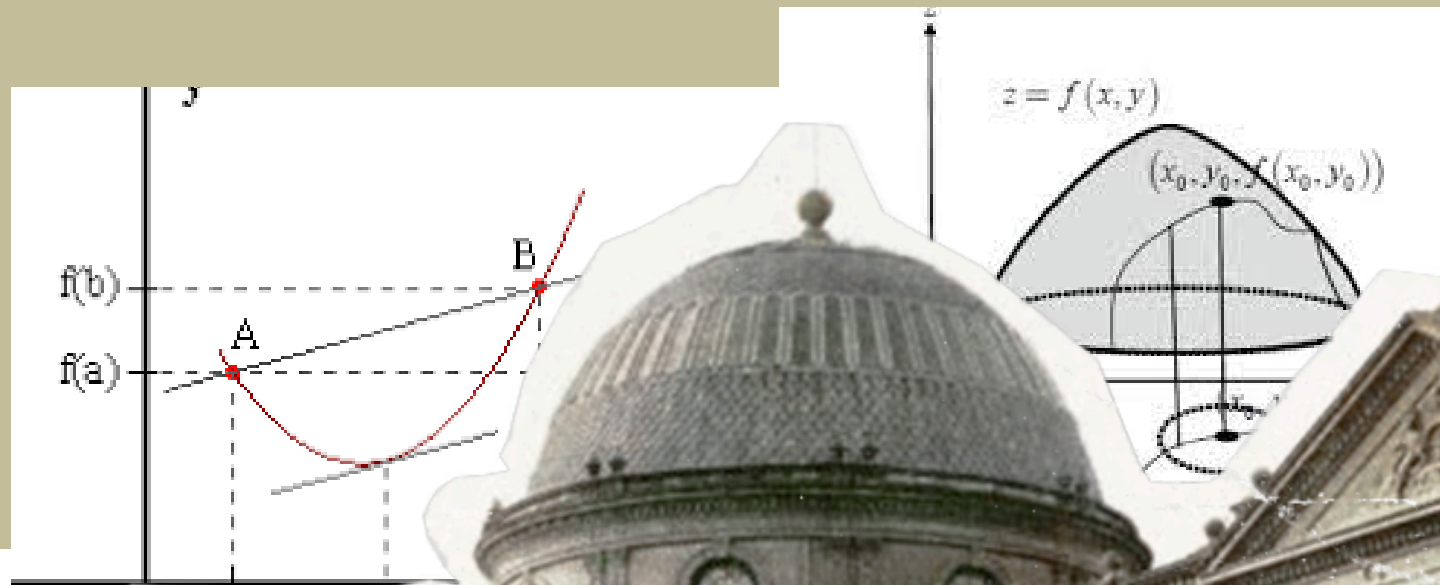
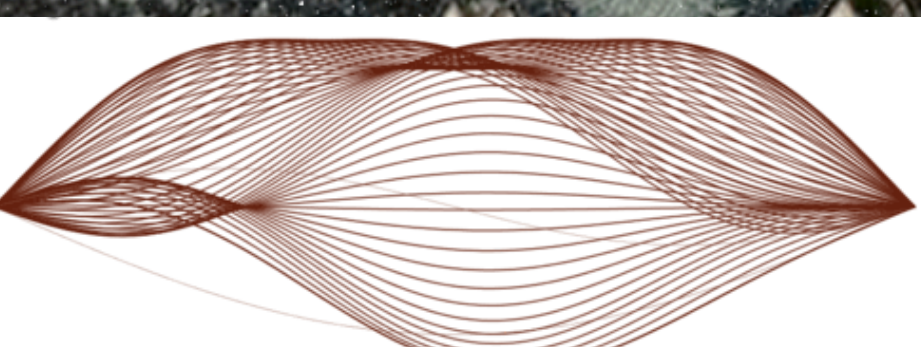
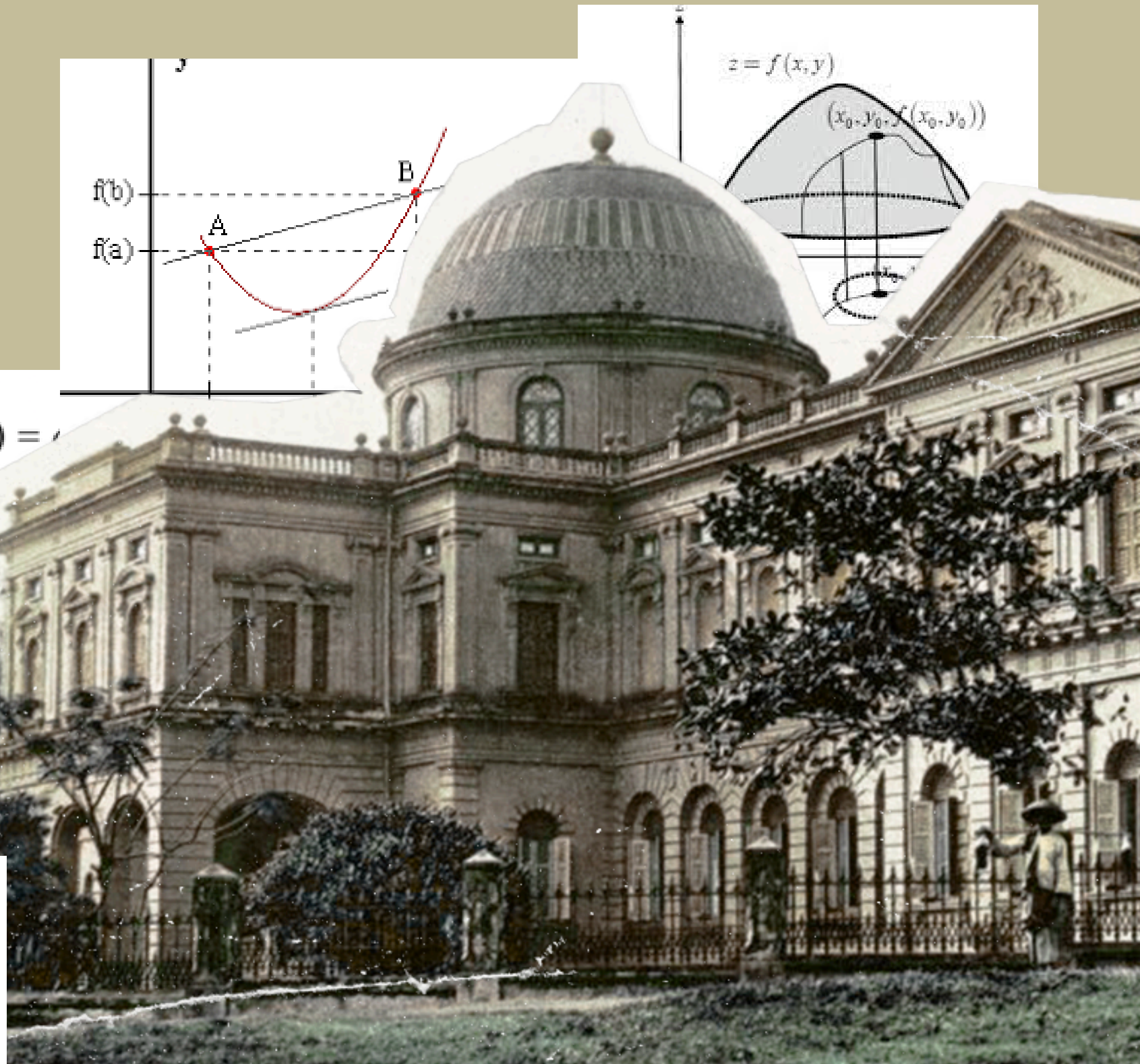
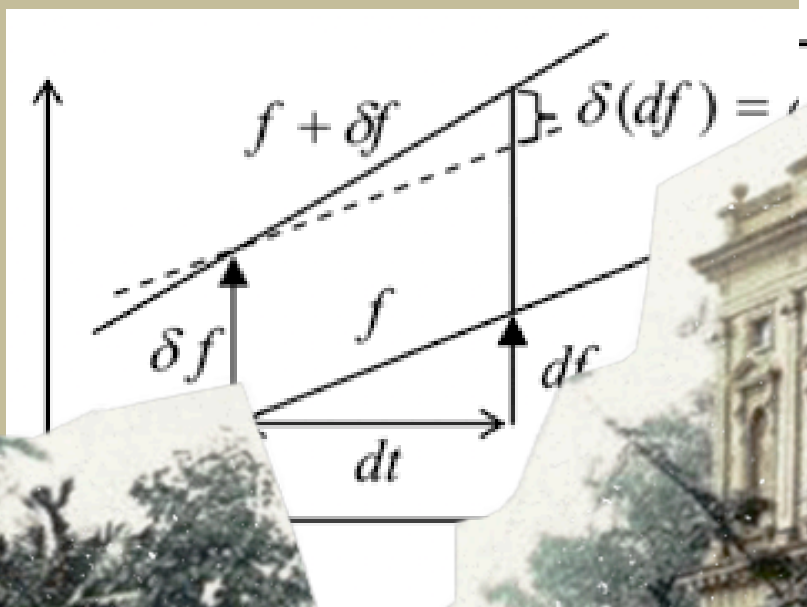


LAGRANGE

Una nueva mirada a la mecánica



$$\int^{t_2} d\mathcal{L} dt = \int^{t_2} \left(\frac{dq}{da} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \left(\frac{dq}{da} \right)' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) dt + \int \dots$$



CIRCUNSTANCIAS QUE CONTRIBUYERON AL DESARROLLO DE LAS MATEMÁTICAS DEL SIGLO XVIII

Newton heredó a los siguientes matemáticos una posición privilegiada en la sociedad, su funeral fue más propio de un príncipe o de un hombre de estado que de un científico.



