

El hombre que contó el infinito

El infinito no es una niebla indiferenciada: tiene estructura,
jerarquía y tamaño... y atreverse a demostrarlo puede costar
la salud, la reputación y la cordura.

« Je le vois, mais je ne le crois pas. »





« Je le vois, mais
je ne le crois pas. »

«Lo veo, pero no lo creo.»

¿QUÉ HABÍA VISTO?

Dos revelaciones imposibles

01

Una línea = un cuadrado



Un segmento contiene exactamente tantos puntos como un cuadrado entero. Una dimensión y dos dimensiones son, en sentido preciso, igual de grandes.

02

El infinito tiene tamaños



Hay infinitos más grandes que otros infinitos. «Infinito» no nombra una cosa, sino toda una jerarquía de realidades que nadie había sospechado.

¿QUIÉN ES CANTOR?

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

● 1845

Nace en San Petersburgo. Padre danés, madre de ascendencia austro-húngara.

● 1856

La familia se muda a Alemania: Wiesbaden y luego Frankfurt.

● Estudios

Zúrich y Berlín, la mejor escuela matemática del mundo.
Maestro: Karl Weierstrass.

● Halle

Obtiene un puesto en una universidad de segunda fila.

“

*Mi talento y mi vocación
apuntan a las
matemáticas.*

— Cantor, resistiendo la presión paterna de estudiar ingeniería



El infinito como huella de lo divino

No era el matemático frío

Apasionado, literariamente curioso y profundamente religioso.

Matemáticas = ventana hacia Dios

Escribió extensamente sobre teología y filosofía en sus últimos años.

El infinito = el Absoluto

No un juego de símbolos, sino la huella de lo divino entre los números.



ANTECEDENTES

El miedo al infinito

Durante siglos, el infinito fue una bestia que los matemáticos preferían no mirar de frente.



Aristóteles

SIGLO IV A.C.

Distingue infinito potencial (proceso sin fin) de infinito actual (objeto completo). El segundo es, para él, una contradicción lógica.



Galileo

SIGLO XVII

Tropieza con la paradoja de los cuadrados y la abandona: «mayor», «menor» e «igual» no aplican al infinito.



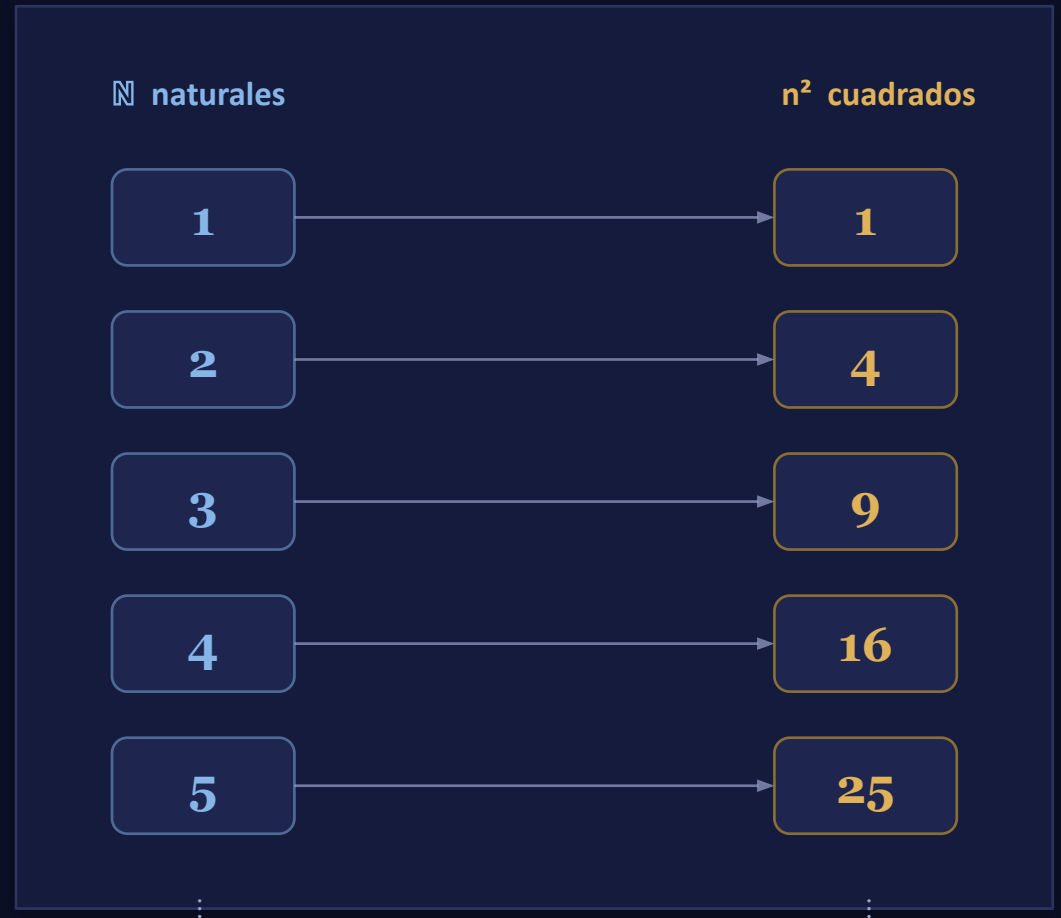
Gauss

SIGLO XIX

Tajante: usar el infinito actual le parece ilegítimo. «Nunca se puede recurrir a una cantidad infinita como algo terminado.»

