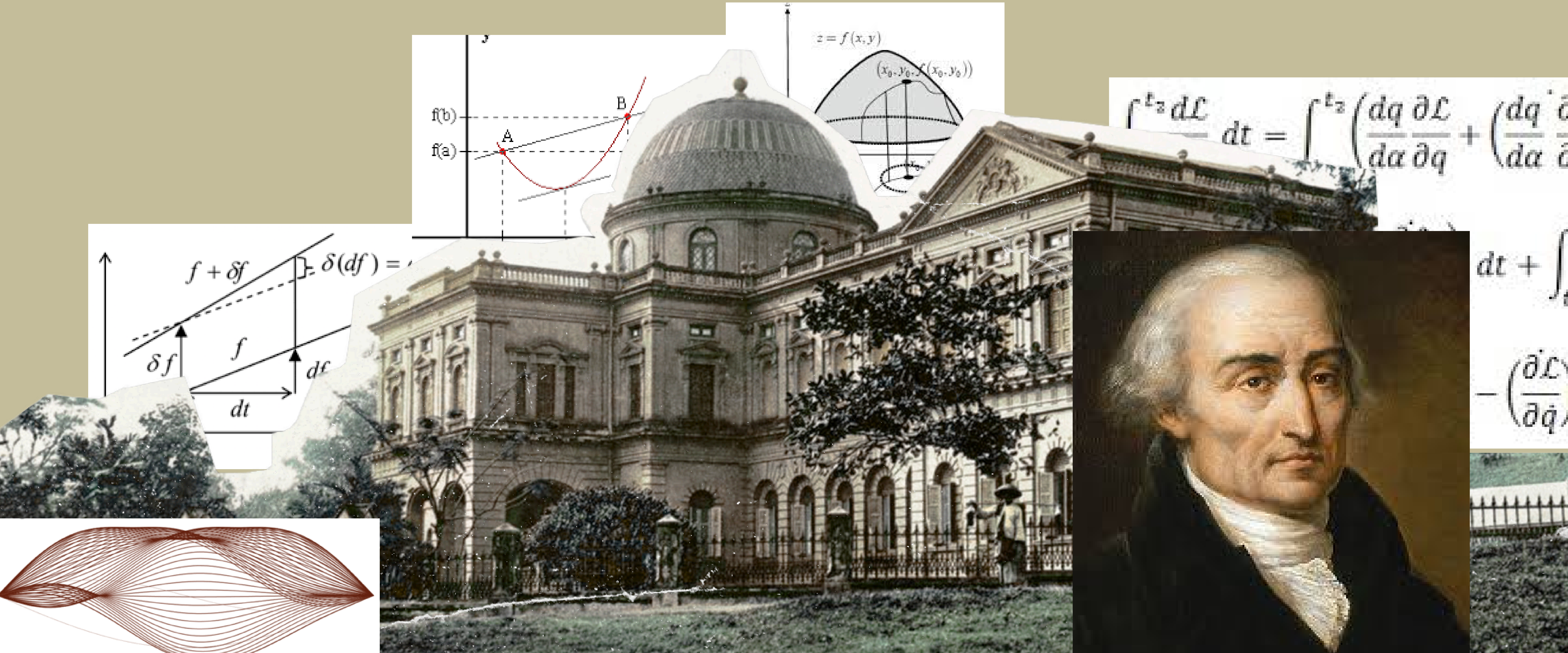
HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS 2

LAGRANGE

Una nueva mirada a la mecánica



CIRCUNSTANCIAS QUE CONTRIBUYERON AL DESARROLLO DE LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XVIII

Newton heredó a los siguientes matemáticos una posición privilegiada en la sociedad, su funeral fue más propio de un príncipe o de un hombre de estado que de un científico.

NOS ENCONTRAMOS EN EL SIGLO DE LAS LUCES.

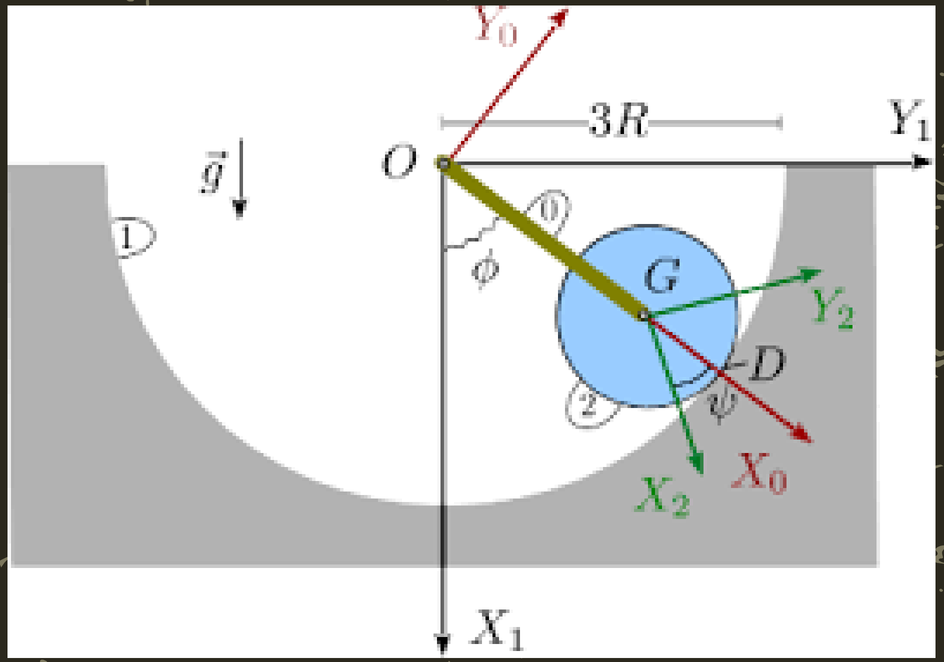
DESPOTISMO ILUSTRADO

A la cabeza de los estados más poderosos de Europa, se encuentran monarcas ilustrados que rivalizan por tener en sus cortes a las mentes más brillantes de su tiempo. Entre los que casi siempre solía haber un matemático de renombre.

La labor investigadora de los matemáticos del siglo XVIII, se desarrolla fundamentalmente en el ámbito de academias de ciencias como la Royal Society y las Academias de París, Berlín y San Petersburgo. Con el fin de enriquecer la vida científica y de potenciar la formación de matemáticos, las Academias convocan con frecuencia concursos para la resolución de problemas físicos y matemáticos.

Prácticamente todos los matemáticos de relieve pudieron dedicarse a la investigación matemática de manera profesional, sin obligaciones docentes.

LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XVIII

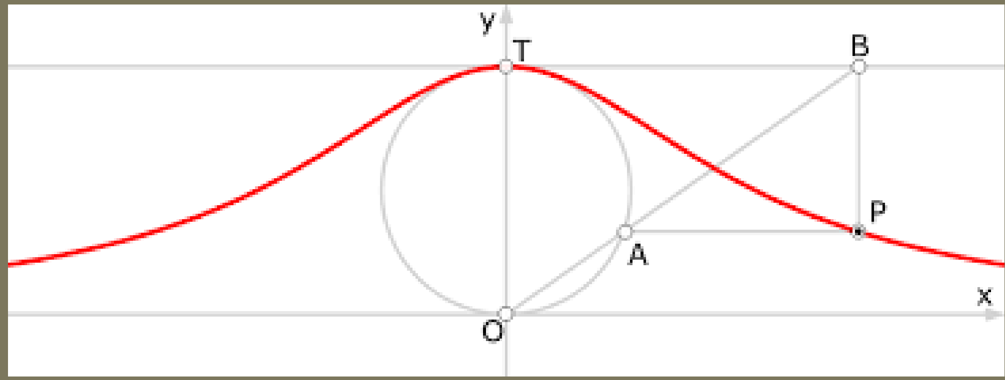


El trabajo matemático estuvo inspirado por la resolución de problemas planteados por la física. Se recurre a menudo al uso de argumentos físicos para justificar determinados pasos en las demostraciones. Cuando la solución de los problemas era satisfactoria, se adoptó la postura de que, puesto que las cosas funcionan bien, las matemáticas deben ser correctas, por lo que se sacrificó rigor en pro de la eficacia.

