El legado de al-Khwārizmī: análisis de la traducción e introducción de algunos arabismos en el campo del álgebra hispánica renacentista

Itziar Molina Sangüesa
Universidad de Salamanca. Facultad de Filología. Departamento de Lengua Española
Plaza de Anaya s/n. 37002 Salamanca
itziarmolina@usal.es

Resumen

El álgebra, disciplina que nace como una variante elevada (*Arte Mayor*) o complemento de la aritmética, fue desarrollada por griegos y otras civilizaciones primitivas. No obstante, se considera que su implantación y desarrollo en Occidente proviene del libro escrito por Muhammad ibn Mūsa al-Khwārizmī (Bagdad, ca. 780 - ¿? 850), titulado *Kitab al-Mukhtasar fīhisāb al-jabr w'almuqābala* (ca. 825), del que destacan dos traducciones latinas: las realizadas por Roberto de Chester y Gerardo de Cremona. El objetivo de este trabajo es realizar un análisis sobre la traducción al latín de algunos arabismos de la obra de al-Khwārizmī referidos a las distintas potencias de la incógnita y su introducción, difusión y vernacularización, desde el medioevo hasta el Renacimiento, en los tratados matemáticos más relevantes del siglo XVI hispano, a través de los cuales asistimos al establecimiento de una terminología técnica en español relativa al álgebra.

Palabras clave: ciencia, literatura y traducción; terminología y lenguajes específicos; lexicología; álgebra; Renacimiento.

Abstract. *The legacy of al-Khwārizmī: analysis of translation and introduction of some Arabic expressions in the field of Renaissance Hispanic algebra*

The algebra, discipline that was born as a high variation (*Art Major*) or complement of arithmetic, was developed by Greeks and other early civilizations. However, it believes that its implementation and development in the West comes from the book by Muhammad ibn Mūsa al-Khwārizmī (Baghdad, ca 780 - ¿? 850), entitled *Kitab al-Mukhtasar al-jabr fīhisāb w'almuqābala* (ca. 825), which highlight two Latin translations: those made by Robert of Chester and Gerard of Cremona. The objective of this work is an analysis of the Latin translation of some Arabisms, presents in al-Khwārizmī's work, referring to the different powers of the unknown and its introduction, diffusion and vernacularization, from the Middle Ages to the Spanish Renaissance, in the most important mathematical treatises of the 16th century, through which we witness the establishment of a technical algebra terminology in Spanish.

Keywords: science, literature and translation; terminology and specific languages; lexicology; algebra; Renaissance.

Sumario

1. Presentación

La divulgación científica de disciplinas como la que presentamos, el álgebra, adquiere, en épocas primitivas de su desarrollo, una complejidad vinculada, principalmente, al modo y al medio de exposición y expresión de sus contenidos, es decir, al léxico, que circulará, en un primer momento, entre las élites cultas —transmitido en griego, árabe o latín— y avanzará, en el Renacimiento europeo, hacia su vernacularización en las respectivas lenguas romances. Por este motivo, las traducciones jugarán un papel esencial en el desarrollo de las ciencias matemáticas, entre otras; de ahí el objetivo de las investigaciones que en las siguientes líneas expondremos.

Este objetivo es doble: por un lado, destacar la relevancia de las dos traducciones latinas, realizadas por Roberto de Chester y Gerardo de Cremona, de la obra de al-Khwārizmī, y, por otro, examinar la adaptación al latín del léxico referido a las distintas potencias de la incógnita —esto es, de la *x* de una ecuación— y las vías de penetración al español de estos términos técnicos en los tratados matemáticos más representativos del Renacimiento hispano, a través de los cuales asistimos al establecimiento de una terminología técnica en español relativa al álgebra.

2. El álgebra de al-Khwārizmī

A pesar de que se documentan algoritmos de resolución de ecuaciones algebraicas en las matemáticas griegas y otras civilizaciones primitivas —como la babilónica o la egipcia (Couchoud 1993, Folwer y Robson 1998)—, se considera que su implantación y desarrollo en Occidente emana de la difusión del libro escrito por Muhammad ibn Mūsa al-Khwārizmī (Bagdad[1] ca. 780 - ¿? 850), quien, tras realizar un viaje a la India, retornó y escribió el famoso tratado titulado *Kitab al-*

1. Testimonian Paradís y Malet (1989: 49) que, «después de la decadencia de la cultura helénica y de la desaparición del último gran centro cultural, que fue Alejandría, el saber de los griegos fue reconstruyéndose lentamente a partir de traducciones [...]. La depositaria fundamental de este saber era Siria». No obstante, en el año 762, el califa al-Mansur estableció su corte en Bagdad, transformando, así, esta ciudad «en un gran emporio cultural» que se convertirá en el gran centro protagonista de producción científica. Asimismo, afirman estos historiadores de las matemáticas (1989: 50), que, por la situación geográfica privilegiada de Bagdad «se alimentó de las corrientes de pensamiento matemático procedentes de la India, así como del saber dispersado de la cultura helénica».