NOS ENCONTRAMOS EN EL SIGLO DE LAS LUCES.



DESPOTISMO ILUSTRADO



A la cabeza de los estados más poderosos de Europa, se encuentran monarcas ilustrados que rivalizan por tener en sus cortes a las mentes más brillantes de su tiempo. Entre los que casi siempre solía haber un matemático de renombre.



La labor investigadora de los matemáticos del siglo XVIII, se desarrolla fundamentalmente en el ámbito de academias de ciencias como la Royal Society y las Academias de París, Berlín y San Petersburgo. Con el fin de enriquecer la vida científica y de potenciar la formación de matemáticos, las Academias convocan con frecuencia concursos para la resolución de problemas físicos y matemáticos.

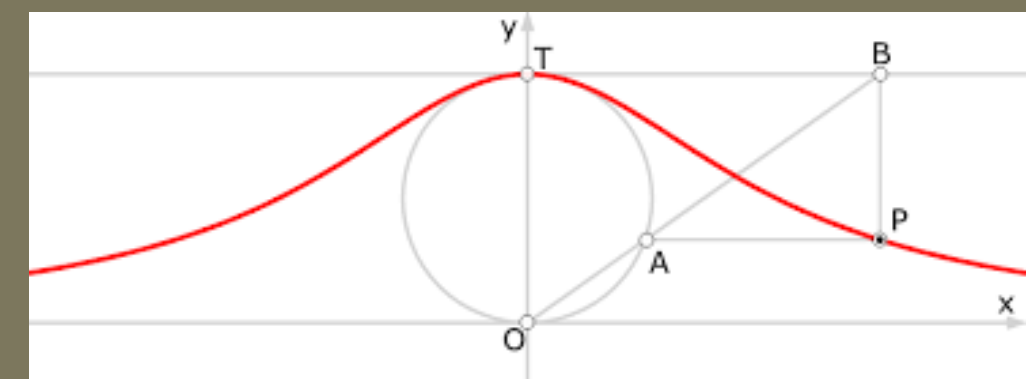
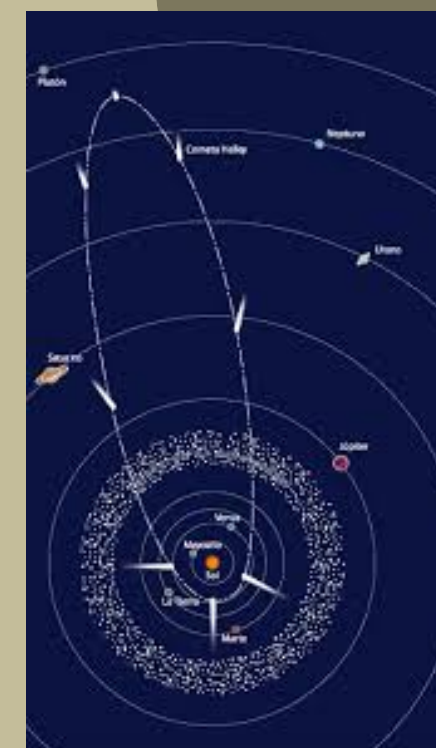
Prácticamente todos los matemáticos de relieve pudieron dedicarse a la investigación matemática de manera profesional, sin obligaciones docentes.



EL JOVEN LAGRANGE

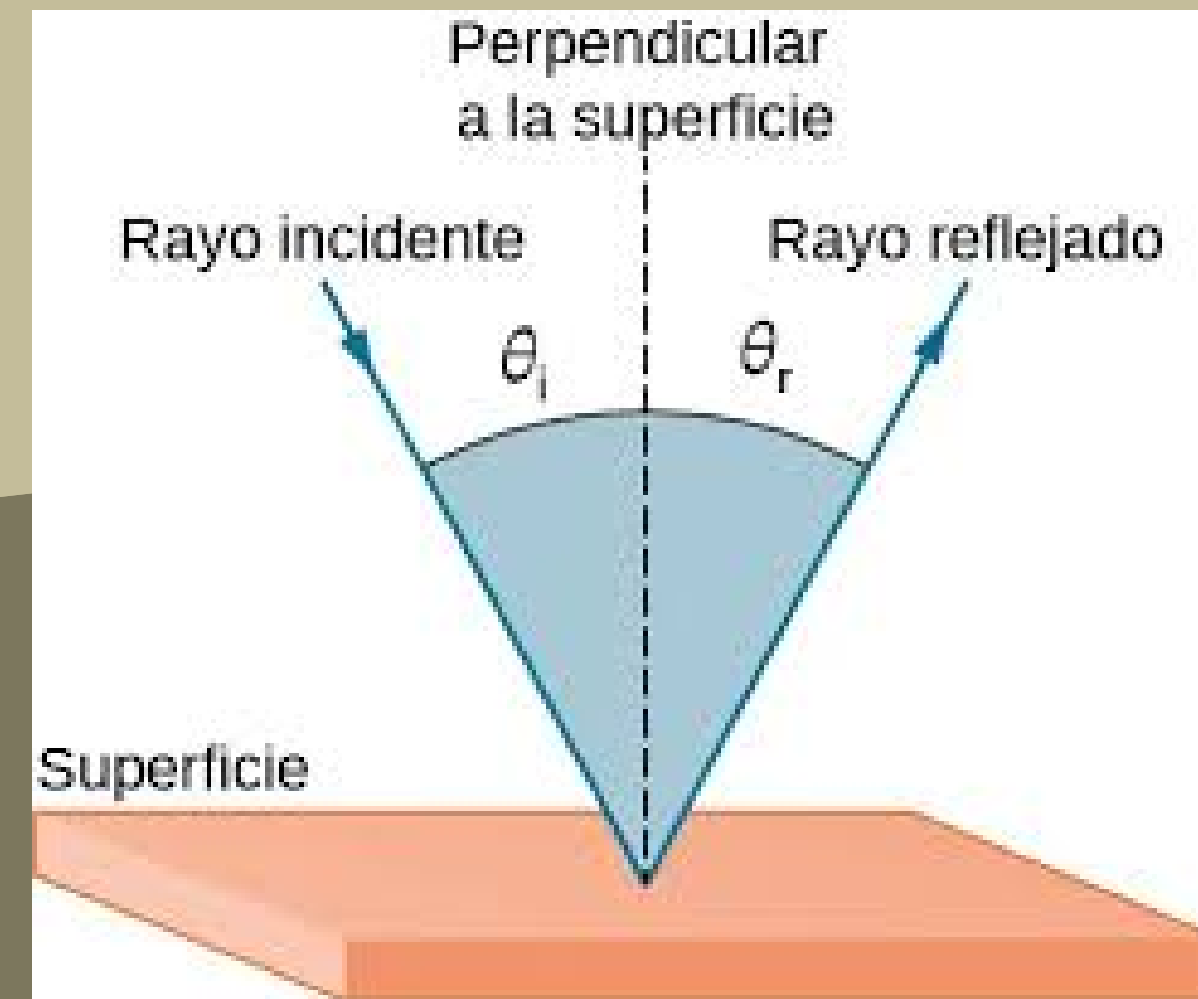
JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736- 1813)

Nació el 25 de enero en Turín, con el nombre de Giuseppe Ludovico Lagrangia, su bisabuelo era de origen parisino. Desde muy joven mostró cierta facilidad para el estudio, por lo que su familia pensaba que sería bueno que se dedicara a la abogacía. Sin embargo, cuando tenía 17 años cayó en sus manos una memoria de Edmond Halley, sobre la aplicación de los métodos algebraicos a la óptica. Dicha obra lo dejó asombrado. Por lo que quedó verdaderamente impresionado. Gracias a la obra de María Gaetana Agnesi pudo conocer y dominar los trabajos científicos de Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler y Clairaut.