EL JOVEN LAGRANGE

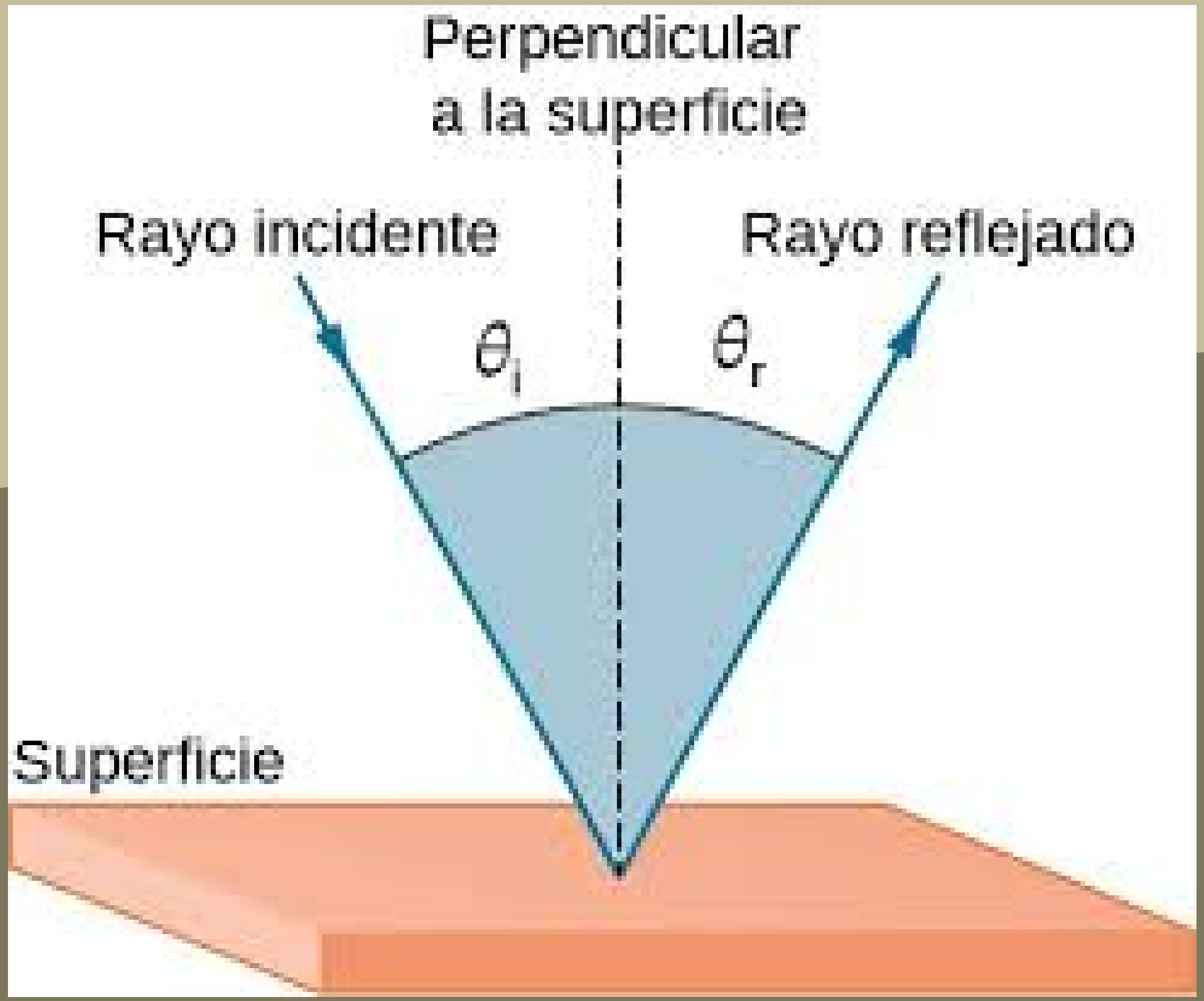
JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736- 1813)

Nació el 25 de enero en Turín, con el nombre de Giuseppe Ludovico Lagrangia, su bisabuelo era de origen parisino. Desde muy joven mostró cierta facilidad para el estudio, por lo que su familia pensaba que sería bueno que se dedicara a la abogacía. Sin embargo, cuando tenía 17 años cayó en sus manos una memoria de Edmond Halley, sobre la aplicación de los métodos algebraicos a la óptica. Dicha obra lo dejó asombrado. Por lo que quedó verdaderamente impresionado. Gracias a la obra de María Gaetana Agnesi pudo conocer y dominar los trabajos cientificos de Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler y Claurant.



