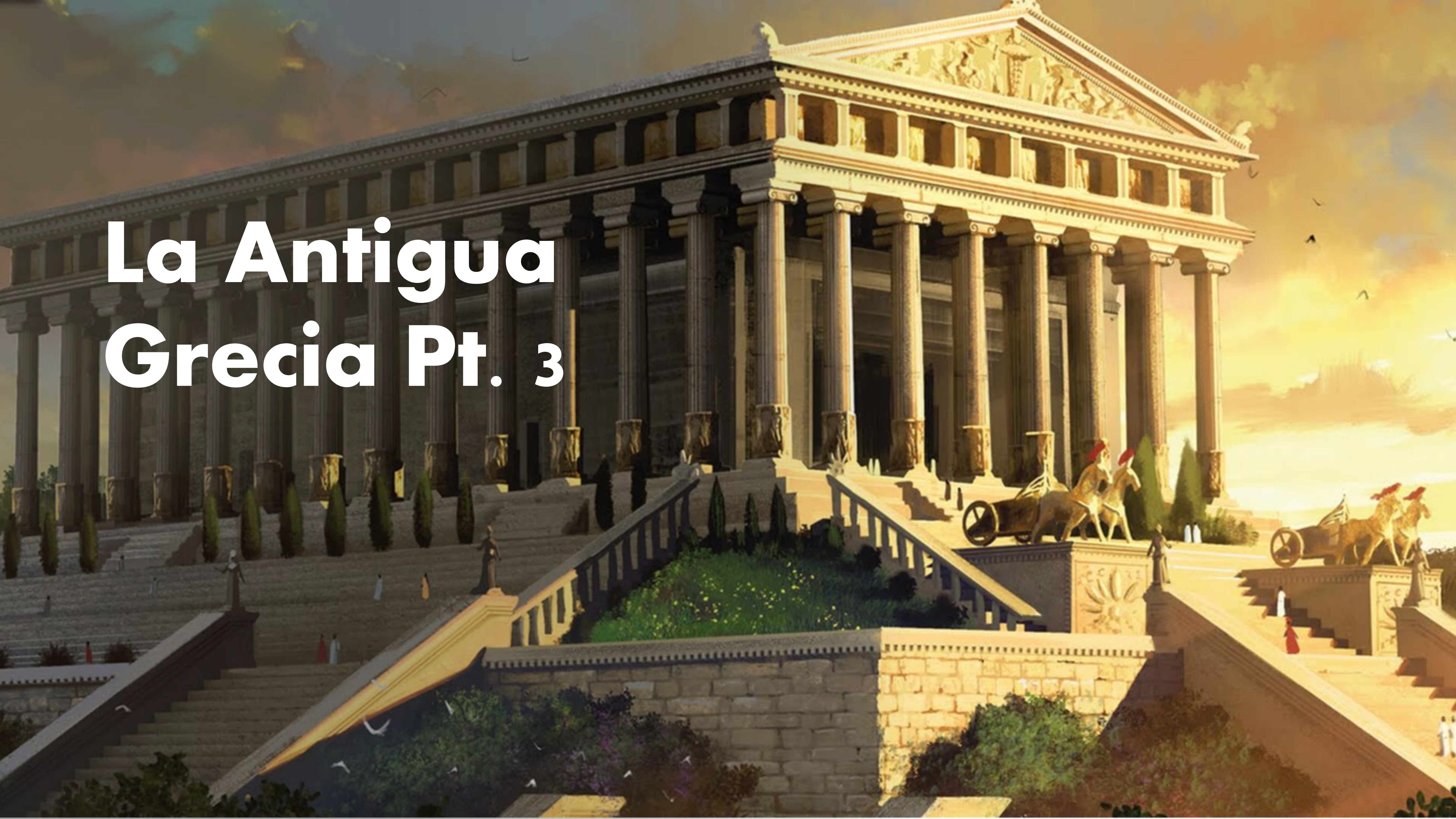
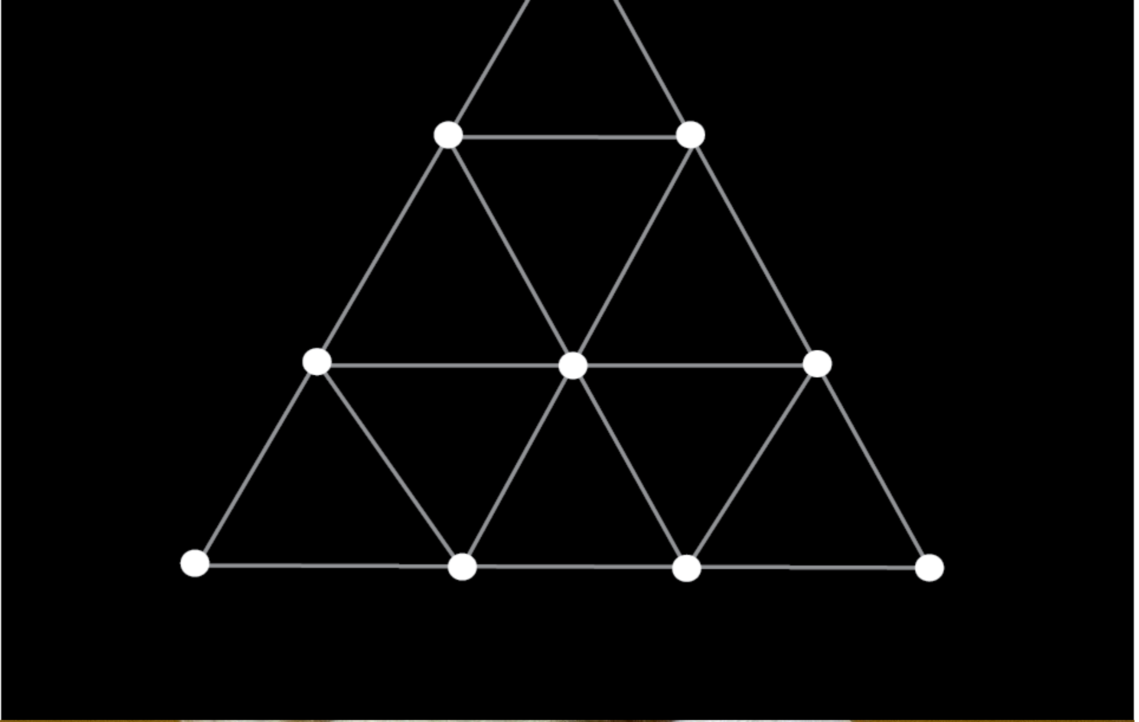
Ayudantía 8

Historia de las Matemáticas 1, Semestre 2026-1

La Antigua Grecia Pt. 3





Rescatemos algunas cosas de Piágoras

- Pitágoras, nacido en la isla de Samos.
- Escuela Pitagórica en Crotona.
- Sociedad secreta.
- Cuadrívium y trívium.
- Tetraktys y pentáculo.
- “Todo es número.”

La Música

¿Ustedes que conocen de Teoría Musical?

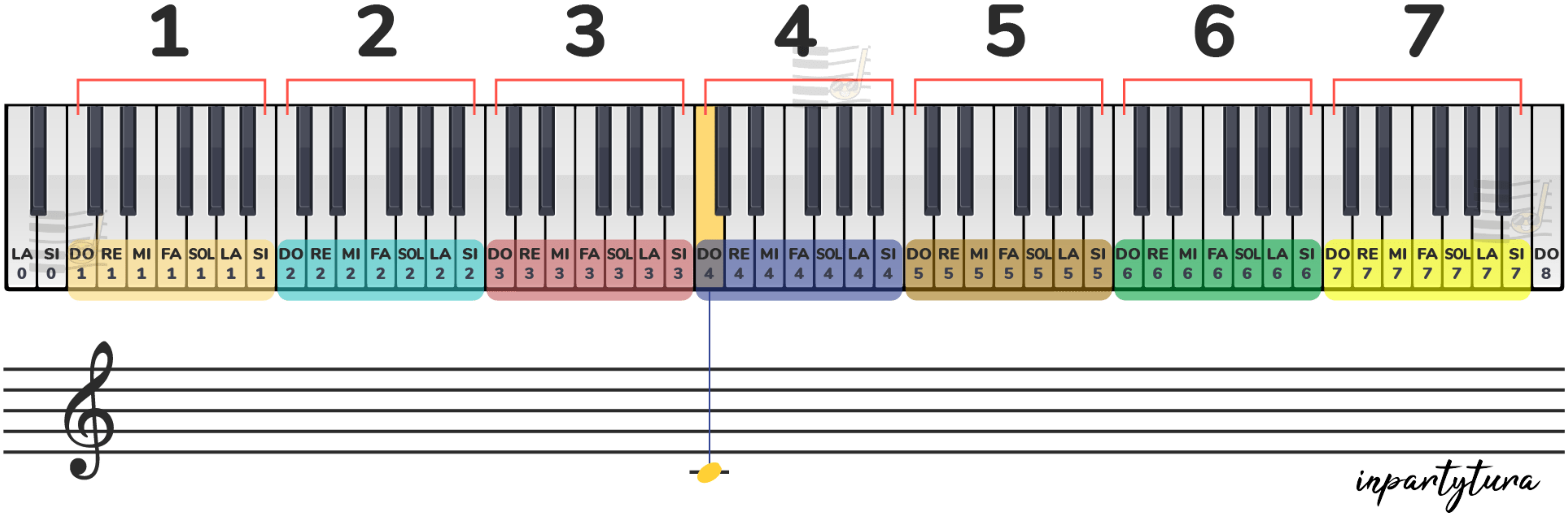
Comencemos:

+ Proporcionó a los pitagóricos el mejor ejemplo de su principio de que el “número” era la causa de todo en la naturaleza.
+ Se le atribuye a Pitágoras el descubrimiento de que las notas emitidas por una cuerda vibrante dependían de la longitud de la cuerda.

