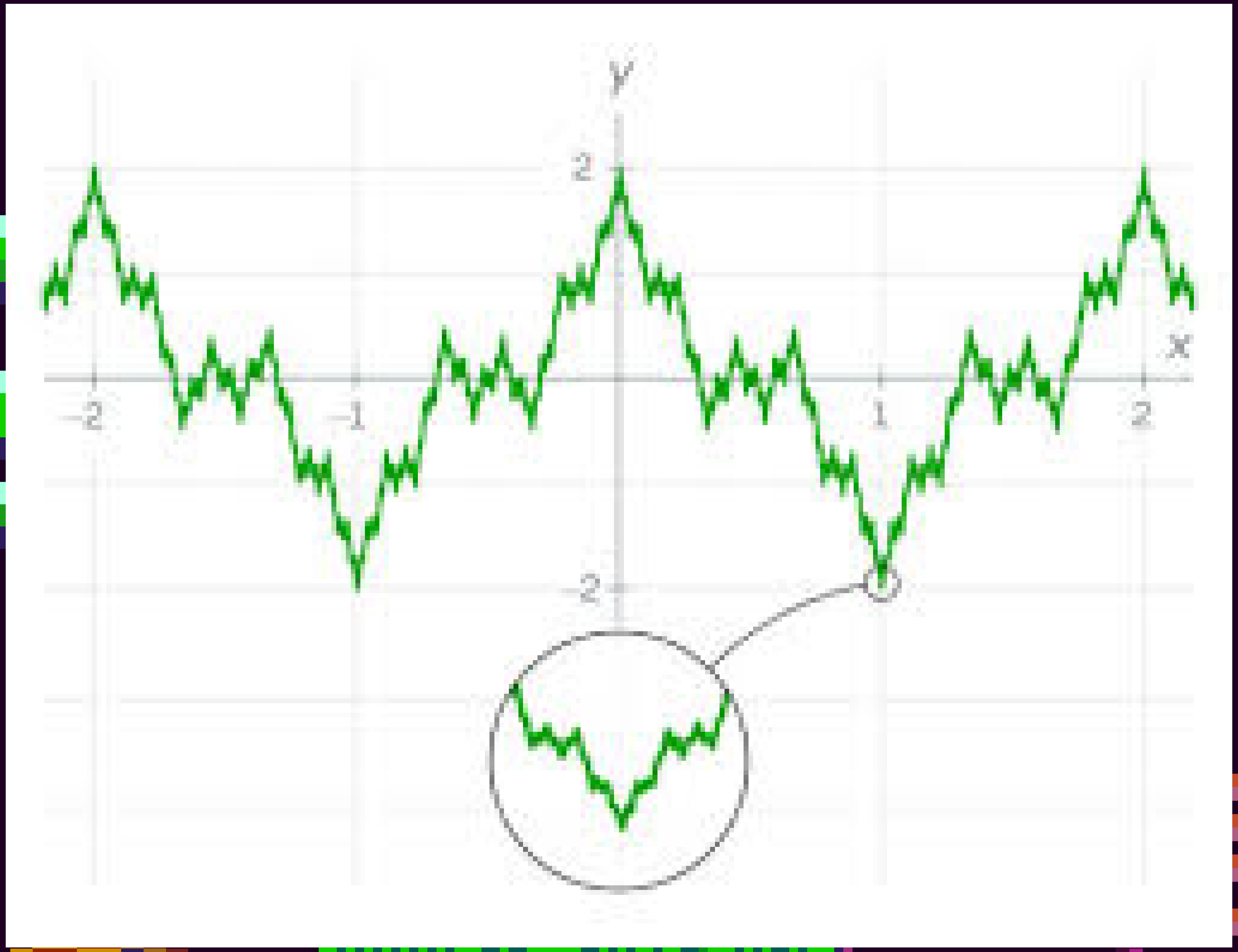


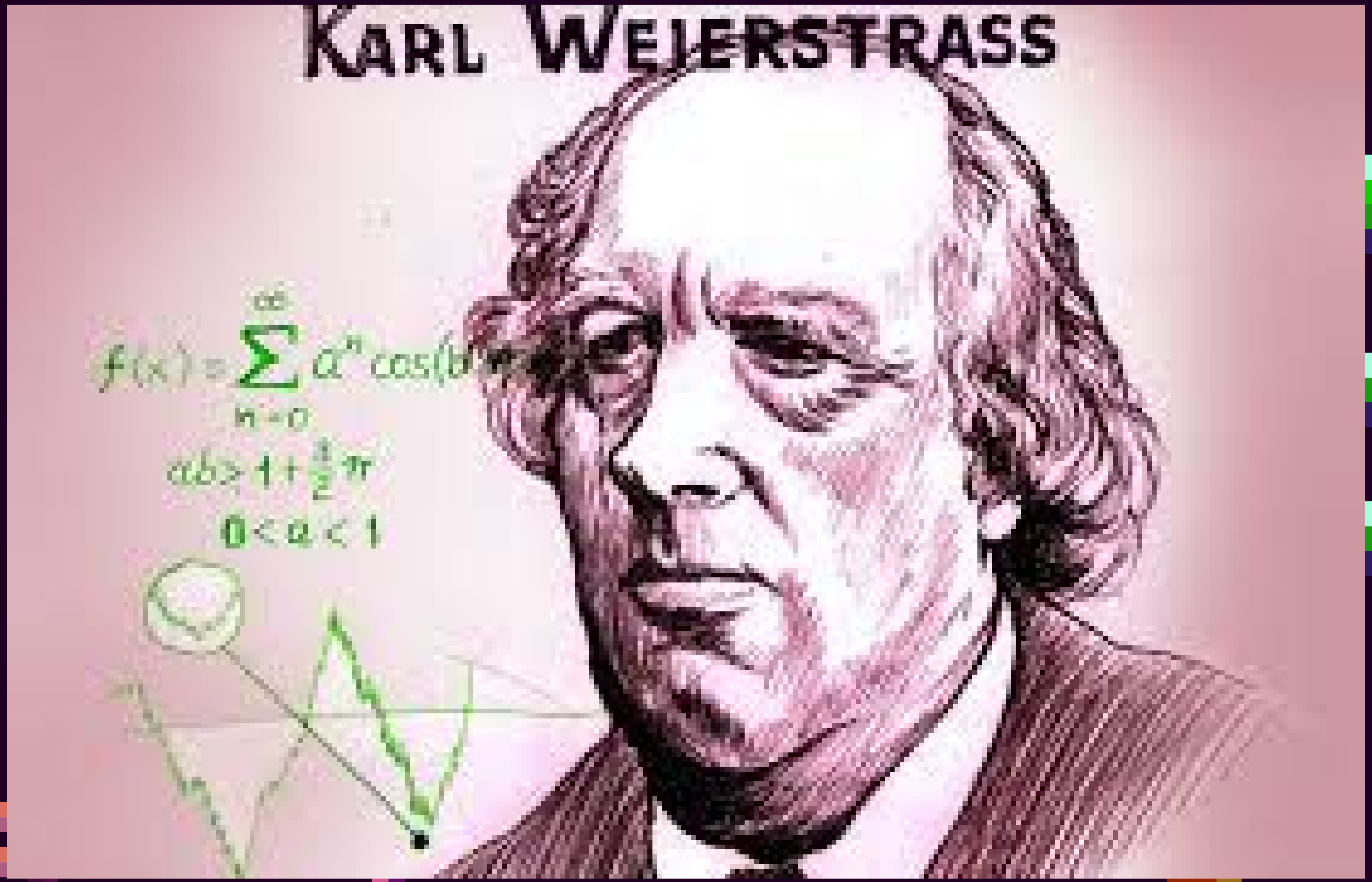
ESTADO DE LAS MATEMATICAS EN EL SIGLO XIX