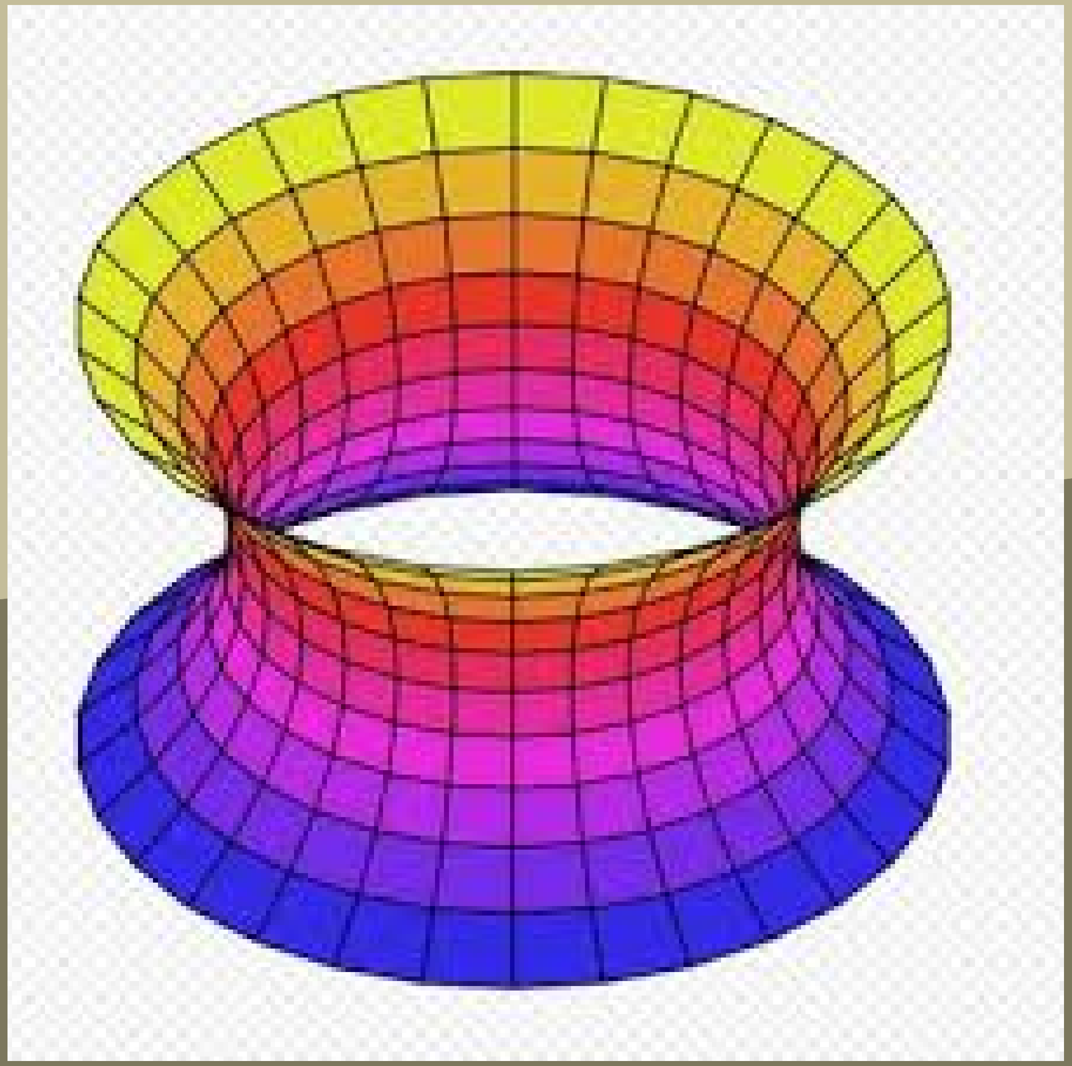
PROBLEMAS VARIACIONALES

Principio del mínimo



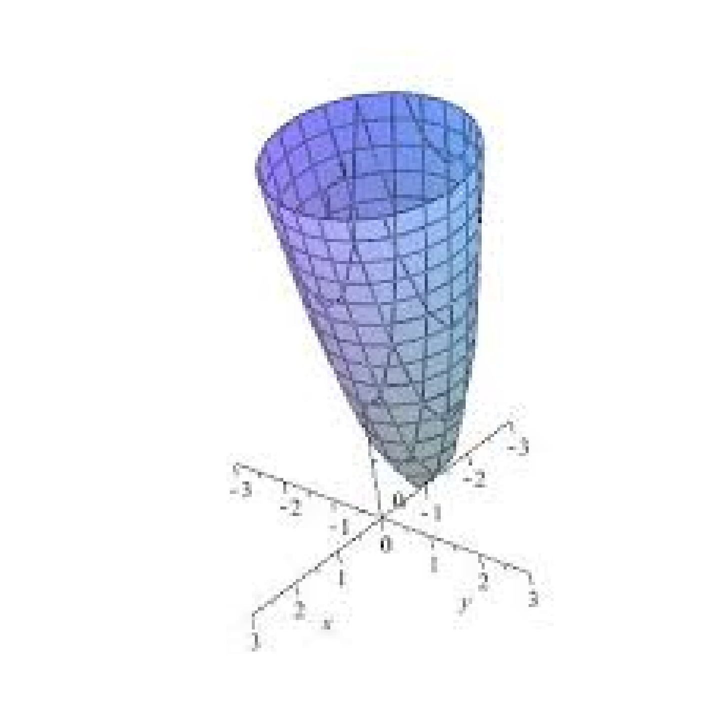
PROBLEMAS VARIACIONALES

La superficie de revolución de área mínima



MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Procedimiento general



Maximizar/ minimizar f(x,y) sujeta a la función g(x,y)=0

1 Formar la función de Lagrange: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$

2 Calcular las derivadas parciales e igualar a cero:

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

3 Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar a x, y, λ

4 Evaluar estos puntos en f para determinar máximos/ mínimos

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ejemplo

Maximizar f(x,y)= xy sujeta a x+y= 10

1 $L(x,\ y,\ \lambda) = xy - \lambda \cdot (x + y - 10)$

2 Calcular las derivadas parciales e igualar a cero:

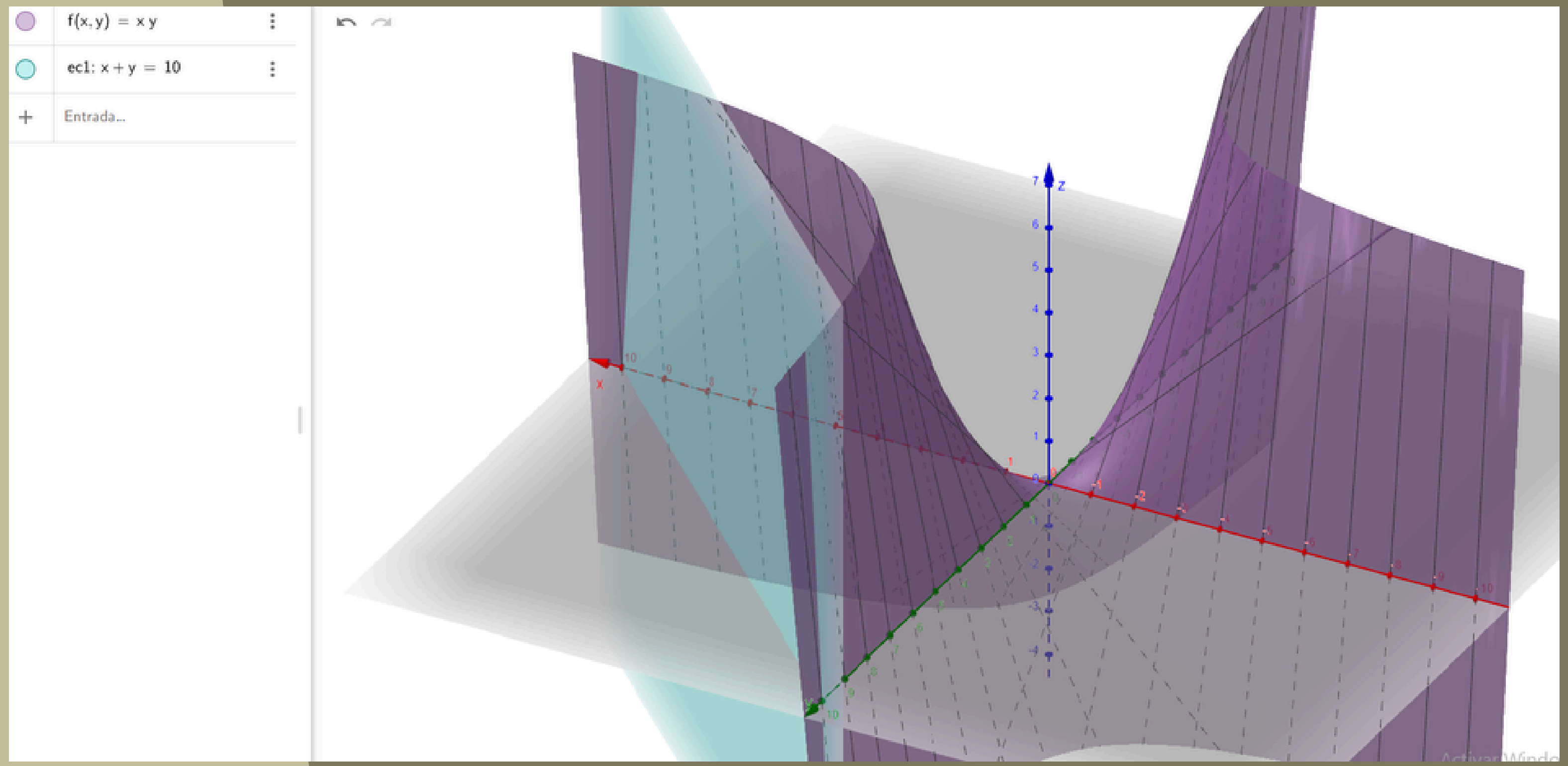
$\frac{\partial L}{\partial x}: y - \lambda = 0, y = \lambda$

$\frac{\partial L}{\partial y}: x - \lambda = 0, x = \lambda$

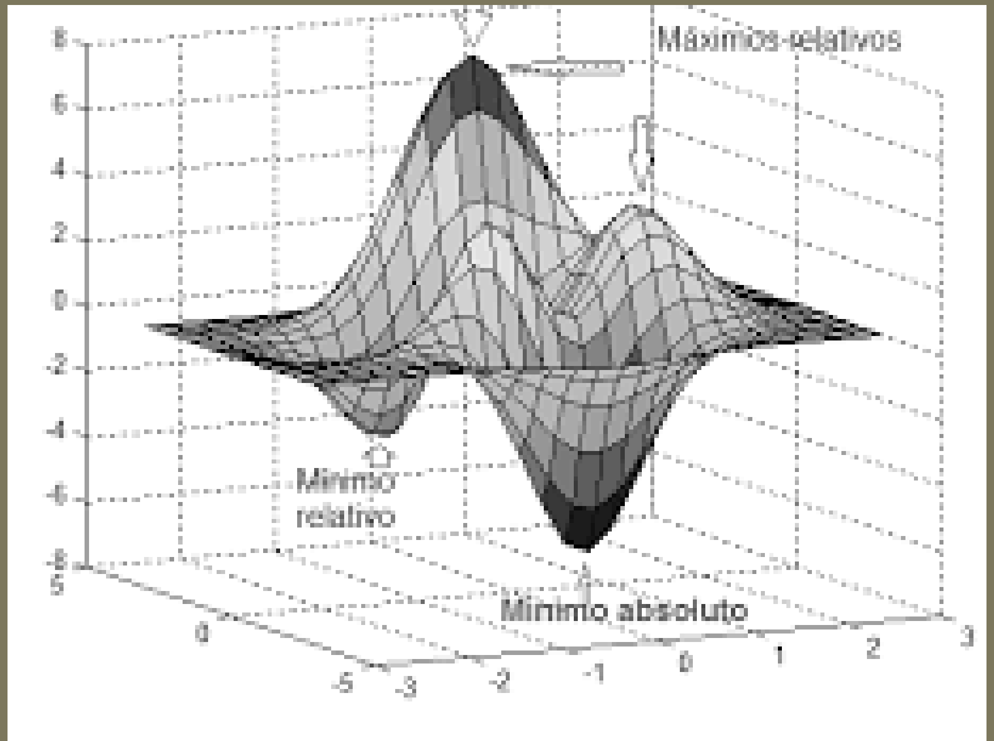
$\frac{\partial L}{\partial \lambda}: -(x + y - 10) = 0,\ x + y = 10$