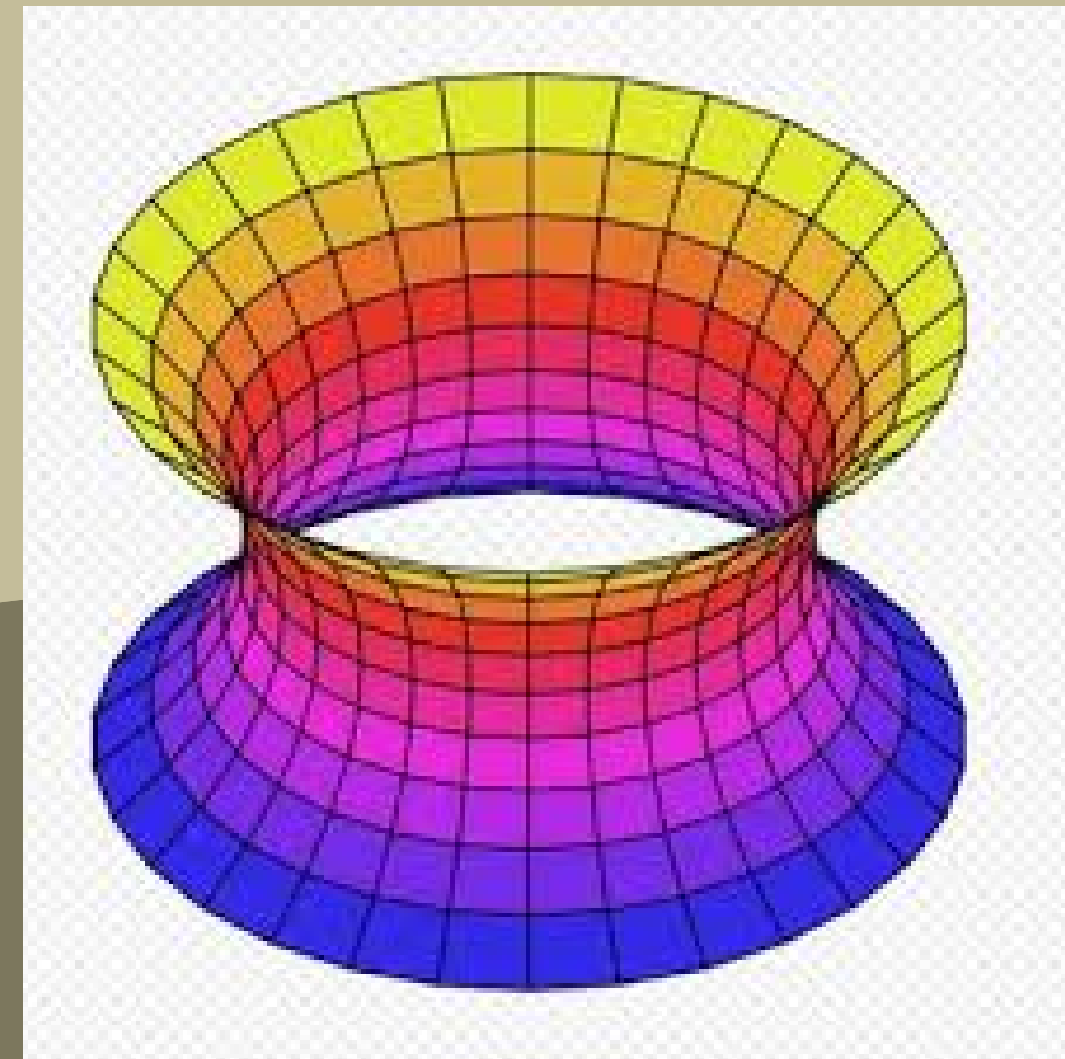
PROBLEMAS VARIACIONALES

Principio del mínimo



PROBLEMAS VARIACIONALES

La superficie de revolución
de área mínima



MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Procedimiento general

Maximizar/ minimizar $f(x,y)$ sujeta a la función $g(x,y)=0$

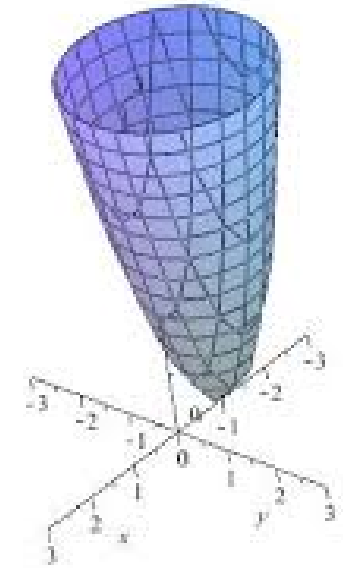
1 Formar la función de Lagrange: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$

2 Calcular las derivadas parciales e igualar a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

3 Resolver el sistema de ecuaciones para encontrar a x, y, λ

4 Evaluar estos puntos en f para determinar máximos/ mínimos



MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ejemplo

Maximizar $f(x,y) = xy$ sujeta a $x+y = 10$

1 $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda \cdot (x + y - 10)$

2 Calcular las derivadas parciales e igualar a cero:

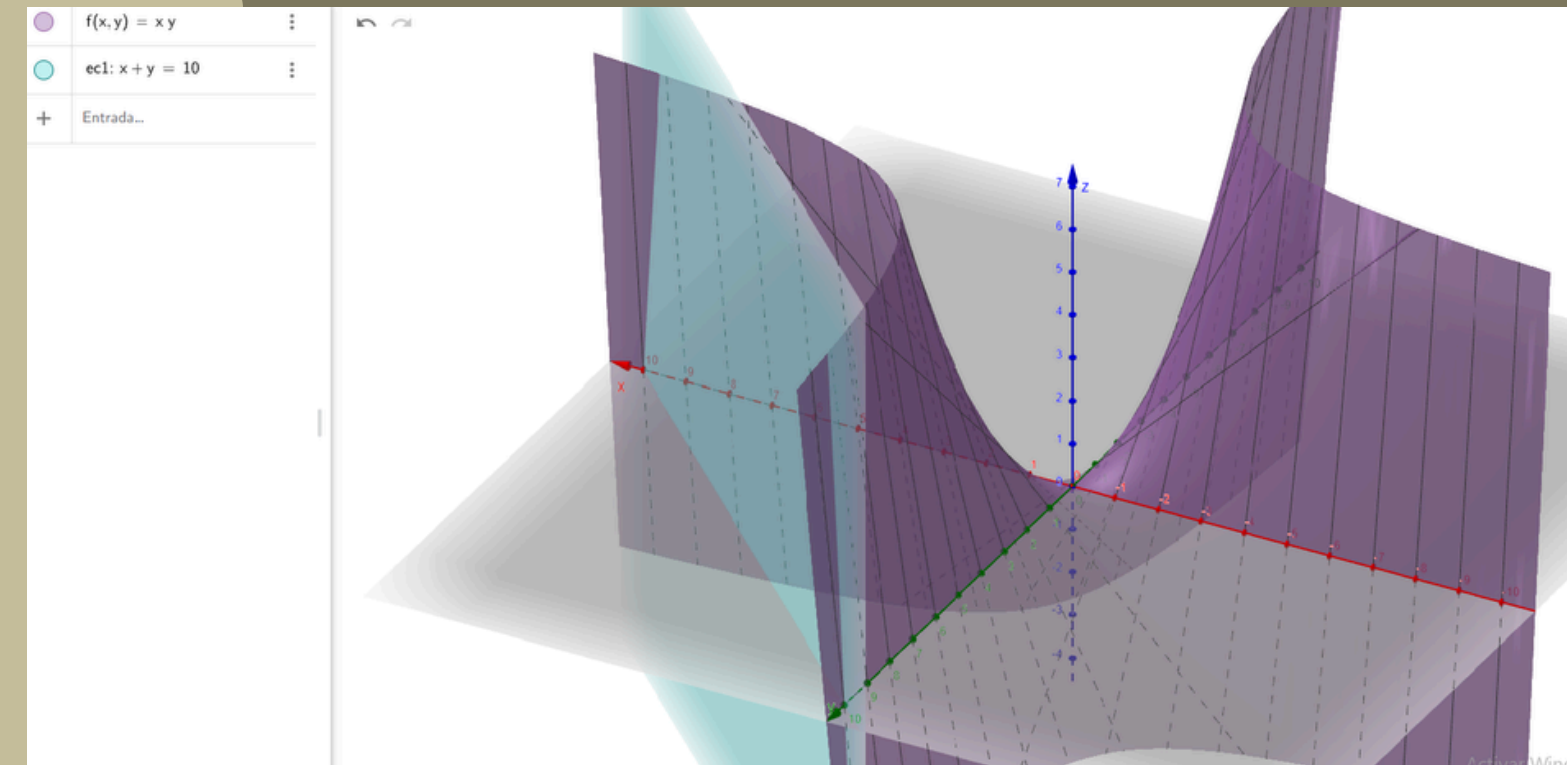
$$\frac{\partial L}{\partial x}: y - \lambda = 0, y = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}: x - \lambda = 0, x = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}: -(x + y - 10) = 0, x + y = 10$$