EL MONSTRUO DE WEIERSTRASS



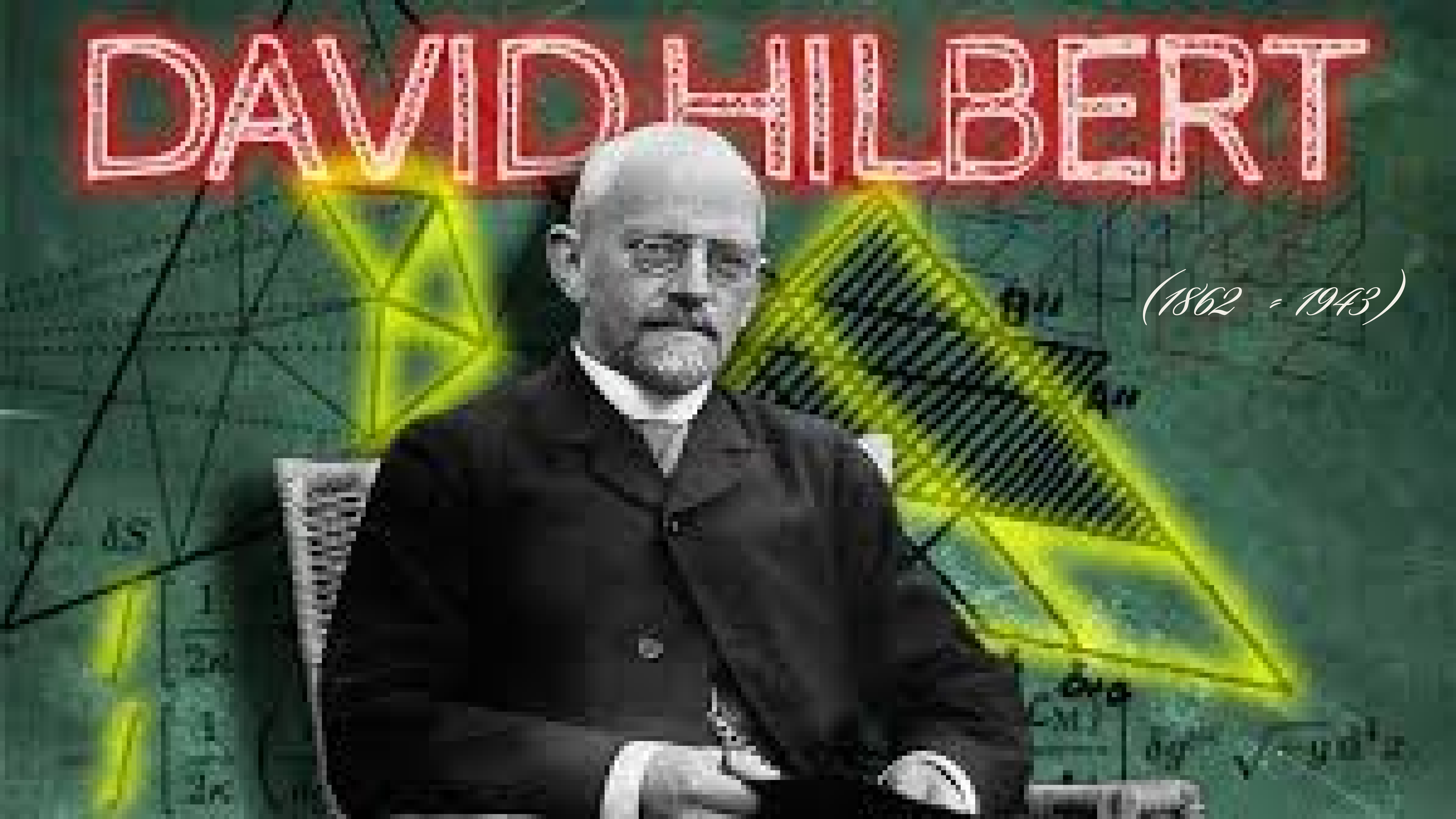


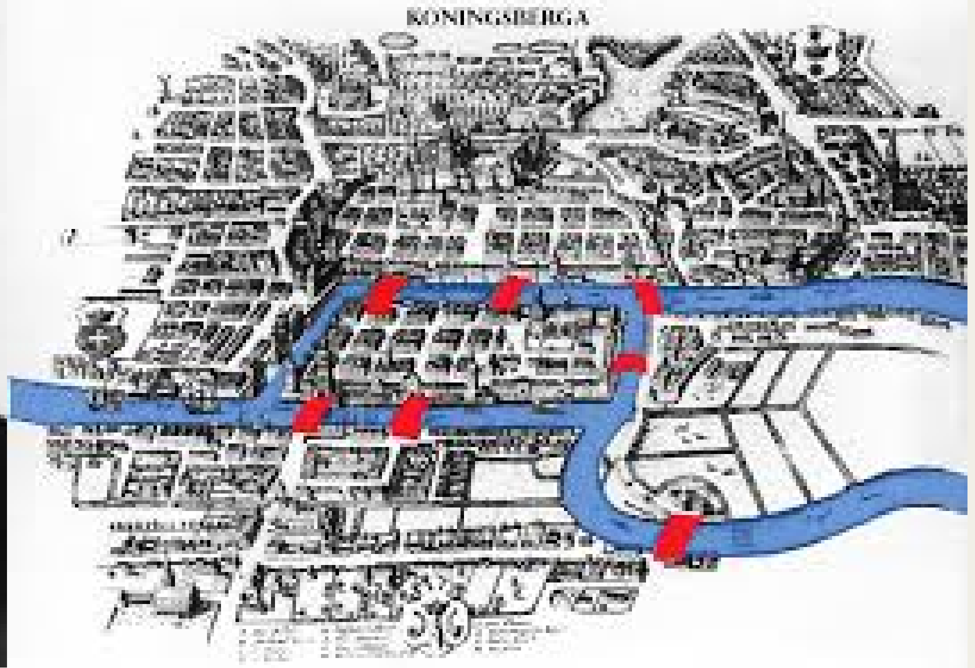
KANT

Kant sostenía que el mundo con el que interactuamos se manifiesta en los objetos individuales que captamos mediante nuestros sentidos, los objetos captados no son fruto de una recepción pasiva, sino que las cosas, tal como se nos dan, incluso su propio ser cosa, son producto de la interacción entre nuestra mente y una realidad que no podemos saber como es. De este modo, nosotros, como sujetos, no estamos en contacto directo con la realidad, sino con el producto de esa interacción entre la mente y una realidad externa desconocida.

Cuando Kant pensaba en matemáticas estaba pensando fundamentalmente en geometría, porque en su tiempo los conceptos fundamentales de las matemáticas eran conceptos geométricos.

ESPACIO Y TIEMPO

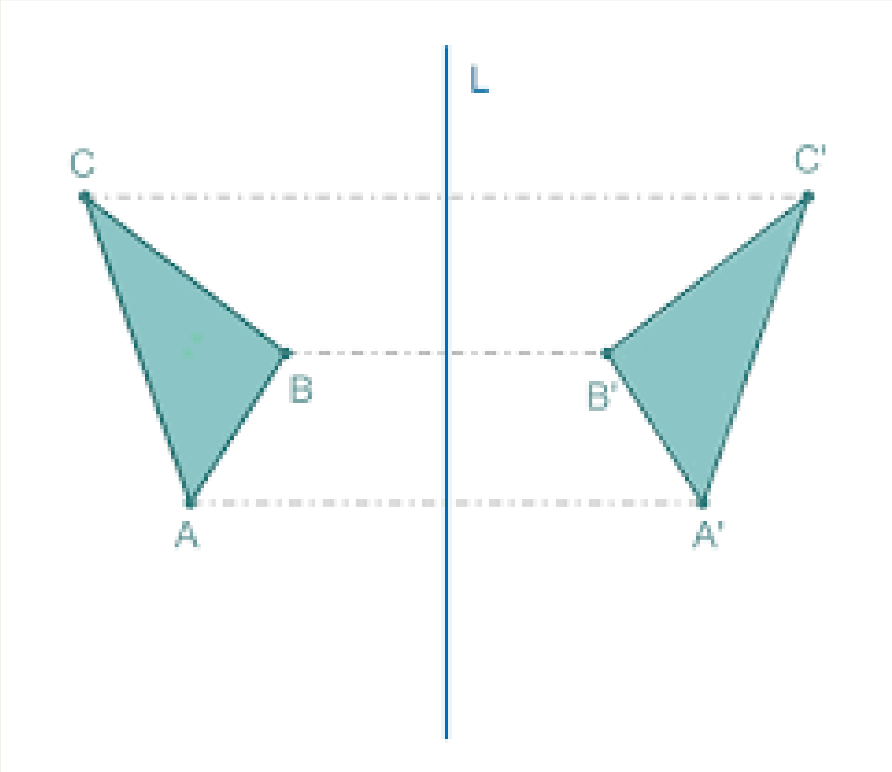

DAVID HILBERT
(1862 - 1943)



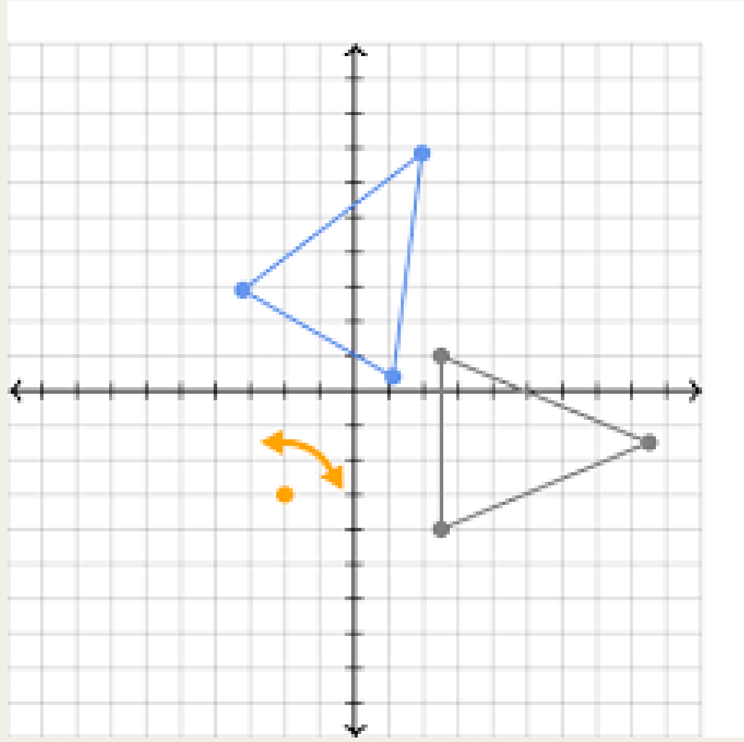
Königsberg fue la ciudad donde creció Hilbert, dicha ciudad al igual que su universidad la célebre Albertina, vivían recordando las glorias pasadas del filósofo Kant, su hijo predilecto.

