

Reporte de lectura

La situación económica y social de Italia y la situación específica de la Toscana en los siglos XII y XIII jugaron un papel importante en la difusión del sistema decimal.

Los siglos XII y XIII fueron en Italia la época de las ciudades estado. El comercio era una parte importante de la vida económica de estas ciudades, en particular de las cuatro repúblicas marítimas Amalfi, Genova, Pisa y Venecia. Hasta 1284, Pisa desempeñó un papel importante en el comercio con el mundo musulmán occidental. Dado que la economía de la región se basaba en el comercio, la habilidad para realizar cálculos de manera sencilla, rápida y precisa era indispensable, lo que hizo que el nuevo sistema de numeración introducido por Fibonacci resultara muy atractivo. La adopción del sistema de numeración decimal y de los números indoarábicos en Europa se debió a la oportunidad de Fibonacci para visitar países árabes en los que este sistema había sido adoptado de India; su inteligencia para entender las ventajas derivadas de los cálculos en líneas; y la situación socioeconómica de toda una región italiana en la que el comercio era la principal actividad económica.

Leonardo acompañó a su padre, Guglielmo Bonacci o Bonaccio que en los años 80 del siglo XII era un delegado de Pisa en la oficina de aduanas de la ciudad de Bugia, Algeria; y allí se dedicó a estudiar las nueve figuras del sistema de numeración indio. Leonardo estaba sorprendido por las ventajas de este sistema de numeración, así que aprendió todos los detalles del sistema decimal posicional y escribió un libro sobre el tema con el rigor euclidiano, para difundir el sistema en Europa.

El *Liber Abaci*, publicado en el siglo XIII, marca el inicio de la carrera matemática de Leonardo. Este libro es clave en la educación matemática de la época, pues fue escrito para enseñar a los occidentales el uso de numerales indoarábicos y por lo tanto explica una amplia variedad de propiedades fundamentales y operaciones matemáticas. Dividido en 15 capítulos, los primeros 5 capítulos del libro se centran en explicar las operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división de enteros. Los capítulos 6 y 7 abordan las fracciones y cómo operarlas junto con los enteros. Sin embargo, lo más interesante para los comerciantes y la sociedad italiana de la época eran los capítulos que trataban sobre asociaciones, acuñación de dinero y cambio de moneda, que demuestran que el libro tenía el propósito de introducir a los comerciantes en un conjunto de conocimientos que podrían ser de gran importancia para ellos.

Después de la publicación del *Liber Abaci*, entre los siglos XIII y XVI, muchos matemáticos escribieron tratados sobre el uso de los números indoarábicos y sus operaciones, aunque de manera menos profunda y rigurosa que Fibonacci. El trabajo de Fibonacci sirvió como punto de referencia para muchos de estos tratados, denominados tratados de ábaco. Las ventajas del sistema de numeración decimal y sus operaciones fueron apreciadas solo después de que los resultados de Leonardo se popularizaron y se escribieron en lenguas vernáculas y con un carácter más práctico y menos riguroso y teórico, pues los últimos capítulos del *Liber Abaci*, dedicados a la geometría, el tamaño voluminoso del libro junto con su rigor y el uso del latín, en el cual convergen tanto las matemáticas hindú-arábigas como las matemáticas griegas

clásicas junto con las ideas de Leonardo, hicieron del *Liber Abaci* un texto difícil para matemáticos poco expertos.

Para entender los resultados y la relevancia de Fibonacci, así como las características que lo hicieron tan influyente en su época y en las posteriores, es necesario considerar cómo se realizaban las operaciones antes de que se popularizara su trabajo y cómo esas técnicas mejoraron durante el siglo XI.

Antes del siglo XIII, el sistema decimal y los números hindú-arábigos no eran ampliamente conocidos en Europa. Entre los siglos XI y XIII, las cuatro operaciones básicas se realizaban usando el ábaco, un instrumento que permitía desarrollar estas operaciones a partir de procedimientos predeterminados, con cada columna o línea que representaba una potencia del número base del sistema a emplear.

El uso del ábaco enfrenta ciertas dificultades, por ejemplo, la representación posicional de un número en un ábaco no es sencilla, ya que implica comprender el papel del dígito cero, lo cual no es indispensable para los cálculos con el ábaco pero sí lo es para escribir los números en notación posicional. Otras dificultades que presenta el uso del ábaco es la complejidad para realizar multiplicaciones y divisiones. La división, por ejemplo, se realizaba a través de restas sucesivas, implicando una larga serie de operaciones, y el cálculo de raíces cuadradas era aún más complejo, a menudo requería el uso de más de un ábaco.