3 Sustituyendo $\lambda + \lambda = 10, \lambda = 5$

4 Valor máximo $f(5,\ 5) = 25$

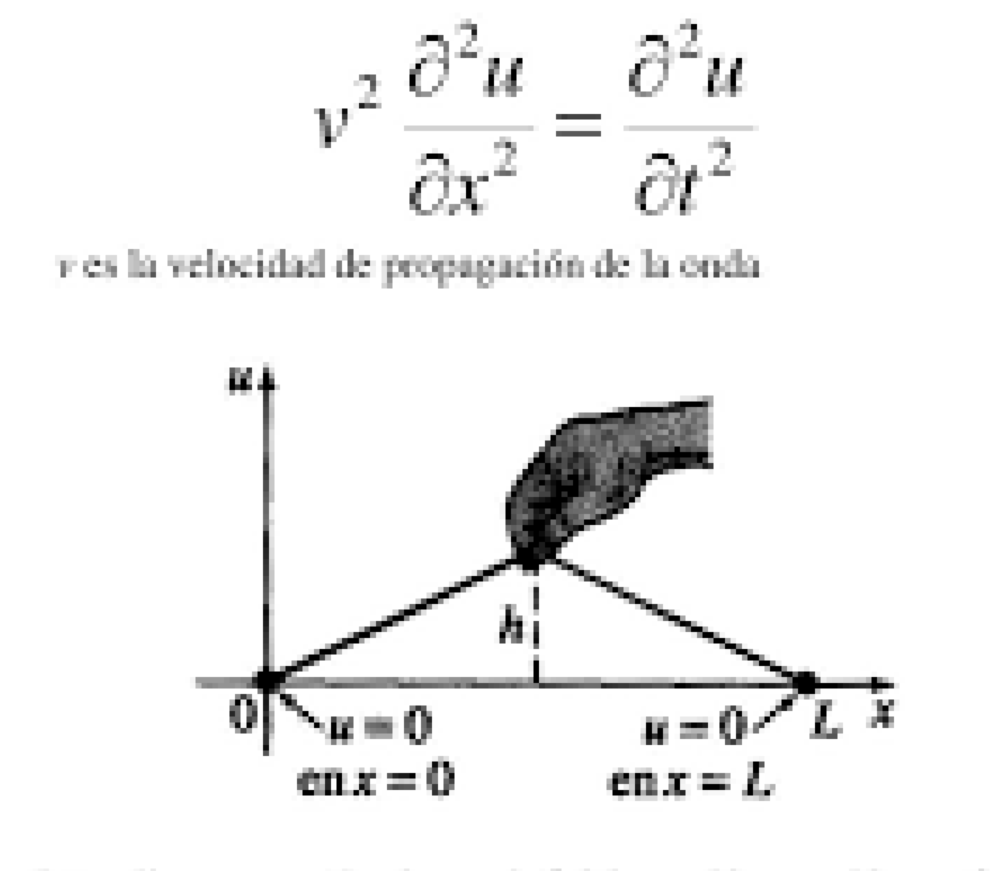


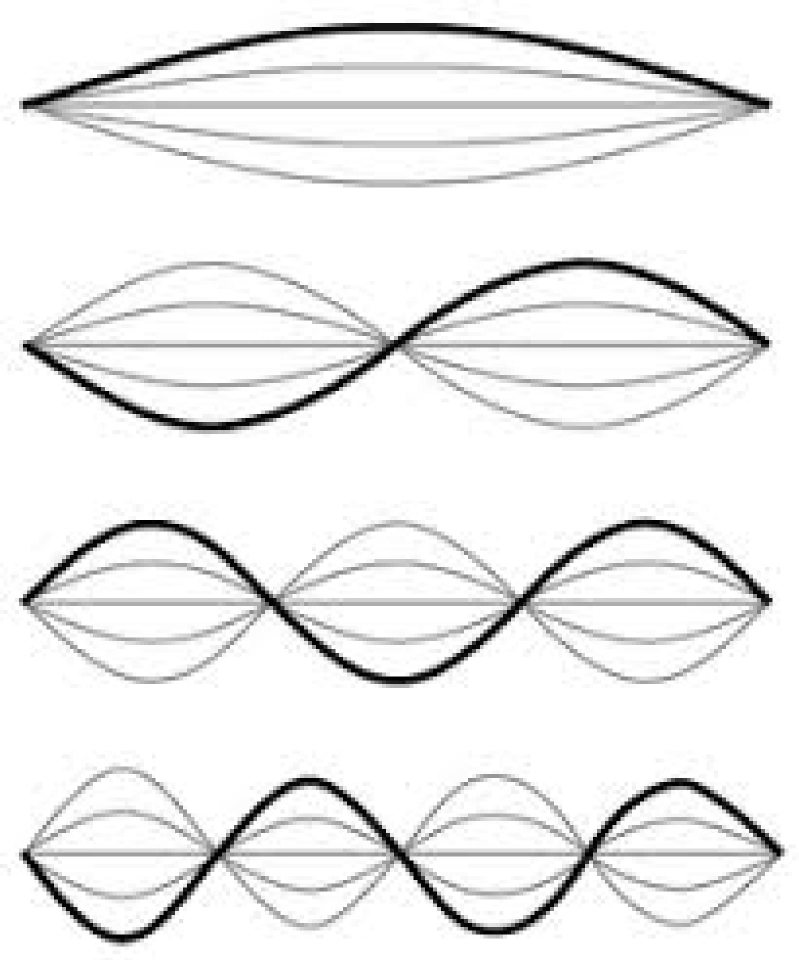
Con el trabajo de los multiplicadores Lagrange recibe el reconocimiento de Euler y con ello a la edad de 19 años, lo nombran profesor de la Real Escuela de Artillería de Turín. Como lo hará en futuras ocasiones, Lagrange procede a trabar en un problema que Euler ya había analizado, es así como obtiene la ecuación de Euler Lagrange.



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

LA CUERDA VIBRANTE



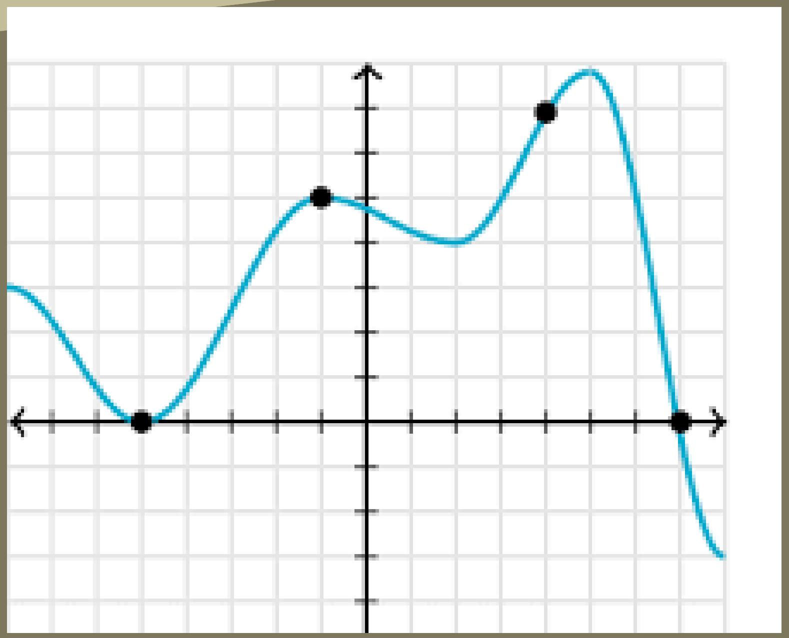


D'Alembert fue el primero en encontrar la ecuación correcta de la cuerda vibrante, hoy conocida como ecuación de onda.

LA CUERDA VIBRANTE

D'Alembert y Euler coincidieron en la solución a la ecuación de la cuerda vibrante, pero no lo hicieron al momento de considerar cuáles podrían ser curvas iniciales.

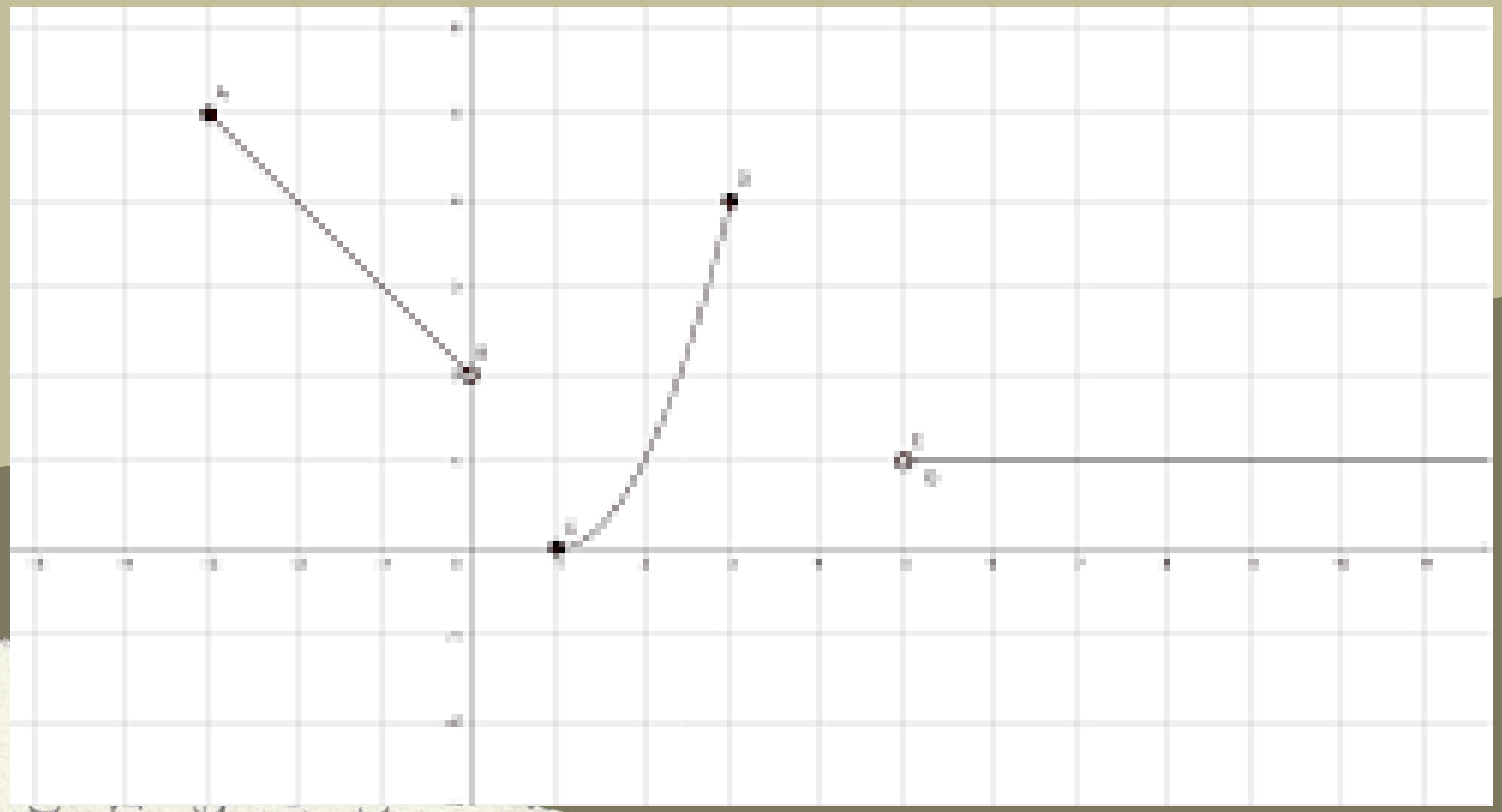
Para D'Alembert una función era tal, si era analítica, lo que significaba en su época, que la variable independiente y la dependiente estuvieran relacionadas mediante una única ecuación construida a partir de operaciones algebraicas. Además pedía que fueran continuas y derivables hasta segundo orden.



LA CUERDA VIBRANTE

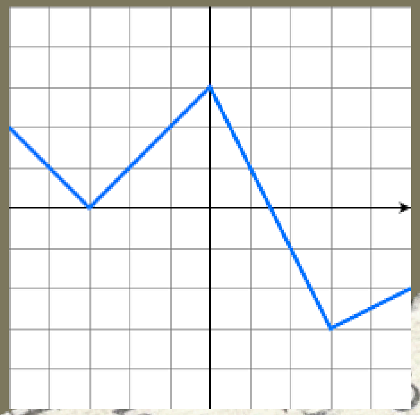
Euler tenía un concepto más general de función, también admitía funciones definidas a trozos.

Daniel Bernoulli entró en la discusión y dijo que cualquier curva inicial podía ser escrita como serie de senos y cosenos, pero lo hace sin dar una justificación matemática que lo sustente.