¿Cómo puede una parte ser igual al todo?

Cada número natural tiene exactamente un cuadrado. La correspondencia es perfecta, uno a uno... aunque los cuadrados son sólo una parte de los naturales.



EL GIRO DE CANTOR

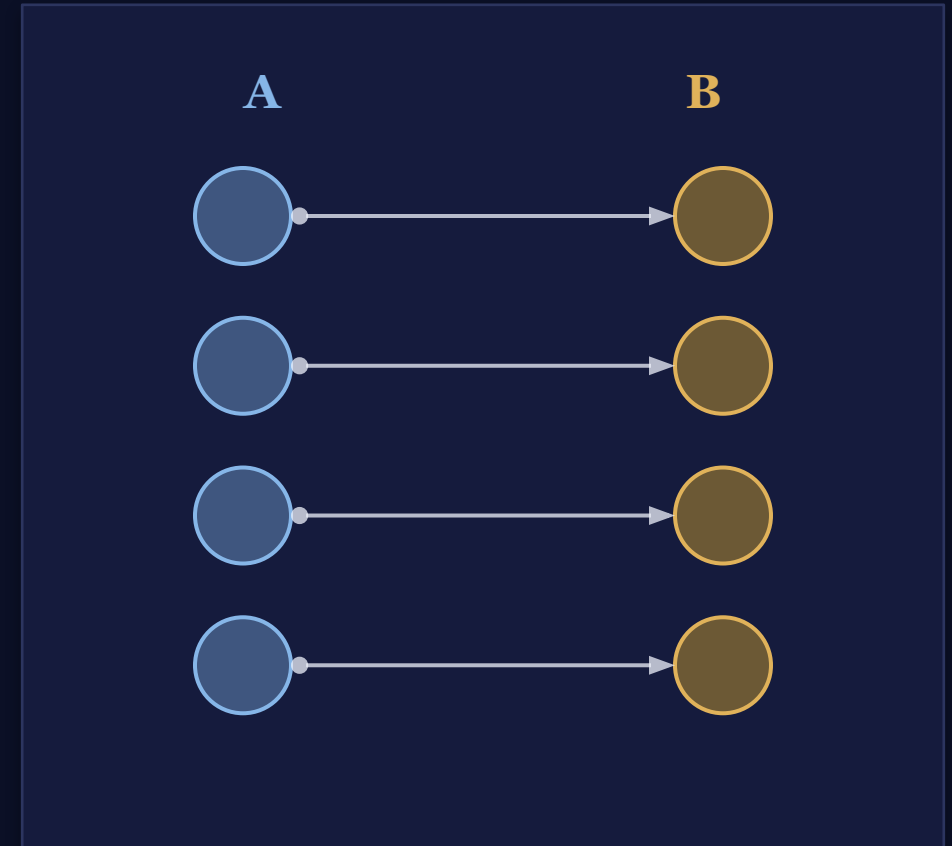
¿Y si el infinito tiene una
estructura que aún no hemos
visto?

Correspondencia biunívoca

Dos conjuntos tienen el mismo **tamaño** si cada elemento de uno se empareja con exactamente uno del otro, sin que sobre ni falte nada. No hay que contar, basta con que exista el emparejamiento.

La sala de Cantor

Si cada persona ocupa una silla, y no sobra ni falta ninguna, hay tantas personas como sillas... sin contar ni a unas ni a otras. Eso también funciona con infinitos.



EL PRIMER INFINITO

\aleph_0

alef cero — lo numerable

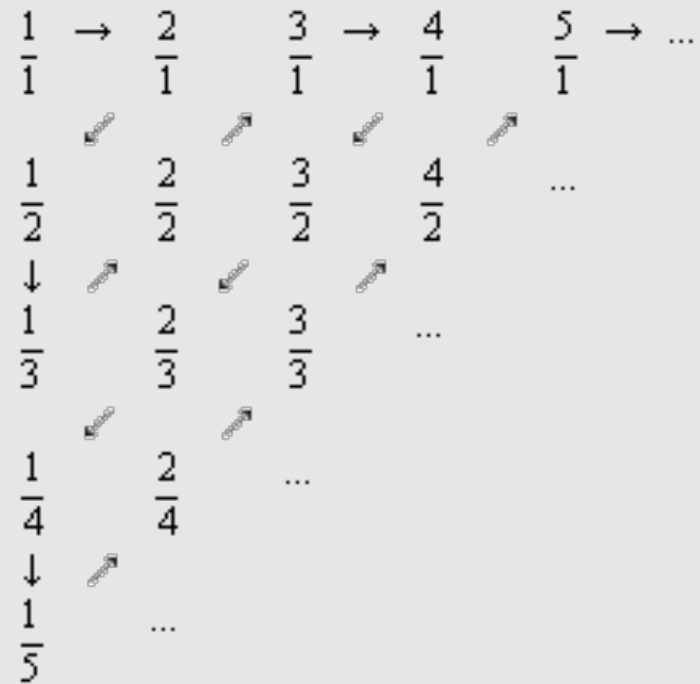
Con su nueva herramienta, Cantor demostró que hay tantas fracciones como números enteros.