El ábaco era utilizado en las sociedades griega y romana, pero desapareció casi por completo en la temprana Edad Media en Europa. Fue reintroducido por Gerbert d'Aurillac (955-1003), quien pasó un periodo en las abadías catalanas, donde entró en contacto con la civilización árabe y aprendió el sistema decimal posicional. Aunque no está claro si comprendió la importancia del cero en dicho sistema, sí entendió el valor del cálculo con el ábaco e inventó un ábaco particular que se difundió por Europa entre los siglos XI y XIII.

Para apreciar las diferencias conceptuales y prácticas entre el cálculo con un ábaco y el cálculo dentro de un sistema posicional, se pueden comparar el ábaco de Salamina, un antiguo ábaco griego, y el ábaco de Gerbert, que puede considerarse una fase intermedia entre el cálculo con un ábaco clásico y el cálculo en línea de un sistema posicional.

El ábaco de Salamina facilitaba los cálculos monetarios siguiendo los principios ordinarios referentes al cálculo con el uso de un ábaco, mediante fichas que representaban los números y que tenían un valor según su posición en las columnas. La idea de una base numérica para el sistema no estaba completamente desarrollada, ya que en algunos casos la base era 10 y en otros era 6, de acuerdo a las conversiones monetarias.

Por otro lado, el ábaco de Gerbert está compuesto por un tablero con semicírculos que representan las sucesivas potencias de 10, las fichas que representan los números no son iguales, como es el caso de un ábaco ordinario, sino que cada una de ellas tiene inscripciones de dígitos indios del siglo X, y para representar el dígito cero se dejaba un espacio del tablero sin ninguna ficha.

Antes de la reintroducción del ábaco por Gerbert, los cálculos en Europa durante la Edad Media se realizaban con el uso de números romanos. Aunque ciertos estudios han demostrado que muchas operaciones aritméticas son posibles con los números romanos, estos cálculos

eran mucho más limitados que los permitidos por el ábaco. En ese contexto, el ábaco de Gerbert facilitó la transición hacia métodos de cálculo más avanzados y permitió a Fibonacci introducir y difundir el sistema de numeración decimal y los números indoarábigos en Europa. El éxito de Gerbert d'Aurillac en la reintroducción del ábaco en Europa en el siglo XI está relacionado con los cambios que transformaron a la civilización europea. En este periodo, Europa experimentó un crecimiento poblacional y económico. Ciudades en Flandes y el norte de Francia se convirtieron en centros de manufactura textil, la agricultura mejoró y las ciudades italianas se destacaron como centros comerciales globales. Como consecuencia de esto, las relaciones comerciales se volvieron más importantes y el comercio internacional comenzó a ser una actividad económica. Este entorno de creciente comercio internacional y la necesidad de intercambiar bienes y dinero, y realizar conversiones de moneda, dieron lugar a la reintroducción del ábaco y posteriormente hicieron que el sistema decimal y las operaciones en línea promovidas por Fibonacci fueran adoptadas ampliamente.

La adopción del sistema decimal y los números hindú-arábigos en Europa se debió a varios factores y a una pluralidad de circunstancias. La interpretación clásica sobre la introducción de los dígitos indoarábigos y el sistema posicional en Europa, así como el desarrollo de las escuelas de ábaco y los tratados de ábaco, se basa en la figura de Fibonacci quien introdujo o, si consideramos a Gerbert, reintrodujo y difundió los dígitos indoarábigos y el cálculo con el sistema posicional. La mayoría de los problemas de Fibonacci fueron creados por él mismo. Por ejemplo, el método de multiplicación que utilizaba, así como algunos problemas relacionados con el interés compuesto, para los cuales propuso varios métodos de solución.

Entre la segunda mitad del siglo XII y el primer cuarto del siglo XVI, Italia fue uno de los países más avanzados en términos de estructura económica y desarrollo de las matemáticas y la ciencia. Las escuelas de ábaco se desarrollaron en varias regiones de Italia durante el siglo XIII, enseñando cálculos con números hindú-arábigos. Estas escuelas estaban estrechamente relacionadas con el desarrollo social y económico de la época, pues la educación matemática es un fenómeno social que está influenciado por las necesidades del mercado laboral y los conocimientos básicos de matemáticas necesarios para que cada individuo pueda realizar operaciones indispensables en la vida cotidiana y cambia de acuerdo a las modificaciones del entorno social. El legado de las escuelas de ábaco fue importante en la educación matemática de muchos matemáticos posteriores de finales de la Edad Media y del Renacimiento, por ejemplo de Luca Pacioli que después desempeñó un papel relevante en la formación de Leonardo Da Vinci, las escuelas del ábaco también influyeron en matemáticos como Scipione del Ferro, Niccoló Fontana, Gerolamo Cardano y Rafael Bombelli. Estos matemáticos fueron fundamentales en el desarrollo del álgebra y en el estudio de las soluciones a ecuaciones de tercer y cuarto grado.