Durante el verano de 1884, tres jóvenes, el profesor ayudante Adolf Hurwitz y dos estudiantes que preparaban su doctorado, Hermann Minkowski y David Hilbert, se encontraban cada tarde en la Paradeplatz, frente al edificio principal de la Albertina

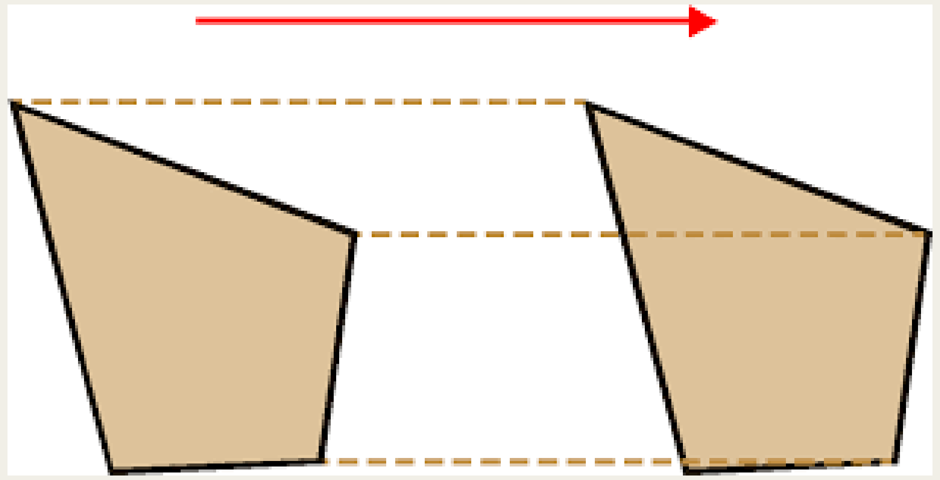
Invariantes



Reflexión



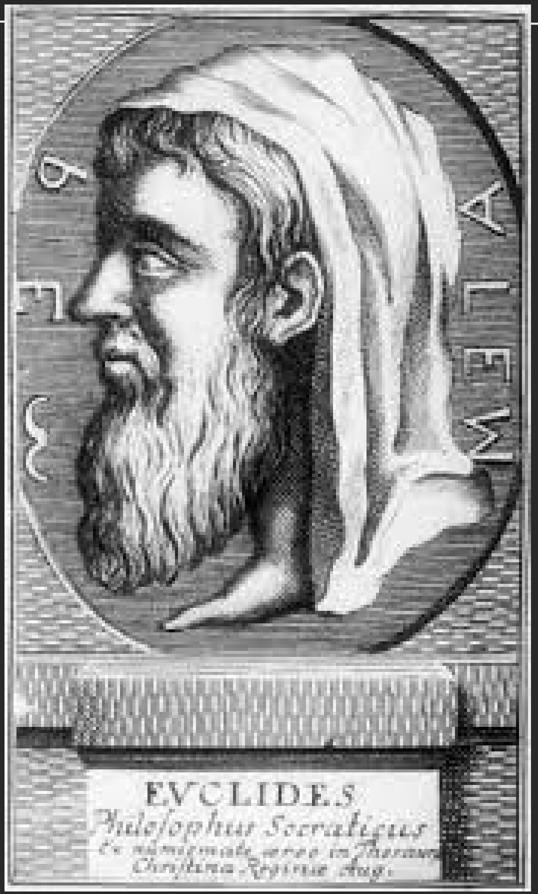
Rotación



Traslación

DEMOSTRACIÓN POR CONTRADICCIÓN

Un ejemplo de demostración por contradicción es la que utilizo Euclides para demostrar que existen infinitos números primos



$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$$

$$\underbrace{(P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n) + 1}_{Q} \rightarrow \text{Primo } \# \qquad \rightarrow \text{No primo } \#$$

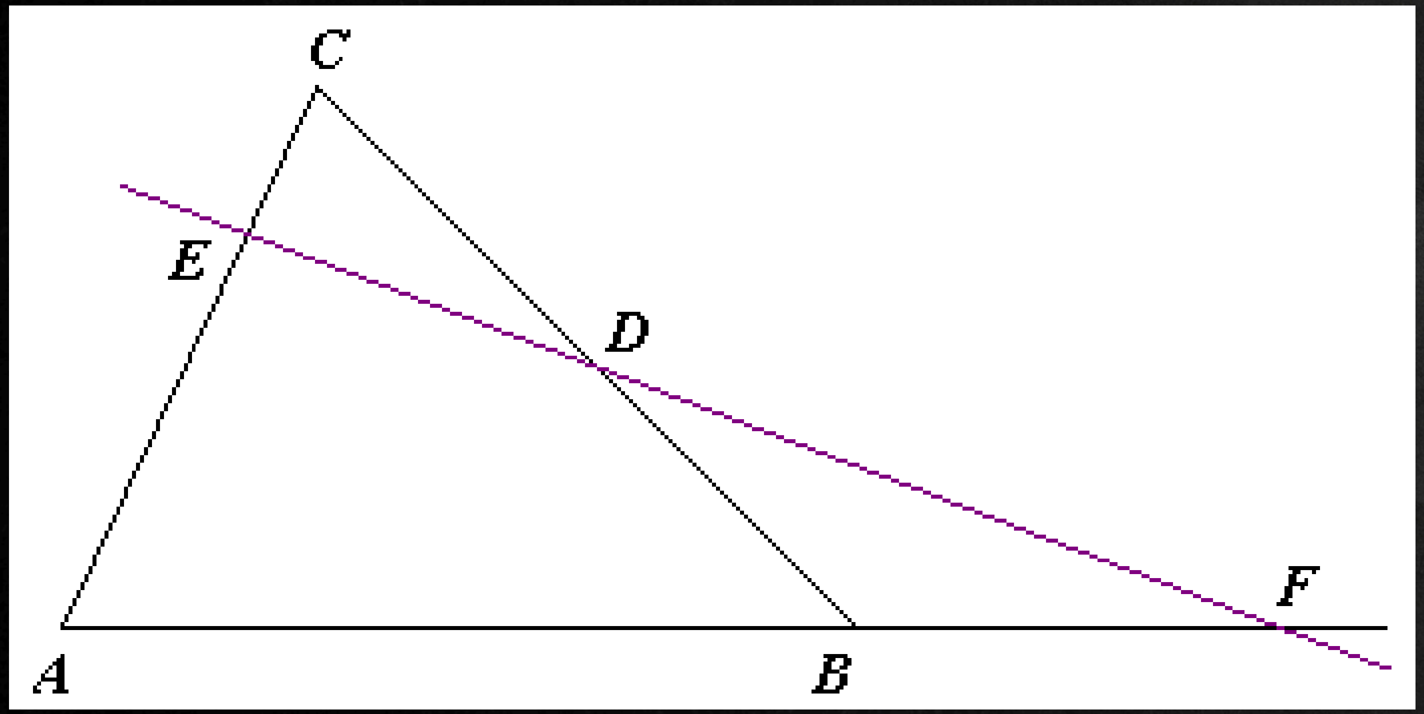
$$Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_s$$

PROBLEMA DE GORDAN

Demostrar que para cualquier número de variables, el anillo de invariantes de las formas algebraicas (polinomios homogéneos) tiene una base finita. Es decir, se buscaba probar que cualquier invariante de un sistema de polinomios puede ser expresado como una combinación de un número finito de invariantes "básicos" o "generadores"

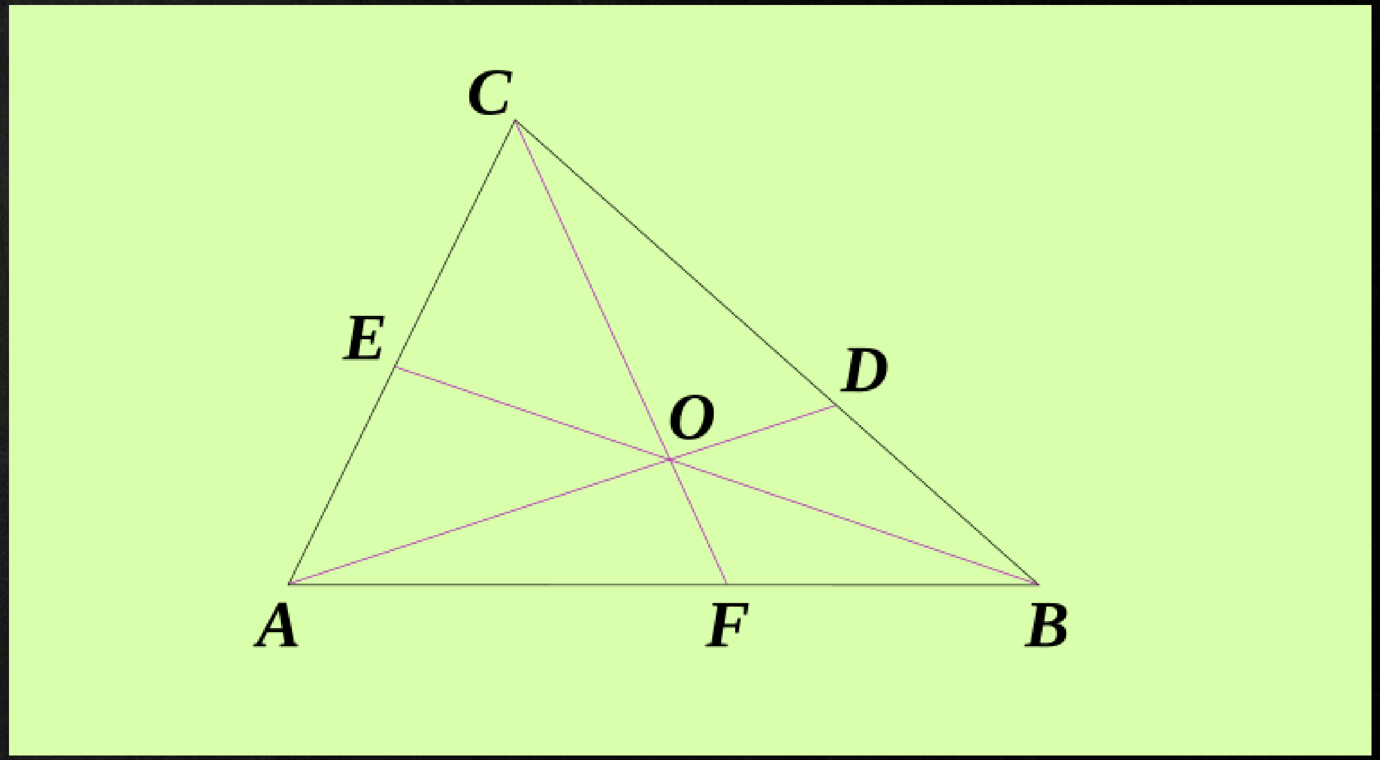
¡Esto no son matemáticas, es teología!