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$



La primera letra del alfabeto hebreo.

EL PRIMER INFINITO



$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

El argumento de la diagonal

r1	0.	1	4	1	5	9	2
r2	0.	7	0	7	1	0	6
r3	0.	3	3	3	3	3	3
r4	0.	2	5	0	0	0	0
r5	0.	9	8	6	7	5	3
r6	0.	4	1	4	2	1	3
nuevo	0.	2	1	4	1	6	4

1

Supón la lista completa

Imagina una lista con TODOS los reales entre 0 y 1, cada uno una secuencia de dígitos.

2

Recorre la diagonal

Toma el dígito 1 del nº 1, el dígito 2 del nº 2... y cambia cada uno.

3

Número faltante

Ese número nuevo difiere de cada fila en al menos un dígito: no estaba en la lista.

4

La lista era incompleta

Ninguna lista puede contener todos los reales. La barrera es infranqueable.

LA CONCLUSIÓN

El infinito tiene jerarquías



naturales · racionales

$<$



el continuo · \mathbb{R}

**Los reales son
estrictamente más
que los naturales.**

beginning, is *destined*. Whatever one neglects in *this period* or through *premature* extravagance of his best strength, health and time, he *squanders* [*verludert*], so to speak, that is irretrievably and *irreplaceably lost for ever*; just as innocence, *once lost*, is for ever and eternally, irretrievably lo

I close with these words: You are the eldest, and expect you to be ready and willing, later perhaps a *shiniger*

May God give you *strength* and *wisdom*! And therefore *you should*

Georg Cantor: The Personal Matrix of His Mathematics

*By Joseph W. Dauben**

HISTORIANS OF MATHEMATICS are generally accustomed to discussing ideas rather than individuals. A mathematician's personal life and his mathematics are frequently regarded as wholly separate, the former providing human interest while the latter comprises the heart of the matter. But the analysis of personality, in particular that of creative individuals, can reveal a great deal about the nature of discovery. In Georg Cantor's case this is especially true. If one were to consult only the published record of his research, the factors influencing his discovery, development, and subsequent defense of set theory and the transfinite numbers would remain obscure. At best, one could only hope for a partial, and probably inaccurate, view of what Cantor accomplished.

Why should he have been the mathematician most likely to defend transfinite set theory, despite tremendous opposition, not only from mathematicians, but from philosophers and theologians as well? How did his character and scientific temper

Leopold Kronecker

El matemático más influyente de Alemania en 1870. Tenía el poder académico que Cantor ambicionaba y odiaba lo que Cantor hacía.

Finitismo

Sólo son legítimos los objetos construibles en un número finito de pasos a partir de los enteros. El infinito actual no es problemático: es ilegítimo. No debe existir.

La ofensiva

- «Verderber der Jugend»
- Charlatán científico y renegado
- Bloqueó sus publicaciones y su puesto en Berlín

”

*Verderber
der Jugend*

«Corruptor de la juventud.» El ataque de Kronecker no era académico: era personal.

Dos visiones del mundo matemático

KRONECKER

Sólo lo construible existe

¿Qué significa que exista un número real que nunca podemos calcular, ni nombrar, que sólo existe porque negarlo daría contradicción? ¿Es matemática o metafísica disfrazada?



CANTOR

Lo que no puede no existir, existe

Si suponer que algo no existe conduce a una contradicción, entonces existe — aunque jamás podamos escribirlo. El rigor define la realidad matemática.

Lo que cuesta una idea demasiado grande

1884

Comienzan los episodios de depresión severa.

Sanatorios

Temporadas internado; meses de parálisis intelectual y melancolía.

Las cartas

Defiende su teoría con energía frenética y duda de sí mismo con angustia.

La resistencia más feroz a una idea nueva no viene de la ignorancia

sino de los expertos... porque son ellos quienes más pierden si el mapa del territorio cambia.

Puntualizando

- Su depresión fue real, pero probablemente una condición clínica independiente (no causada por el infinito).
- Su obra fue diálogo constante con Dedekind y Weierstrass, esto es, una construcción colectiva.
- Kronecker fue un interlocutor filosófico serio y no sólo un obstáculo celoso.

GEORG CANTOR · HALLE, 6 DE ENERO DE 1918

**Demostró lo que no podía creer
y dejó la prueba para que la contemplemos**

« Je le vois, mais je ne le crois pas. »