La octava

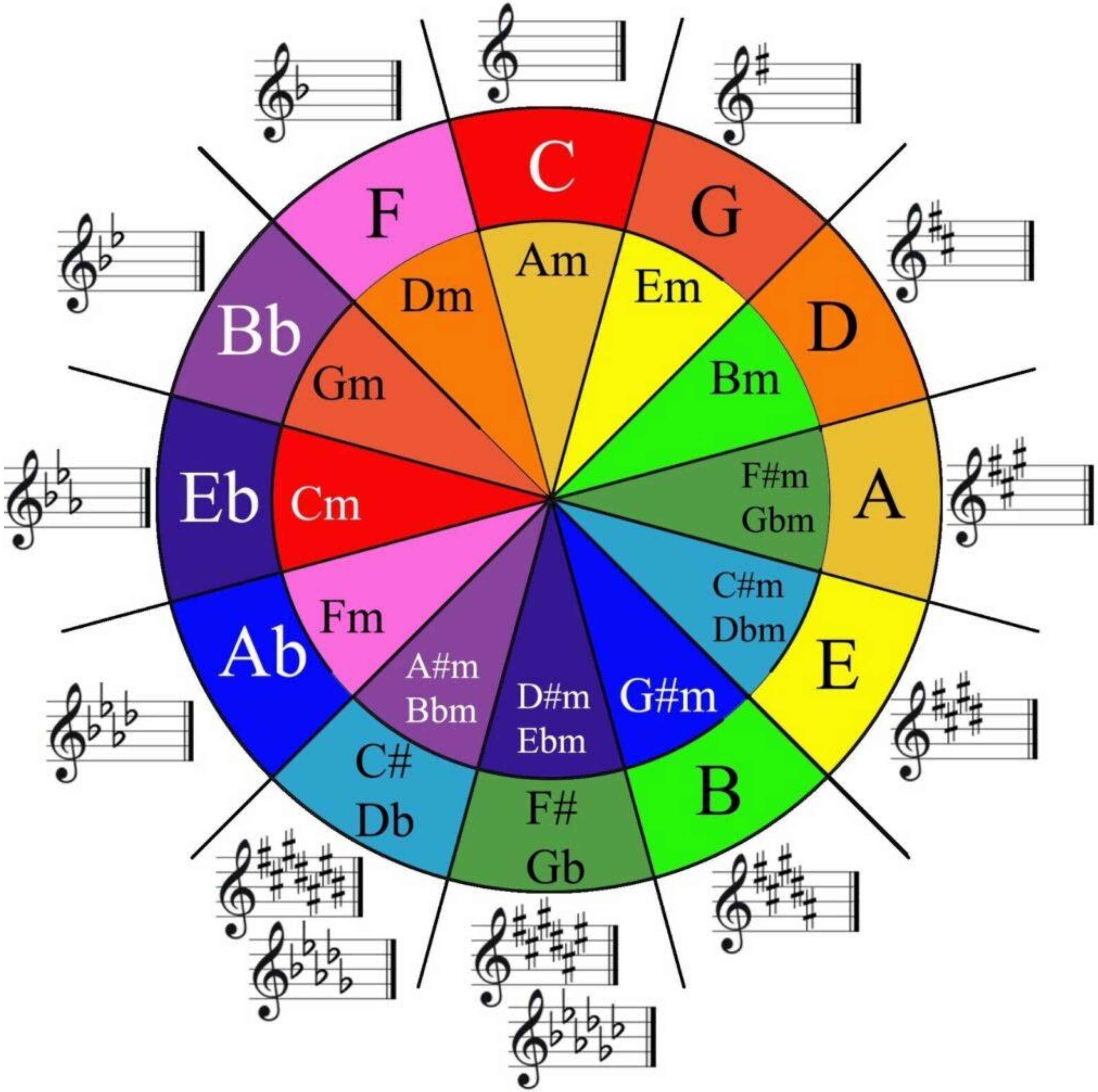
- Se obtenía un sonido armonioso pulsando dos cuerdas igualmente tensas, una con el doble de longitud que la otra. En términos modernos, el intervalo entre estas dos notas es una octava.

La octava en una guitarra


1 2 3 4 5 6 7
LA 0 SI 0
DO 1 RE 1 MI 1 FA 1 SOL 1 LA 1 SI 1
DO 2 RE 2 MI 2 FA 2 SOL 2 LA 2 SI 2
DO 3 RE 3 MI 3 FA 3 SOL 3 LA 3 SI 3
DO 4 RE 4 MI 4 FA 4 SOL 4 LA 4 SI 4
DO 5 RE 5 MI 5 FA 5 SOL 5 LA 5 SI 5
DO 6 RE 6 MI 6 FA 6 SOL 6 LA 6 SI 6
DO 7 RE 7 MI 7 FA 7 SOL 7 LA 7 SI 7
DO 8
inpartytura

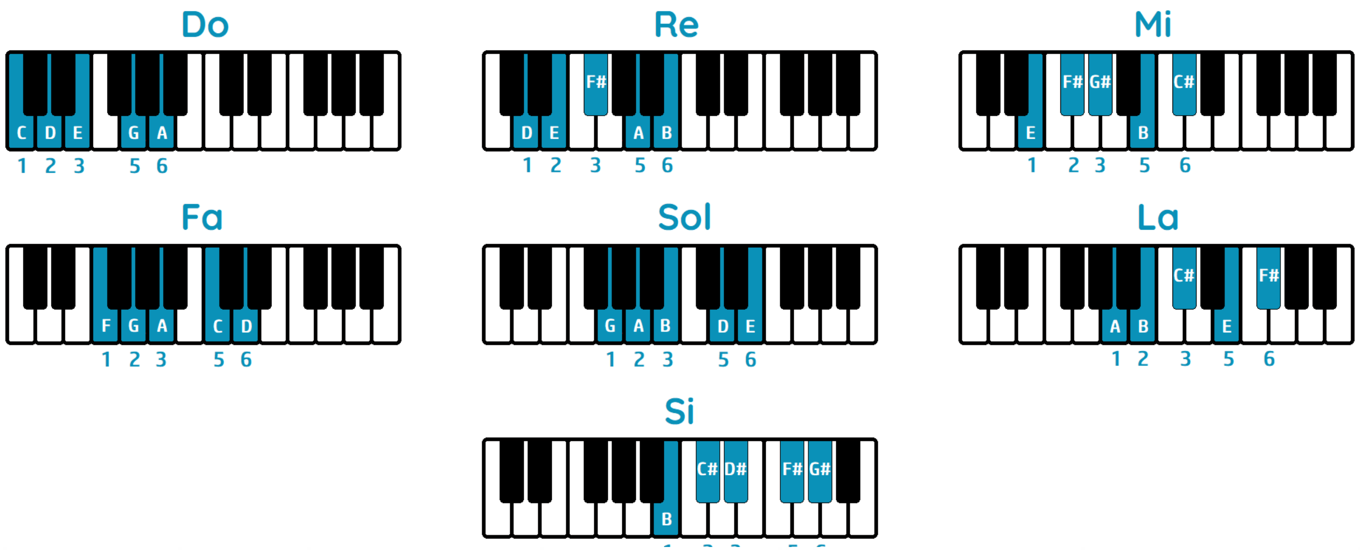
La quinta

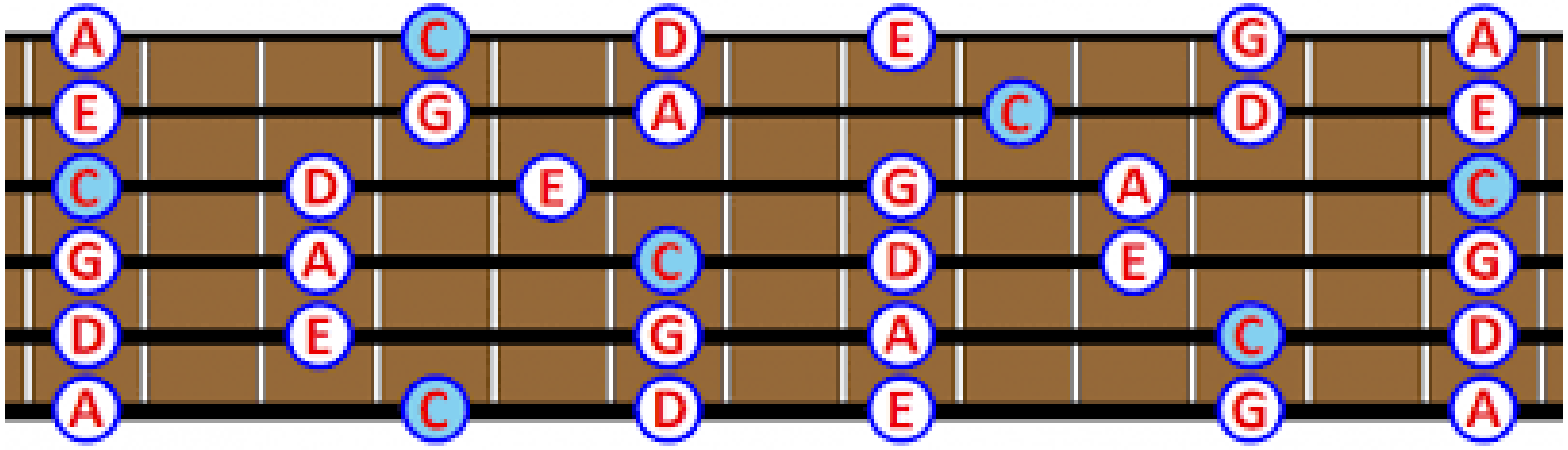
+ Similarmente, si una cuerda tuviera la mitad de longitud que la otra, pero esa mitad es de la más corta. De esta manera, la más grande es tres mitades de la más corta. A esta nota se le llama "quinta"


C
Am
G
Em
D
Bm
A
F#m
Gbm
E
C#m
Dbm
B
G#m
F#
Gb
D#m
Ebm
C#
Db
A#m
Bbm
Ab
Fm
Eb
Cm
Bb
Gm
F
Dm