Uno de los métodos más innovadores utilizados en las escuelas de ábaco fue el método de la multiplicación empleado por Fibonacci, que se convirtió en un estándar en la enseñanza de matemáticas. En su obra *Liber Abaci*, Leonardo detalló la multiplicación en un capítulo específico, dividiéndolo en partes que explicaban cómo multiplicar números de distintos dígitos, desde dos hasta un número arbitrario de dígitos e incluyó métodos para realizar

multiplicaciones de memoria. Todas las explicaciones son detalladas lo cual demuestra el compromiso que tenía Leonardo para introducir al lector en todos los detalles de las propiedades del sistema decimal y las operaciones realizadas con él.

La forma en que Leonardo explica la multiplicación es muy educativa porque destaca el uso de las posiciones y las operaciones relacionadas con las potencias de 10 en función de las cuales los números se escriben en el sistema decimal. Comparado con el ábaco de Gerbert, las técnicas de Fibonacci eran más avanzadas, ya que utilizaba números escritos con pluma en lugar de fichas y consideraba el dígito 0 en las operaciones, tratándolo del mismo modo que el resto de números naturales desde el punto de vista operativo. Pueden parecer insignificantes estas diferencias pero de manera conceptual indican un avance significativo en la metodología matemática.

Otra innovación significativa fue la manera en que Leonardo desarrolló la extracción de raíces cuadradas, un problema complicado en su tiempo. Su método ofrecía reglas claras para el cálculo con radicales y explicaba cómo determinar la cantidad de dígitos en la raíz de un número dado, lo cual era novedoso para el mundo medieval occidental.

Las escuelas de ábaco, organizadas y financiadas por los municipios, también fueron importantes en la difusión del sistema decimal. Los maestros de ábaco, considerados los primeros matemáticos profesionales porque generaban sus ingresos a partir de sus capacidades matemáticas y docentes, variaban en estatus social y económico, desde artesanos hasta personas relativamente ricas. Estas escuelas eran esenciales para la educación matemática y para satisfacer las necesidades del mercado laboral. Las ciudades más grandes como Florencia y Venecia contaban con numerosas escuelas privadas, en las ciudades más pequeñas, estas escuelas eran públicas. En Florencia, operaron casi 20 escuelas de ábaco entre la segunda mitad del siglo XIII y la primera mitad del siglo XVI, con aproximadamente 70 maestros. Figuras como Paolo dell'Abaco y Benedetto da Firenze, maestro de Leonardo Da Vinci, trabajaron en estas instituciones. Familias como los Calandri también produjeron varios maestros de ábaco influyentes, como Pier Maria Calandri, maestro de Niccoló Machiavelli, y Filippo Calandri, maestro de Giuliano de' Medici. En Pisa, después de Fibonacci, la primera presencia documentada de escuelas de ábaco data de la segunda mitad del siglo XIV.

La enseñanza en las escuelas de ábaco estaba organizada en módulos o secciones, conocidas como mutas. La primera muta, llamada librettine, incluía una introducción a los dígitos indoarábigos, así como adición, sustracción y multiplicación entre enteros. Otras mutas se dedicaban a la división, fracciones y sus operaciones, la regla de tres y cálculos para el intercambio de dinero. Los tratados de ábaco son otro aspecto importante asociado a la educación matemática de la Edad Media. Estos textos pueden considerarse como manuales utilizados en las escuelas de ábaco, surgieron a finales del siglo XIII y se convirtieron en una forma de literatura matemática que floreció hasta el siglo XVI. En 1980, se catalogaron 300 tratados de ábaco, escritos a mano o impresos en Italia durante este período, abarcando tanto la Baja Edad Media como el Renacimiento.

La estructura de estos tratados varía según la época y el autor, pero comparten algunas secciones comunes. Casi todos incluyen una introducción a los dígitos indoarábicos, las cuatro operaciones aritméticas básicas, la resolución de ecuaciones de segundo grado, problemas relacionados con el comercio y el intercambio de dinero, el cálculo de raíces cuadradas y algunas nociones de geometría. Sin embargo, también presentan diferencias significativas, especialmente en el nivel de los problemas propuestos, las explicaciones y las soluciones, que cambian considerablemente de un autor a otro.