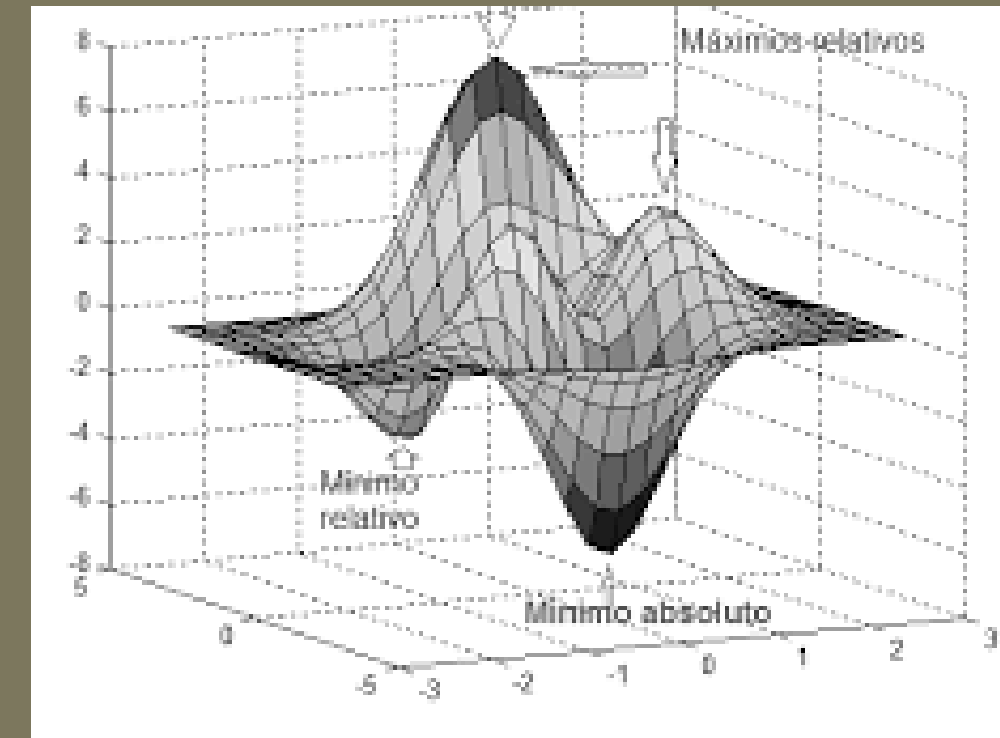
3 Sustituyendo $\lambda + \lambda = 10, \lambda = 5$

4 Valor máximo $f(5, 5) = 25$



Con el trabajo de los multiplicadores Lagrange recibe el reconocimiento de Euler y con ello a la edad de 19 años, lo nombran profesor de la Real Escuela de Artillería de Turín. Como lo hará en futuras ocasiones, Lagrange procede a trabar en un problema que Euler ya había analizado, es así como obtiene la ecuación de Euler Lagrange.

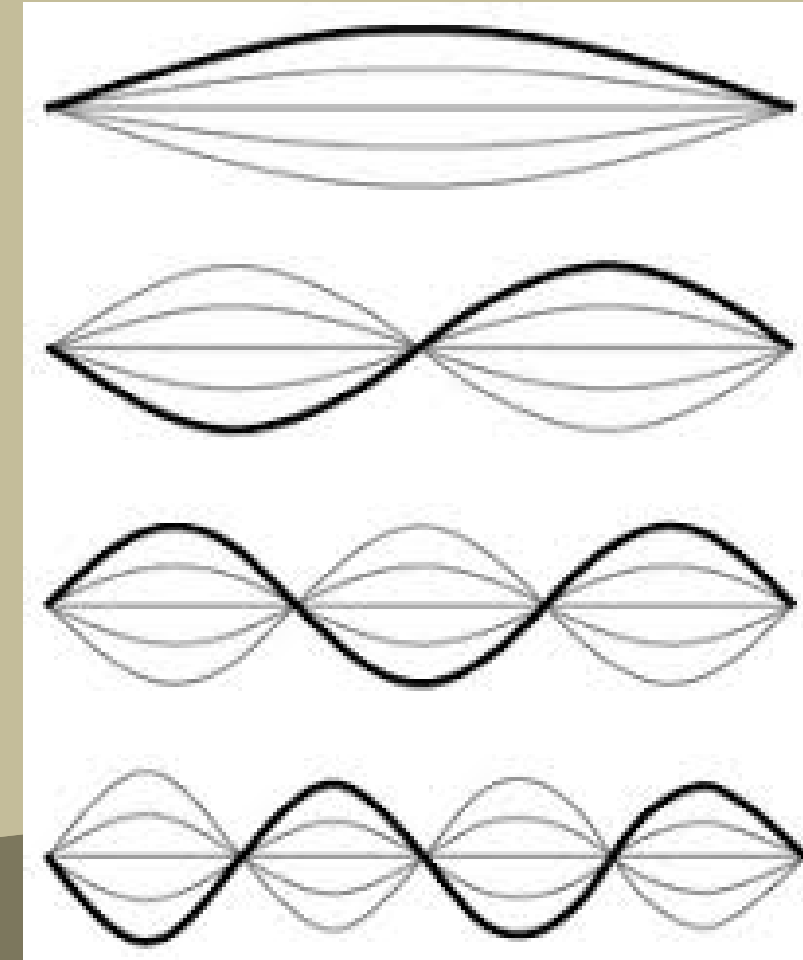
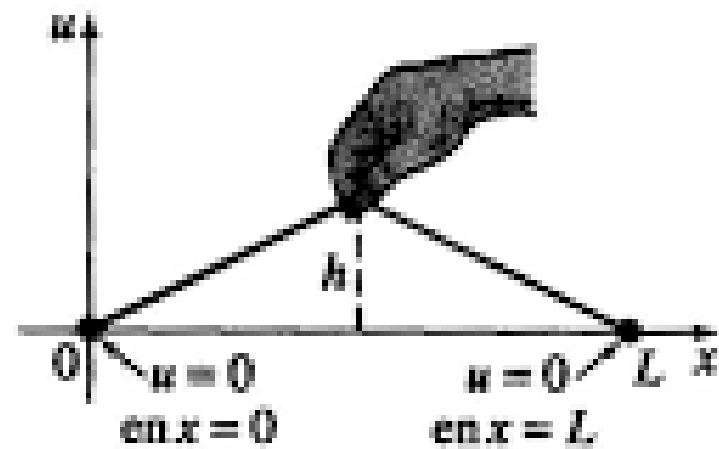
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$



LA CUERDA VIBRANTE

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

v es la velocidad de propagación de la onda



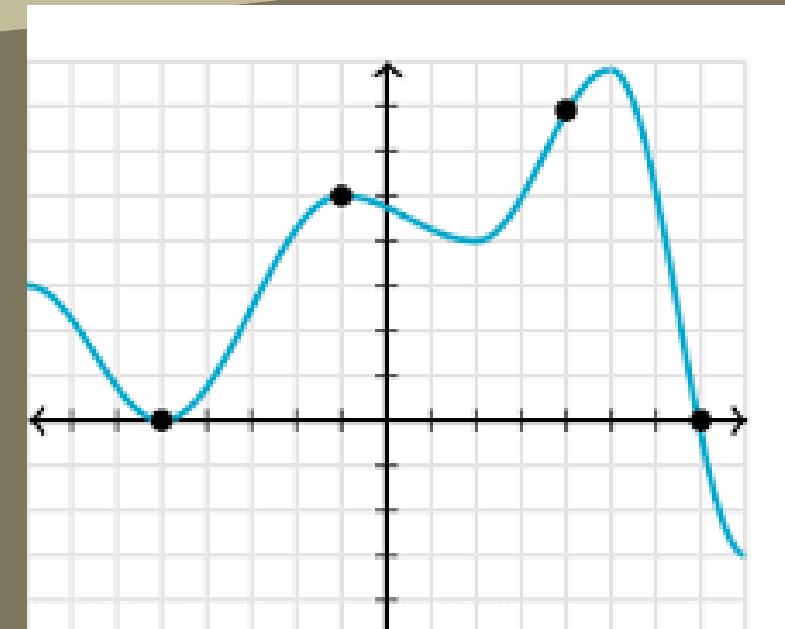
D'Alembert fue el primero en encontrar la ecuación correcta de la cuerda vibrante, hoy conocida como ecuación de onda.

LA CUERDA VIBRANTE

D'Alembert y Euler coincidieron en la solución a la ecuación de la cuerda vibrante, pero no lo hicieron al momento de considerar cuáles podrían ser curvas iniciales.

Para D'Alembert una función era tal, si era analítica, lo que significaba en su época, que la variable independiente y la dependiente estuvieran relacionadas mediante una única ecuación construida a partir de operaciones algebraicas.