EJEMPLO DE DUALIDAD



Teorema de Menelao

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} = 1$$

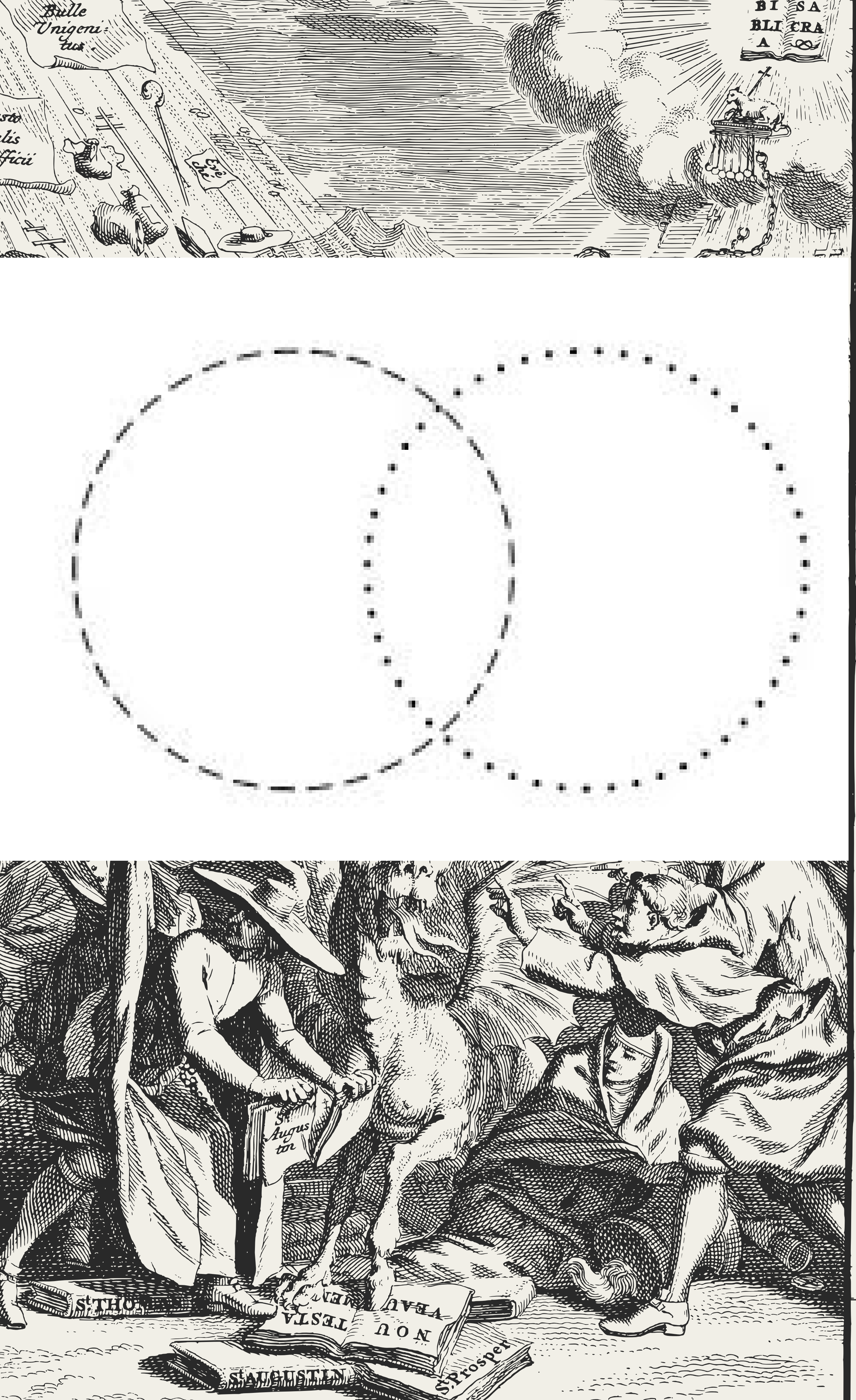


Teorema de Ceva

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

UNO DEBE PODER DECIR EN TODO MOMENTO, EN LUGAR DE 'PUNTOS, RECTAS, PLANOS', 'MESAS, SILLAS, JARRAS DE CERVEZA

Esa fue la frase que pronunció Hilbert mientras se encontraba en la sala de espera de un tren en Berlín, después de escuchar a Hermann Wiener en una conferencia sobre los fundamentos de la geometría.



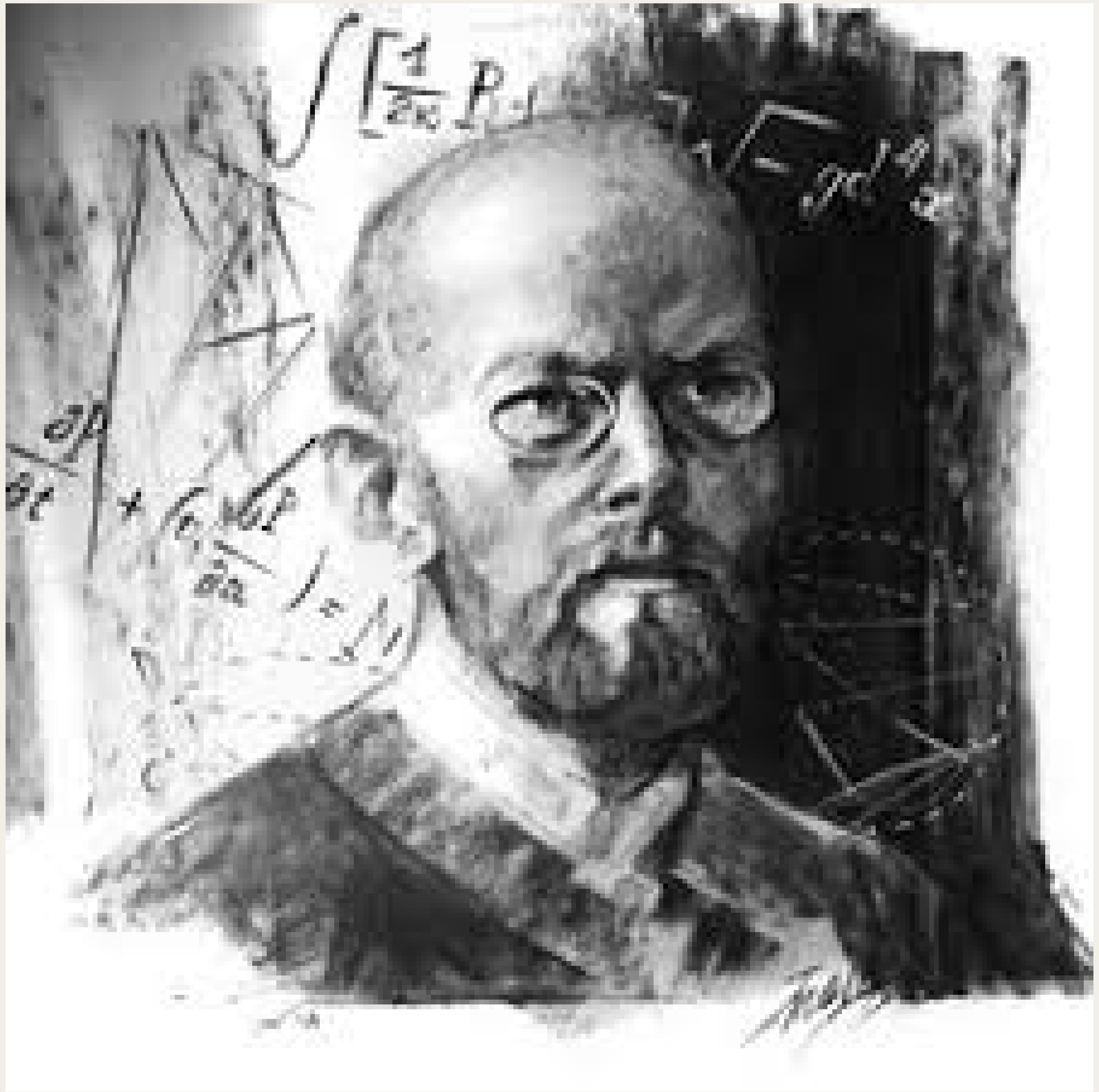
REVISIÓN DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

Gauss y algunos de sus contemporáneos ya habían señalado que el contenido de los Elementos de Euclides resultaba insuficiente para la matemática que se desarrollaba en su época. Sin embargo, cuando Hilbert los examinó en profundidad, advirtió que no solo eran insuficientes, sino que además presentaban lagunas conceptuales importantes, como la falta de un tratamiento riguroso de la continuidad.