Escalas pentatónicas

ESCALA PENTATÓNICA MAYOR

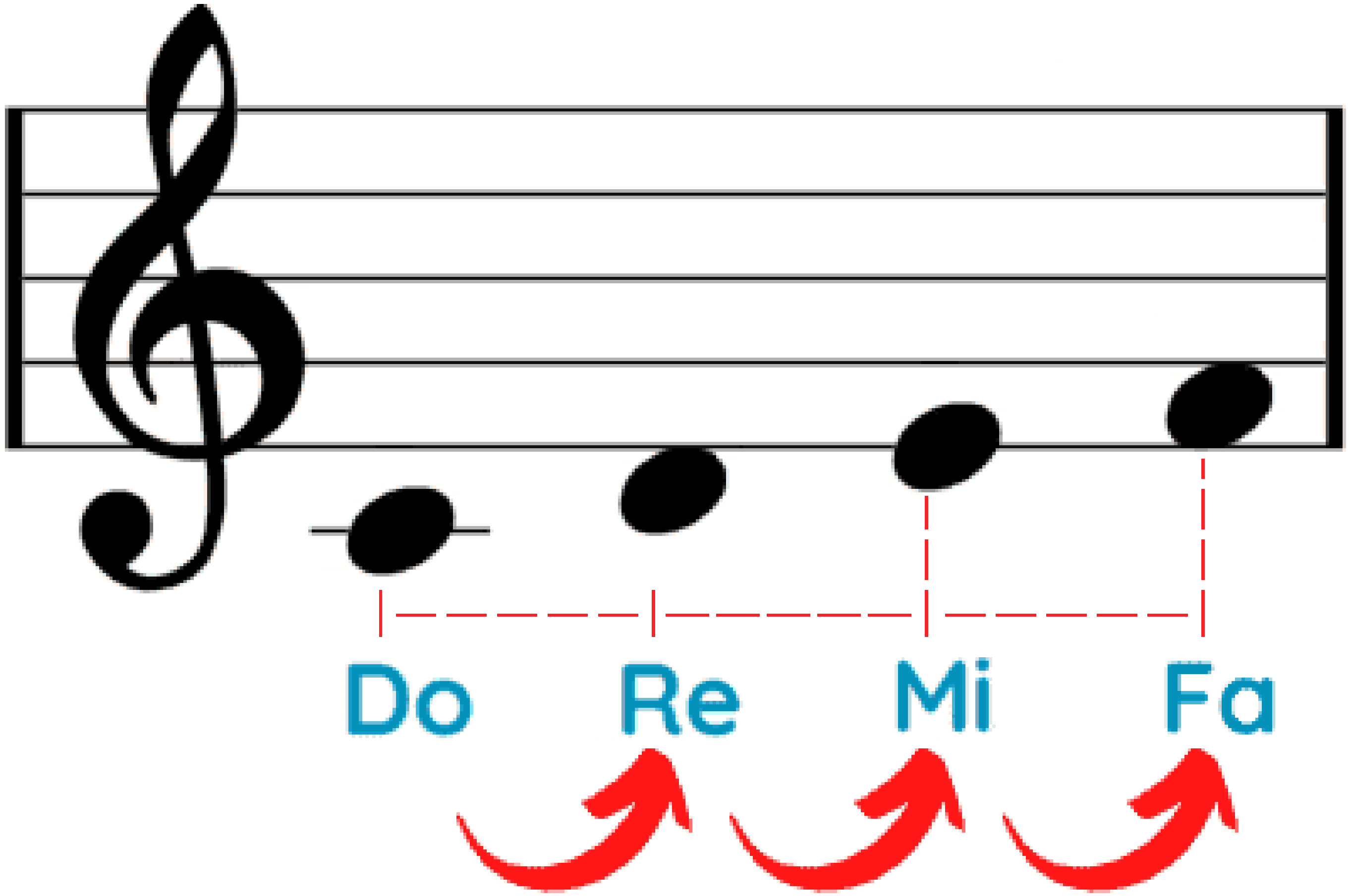




La cuarta

+ Por otro lado, si fuera un tercio más larga que la otra, se produciría una “cuarta”, es decir, una nota con cuatro tonos encima de la otra.