Algunos tratados ofrecen una larga lista de fórmulas para resolver ecuaciones de segundo grado para las cuales seguían el modelo establecido por Al-Khwarizmi y Fibonacci, e incluso incluyen intentos, a veces erróneos, para resolver ecuaciones de tercer grado, errores transmitidos de un autor a otro; por lo que es importante mencionar que los autores de estos tratados no intentaban probar la validez general de sus fórmulas ni verificarlas empíricamente. Su enfoque se centraba más en la aplicación de las fórmulas que en la demostración rigurosa.

Fibonacci alcanzó un nivel matemático superior al de sus contemporáneos, y muchas de las técnicas que desarrolló, así como su enfoque general hacia las matemáticas, no fueron completamente comprendidas en su época. Por ejemplo, mientras Fibonacci entendía claramente que la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado no podía aplicarse a las de tercer grado, muchos maestros de ábaco no comprendieron esta distinción y llegaron a generalizaciones incorrectas al intentar resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado. Por lo tanto, aunque Fibonacci era un referente ideal en términos matemáticos, muchos autores de los tratados de ábaco no lo tomaron como fuente directa de inspiración. Esto sugiere que los problemas que abordaban estos tratados surgieron más bien en respuesta a un entorno específico interesado en ciertas operaciones matemáticas prácticas. Es por esto que los tratados de ábaco que se produjeron tras el *Liber Abaci* demostraron un nivel inferior, principalmente porque no surgieron matemáticos del nivel de Fibonacci en los siglos siguientes. Estos tratados, escritos en italiano vernáculo para ser accesibles a estudiantes, comerciantes y personas que no dominaban el latín, eran en su mayoría prácticos, aunque incluían secciones teóricas.

Fibonacci y otros matemáticos enfrentaron varios desafíos al promover el sistema decimal y los números indoarábicos en Europa. El sistema decimal y el cálculo con los dígitos indoarábicos no se adoptaron de manera sistemática en la segunda mitad del siglo XIII. Uno de los primeros obstáculos fue que a principios del siglo XIV las normas para toda actividad comercial prohibieron el uso del sistema decimal para evitar el riesgo de fraudes en los cálculos contra aquellos que desconocían el sistema decimal. Además, la comprensión y el uso del sistema decimal requerían un cambio significativo en la forma en que las personas estaban acostumbradas a realizar cálculos. La transición desde el sistema romano y el uso del ábaco no fue sencilla y enfrentó escepticismo y oposición, especialmente entre aquellos que no conocían el nuevo sistema y temían errores o fraudes en las transacciones.

A pesar de esto, el comercio en expansión y la necesidad de cálculos rápidos y precisos impulsaron la adopción del sistema decimal. Al principio, esto ocurrió principalmente en el ámbito de los comerciantes que se dedicaban a grandes negocios, pero progresivamente el

fenómeno se extendió a todos los sectores debido a que el comercio crecía cada vez más rápido en comparación con el pasado y la estructura de las empresas de producción y comercio se volvió más compleja.

La promoción del sistema también dependió en gran medida de la capacidad de enseñar y difundir estos conocimientos. Es probable que el primer maestro de ábaco, quien enseñaba el cálculo con el sistema decimal indoarábigo, fuera el mismo Fibonacci. Existen estudios sobre la influencia de Fibonacci en las matemáticas posteriores y en la educación matemática de Italia; fue gracias a la obra de estudiosos como Guglielmo Libri Carucci dalla Sommaja y Baldassarre Boncompagni que se redescubrió la importancia de Fibonacci y se reconstruyó su influencia en las matemáticas y la educación matemática.

A comienzos del siglo XVI, los maestros de ábaco comenzaron a interesarse por la solución de ecuaciones de grado superior al segundo, especialmente las de tercer grado. Aunque inicialmente se subestimó la complejidad de esos problemas y los resultados fueron a menudo superficiales, este interés marcó un avance en el desarrollo del álgebra, superando a Fibonacci, quien no se especializó en álgebra sino en geometría y teoría de números. Esto preparó el terreno para el surgimiento de grandes matemáticos italianos del siglo XVI dedicados al álgebra. En la segunda mitad del siglo XVI, el cálculo utilizando números hindú-arábigos se había consolidado, reduciendo la necesidad de referirse a Fibonacci debido al incremento de literatura sobre el tema disponible. Como resultado, su nombre y su legado, que habían sido ampliamente reconocidos hasta mediados del siglo XV, se desvanecieron progresivamente, hasta llegar a ser casi desconocidos un siglo más tarde.