Con el objetivo de resolver los problemas que presentaban los Elementos de Euclides e incorporando su visión de los objetos geométricos como entes definidos por sus propiedades relacionales, Hilbert escribió su libro Fundamentos de la geometría.

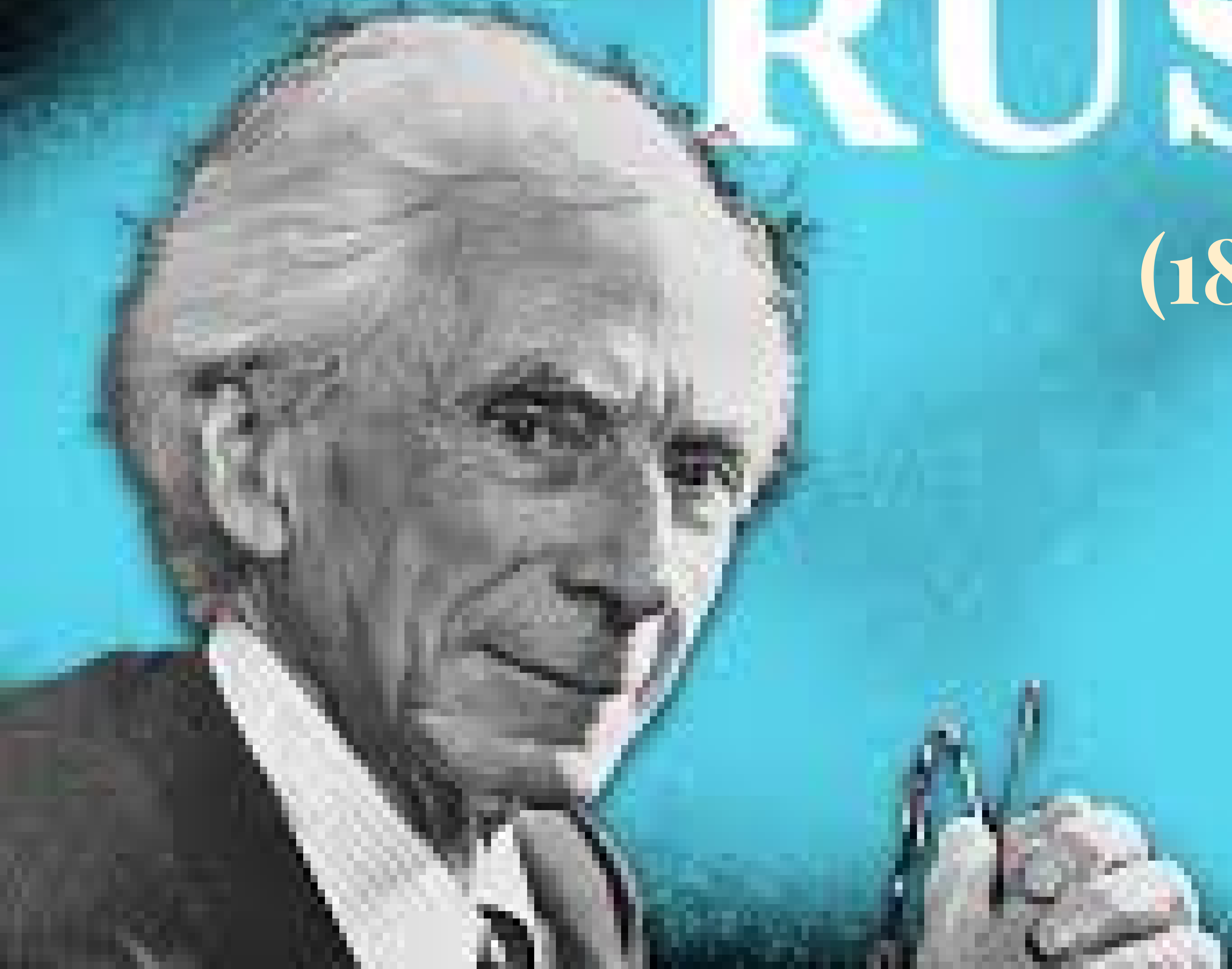
Programa de Hilbert

UNA VEZ QUE HILBERT HUBO FUNDAMENTADO LA GEOMETRÍA, SU SIGUIENTE PASO FUE EXTENDER ESE MISMO ENFOQUE PARA BUSCAR FUNDAMENTAR TODAS LAS MATEMÁTICAS. A ESTE PROYECTO SE LE CONOCE COMO EL PROGRAMA DE HILBERT.



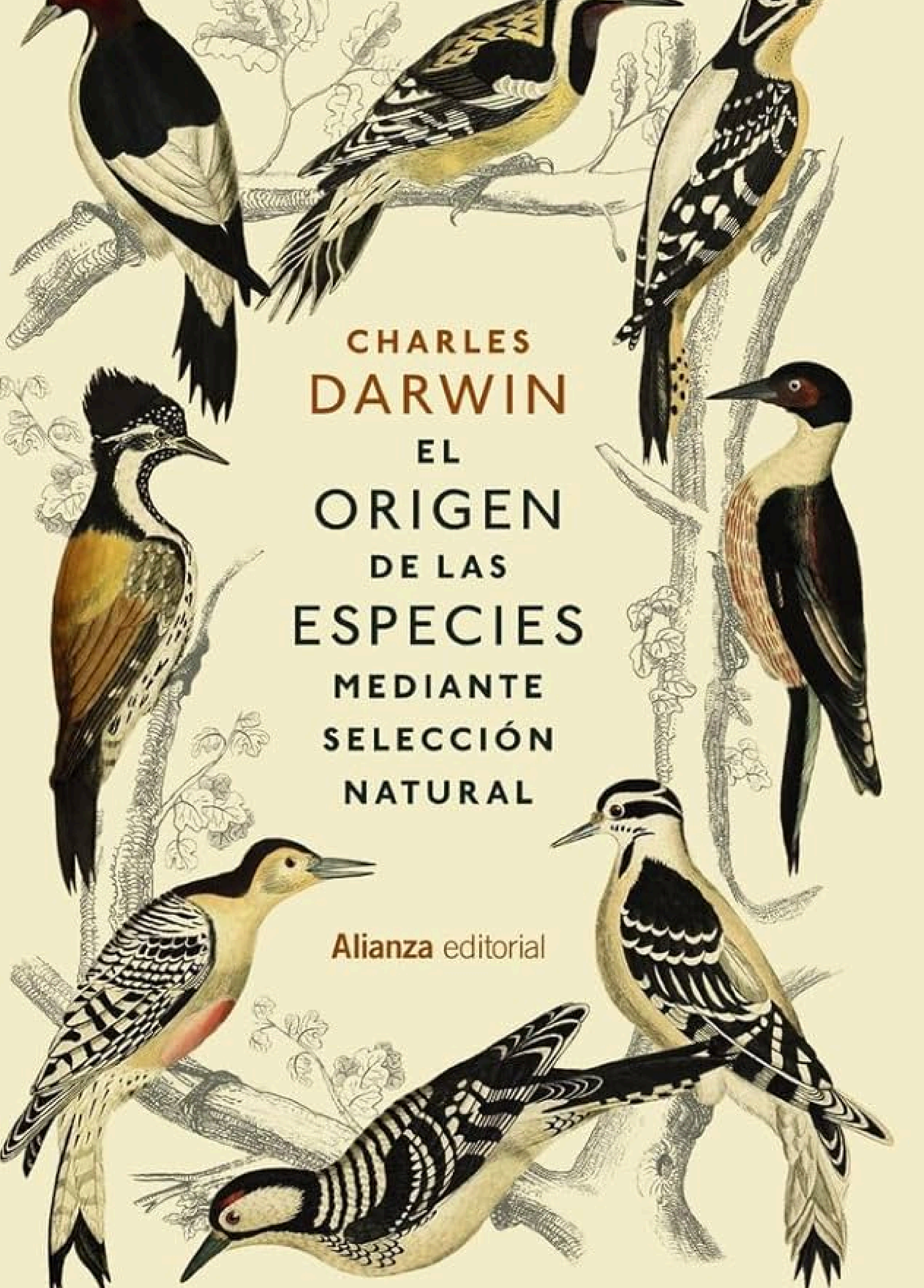
BERTRAND RUSSELL

(1872 - 1970)



IMPERIO BRITÁNICO

Durante la primera mitad del siglo XIX, se vieron totalmente desmanteladas las antiguas estructuras sociales heredadas y apareció la sociedad que retrató en sus obras el novelista Charles Dickens. En aquel mundo que mostraba una producción de riquezas sin igual en la historia, convivían los burgueses inmensamente ricos con los proletarios inmensamente pobres.