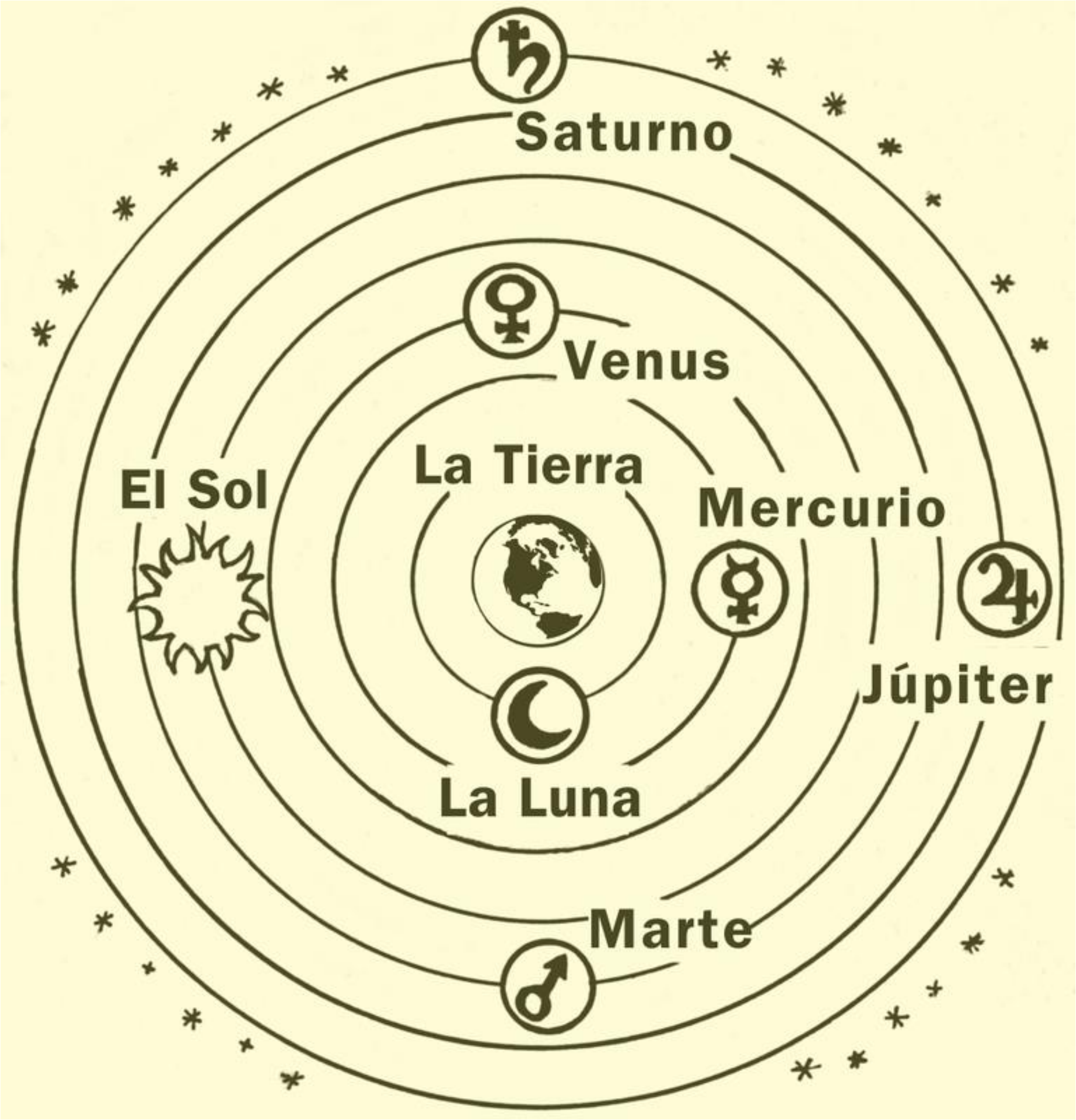
INTERVALO DE CUARTA

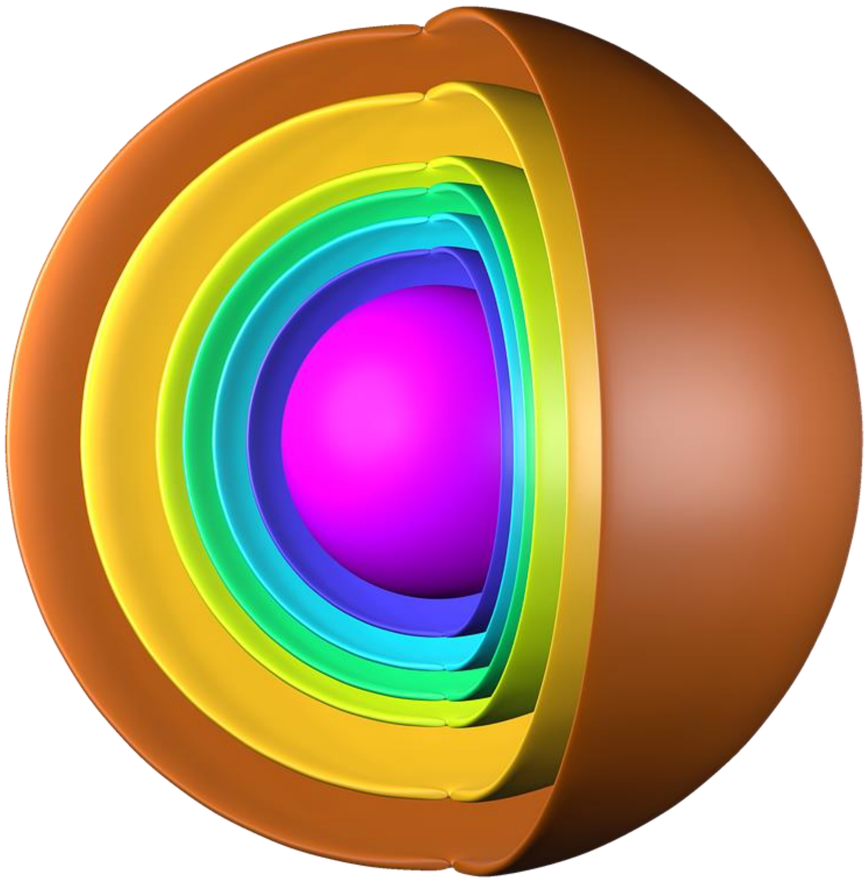


Astronomía y música

Astronomía

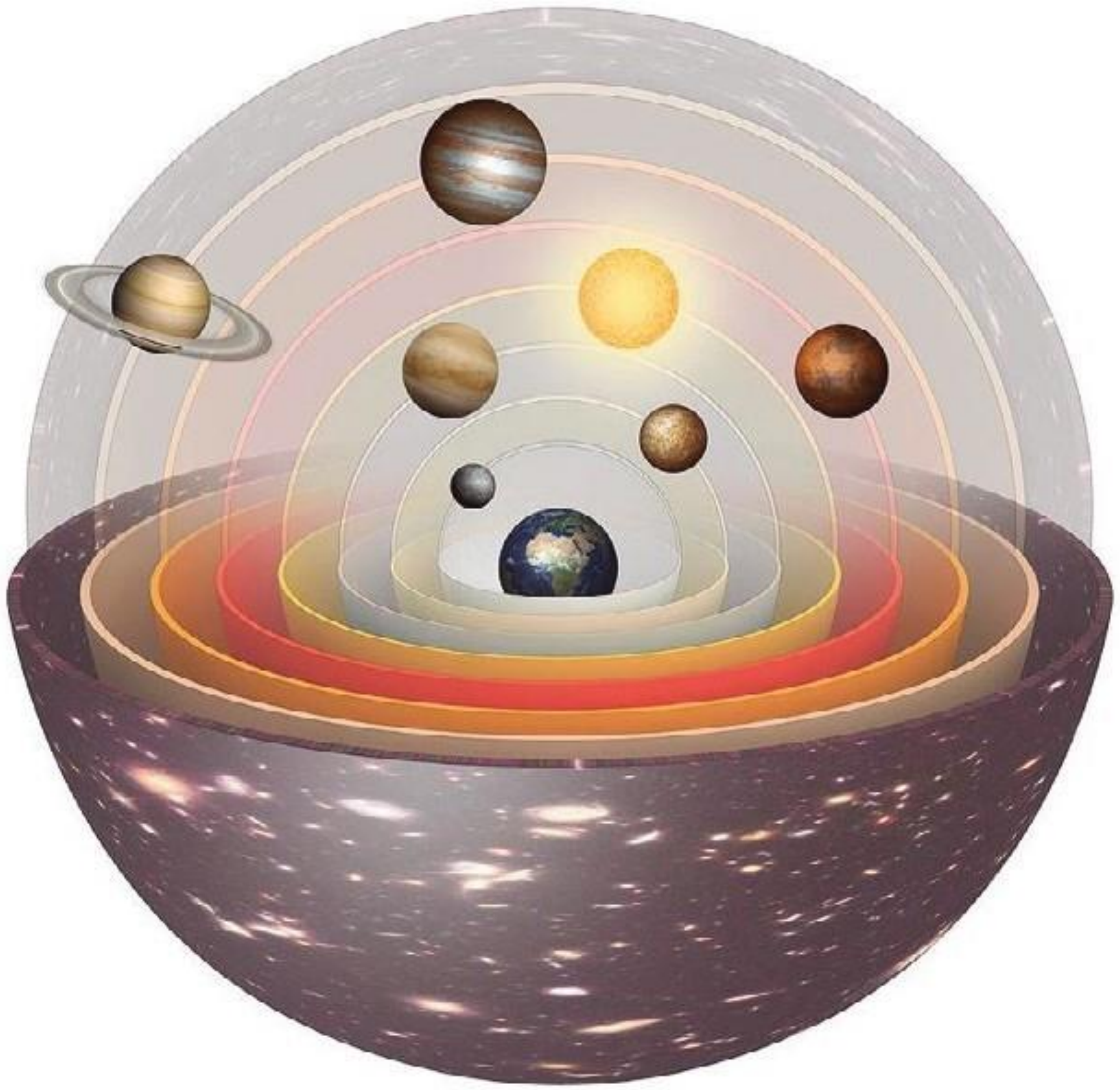
- Se consideraba una extensión de la doctrina de los intervalos armónicos.
- Pitágoras sostenía que cada uno de los siete planetas conocidos giraba alrededor de la tierra sobre una esfera de cristal propia.





Las esferas celestes y la música

+ Cada cuerpo celeste tenía que producir un determinado tono según su distancia del centro.
+ Todo el sistema creaba una armonía celestial que sólo Pitágoras entre todos los mortales podía oír.



La Música de las Esferas

Doctrina Pitagórica

+ Mezcla entre filosofía cósmica y misticismo numérico.
+ Se le asignaba a todo lo material o espiritual un número entero definido.

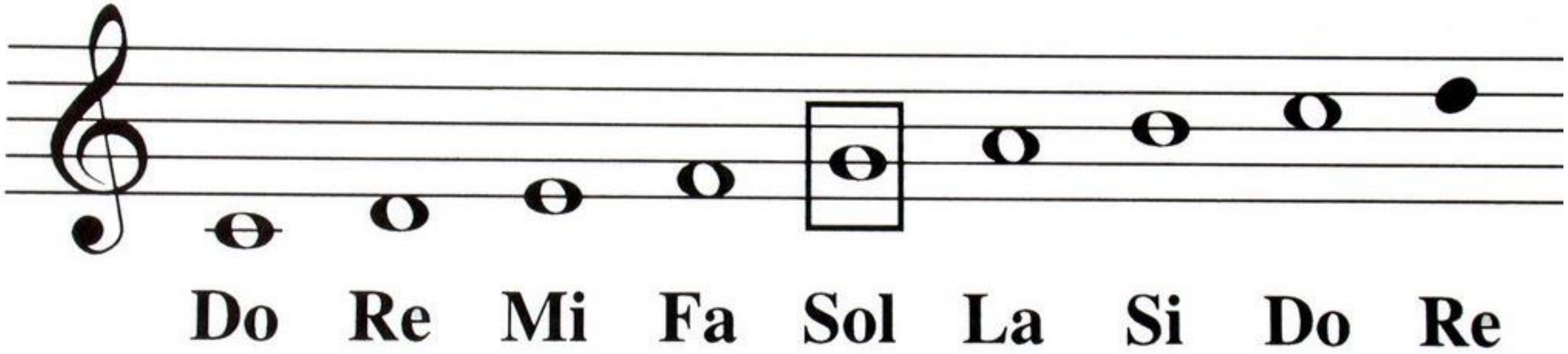
- 1 – representaba la razón (un solo cuerpo coherente de verdades)
- 2 - el hombre
- 3 - la mujer
- 4 - la justicia
- 5 - el matrimonio
- 6 - la creación

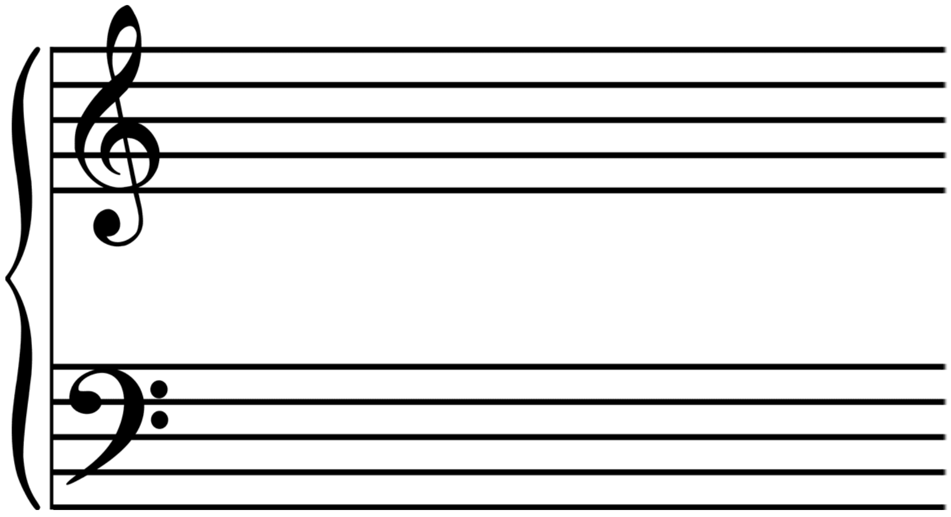
- Así sucesivamente.
- Ojo: no es la única forma de verlo así.

El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas

Un poco de lenguaje musical:

- C – do
- D – re
- E – mi
- F – fa
- G – sol
- A – la
- B - si





- Tónica – nota que define la tonalidad.
- Arriba o Alto – agudo
- Bajo - grave

Escuela pitagórica

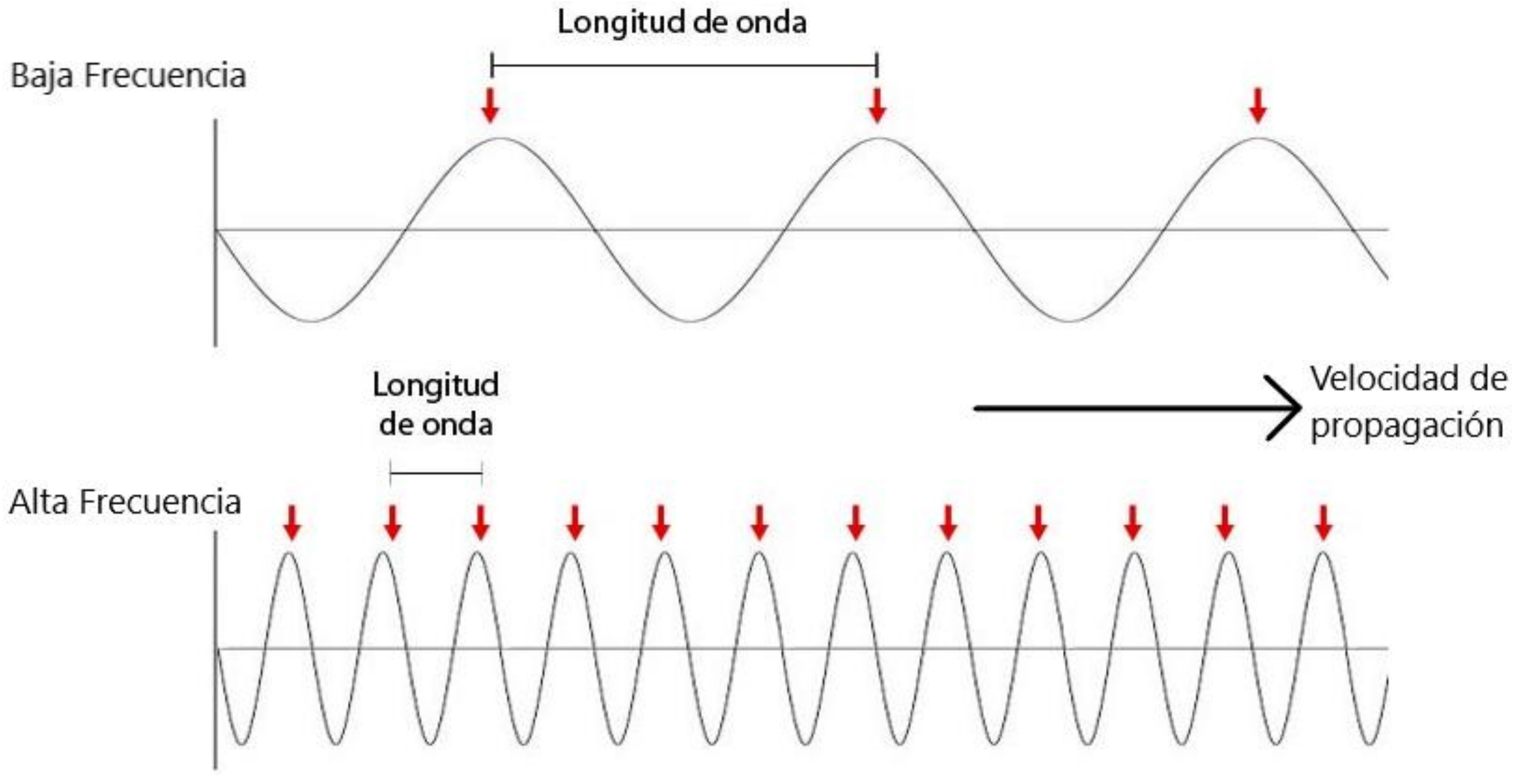
+ Longitud de una cuerda vibrante – las notas de la escala musical.
+ Monocordio: cuerda tensada sobre la cual se desliza un puente móvil.
+ Lo de la imagen no es un monocordio.