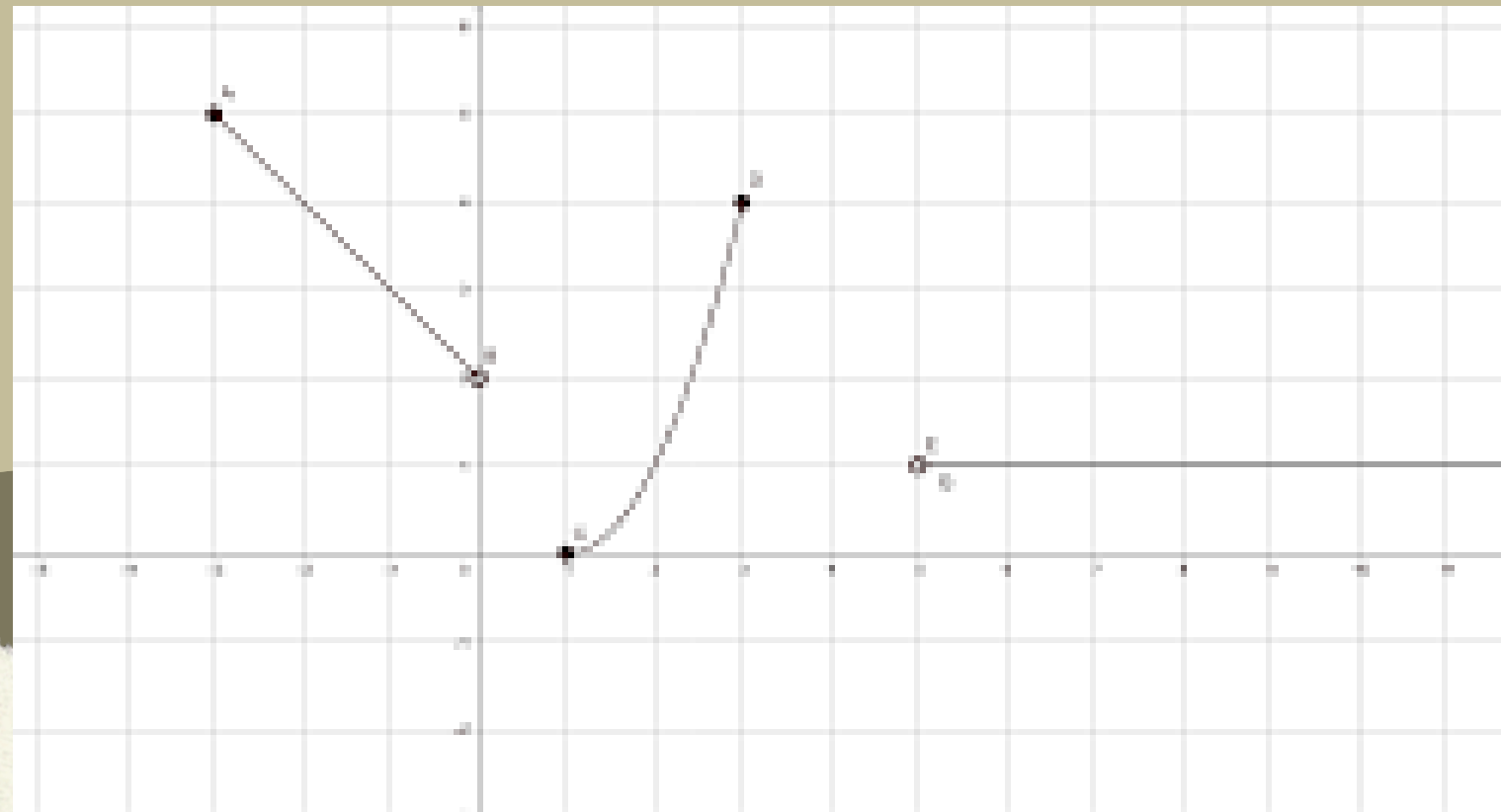
Además pedía que fueran continuas y derivables hasta segundo orden.



LA CUERDA VIBRANTE

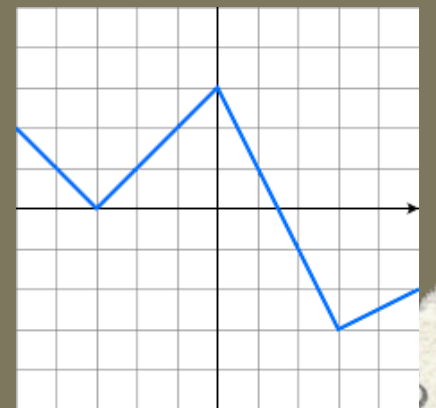
Euler tenía un concepto más general de función, también admitía funciones definidas a trozos.

Daniel Bernoulli entró en la discusión y dijo que cualquier curva inicial podía ser escrita como serie de senos y cosenos, pero lo hace sin dar una justificación matemática que lo sustente.



“LUCHAR CONTRA EL PREJUICIO DE AQUELLOS QUE OPINAN QUE LAS MATEMÁTICAS NUNCA PODRÍAN CONTRIBUIR AL VERDADERO CONOCIMIENTO DE LA FÍSICA”

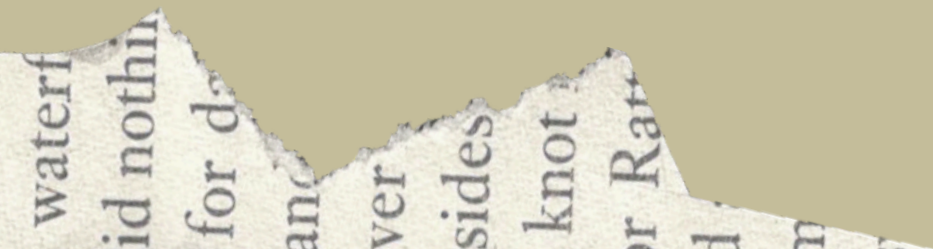
La discusión sobre la cuerda vibrante se encontraba estancada y fue hasta que Lagrange trabajó en este problema que se logró resolver la disputa, para ello Lagrange utilizó el ver a la partícula desplazándose en un medio elástico como lo es el aire, en vez de trabajarlo con la segunda ley de Newton (como D'Alembert y Euler), a pesar de que los cálculos que realizó contenían pasos dudosos, logró llegar a la misma conclusión de D'Alembert y Euler y esto fue sin asumir la continuidad en la función, por lo que condiciones establecidas por Euler eran suficientes.



ETAPA EN BERLÍN

Euler fue matemático de la corte de Federico de Prusia, pero con el paso de los años la relación entre ambos se deterioró hasta tal punto que el científico solicitó renunciar a su cargo... ¡en tres ocasiones distintas!

Fue entonces reemplazado por Lagrange, quien, al estar más versado en filosofía que su predecesor, logró ganarse el favor del monarca. Además, Lagrange se distinguía por su trato amable y su habilidad para evitar polémicas, lo que siempre le facilitó llevarse bien con los demás.



LAGRANGE Y LA TEORÍA DE NÚMEROS

Todo entero positivo es suma de cuatro cuadrados perfectos, a lo sumo.

SI P ES PRIMO, ENTONCES $(P - 1)! + 1$ ES MÚLTIPLO DE P .



LAGRANGE Y LAS ECUACIONES

En más de dos siglos y medio que van desde Del Ferro hasta Lagrange, ningún matemático había cuestionado la posibilidad de que las ecuaciones de grado superior a cuatro pudieran ser resueltas mediante radicales, se pensaba que la cuestión estaba en la incapacidad de los matemáticos para encontrar la solución.

Lagrange no solo encontró un método general para resolver las ecuaciones de grado menor o igual a cuatro, sino que también entendió la verdadera naturaleza del problema.

LAGRANGE Y LAS ECUACIONES

Paolo Ruffini (1765- 1822), un conocido de Lagrange, se encargaría treinta años más tarde de demostrar la certeza de esta afirmación.



LAGRANGE Y LAS ECUACIONES

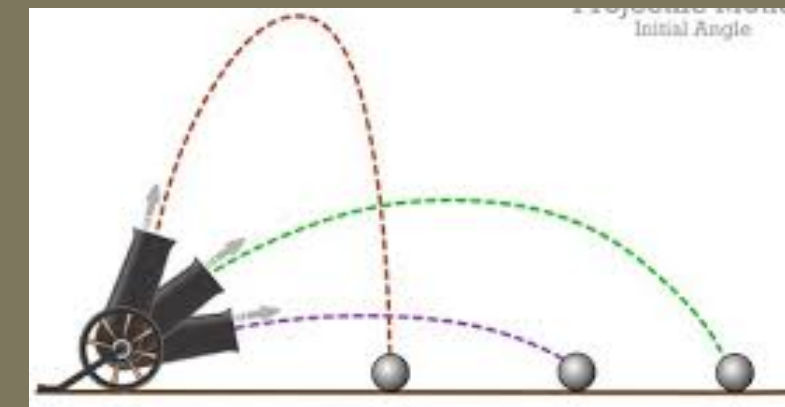
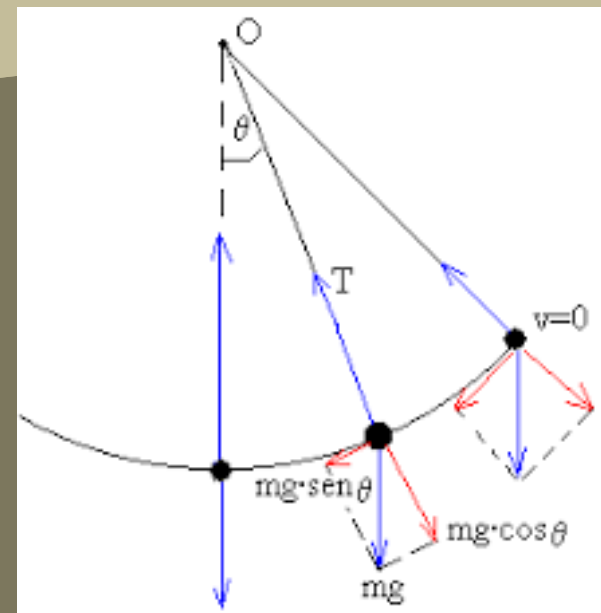
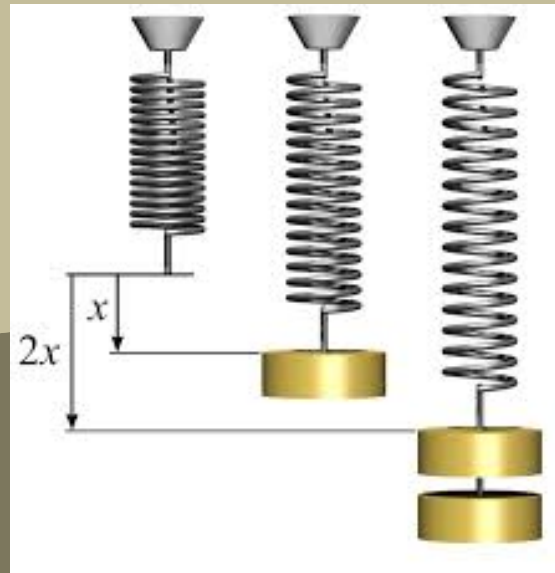
En 1773 publicó una memoria titulada "Sobre la forma de las raíces imaginarias de las ecuaciones", en la que perfeccionó algunos aspectos de las demostraciones que D'Alembert y Euler habían ofrecido del teorema fundamental del álgebra.