Aquella época de contrastes vivió un cambio en la perspectiva desde la que se veía al propio ser humano. No fue ajeno a ello la publicación en 1859 de El origen de las especies de Charles Darwin. Aunque el trabajo de Darwin no podía refutar la fe en Dios, indirectamente destruía la muy cultivada tradición de la teología natural inglesa que hacía del diseño divino la prueba fundamental de la existencia de la divinidad.

En 1883, su hermano Frank se encargó de enseñarle matemáticas. Como era usual, el libro perfecto para ello era Los elementos de Euclides. Bertie entendió con deleite las demostraciones, pero cuestionó el carácter de supuestos indemostrables de los axiomas.

Al principio, Russell rechazó que la filosofía de la matemática kantiana fuese problemática por tomar como base la geometría de Euclides. Sin embargo, a partir de I898, abandonó esta posición.

A lo largo de sus investigaciones, desarrolló la tesis de que los conceptos, operaciones y verdades fundamentales de las matemáticas no eran de naturaleza geométrica, sino que bastaba la lógica para obtenerlos, es decir, la matemática podía reducirse a la lógica. Esta postura se conoce como logicismo.

FREGE

Frege transformó la lógica en una teoría axiomática, de modo que, a partir de unas pocas verdades lógicas fundamentales, pudieran derivarse no solo todas las demás verdades lógicas, sino también todas las verdades matemáticas. Russell llegó a la misma convicción tras las clases que impartió en 1899 sobre el matemático y filósofo racionalista Leibniz.

CONGRESO INTERNACIONAL DE FILOSOFIA, LOGICA E HISTORIA DE LA CIENCIA DE 1900

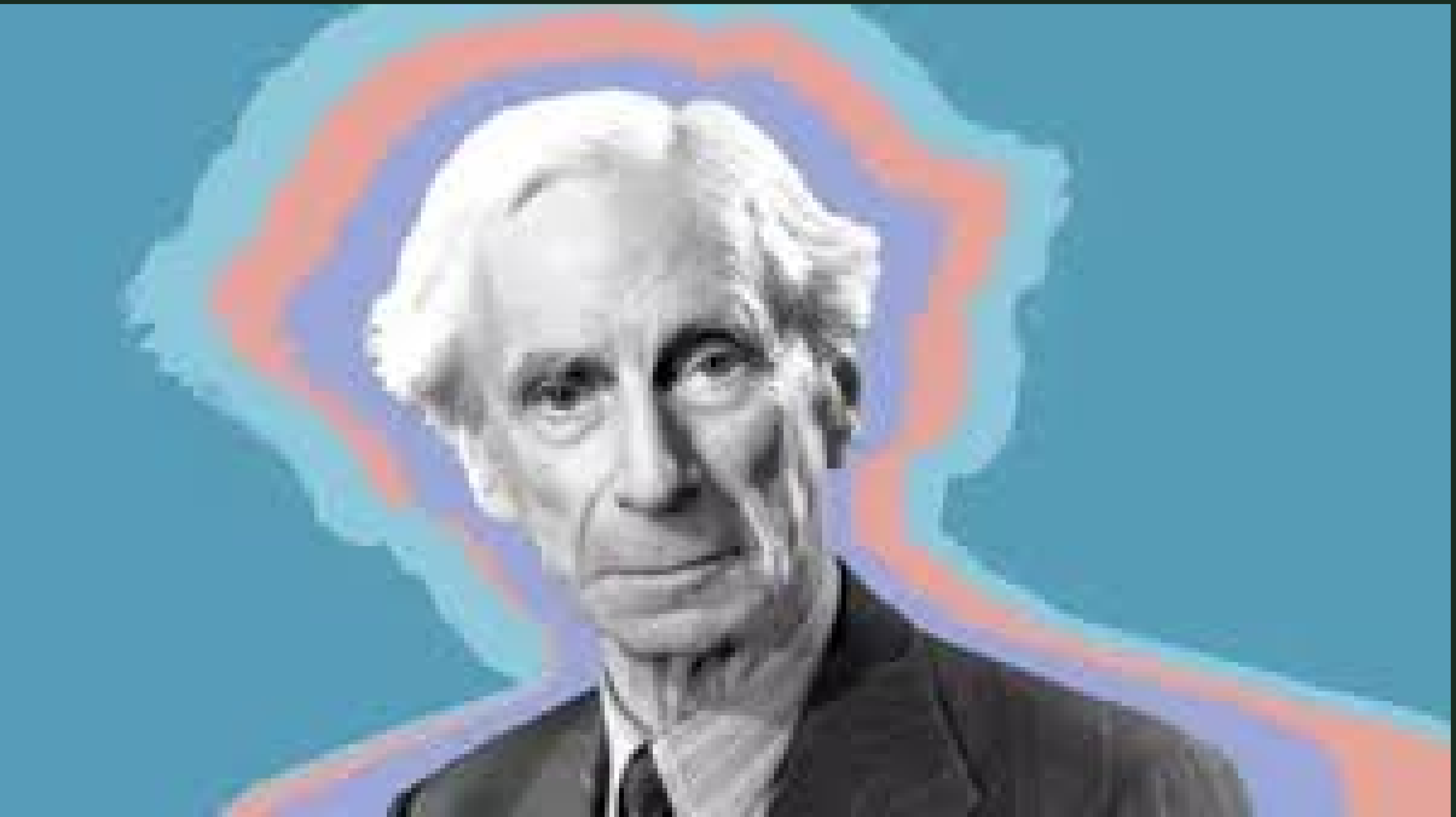
Fue crucial para Russell el encuentro con Giuseppe Peano (1858 - 1932), quien había desarrollado una notación para la lógica y el sistema de axiomas para la aritmética que se usa en la actualidad.

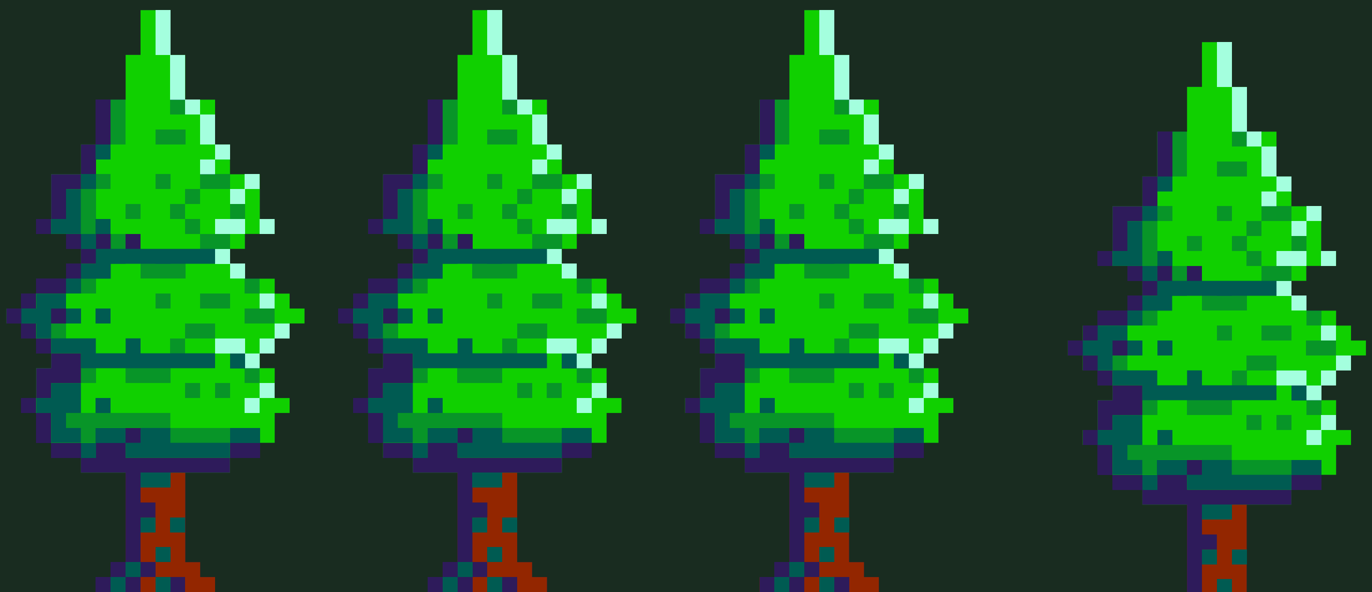
Paradoja de Russell

La paradoja se plantea cuando inventamos el predicado <<ser un conjunto que no pertenece a sí mismo como miembro>>
¿Ese conjunto es posible?