“LUCHAR CONTRA EL PREJUICIO DE AQUELLOS QUE OPÍNAN QUE LAS MATEMÁTICAS NUNCA PODRÍAN CONTRIBUIR AL VERDADERO CONOCIMIENTO DE LA FÍSICA”

La discusión sobre la cuerda vibrante se encontraba estancada y fue hasta que Lagrange trabajó en este problema que se logró resolver la disputa, para ello Lagrange utilizó el ver a la partícula desplazándose en un medio elástico como lo es el aire, en vez de trabajarlo con la segunda ley de Newton (como D'Alembert y Euler), a pesar de que los cálculos que realizó contenían pasos dudosos, logró llegar a la misma conclusión de D'Alembert y Euler y esto fue sin asumir la continuidad en la función, por lo que condiciones establecidas por Euler eran suficientes.



ETAPA EN BERLÍN

Euler fue matemático de la corte de Federico de Prusia, pero con el paso de los años la relación entre ambos se deterioró hasta tal punto que el científico solicitó renunciar a su cargo… ¡en tres ocasiones distintas!

Fue entonces reemplazado por Lagrange, quien, al estar más versado en filosofía que su predecesor, logró ganarse el favor del monarca. Además, Lagrange se distinguía por su trato amable y su habilidad para evitar polémicas, lo que siempre le facilitó llevarse bien con los demás.

LAGRANGE Y LA TEORÍA DE NÚMEROS

Todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados perfectos, a lo sumo.

SI P ES PRIMO, ENTONCES $(P -1)! + 1$ ES MÚLTIPLO DE P.

LAGRANGE Y LAS ECUACIONES

En más de dos siglos y medio que van desde Del Ferro hasta Lagrange, ningún matemático había cuestionado la posibilidad de que las ecuaciones de grado superior a cuatro pudieran ser resueltas mediante radicales, se pensaba que la cuestión estaba en la incapacidad de los matemáticos para encontrar la solución.
Lagrange no solo encontró un método general para resolver las ecuaciones de grado menor o igual a cuatro, sino que también entendió la verdadera naturaleza del problema.

LAGRANGE Y LAS ECUACIONES

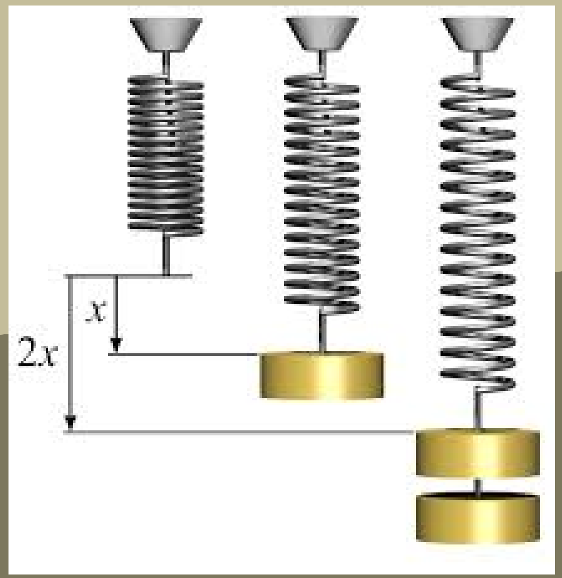
Paolo Ruffini (1765- 1822), un conocido de Lagrange, se encargaría treinta años más tarde de demostrar la certeza de esta afirmación.

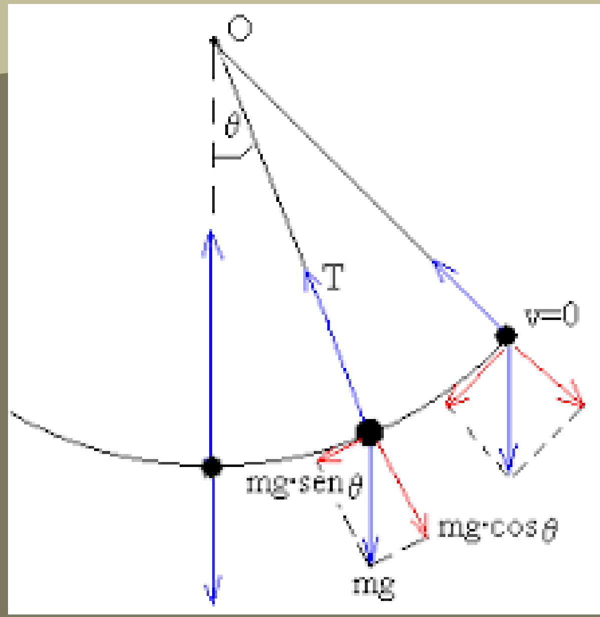
LAGRANGE Y LAS ECUACIONES

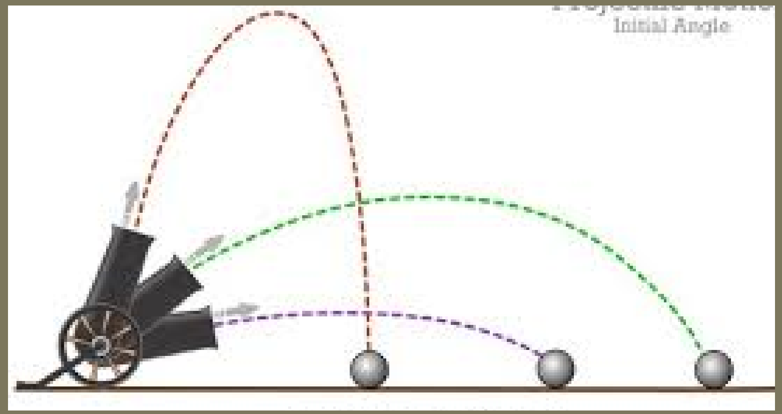
En 1773 publicó una memoria titulada "Sobre la forma de las raíces imaginarias de las ecuaciones", en la que perfeccionó algunos aspectos de las demostraciones que D'Alembert y Euler habían ofrecido del teorema fundamental del álgebra.
Sin embargo, en su tesis doctoral, Gauss sometió esta memoria a una crítica implacable y logró presentar la primera demostración rigurosa y satisfactoria de dicho teorema.

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Surgen en el último tercio del siglo XVII al aplicar el cálculo infinitesimal a la resolución de problemas de la física.

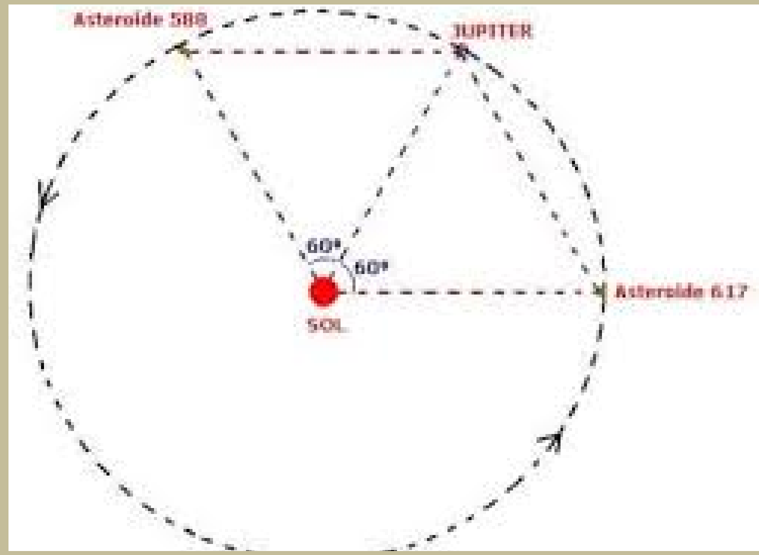






EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

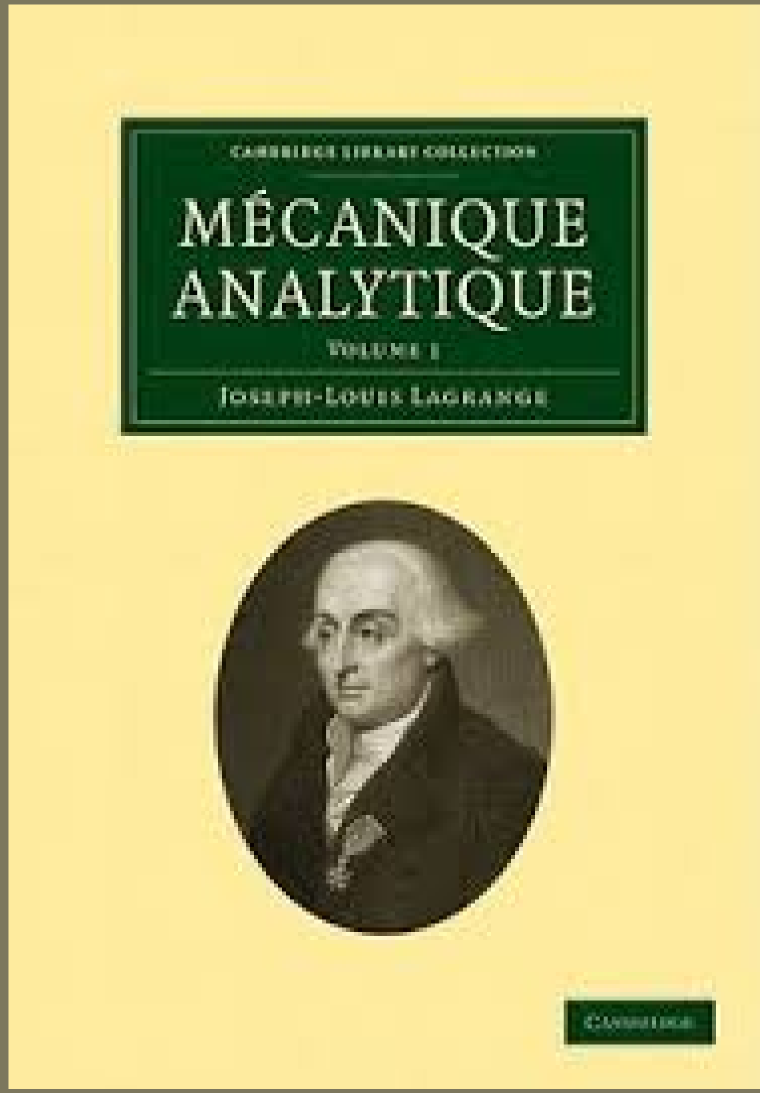
Lagrange estudió el sistema formado por dos cuerpos de gran masa, por ejemplo, el Sol y Júpiter que se suponen aislados en el sistema solar y giran de forma circular alrededor de su centro de masas. Una tercera masa pequeña, sometida únicamente a la atracción gravitacional de los dos cuerpos grandes, también gira de manera rígida y estable alrededor de dicho centro de masas. De las cinco posiciones posibles de equilibrio para esa masa pequeña, tres son inestables y dos son estables; estas últimas se encuentran en los vértices de triángulos equiláteros.