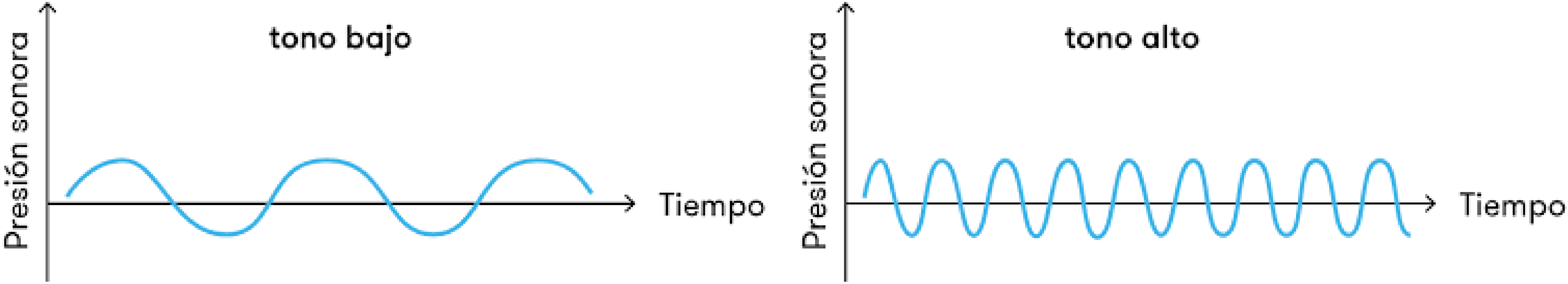
¿Esto sigue siendo vigente?

Notas musicales en la actualidad...

- Se definen a partir de la ***frecuencia de vibración de la onda sonora*** emitida por dicho objeto.
- La frecuencia y la longitud de una onda sonora se encuentran vinculadas por medio de la ecuación:

$$f = \frac{v}{l}$$





+ Bajas frecuencias – tonos bajos
+ Altas frecuencias - tonos altos

Nota musical	Frecuencia en hertz
do	261
re	293
mi	328,8
fa	348,3
sol	391,1
la	438,9
si	492,7
DO	522

Frecuencias de las ocho notas

Relaciones de proporción entre las notas de la octava.

- Arquitas de Tarento (V a.C.): *"…en la música existen tres medias: la media aritmética, la media geometría y la media subcontraria (armónica)…"*

Media aritmética

- $\mathbf{X} = \frac{a+b}{2}$

Media aritmética

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

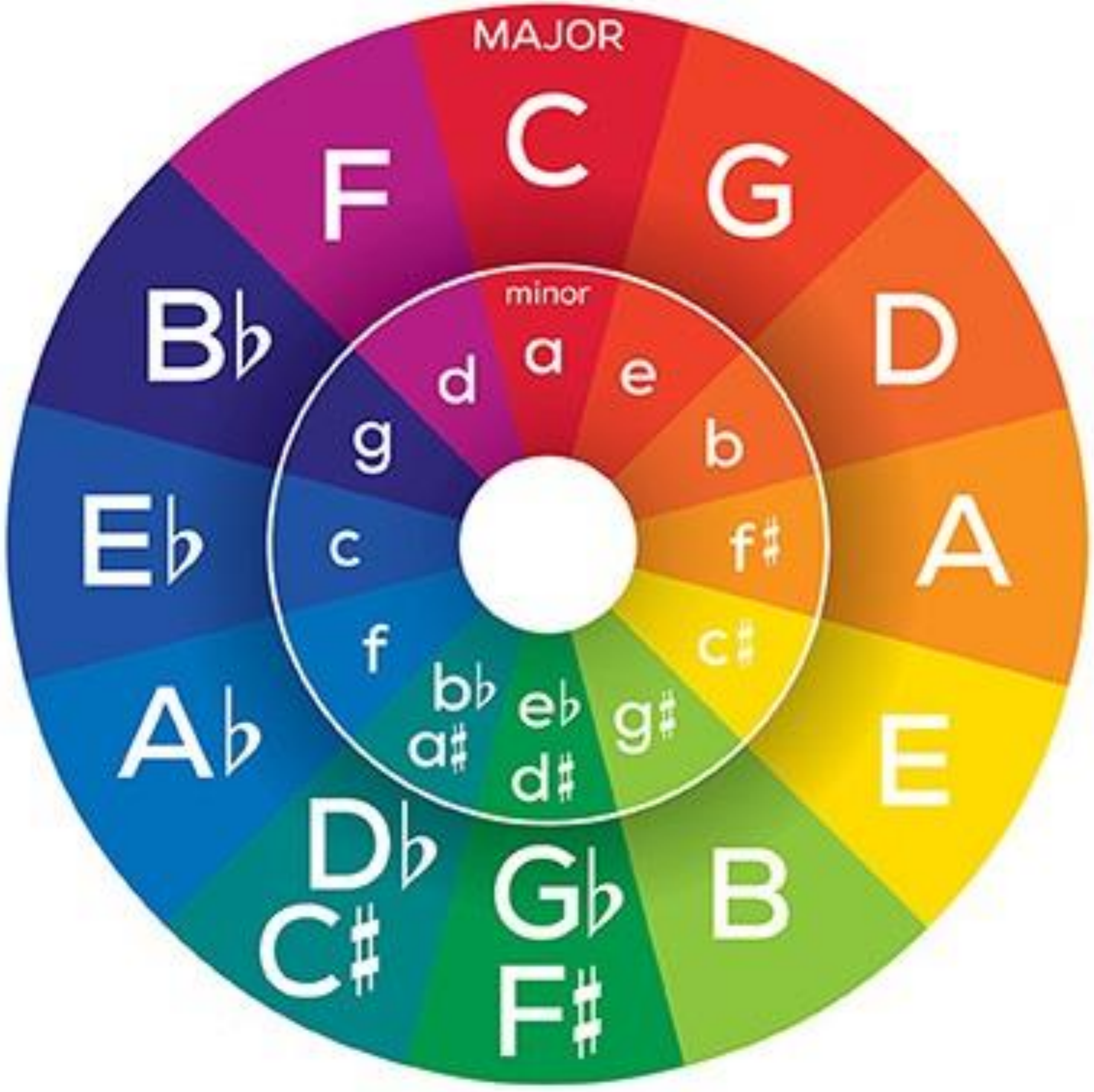
$$= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

Media aritmética

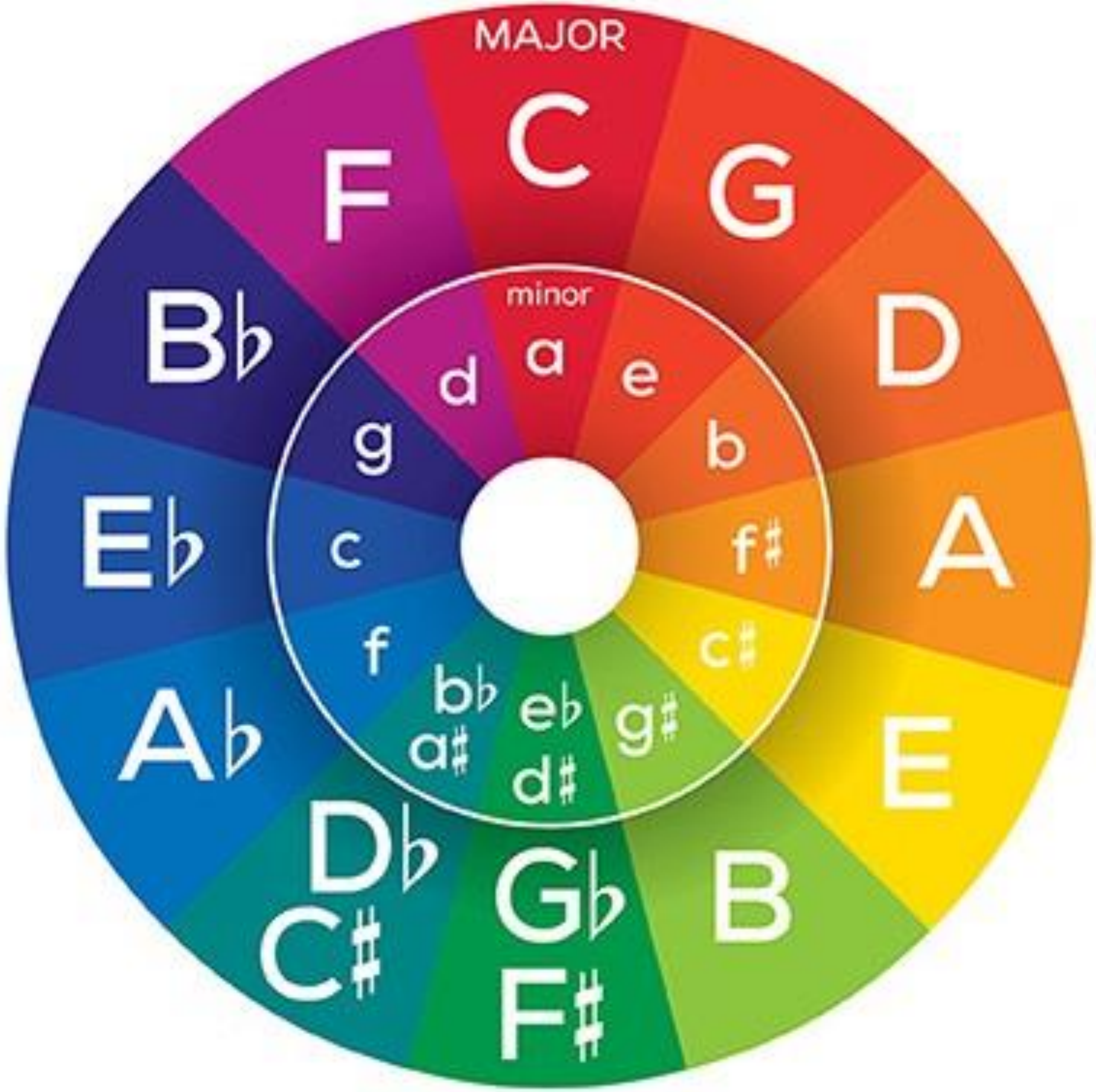
+ **X**= $\frac{a+b}{2}$
+ Si se toma
+ a=do
+ c=Do,
+ entonces…

+ **X**= $\frac{a+b}{2}$
+ Si se toma
+ a=do
+ c=Do,
+ entonces…

- $X = \frac{261+522}{2} \cong 391.5,$
- De esta manera, se tiene aproximadamente el valor de la frecuencia de sol.
- La media aritmética determina la relación existente entre las notas de C y G, o entre la nota C y su quinta.