Sin embargo, en su tesis doctoral, Gauss sometió esta memoria a una crítica implacable y logró presentar la primera demostración rigurosa y satisfactoria de dicho teorema.



LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

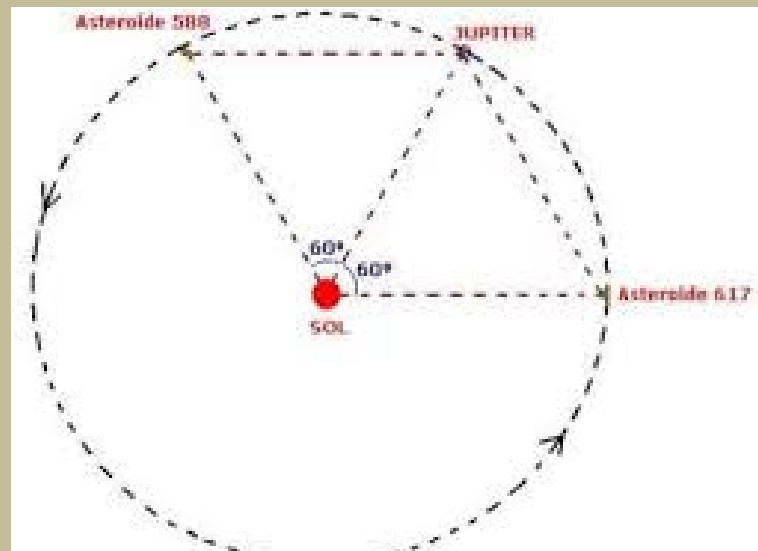
Surgen en el último tercio del siglo XVII al aplicar el cálculo infinitesimal a la resolución de problemas de la física.



EL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

Lagrange estudió el sistema formado por dos cuerpos de gran masa, por ejemplo, el Sol y Júpiter que se suponen aislados en el sistema solar y giran de forma circular alrededor de su centro de masas. Una tercera masa pequeña, sometida únicamente a la atracción gravitacional de los dos cuerpos grandes, también gira de manera rígida y estable alrededor de dicho centro de masas.

De las cinco posiciones posibles de equilibrio para esa masa pequeña, tres son inestables y dos son estables; estas últimas se encuentran en los vértices de triángulos equiláteros.



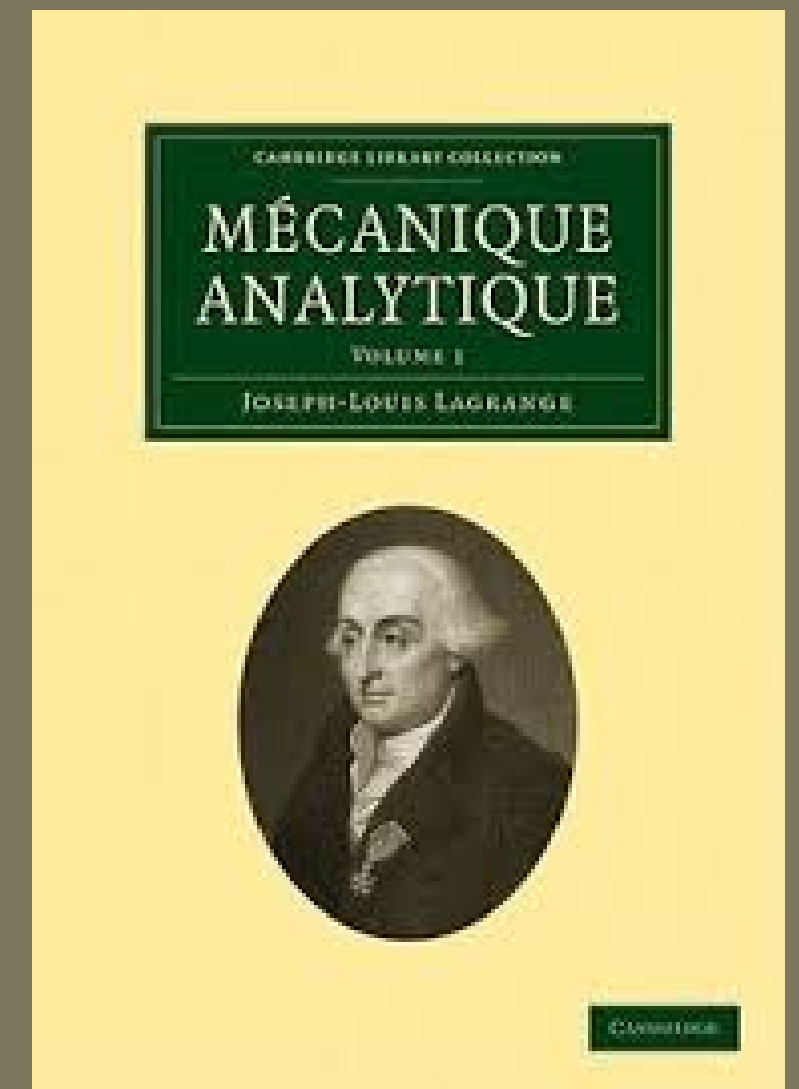
“NO SE LO QUE HARÉ EN MATEMÁTICAS DENTRO DE DIEZ AÑOS” O “LA MINA MATEMÁTICA ES YA DEMASIADO PROFUNDA Y A NO SER QUE SE DESCUBRAN NUEVAS VETAS TENDRÁ QUE SER ABANDONADA”

Tras cerca de treinta años de trabajo, él y otros grandes matemáticos del siglo XVIII han llevado la matemática a un grado de desarrollo inimaginable pero ahora se encuentran agotados intelectualmente para encontrar nuevos caminos para el desarrollo de las matemáticas.

Aunado a esto, la esposa de Lagrange se encuentra gravemente enferma.



A finales de 1782, tras terminar la redacción de la primera edición de la Mecánica analítica (será publicada hasta 1788), obra cumbre de la física matemática del siglo XVIII y una de las obras maestras de la literatura científica de todos los tiempos, Lagrange suspende temporalmente sus trabajos y se dedicó en cuerpo y alma a cuidar a su esposa.



1783 FUE, SIN DUDA, EL PEOR AÑO DE SU VIDA

Por su correspondencia con Euler, supo del fallecimiento de Daniel Bernoulli, ocurrido el 17 de marzo de 1782.

Durante la primera mitad de 1783, dedicó todo su tiempo al cuidado de su esposa, quien finalmente murió en agosto, sumiéndolo en una profunda depresión.

El 18 de septiembre falleció de manera repentina Euler, su maestro y amigo, el hombre que mejor había sabido apreciar su talento y que había reconocido públicamente sus méritos.

En aquellos días, D'Alembert, gravemente enfermo, le escribió una carta con estas palabras:

“En nombre de Dios, no renuncies al trabajo, la más fuerte de todas las distracciones. Adiós, quizá por última vez. Recuerda al hombre que más te ha estimado y honrado en el mundo”.

D'Alembert murió el 29 de octubre de ese mismo año.



ADIÓS A BERLÍN

El 17 de agosto de 1786, murió su protector Federico el Grande. Su sobrino y sucesor Federico Guillermo II no contaba ni por asomo, con el carácter ni el talento de su tío. Su tendencia al misticismo, su nacionalismo anti francés y su nulo interés por la ciencia hicieron incómoda la presencia en Berlín de sabios extranjeros.



NO DEBIÓ DUDAR MUCHO LAGRANGE ANTES DE ACEPTAR UNA OFERTA QUE LE HICIERON DESDE PARÍS, REUNÍA LAS MEJORES CONDICIONES DESDE EL PUNTO DE VISTA CIENTÍFICO ALLÍ SE ENCONTRABAN SUS COLEGAS LAPLACE Y LEGENDRE, DOS MATEMÁTICOS DE PRIMERA FILA Y DE CIERTO MODO SUS DISCÍPULOS, Y ADEMÁS, ÉL SE SENTÍA MEDIO FRANCÉS.

POR FIN PUDO CONOCER PERSONALMENTE A LAPLACE Y LEGENDRE, ASÍ COMO OTROS HOMBRES DE CIENCIA ENTRE LOS QUE CABE DESTACAR LAVOISIER, CARNOT, COULOMB Y MONGE.



Lavoisier y la reina María Antonieta fueron los encargados de darle los honores en su llegada a París, invitándole a múltiples fiestas y diversos actos de la corte. A instancias de la reina, Lagrange fue instalado en el palacio de Louvre





Desde su llegada a París y hasta la toma de la Bastilla el 14 de julio de 1789, Lagrange se dedicó al estudio de diversas materias, en especial la química, la medicina y la filosofía. Da la impresión de que las matemáticas habían dejado de interesarle; sin embargo, el estallido de la Revolución francesa acabaría con su apatía.