Mukhtasar fīhisāb al-jabr w'almuqābala (ca. 825),[2] que se tradujo como *Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*, de donde proviene el nombre de la disciplina: *Álgebra*[3] (< del árabe *al-jabr* 'restauración' o del árabe *abr*, 'reducción', perteneciente a la raíz *ğ-b-r* 'reforzar', 'curar', 'restituir', según el *Diccionario Crítico Etimológico Castellano e Hispánico*, *DECH*, de Corominas y Pascual).[4]

El proyecto algebraico del que se conoce como «el padre del álgebra» (Boyer 2003: 297-299), al-Khwārizmī, aparece reflejado en el esquema de este libro, el cual se puede dividir en los siguientes capítulos, de acuerdo con el análisis de Puig (2010: 89):

1. Introducción
2. Las especies de números
3. Las seis formas canónicas, simples y compuestas[5]
4. Los algoritmos de solución de las formas canónicas simples
5. Las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas
6. Sobre la multiplicación [de expresiones con especies]
7. Sobre la adición y la substracción [de expresiones con especies y radicales]
8. Sobre la división [de radicales]
9. Los seis problemas [ejemplos de las seis formas canónicas]
10. Varios problemas
11. Transacciones mercantiles
12. Medidas [de áreas y volúmenes]
13. Testamentos
14. Devolución de dotes

El lenguaje algebraico empleado es de tipo retórico, esto es, los problemas expuestos y las fórmulas matemáticas o algoritmos utilizados para su resolución

2. En palabras de Bell (2000: 109), *al-jabr w'almuqābala* significa «*restauración* y *reducción*, aludiendo a lo que ahora se llama transposición de términos negativos, para producir ecuaciones con todos sus términos positivos, y a la subsiguiente reducción simplificando los términos de igual potencia de la incógnita».
3. Designación que, en el Renacimiento, contó con las variantes *Almucábala* (<ár. *almuqābala* 'oposición') o *Regla del álgebra*, vulgarmente denominada *Regla de la cosa*, e incluso *Regla del cos* y *Arte Mayor* (en contraposición con la aritmética, que era considerada un arte menor).
4. Por otro lado, conservamos en el léxico matemático actual otros arabismos que derivan de este ilustre algebrista: *algoritmo* (*DECH*) que «primero sirvió para rotular los libros de Aritmética dedicados a los números escritos con arreglo al principio de posición, luego significó específicamente el cálculo indio y hoy la empleamos para indicar el mecanismo de una operación» (Vera 1991: 84) y *guarismo* 'cifra que expresa una cantidad', del antiguo *alguarismo* 'arte de contar, aritmética', «y este de Al-ȟuwārizmî, sobrenombre del matemático árabe», según la interpretación del *DECH*.
5. Expone al-Khwārizmī en los siguientes capítulos la forma de resolver los seis tipos de ecuaciones canónicas de segundo grado o cuadráticas, las cuales, a su vez, incluyen todas las posibilidades de ecuaciones lineales y cuadráticas que tengan una raíz positiva, que, traducidas al simbolismo actual, equivalen a: $ax^2=bx$; $ax^2=c$; $bx=c$; $ax^2+bx=c$; $ax^2+c=bx$; $bx+c=ax^2$.

están caracterizados únicamente por instrucciones verbales, eliminando los vestigios de simbolismo que se hallaban en algunas obras griegas. Esta característica, propia del estadio primitivo del Álgebra, según la clasificación Nesselmann (1842),[6] avanzará paulatinamente al álgebra simbólica actual, en la que los símbolos predominan sobre las palabras.

Por lo que respecta a la resolución de las ecuaciones, la fórmula diseñada y utilizada por al-Khwārizmī es de construcción o justificación geométrica, influencia directa de los métodos expuestos en los *Elementos* de Euclides,[7] que se convirtieron en una referencia constante en todas las obras árabes (Paradís y Malet 1989). En efecto, el punto de partida de las aritméticas árabes se encuentra, fundamentalmente,

> en la herencia de los últimos matemáticos griegos, como Diofanto,[8] y en la influencia procedente de las técnicas de los matemáticos hindúes, entre otros, Aryabhata (siglo VI) y Bramagupta (siglo VII). Estas se fueron convirtiendo con el tiempo en el entramado sobre el cual se construyó el álgebra retórica de los árabes, que a las puertas del Renacimiento acabó pasando a Europa. (Paradís 1989: 47-48)