+ De hecho,
+ $\frac{391.5}{261} \cong \frac{3}{2}$.
+ Se tiene el valor del intervalo de quinta.



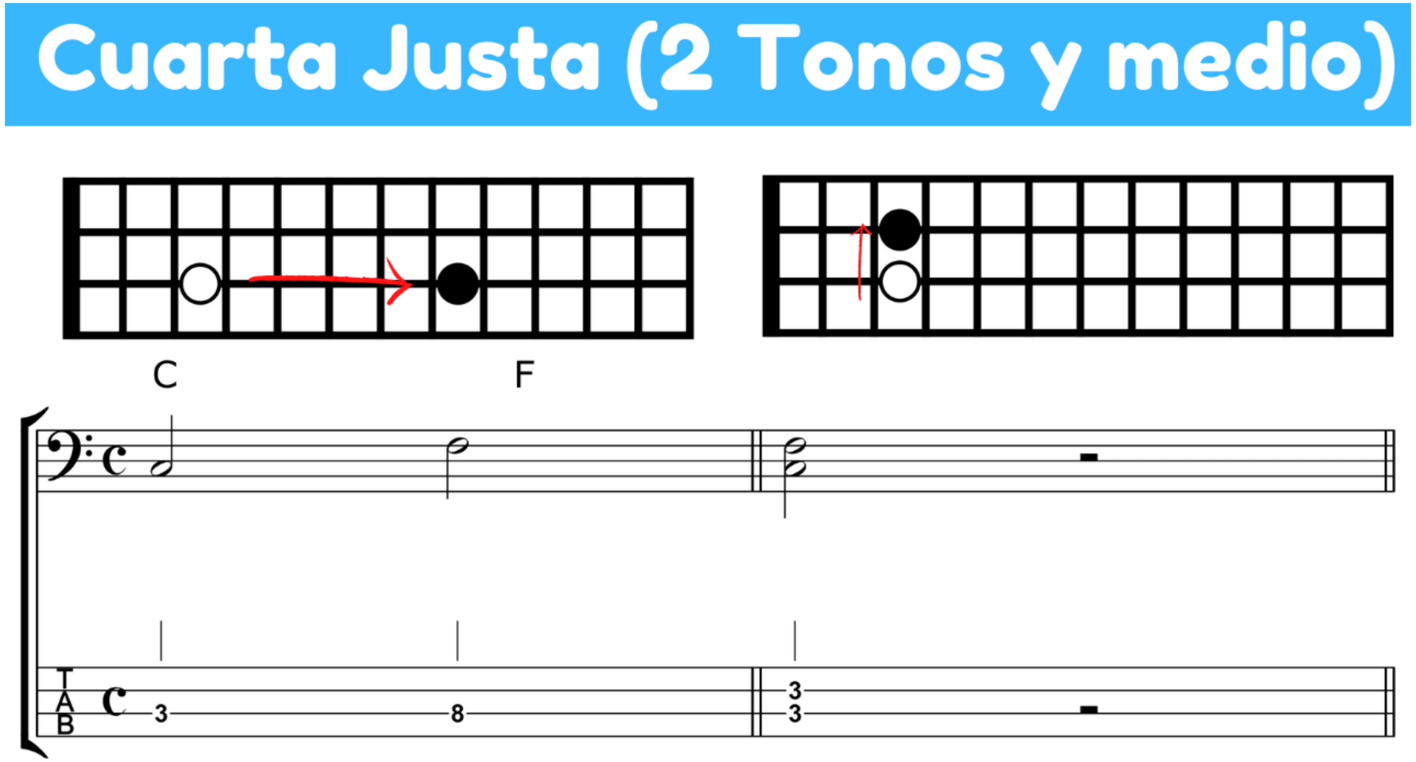
Media armónica

$$\frac{2ab}{a+b}$$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Media Harmónica | Media Geométrica | Media Aritmética | Media Cuadrática

+ Nuevamente, si se toma $a = do, b = Do, entonces$
+ $\frac{2(261)(522)}{261+255} = 348.$
+ Es aproximadamente la frecuencia de F.
+ Además,
+ $\frac{348}{261} \cong \frac{4}{3}.$
+ Se obtiene el intervalo de cuarta.



Media geométrica

$$MG = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{N} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$$

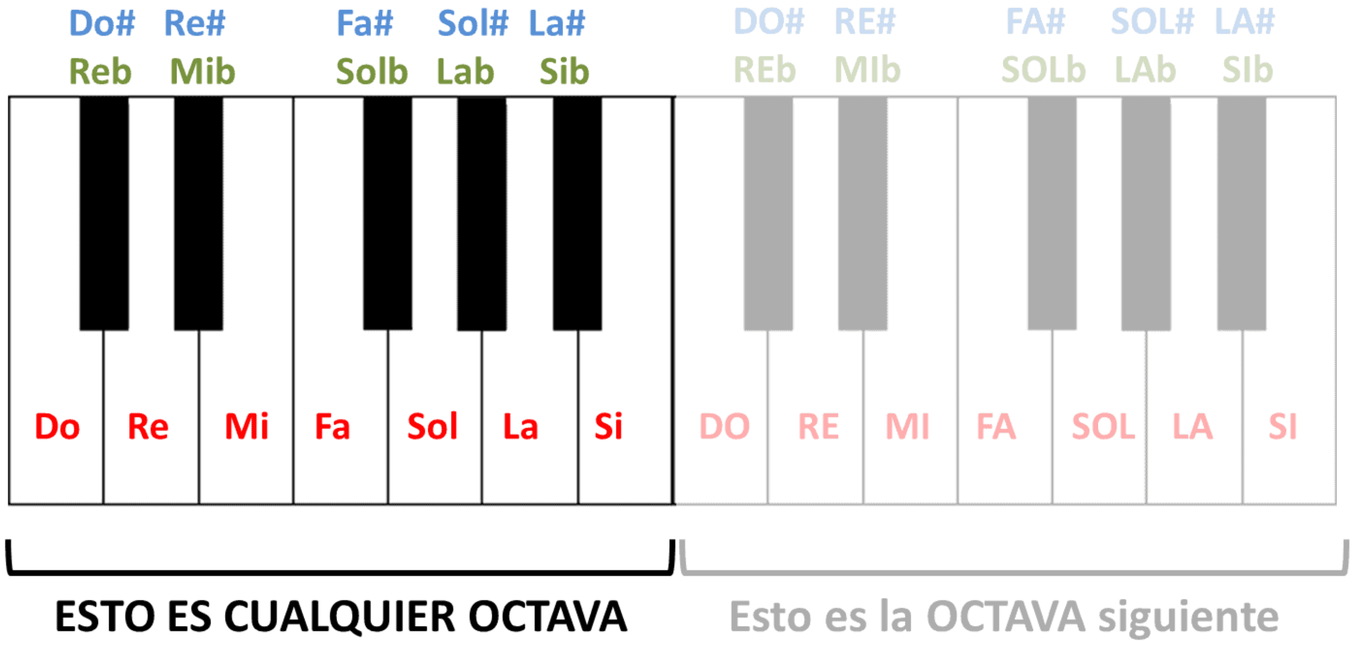
Media geométrica

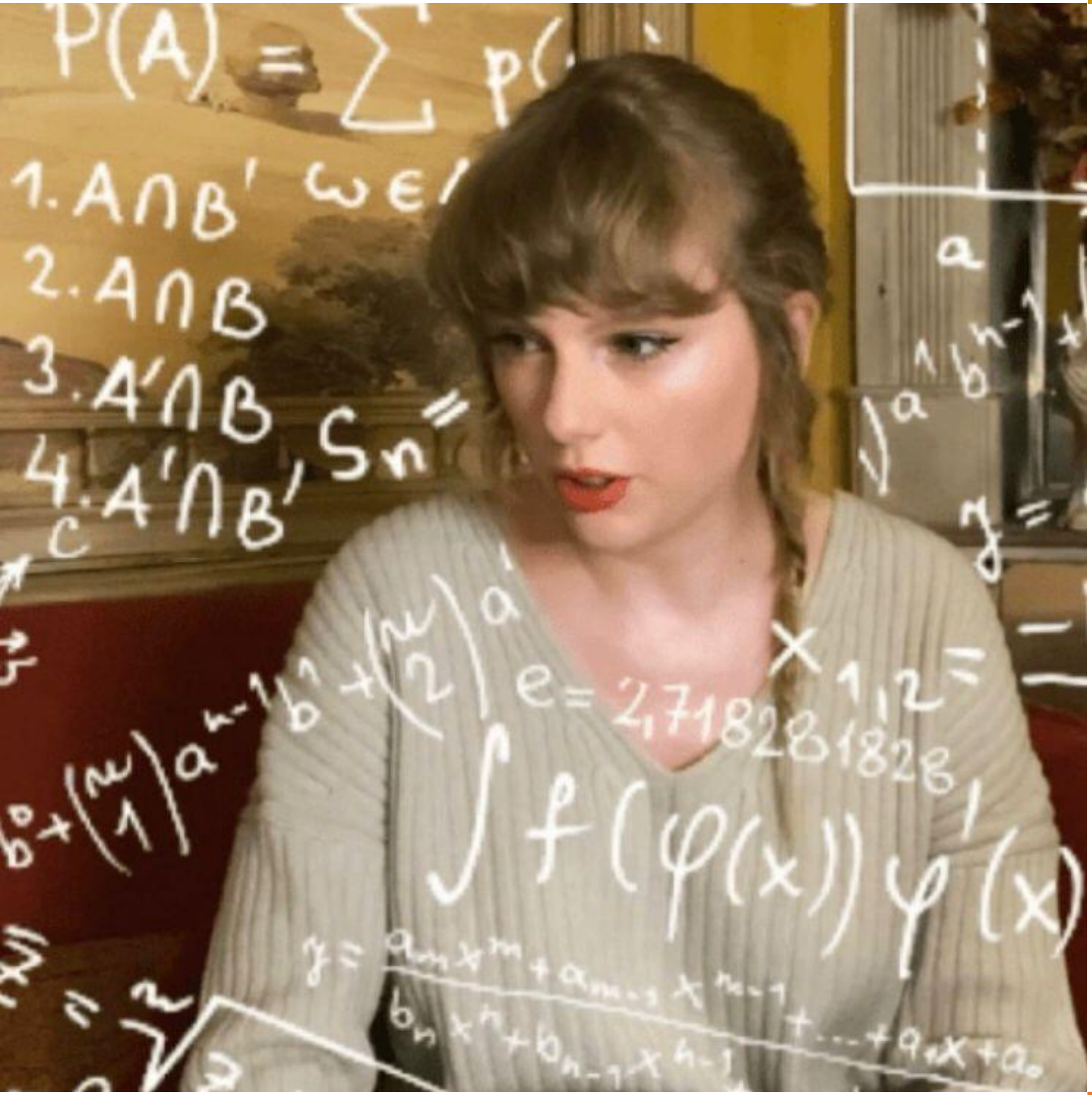
- $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$
- $ab = c^2$
- $\sqrt{ab} = c.$

Similarmente…

+ A partir de la media geométrica, se tiene la relación de intervalo de octava, es decir, 2:1, o bien,

$$\frac{2}{1}$$





¿Qué sucedería si se hace un cociente entre la media aritmética y la media armónica?