Fue por aquellas fechas cuando sus contemporáneos comenzaron a advertir la enorme trascendencia de su obra magna, la **Mecánica analítica**.

“ME PROPONGO REDUCIR LA TEORÍA DE LA MECÁNICA Y EL ARTE DE RESOLVER LOS PROBLEMAS QUE CON ELLA SE RELACIONAN, A FÓRMULAS GENERALES, DE LAS CUALES SU SIMPLE DESARROLLO DAN TODAS LAS ECUACIONES NECESARIAS PARA LA SOLUCIÓN DE CADA PROBLEMA.. LOS MÉTODOS QUE EXPLICO NO EXIGEN CONSTRUCCIONES NI CONSIDERACIONES GEOMÉTRICAS O MECÁNICAS, SINO ÚNICAMENTE OPERACIONES ALGEBRAICAS SOMETIDAS A UN PROCESO REGULAR Y UNIFORME, TODOS AQUELLOS QUE AMEN EL ANÁLISIS, CONTEMPLARÁN COMO LA MECÁNICA SE CONVIERTE EN UNA NUEVA RAMA DE ÉL Y SABRÁN AGRADECERME QUE YO HAYA EXTENDIDO EL DOMINIO DEL MISMO DE ESTA MANERA”

MÉCANIQUE

ANALYTIQUE

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat Conservateur, Grand-Officier de la Légion d'Honneur, et Comte de l'Empire.

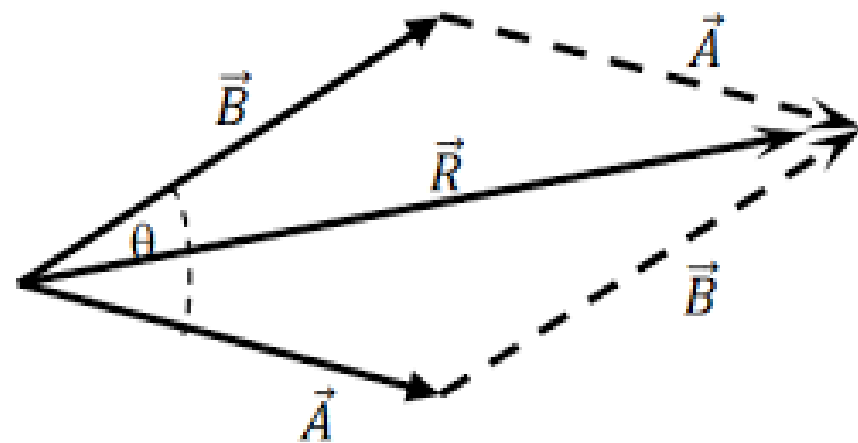
NOUVELLE ÉDITION,
REVUE ET AUGMENTÉE PAR L'AUTEUR.

TOME PREMIER.

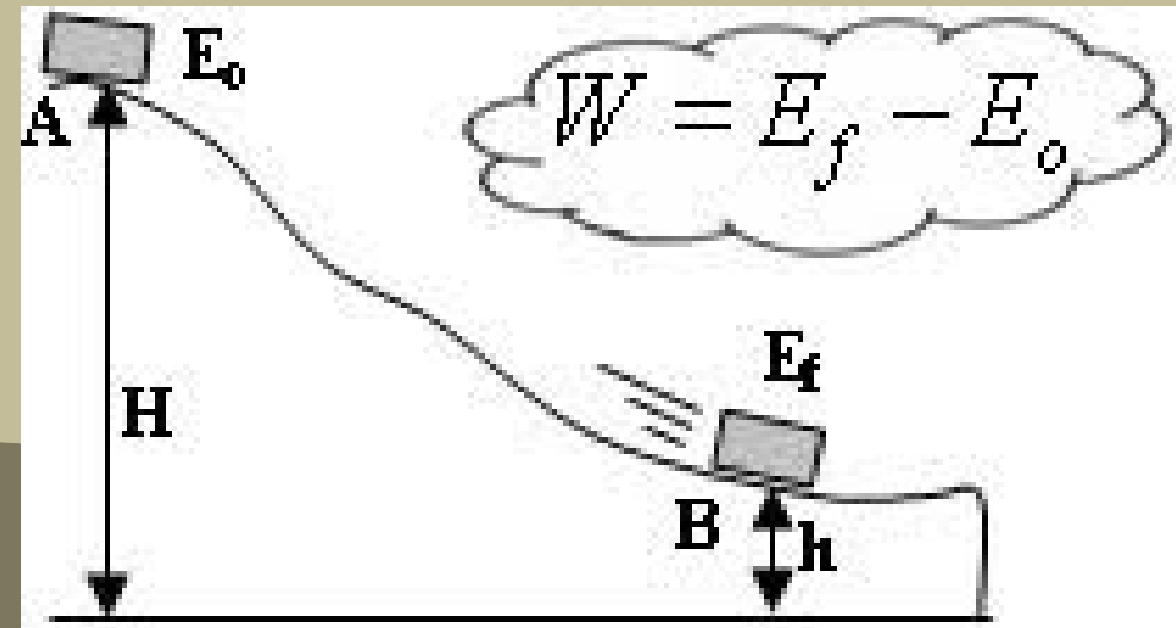
PARIS,
N^o 1 V^o COURCIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE POUR LES MATHÉMATIQUES.
1811.



- Principio de mínima acción.
- El teorema del paralelogramo de fuerzas.
- Principio de D'Alembert.
- Teorema de las fuerzas vivas.



$$R^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos \theta$$



A GENERAL FOR
 $P/Q = -dq/dp$ or $P dp + Q dq = 0$. This is the general
 two forces.
 Let us now consider the equilibrium of three forces P, Q, R with the virtual
 represented by dp, dq, dr . Let $Q = Q' + Q''$ and assume, which is permissible, that
 fraction Q' of the total force Q is such that $P dp + Q' dq = 0$. This force will then be in
 equilibrium with the force P . In order to obtain overall equilibrium, the remaining fraction
 Q'' of the force Q must be in equilibrium with the force R which will give the equation
 $Q'' dq + R dr = 0$. When the latter expression is added to the former and recalling that
 $Q' + Q'' = Q$, the following equation is obtained
 $P dp + Q dq + R dr = 0$.

If there is a fourth force S for which the virtual velocity is represented by the increment ds
 and furthermore if one postulates $Q = Q' + Q''$ and $P dp + Q' dq = 0$, then $R = R' + R''$
 and $Q'' dq + R'' dr = 0$. Then Q' will be in equilibrium with P, R' will be in equilibrium
 with Q' and to obtain overall equilibrium, R'' must be in equilibrium with S so that one
 must have $P' dr + S ds = 0$. These three equations can then be combined to obtain

$$P dp + Q dq + R dr + S ds = 0.$$

In the same fashion, this formulation can be further extended to an arbitrary number of forces.

2. Therefore, in general, for the equilibrium of an arbitrary system of forces P, Q, R , etc.
 acting in the directions p, q, r , etc. and applied to any number of bodies or mass points
 arranged in an arbitrary fashion, an equation such as the following will be obtained

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = 0.$$

This is the general formula of statics for the equilibrium of an arbitrary system of forces.
 We will call each term of this formula, such as $P dp$, the moment of the force P, Q, R , etc.
 by its virtual velocity. Then, the general formula of statics is that the sum of the moments
 of all the forces is equal to zero. The only difficulty in applying this formula will be to
 determine, depending on the nature of the system, the values of the differentials dp, dq, dr ,
 etc.

Therefore, the system will be considered in two configurations which differ infinitesimally
 at general expressions for the differentials will be sought by introducing in these
 by taking the quantities as there are arbitrary coordinates which define
 displacement is equally possible, the weight can descend and upset the state of equilibrium.

20. Conversely, it can be proved that if the equation
 $Pp + Qq + Rr + \dots = 0$
 is valid for all possible infinitesimal displacements of the system, the system will
 be in equilibrium and since the weight is immobile during these displacements

THE VARIOUS PRINCIPLES OF STATICS

as mass points and arranged such that they can model any given arbitrary system. In this
 fashion, the same weight will produce, by means of the rope which wraps around all the
 pulleys, different forces which act on the various points of the system along the direction of
 the ropes which converge at the pulley attached to these points. The ratio of the weight to
 one of these forces is equal to the number of ropes so that these forces will be represented
 by the number of ropes which contribute to their creation by their tension.

In order for this system to remain in equilibrium, it is obvious that the weight must
 not descend when portions of the system are subjected to any arbitrary and infinitesimal
 displacement. Indeed, since the weight always has an inclination to descend, it will descend
 if there is a displacement of the system which allows it to descend. The weight will then
 necessarily descend and it will produce a displacement in the system.