“NO SE LO QUE HARÉ EN MATEMÁTICAS DENTRO DE DIEZ AÑOS” O “LA MINA MATEMÁTICA ES YA DEMASIADO PROFUNDA Y A NO SER QUE SE DESCUBRAN NUEVAS VETAS TENDRÁ QUE SER ABANDONADA”

Tras cerca de treinta años de trabajo, él y otros grandes matemáticos del siglo XVIII han llevado la matemática a un grado de desarrollo inimaginable pero ahora se encuentran agotados intelectualmente para encontrar nuevos caminos para el desarrollo de las matemáticas.
Aunado a esto, la esposa de Lagrange se encuentra gravemente enferma.

A finales de 1782, tras terminar la redacción de la primera edición de la Mecánica analítica (será publicada hasta 1788), obra cumbre de la física matemática del siglo XVIII y una de las obras maestras de la literatura científica de todos los tiempos, Lagrange suspende temporalmente sus trabajos y se dedicó en cuerpo y alma a cuidar a su esposa.



1783 FUE, SIN DUDA, EL PEOR AÑO DE SU VIDA

Por su correspondencia con Euler, supo del fallecimiento de Daniel Bernoulli, ocurrido el 17 de marzo de 1782.

Durante la primera mitad de 1783, dedicó todo su tiempo al cuidado de su esposa, quien finalmente murió en agosto, sumiéndolo en una profunda depresión.

El 18 de septiembre falleció de manera repentina Euler, su maestro y amigo, el hombre que mejor había sabido apreciar su talento y que había reconocido públicamente sus méritos.

En aquellos días, D'Alembert, gravemente enfermo, le escribió una carta con estas palabras:

"En nombre de Dios, no renuncies al trabajo, la más fuerte de todas las distracciones. Adiós, quizá por última vez. Recuerda al hombre que más te ha estimado y honrado en el mundo".

D'Alembert murió el 29 de octubre de ese mismo año.

ADIÓS A BERLÍN

El 17 de agosto de 1786, murió su protector Federico el Grande. Su sobrino y sucesor Federico Guillermo II no contaba ni por asomo, con el carácter ni el talento de su tío. Su tendencia al misticismo, su nacionalismo anti francés y su nulo interés por la ciencia hicieron incómoda la presencia en Berlín de sabios extranjeros.

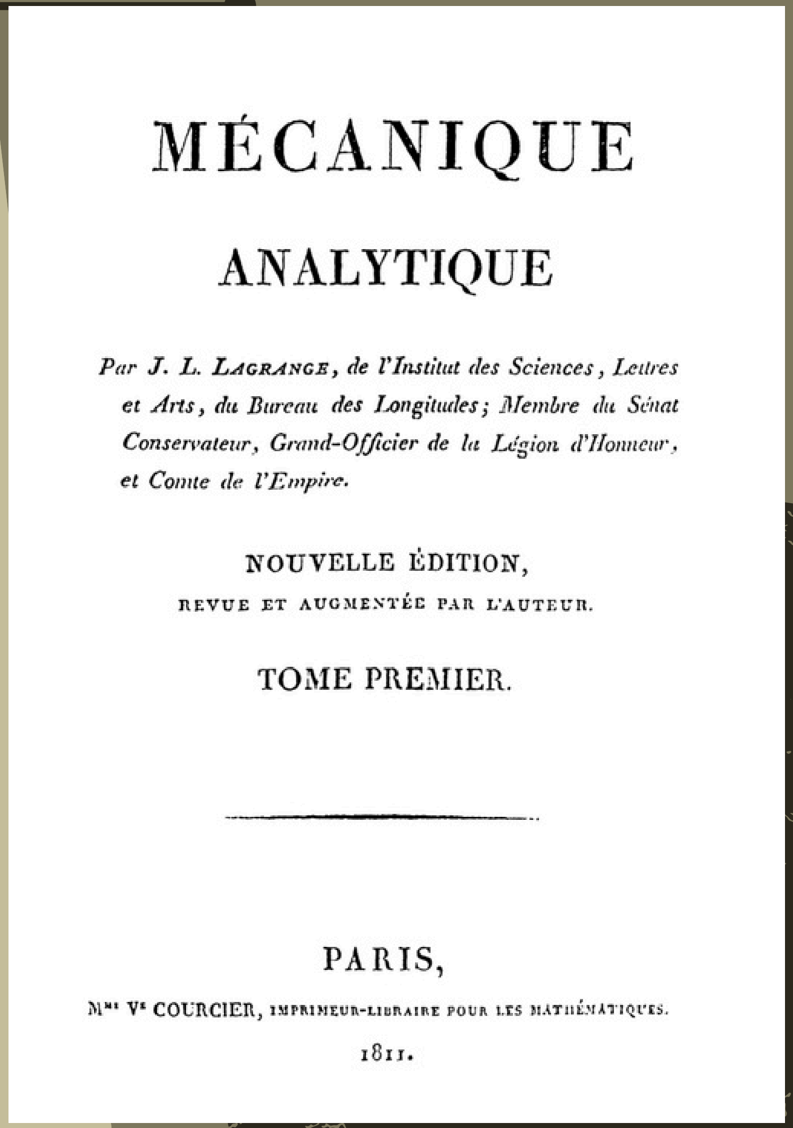
NO DEBIÓ DUDAR MUCHO LAGRANGE ANTES DE ACEPTAR UNA OFERTA QUE LE HICIERON DESDE PARÍS, REUNÍA LAS MEJORES CONDICIONES DESDE EL PUNTO DE VISTA CIENTÍFICO ALLÍ SE ENCONTRABAN SUS COLEGAS LAPLACE Y LEGENDRE, DOS MATEMÁTICOS DE PRIMERA FILA Y DE CIERTO MODO SUS DISCÍPULOS, Y ADEMÁS, ÉL SE SENTÍA MEDIO FRANCÉS.

POR FIN PUDO CONOCER PERSONALMENTE A LAPLACE Y LEGENDRE, ASÍ COMO OTROS HOMBRES DE CIENCIA ENTRE LOS QUE CABE DESTACAR LAVOISIER, CARNOT, COULOMB Y MONGE.

Lavoisier y la reina María Antonieta fueron los encargados de darle los honores en su llegada a París, invitándole a múltiples fiestas y diversos actos de la corte. A instancias de la reina, Lagrange fue instalado en el palacio de Louvre

Desde su llegada a París y hasta la toma de la Bastilla el 14 de julio de 1789, Lagrange se dedicó al estudio de diversas materias, en especial la química, la medicina y la filosofía. Da la impresión de que las matemáticas habían dejado de interesarle; sin embargo, el estallido de la Revolución francesa acabaría con su apatía.
Fue por aquellas fechas cuando sus contemporáneos comenzaron a advertir la enorme trascendencia de su obra magna, la Mecánica analítica.

“ME PROPONGO REDUCIR LA TEORÍA DE LA MECÁNICA Y EL ARTE DE RESOLVER LOS PROBLEMAS QUE CON ELLA SE RELACIONAN, A FÓRMULAS GENERALES, DE LAS CUALES SU SIMPLE DESARROLLO DAN TODAS LAS ECUACIONES NECESARIAS PARA LA SOLUCIÓN DE CADA PROBLEMA.. LOS MÉTODOS QUE EXPLICO NO EXIGEN CONSTRUCCIONES NI CONSIDERACIONES GEOMÉTRICAS O MECÁNICAS, SINO ÚNICAMENTE OPERACIONES ALGEBRAICAS SOMETIDAS A UN PROCESO REGULAR Y UNIFORME, TODOS AQUELLOS QUE AMEN EL ANÁLISIS, CONTEMPLARÁN COMO LA MECÁNICA SE CONVIERTE EN UNA NUEVA RAMA DE ÉL Y SABRÁN AGRADECERME QUE YO HAYA EXTENDIDO EL DOMINIO DEL MISMO DE ESTA MANERA”


MÉCANIQUE

ANALYTIQUE

Par J. L. Lagrange, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

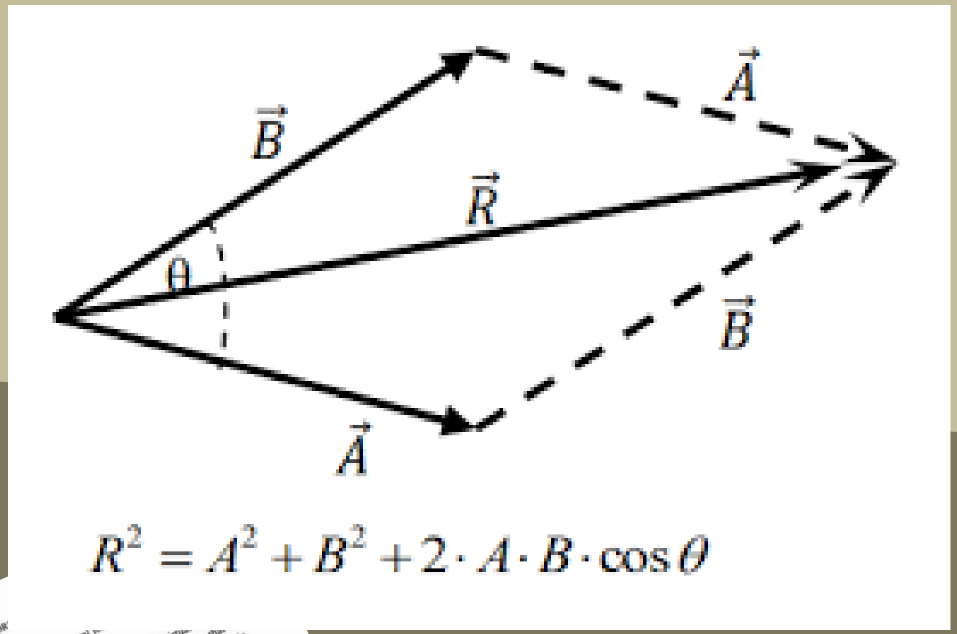
TOME PREMIER.