Relación entre tonos:

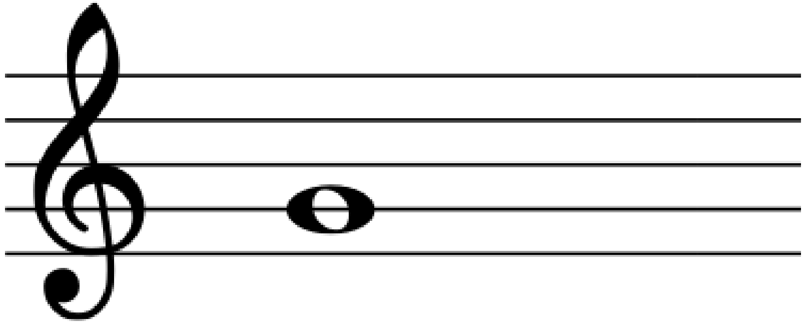
$$\frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{2ab}{a+b}}$$

- Si se sustituye $a = do, b = DO$, entonces

$$\frac{\frac{261+522}{2}}{\frac{2(261)(522)}{261+522}} \cong \frac{9}{8}.$$

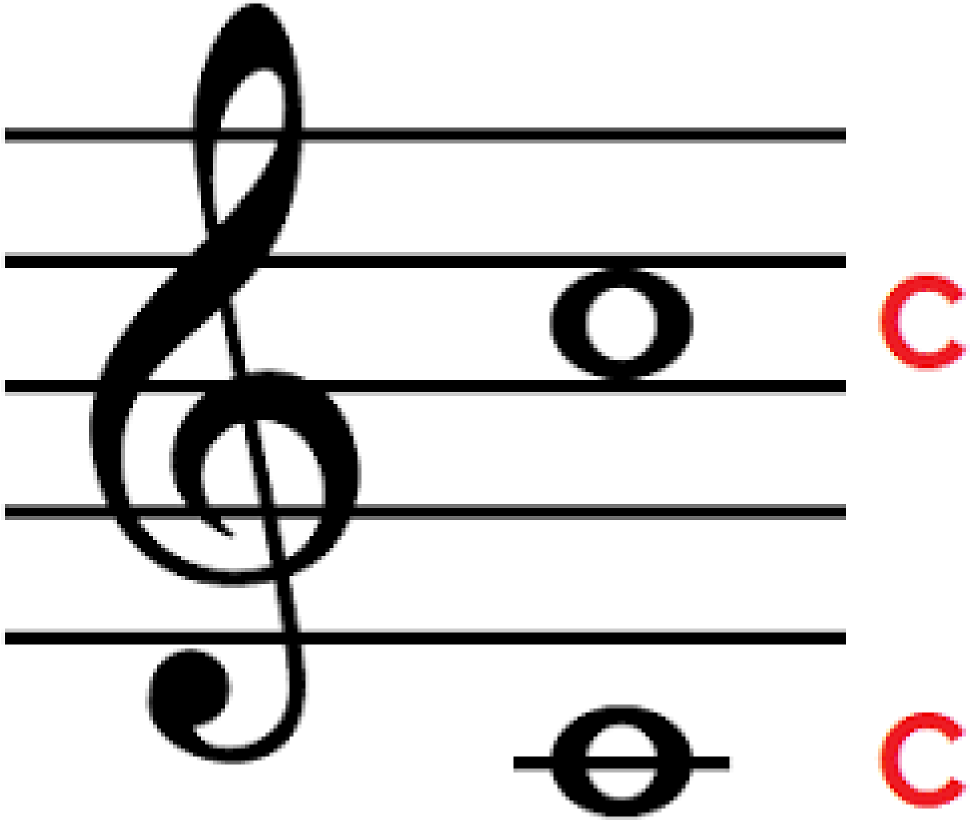
- **Intervalo de tono**

- De esta forma, si a la frecuencia correspondiente a la nota F se le multiplica por 9/8, se obtiene
- $383.3 \times \frac{9}{8} \cong 391.8.$
- Esto es, aproximadamente, la frecuencia que corresponde a la nota G, distante en **un tono** de la nota F.

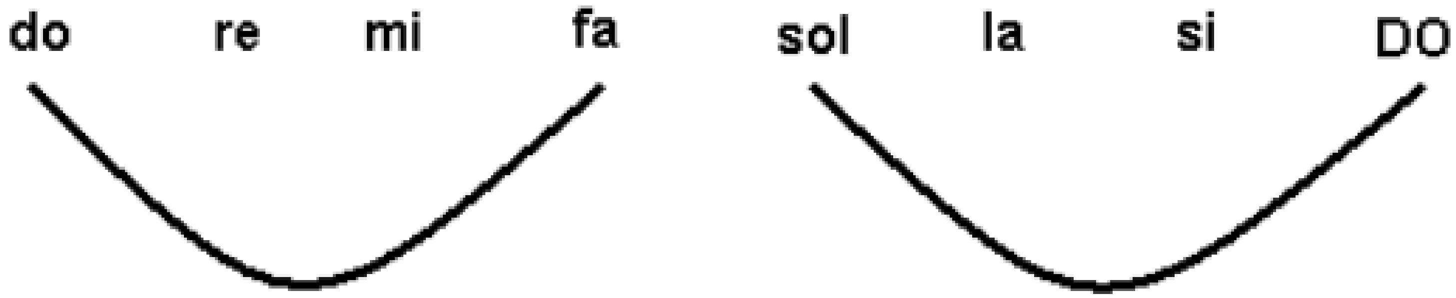


Sol

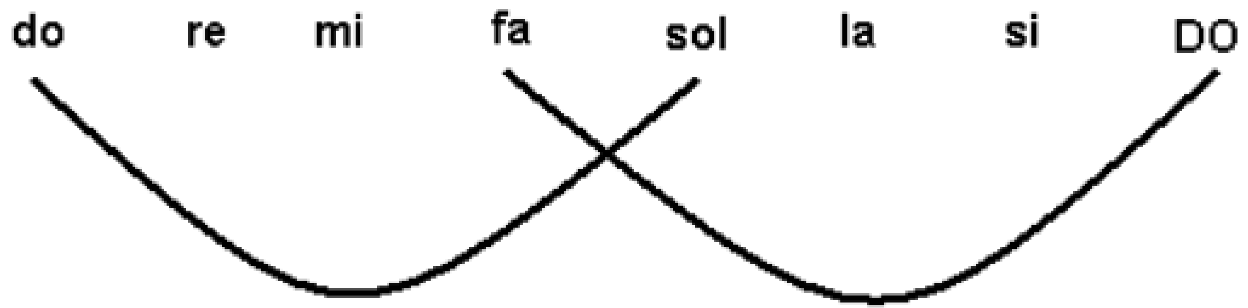
La octava musical satisface



+ $$\frac{a}{\frac{2ab}{a+b}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{b}$$
+ De esta manera, dado que la proporción armónica define la relación entre una nota y su cuarta perfecta, y la proporción aritmética determina la relación de una nota con su quinta, la expresión anterior puede enunciarse como:



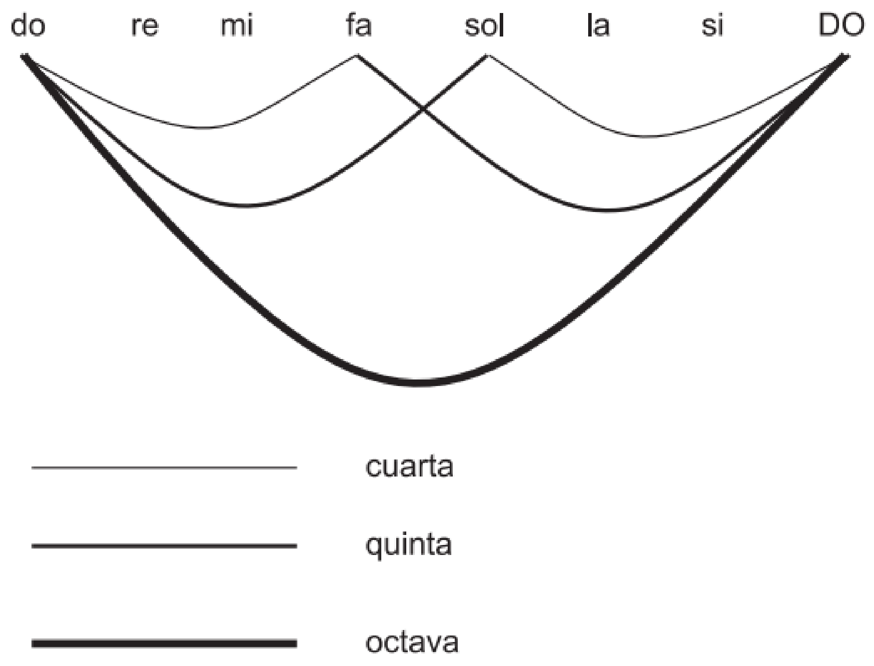
- *La relación entre el extremo menor de la octava y la cuarta* ***es idéntica*** *a la relación entre la quinta y el extremo mayor.*



- Si se reescribe la ecuación anterior como
- $\dfrac{b}{\frac{2ab}{a+b}} = \dfrac{\frac{a+b}{2}}{a},$
- entonces *"la relación entre el extremo mayor de la octava y la cuarta es* ***idéntica*** *a la relación entre la quinta y el extremo menor de la octava."*

Filolao (V a.C.)