PARADOJA DE RUSSELL

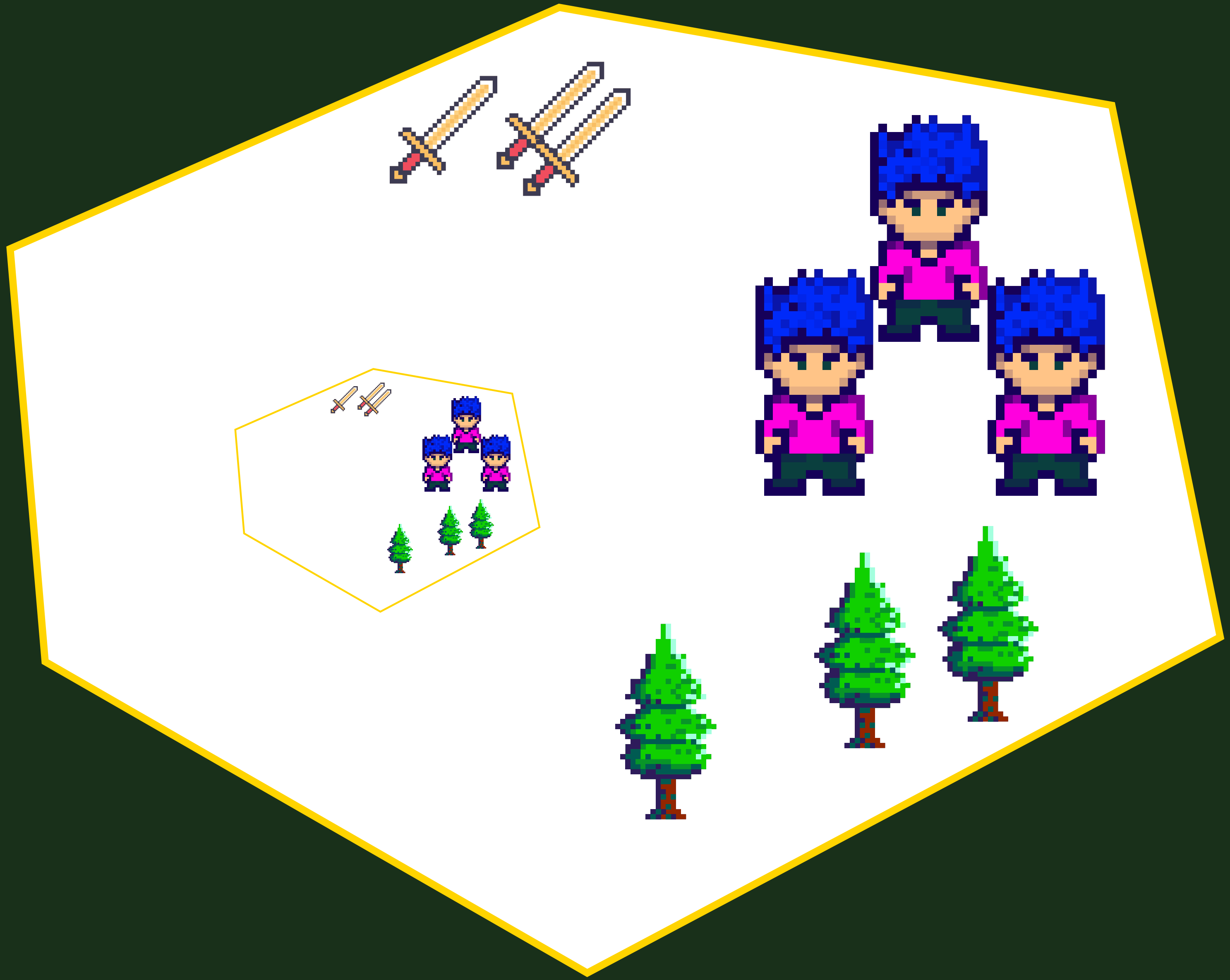
Veamos qué pasa con los conjuntos que sí pertenecen a sí mismos, un par de ejemplos nos dan la pista de cómo generarlos: el conjunto de todas las cosas que no son árboles se incluiría a sí mismo, pues ese conjunto no es un árbol y, por tanto, tiene que incluirse. Sucede lo mismo con otro conjunto como el de todas las cosas que no son una espada.



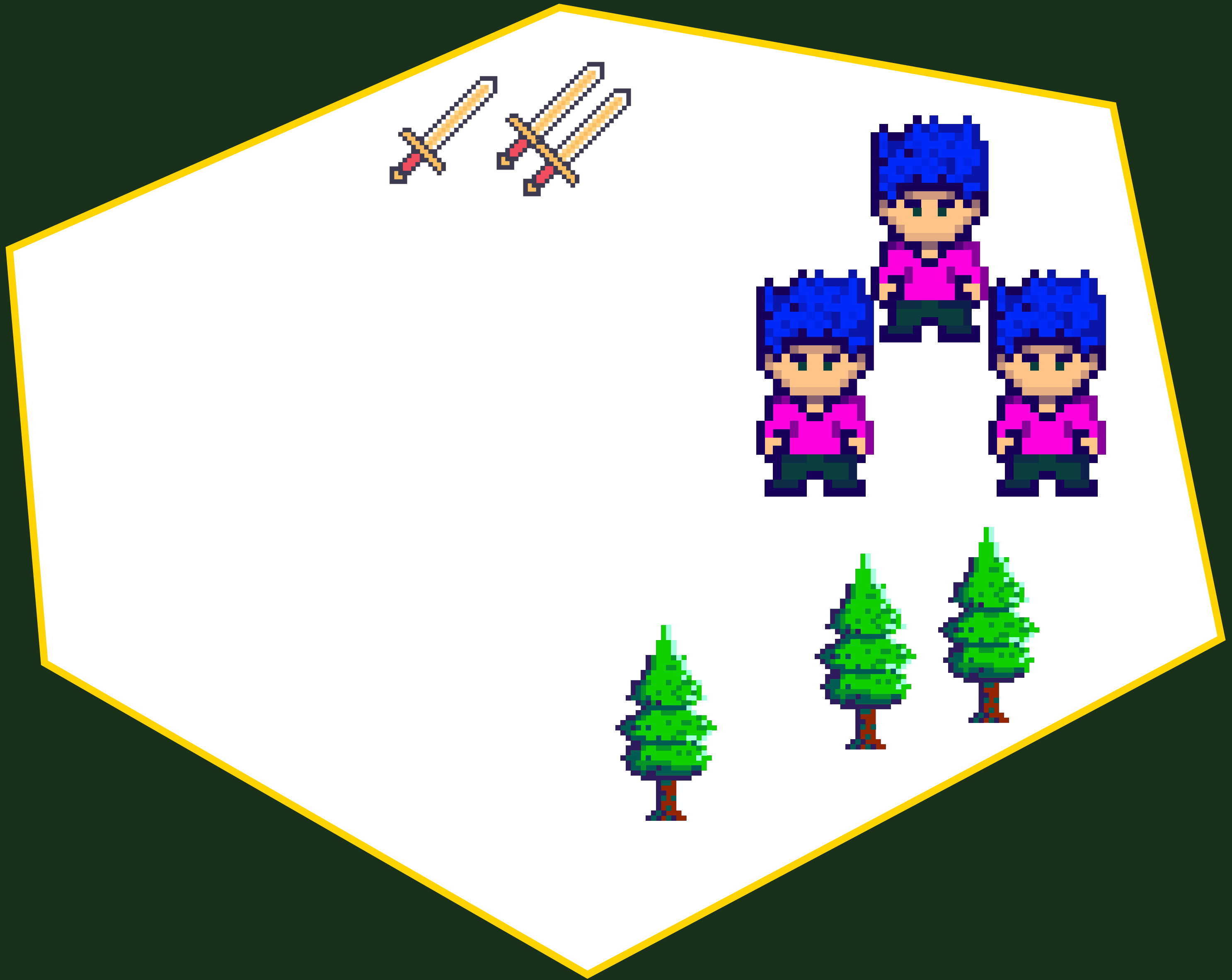


Paradoja de Russell

Teniendo en cuenta lo anterior, veamos el siguiente predicado: <<ser un conjunto que no se pertenece a sí mismo como miembro>>



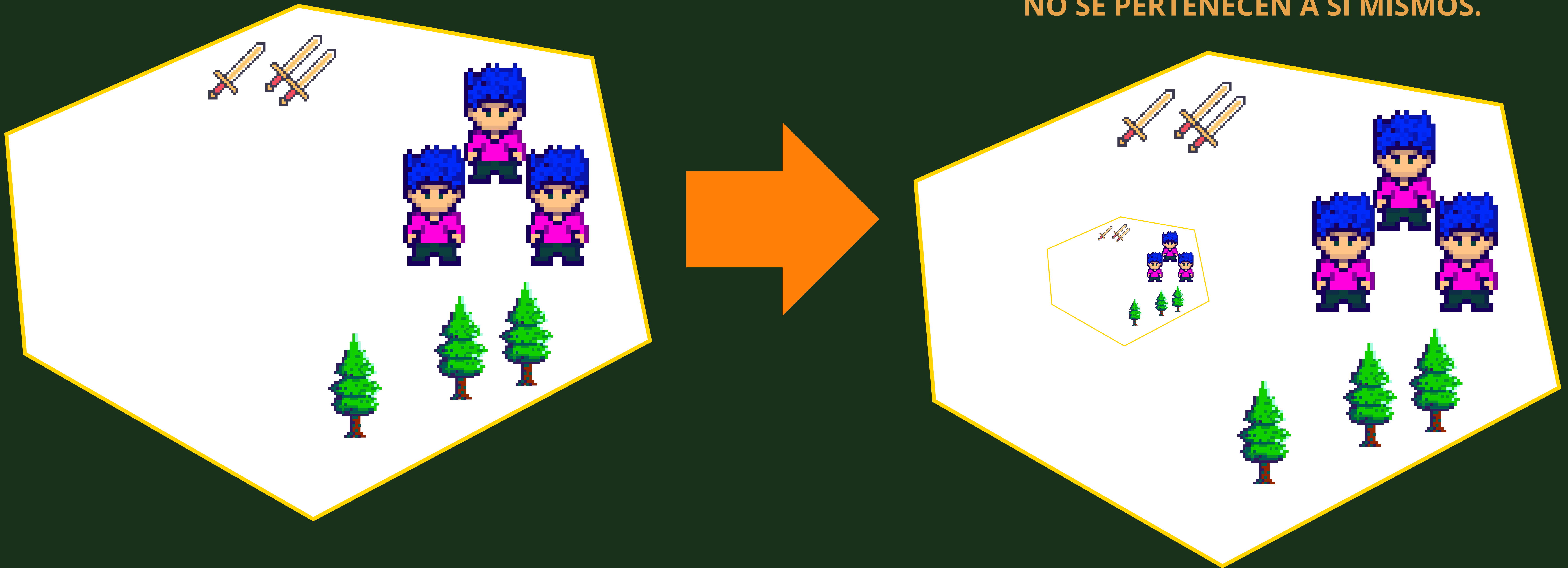
Si el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos se contiene a sí mismo, no pertenece al conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos.