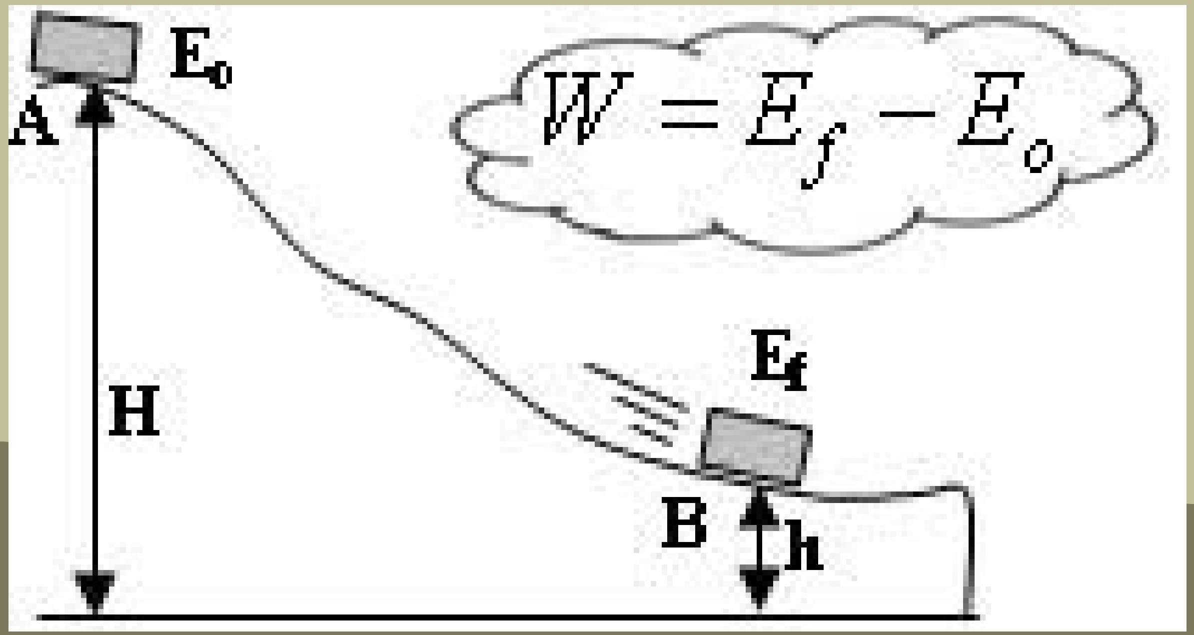
PARIS,

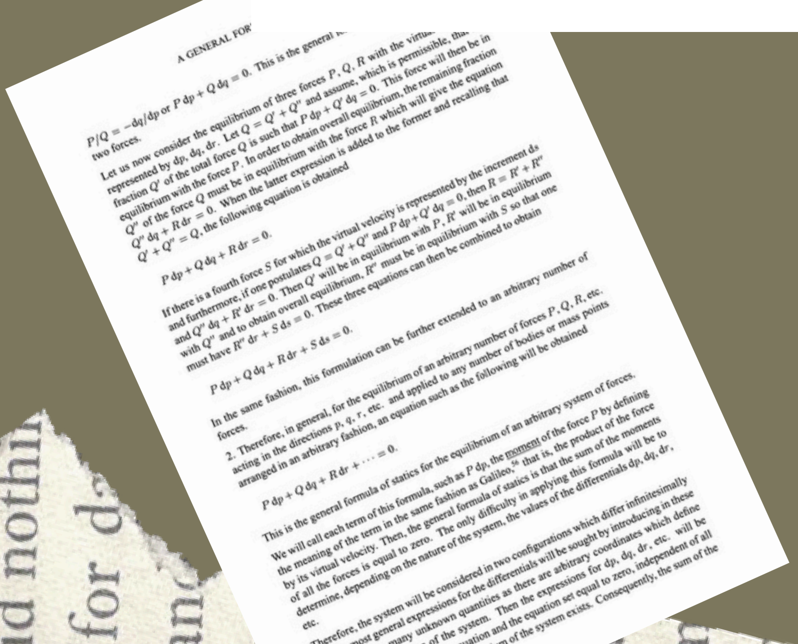
Mme Ve COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES.

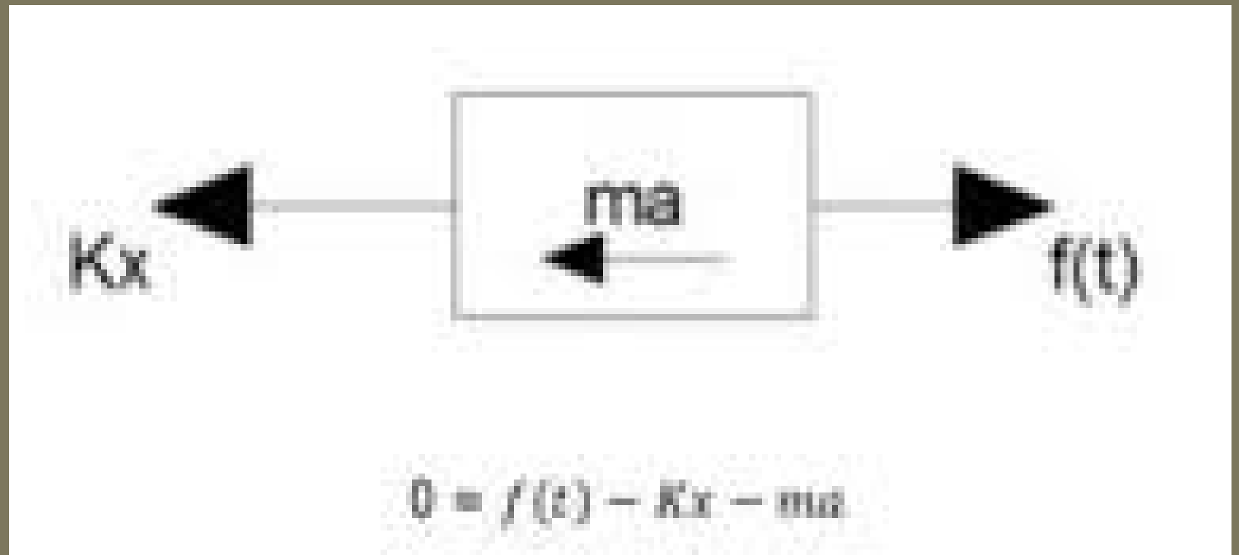
1811.

- **Principio de mínima acción.**
- **El teorema del paralelogramo de fuerzas.**
- **Principio de D'Alembert.**
- **Teorema de las fuerzas vivas.**