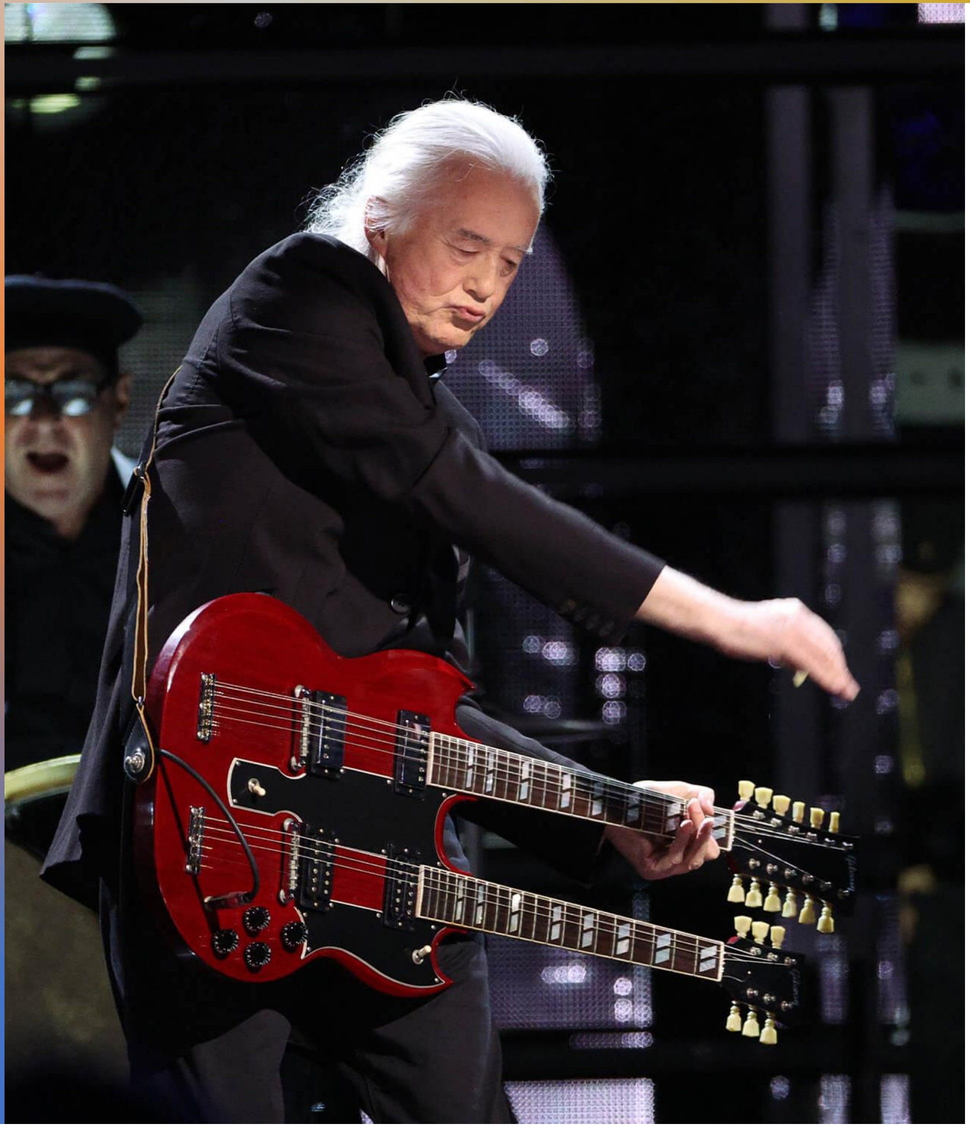
+ Pitágorico
+ Enuncia la siguiente relación
+ *"La extensión de la octava es una cuarta más una quinta."*



En síntesis...

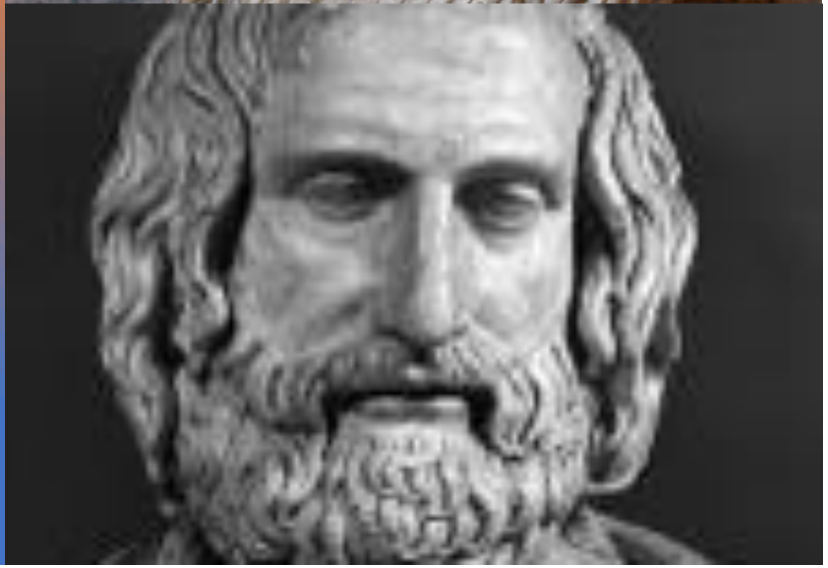
Nombre del intervalo	Valor del intervalo	Tipo de proporción	Expresión algebraica
Cuarta perfecta	$\frac{4}{3}$	*armónica*	$b = \frac{2ac}{a+c}$
Quinta	$\frac{3}{2}$	*aritmética*	$b = \frac{a+c}{2}$
Octava	$\frac{2}{1}$	*geométrica*	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$
Tono	$\frac{9}{8}$	$\frac{\textit{aritmética}}{\textit{armónica}}$	$b = \frac{\frac{a+c}{2}}{\frac{2ac}{a+c}}$

Tonos y semitonos



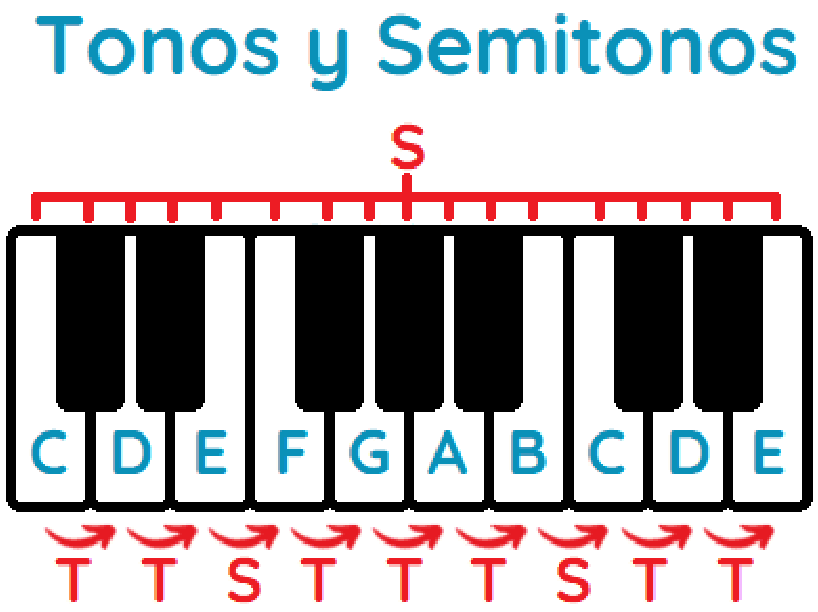
Tonos y semitonos

- El valor del intervalo de tono es 9/8.
- Matemáticamente, el intervalo de semitono no equivale a la mitad de un intervalo de tono, puesto que está definido por la fracción
- $\frac{256}{243}$



- Según relata Boecio, Filolao habría definido matemáticamente varios de estos intervalos.
- En el Timeo de Platón se encuentran enumerados, además de los intervalos de cuarta y de quinta, los que corresponde al tono y al semitono.

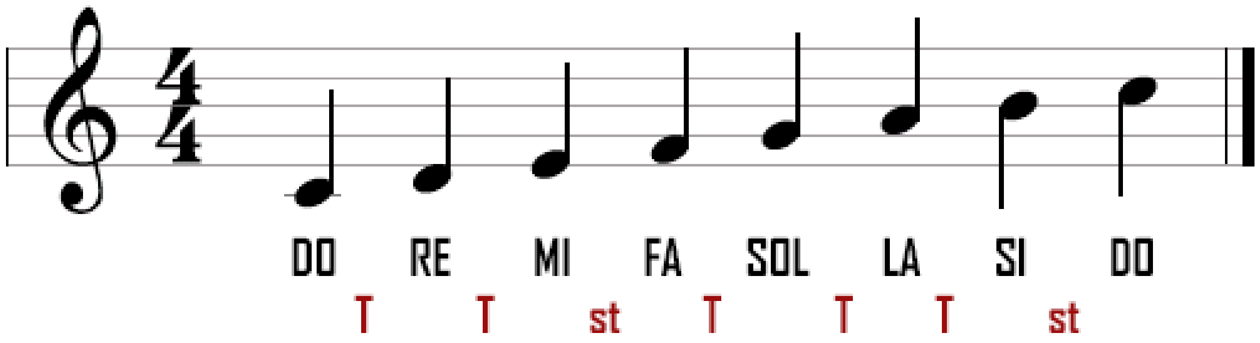
- La **octava** está compuesta por **cinco tonos** y **dos semitonos.**
- **T - tono**
- **S - semitono**



+ La distribución de tonos y semitonos es **simétrica** respecto a la nota D:

re — mi ∩ fa — sol — la — si ∩ do — re — mi ∩ fa — sol — la — si ∩ do — re

+ Es decir, la distribución de T y S es similar tanto si se asciende como si se desciende en la escala musical.
+ Por este motivo, durante la Edad Media, los clérigos componían sus piezas religiosas partiendo de D.



- La estructura tonal del **intervalo de quinta** es siempre de **3 T** y **1 S.**
- La estructura tonal del **intervalo de cuarta** es siempre de **2 T** y **1 S.**

Escala temperada de Bach

Escala temperada

- Johann Sebastian Bach (1685 – 1750).
- ***El clave bien temperado***
- Implementó ciertas modificaciones fundamentales a la escala musical.

Escala temperada

- En esta escala existen **once** frecuencias intermedias entre una nota y su octava superior.
- Las **doce frecuencias de la escala temperada** son

orden	nota	frecuencia
	DO	261,6256
	DO#	277,1826
	RE	293,6648
	RE#	311,127
	MI	329,6276
	FA	349,2282
	FA#	369,9944
	SOL	391,9954
	SOL#	415,3047
	LA	440
	LA#	466,1638
	SI	493,8833