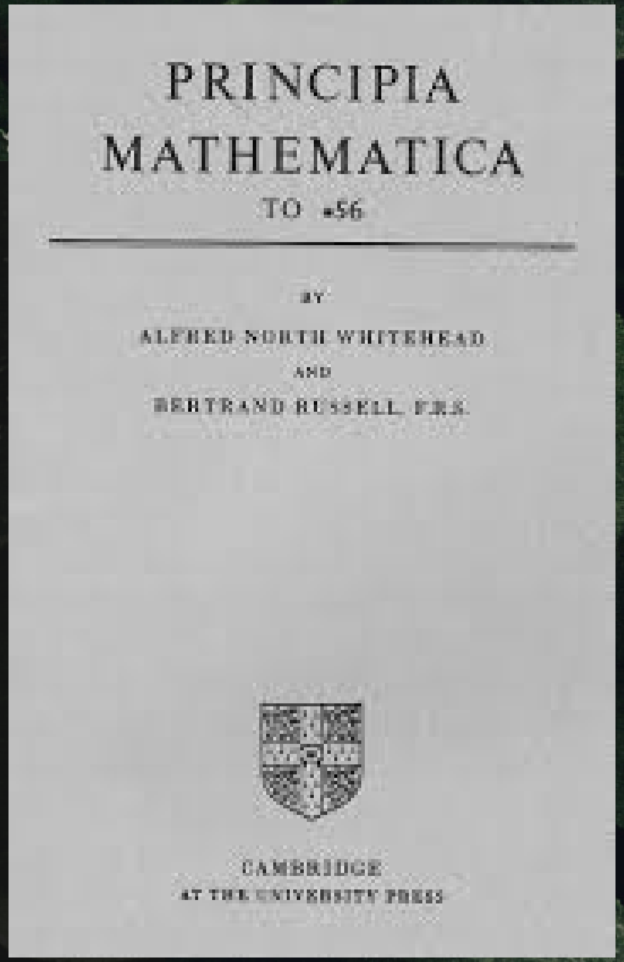
Paradoja de Russell

Teniendo en cuenta lo anterior, veamos el siguiente predicado: <<ser un conjunto que no se pertenece a sí mismo como miembro>>

SI EL CONJUNTO DE TODOS LOS CONJUNTOS QUE NO SE PERTENECEN A SÍ MISMOS NO SE CONTIENE A SÍ MISMO, PERTENECE AL CONJUNTO DE TODOS LOS CONJUNTOS QUE NO SE PERTENECEN A SÍ MISMOS.



A RAÍZ DE ESTA PARADOJA, RUSSELL ABORDÓ EL PROBLEMA EN SU OBRA MONUMENTAL PRINCIPIA MATHEMATICA, ESCRITA JUNTO CON WHITEHEAD. EN ELLA, PROPUSIERON UNA NUEVA TEORÍA AXIOMÁTICA QUE, SIN EMBARGO, NO LOGRÓ OBTENER LA ACEPTACIÓN GENERAL DE LOS MATEMÁTICOS. ENTRE OTRAS OBJECIONES, EL TEXTO DA POR SENTADO COMO UNA VERDAD LÓGICA QUE EXISTEN INFINITAS COSAS, CUANDO EN REALIDAD LA MAYORÍA DE LOS LÓGICOS CONSIDERAN QUE EL INFINITO NO PERTENECE AL ÁMBITO ESTRICTAMENTE LÓGICO.


PRINCIPIA
MATHEMATICA
TO *56

BY
ALFRED NORTH WHITEHEAD
AND
BERTRAND RUSSELL, F.R.S.

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS

GÖDEL PARTIÓ DEL TRABAJO DE RUSSELL Y WHITEHEAD PARA DEDUCIR SUS TEOREMAS DE INCOMPLETITITUD.

Esta afirmación no es demostrable dentro de este sistema.

RECOMENDACIÓN

¿Qué pasaba en México por aquella época?

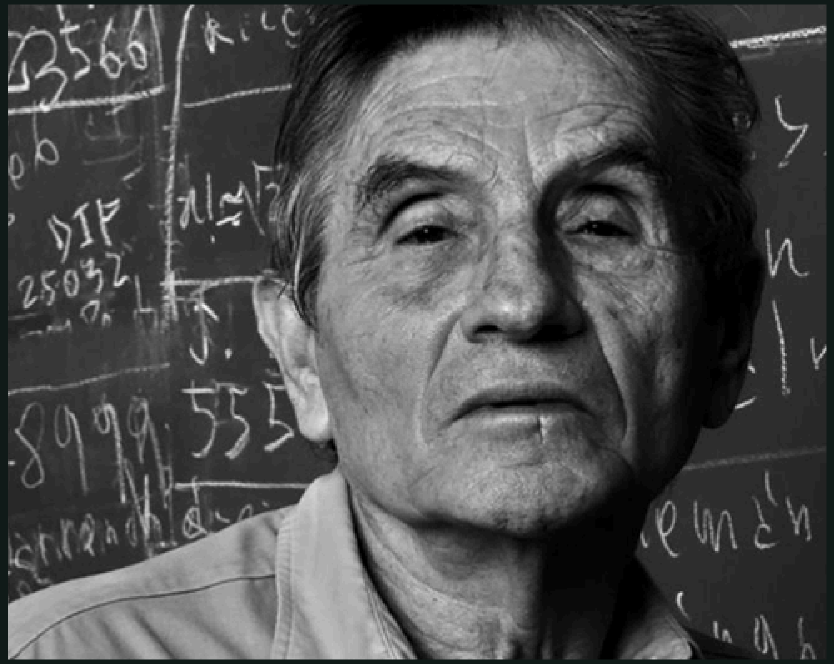
En 1939 se funda la Facultad de Ciencias

Alfonso Nápoles Gándara

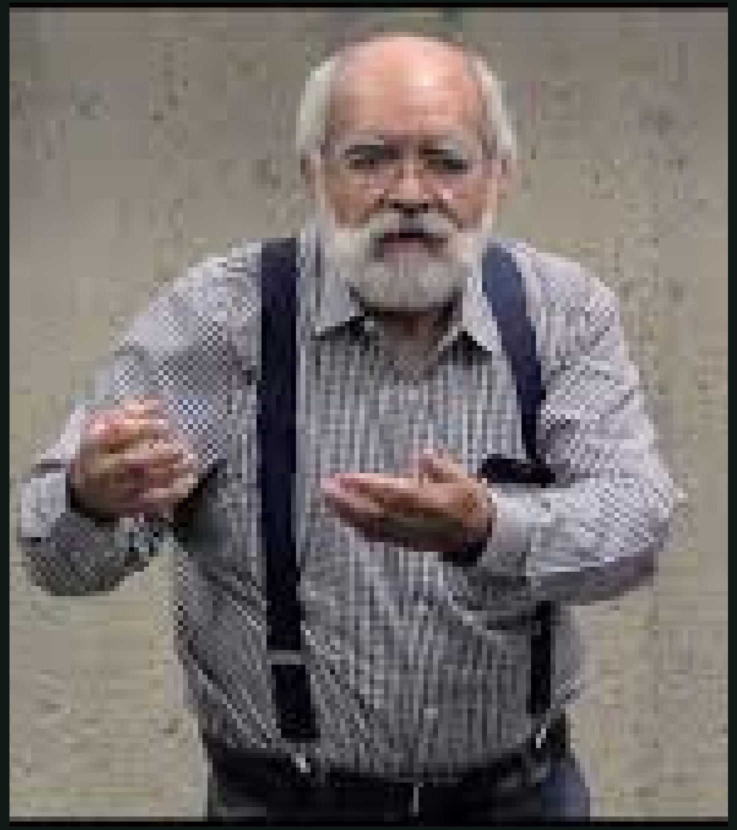
Carlos Graef Fernández

Alberto Barajas Celis

POR ESAS MISMAS FECHAS, TAMBIÉN PODEMOS TRAZAR EL ORIGEN DE LA GENEALOGÍA ACADÉMICA QUE DA SENTIDO A NUESTRO CURSO.



Adonis Germinal Cocho Gil



José Rafael Martínez Enríquez

María del Pilar Piñones Contreras

HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS 2

MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCION Y PARTICIPACION A LO LARGO DE TODO EL CURSO :D