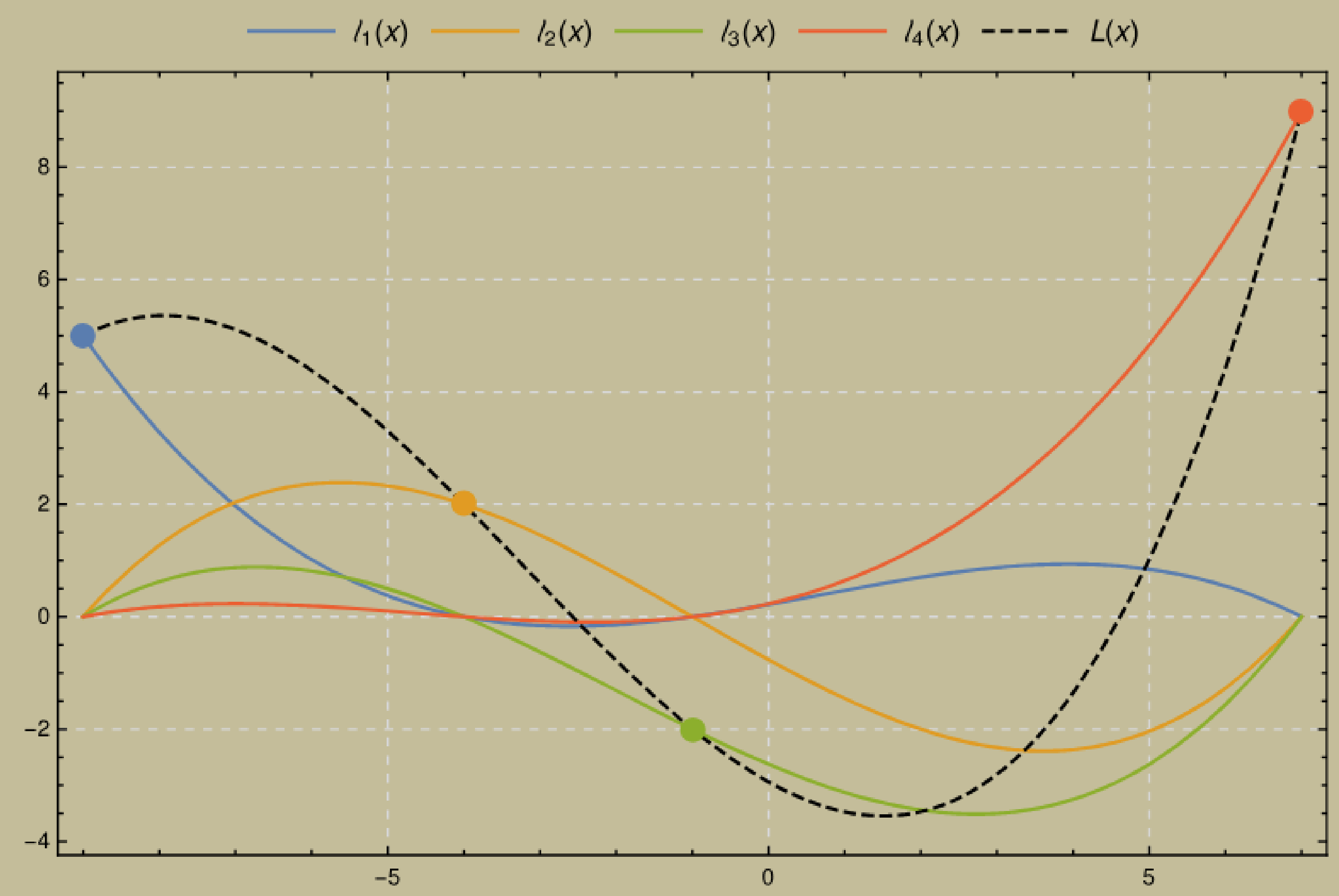






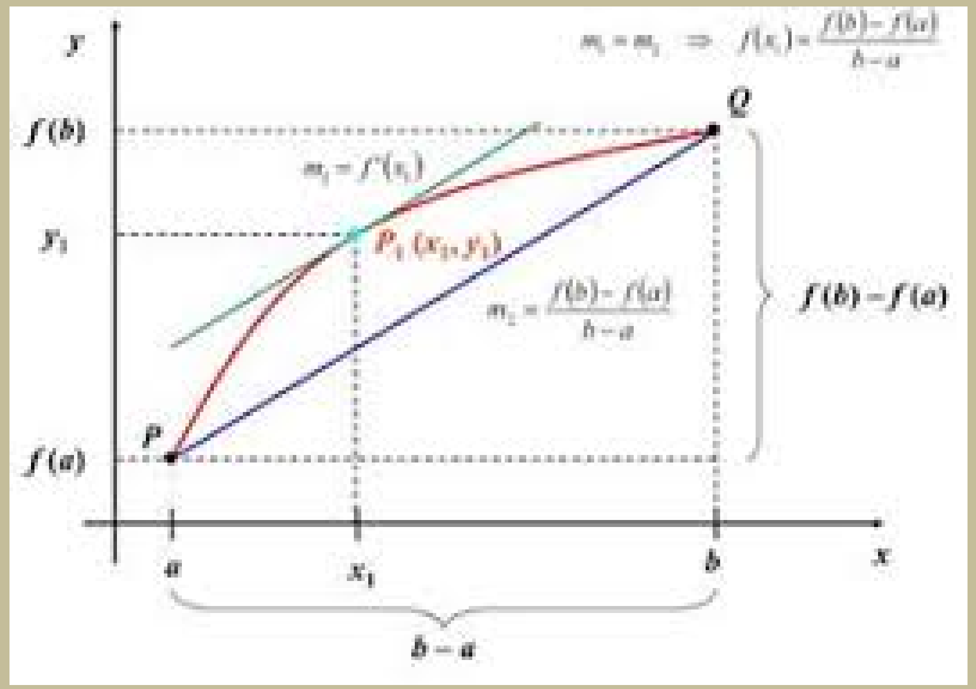


SEGUNDAS NUPCIAS

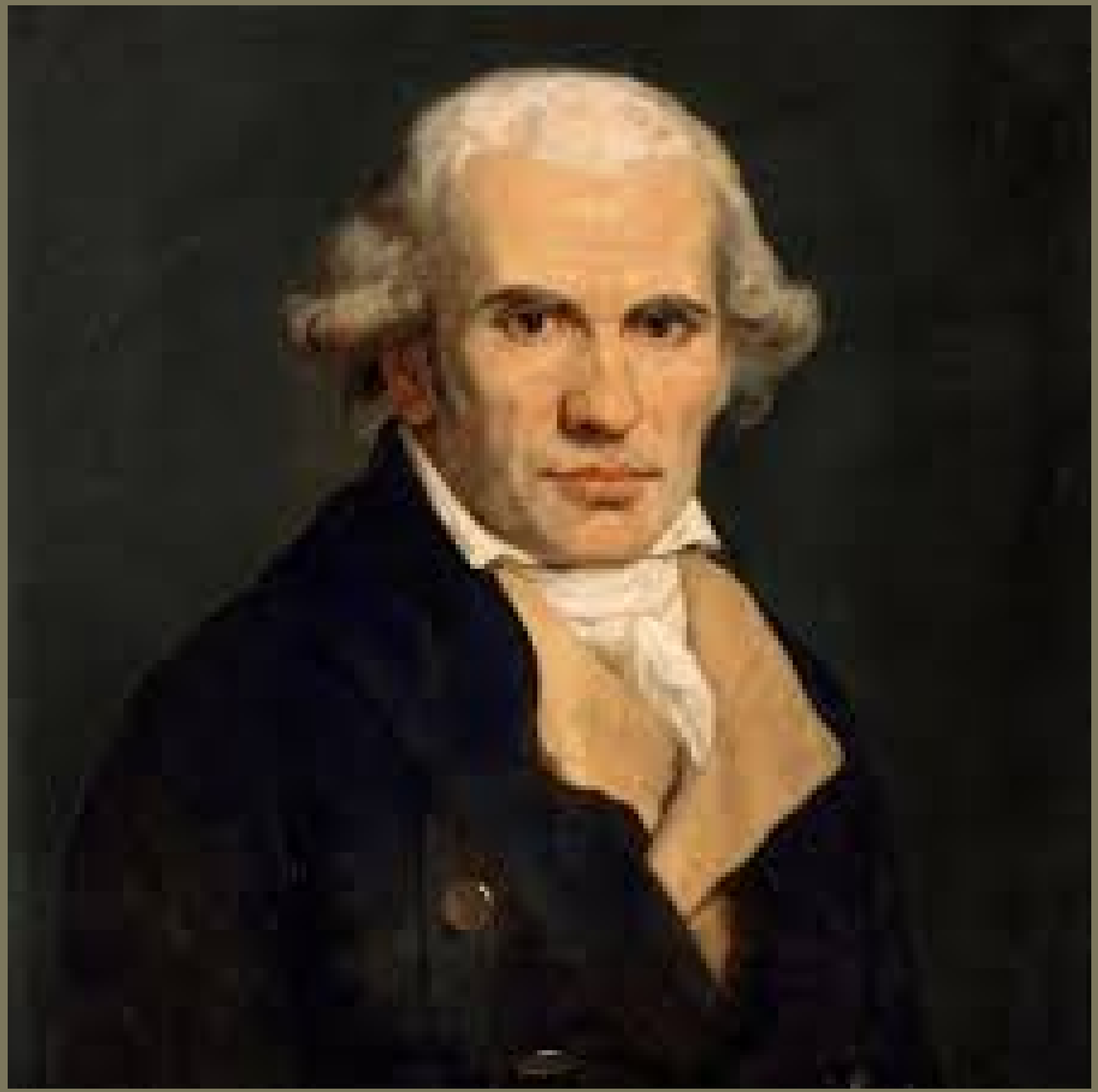


Polinomio de interpolación polinómica de Lagrange

TEOREMA DEL VALOR MEDIO



UNAS CUANTAS PALABRAS PARA SUS COLEGAS MÁS JÓVENES



Gaspard Monge

“Mi querido colega, gracias por hacerme ver que yo también sé Geometría. Usted ha mostrado hoy aquí muchas cosas importantes y bellas; a mí me hubiera gustado haberlas encontrado yo mismo” y dirigiéndose a Laplace le dijo: “Aplicando el Análisis a la Geometría, este demonio de hombre se hará inmortal”

UNAS CUANTAS PALABRAS PARA SUS COLEGAS MÁS JÓVENES

Carl Friedrich Gauss

“Vuestras Disquisitiones os han elevado de golpe al primer rango de los matemáticos, y yo pienso que la última sección contiene el más bello descubrimiento analítico que se haya hecho en mucho tiempo… [Se refiere Lagrange, a la teoría general de funciones circulares y su aplicación a la construcción de polígonos regulares de n lados]

Creed, señor, que nadie aplaude vuestro éxito más sinceramente que yo”

UNAS CUANTAS PALABRAS PARA SUS COLEGAS MÁS JÓVENES

Augustin Louis Cauchy

En cierta ocasión, estando Lagrange y Laplace en la secretaría del Senado, vieron en un rincón estudiando al pálido y enfermizo Cauchy y el primero comentó al segundo: “Veis a este joven, muy pronto nos reemplazará a todos como matemático”

GRACIAS TOTALES