Let us denote by p, q, r , etc. the infinitesimal displacements that this motion will impart to
 the various parts of the system in the direction of the forces which are applied to them and by
 P, Q, R , etc. the number of ropes of the pulley applied to these parts to produce these same
 forces. Then it is obvious that the displacements p, q, r , etc. will also be the magnitude
 of the displacements by which the mobile pulleys will approach the corresponding fixed
 pulleys. Since the pulleys draw nearer to each other, the length of the rope which is wound
 about the pulleys would be reduced by the quantities Pp, Qq, Rr , etc. Therefore, because
 of the invariable length of the rope, the weight would descend by the following amount
 $Pp + Qq + Rr + \dots$. Consequently, the force represented by the letters P, Q, R , etc. will be
 in equilibrium if the following equation holds

$$Pp + Qq + Rr + \dots = 0,$$

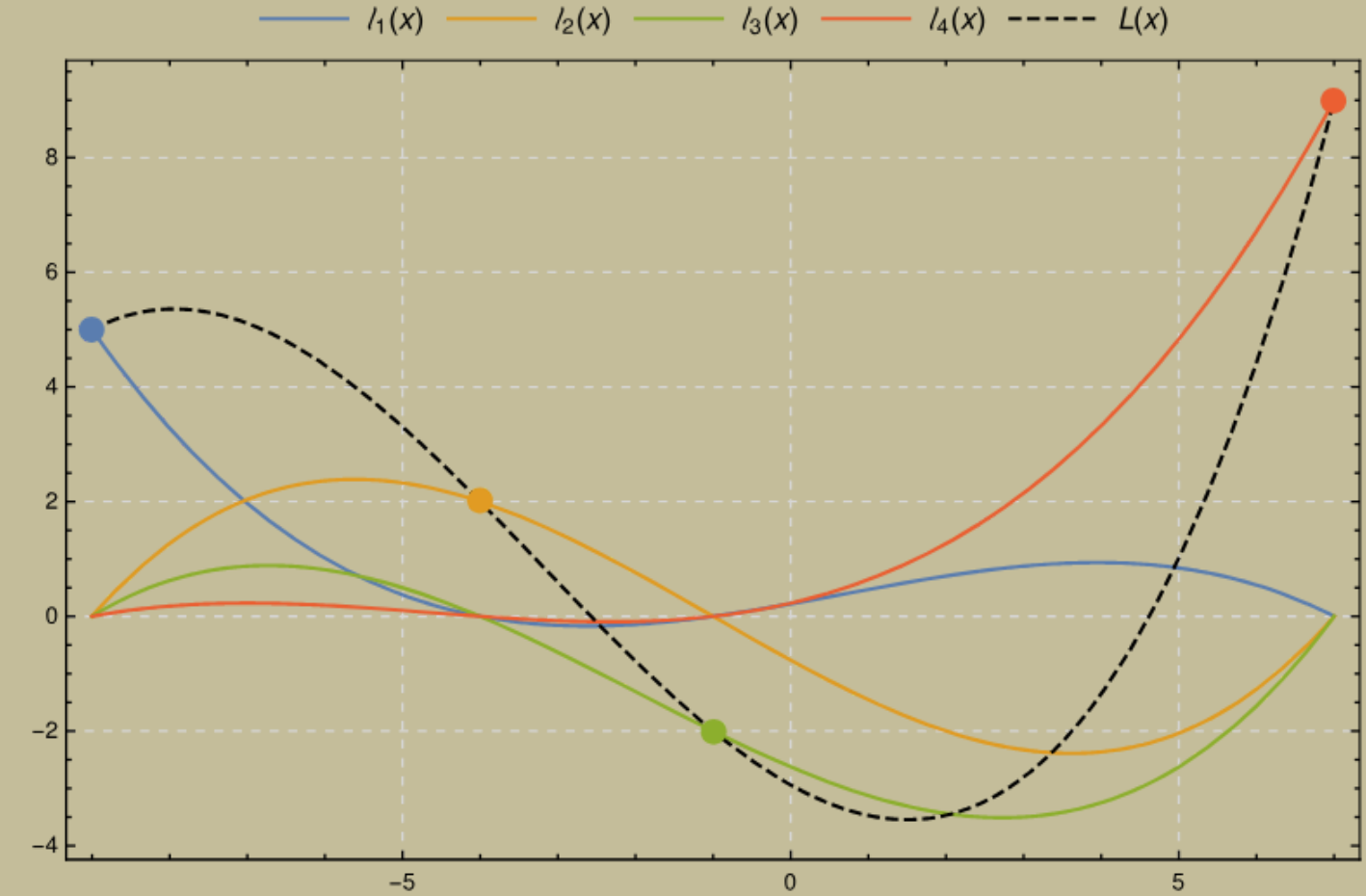
which is the analytical expression for the general Principle of Virtual Velocities.

19. If the quantity $Pp + Qq + Rr + \dots$ were negative instead of equal to zero, it seems that
 this condition would suffice to establish equilibrium because it is impossible for the weight
 to ascend by itself. But it must be recognized that whatever the connection between the
 parts which form the given system, the relations which can result between the infinitesimal
 quantities p, q, r , etc. can only be expressed by differential equations. Consequently, the
 relations between these quantities are linear and one or several among them will necessarily
 be indeterminate and these quantities are linear and one or several among them will necessarily
 those quantities are such that they could change sign. Hence, if in a given displacement of
 the system, the value of the quantity $Pp + Qq + Rr + \dots$ is negative, it can become positive
 by taking the quantities p, q, r , etc. with opposite signs. Furthermore, since the reverse
 displacement is equally possible, the weight can descend and upset the state of equilibrium.

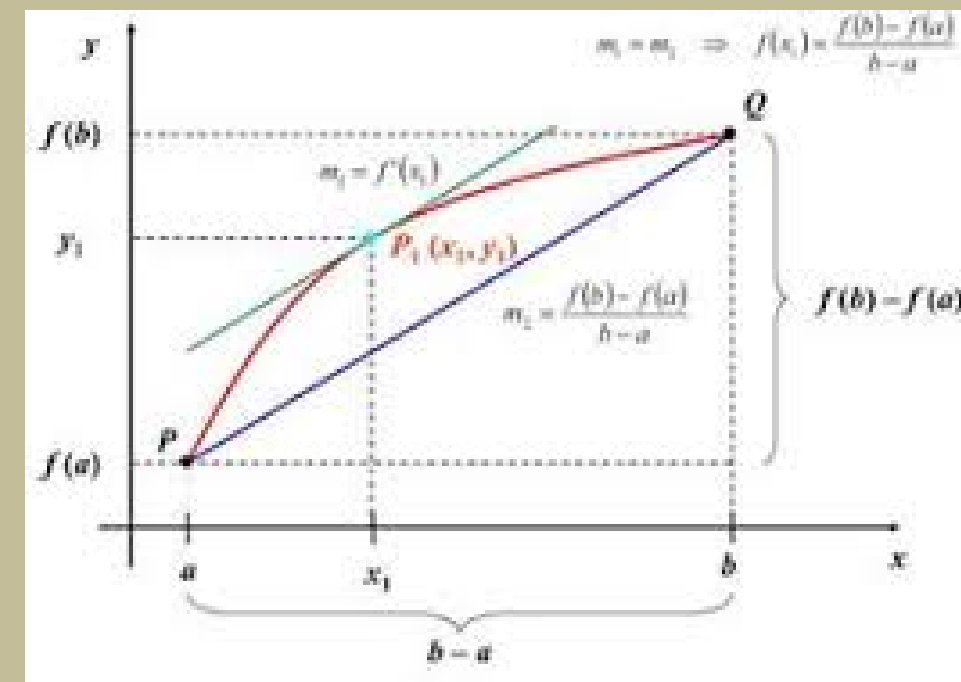
20. Conversely, it can be proved that if the equation
 $Pp + Qq + Rr + \dots = 0$
 is valid for all possible infinitesimal displacements of the system, the system will
 be in equilibrium and since the weight is immobile during these displacements

SEGUNDAS NUPCIAS

Polinomio de interpolación polinómica de Lagrange



TEOREMA DEL VALOR MEDIO



UNAS CUANTAS PALABRAS PARA SUS COLEGAS MÁS JÓVENES

“Mi querido colega, gracias por hacerme ver que yo también sé Geometría. Usted ha mostrado hoy aquí muchas cosas importantes y bellas; a mí me hubiera gustado haberlas encontrado yo mismo” y dirigiéndose a Laplace le dijo: “Aplicando el Análisis a la Geometría, este demonio de hombre se hará inmortal”



Gaspard Monge



UNAS CUANTAS PALABRAS PARA SUS COLEGAS MÁS JÓVENES



Carl Friedrich Gauss

“Vuestras Disquisitiones os han elevado de golpe al primer rango de los matemáticos, y yo pienso que la última sección contiene el más bello descubrimiento analítico que se haya hecho en mucho tiempo... [Se refiere Lagrange, a la teoría general de funciones circulares y su aplicación a la construcción de polígonos regulares de n lados]

Creed, señor, que nadie aplaude vuestro éxito más sinceramente que yo”

UNAS CUANTAS PALABRAS PARA SUS COLEGAS MÁS JÓVENES



Augustin Louis Cauchy

En cierta ocasión, estando Lagrange y Laplace en la secretaría del Senado, vieron en un rincón estudiando al pálido y enfermizo Cauchy y el primero comentó al segundo: "Veis a este joven, muy pronto nos reemplazará a todos como matemático"

**GRACIAS
TOTALES**