En el prólogo del libro de álgebra que al-Khwārizmī compuso a instancias del califa al-Ma'mūn, expresa el autor que este texto conciso de *al-jabr* «encierra todo lo que es útil en el cálculo y lo que en él es lo más noble» (Puig 2008: 106), cuya finalidad es «facilitar las operaciones que se presentan en afrontar las necesidades de la vida, sin ningún otro fin superior» (Vera 1947: 31). Sobre este pragmático y efectivo trasfondo construye al-Khwārizmī lo que se reconocerá, a partir de su legado, como una nueva disciplina.[9]

6. Este autor realiza una periodización del álgebra, distribuida en tres estadios: el del *álgebra retórica* (que examinaremos en este trabajo), el *álgebra sincopada* (característica del Renacimiento, véase Molina Sangüesa 2015) y el *álgebra simbólica* (desarrollada en los siglos XVI-XVII por Vieta y Descartes, dando lugar al álgebra actual).
7. «Euclides intervino sobre la herencia cultural de las matemáticas en dos direcciones. Por una parte, [...] escogiendo los conocimientos *elementales*, en el sentido que estaban firmemente asentados y de que constituían la base de investigaciones actuales y futuras. Por otra, exponiendo estos conocimientos de manera ordenada, según una trama que facilitaba enormemente su estudio y que favorecía su utilización en ulteriores investigaciones para la búsqueda de nuevos resultados» (Millán 2004: 53).
8. Se conocen pocos datos sobre su biografía. Vivió en la que se denomina como la «Edad de Plata» de la matemática griega, según Boyer (2003: 235), «en el siglo que va del año 250 al 350 aproximadamente», en Alejandría, ciudad que ocupó el mayor centro de actividad matemática sin precedentes en la historia. Se considera a Diofanto de Alejandría como el más importante de los algebristas griegos, ya que su *Arithmética*, al estar divorciada de los métodos geométricos, en línea con el álgebra babilónica, destaca por la introducción de símbolos para la expresión de las distintas potencias de la incógnita y para las relaciones y operaciones entre números (Cajori: 1993); de ahí la originalidad y relevancia de la misma, propia de un álgebra más avanzada: *álgebra sincopada*, que no se retomará hasta el siglo XV.
9. «Dans les pages [de *Kitāb al-Mukhtasar fīhisāb al-jabr w'almuqābala*], on voit par la première fois surgir l'algèbre comme discipline mathématique, distincte et indépendante» (Rashed 1987: 350).

3. El papel de las traducciones

La obra aritmético-algebraica de este matemático árabe llegó al Occidente cristiano relativamente pronto, a partir de diversas traducciones al latín que, a continuación, detallamos.

Efectivamente, se conservan dos versiones latinas del álgebra de al-Khwārizmī. La más antigua es la que realizó Roberto de Chester[10] (aproximadamente en 1145), con el título de *Liber algebræ et almucabola*, y, poco después, Gerardo de Cremona[11] confeccionó una segunda versión (ca. 1170): *De jebra et almucabola*. De este modo, introdujeron en Europa una ciencia «completamente desconocida hasta entonces y con ella una terminología fluctuante aún, pero ya totalmente desarrollada» (Vernet 2006: 185).

Al parecer, estas traducciones eran sometidas a un doble proceso. Primeramente un judío o mozárabe hacia la versión a la tosca *fabla* vulgar o al latín bárbaro y luego los doctos la interpretaban en el latín culto que había de divulgarse por toda Europa (Vera 1991: 79).

En esta línea, sobre la producción matemática en el occidente latino medieval, Vera afirma que, cuando la labor desempeñada por los traductores en el siglo XII «logra la simbiosis de las tres culturas: árabe, judía y cristiana, el Occidente europeo entra en contacto con la geometría griega y el álgebra árabe y se produce el despertar en la matemática»[12] (1991: XIV).

3.1. La adaptación al latín de ciertos arabismos algebraicos

El árabe era la *lingua franca* de los intelectuales de la cultura islámica; por tanto,

> fue la lengua utilizada por árabes, persas, turcos, judíos y españoles durante la Edad Media y que sirvió de vehículo para la transmisión de los más diversos saberes de la antigüedad —clásica u oriental— al mundo del Islam. Reelaborados por este e incrementados de modo decisivo con nuevas aportaciones, como el álgebra y la trigonometría, por citar un ejemplo, que pasaron a la cristiandad por medio de traducciones del árabe al latín y al romance y dieron origen al majestuoso despliegue científico del Renacimiento. (Vernet 2006: 11)

10. Poco o nada se sabe de la vida de este autor inglés hasta prácticamente 1145 (Santoyo 2000: 81-87), año en el que, desde Segovia, realizó una traducción al latín del *Álgebra* de al-Khwārizmī, «algo anterior a la de Gerardo de Cremona y de inferior calidad» según Moreno (2007: 44).
11. Italiano de nacimiento (Cremona, 1114 – Toledo, 1187), fue uno de los traductores más ilustres, prolíficos y fecundos del siglo XII. A pesar de que se conserva poca información acerca de la vida de este autor (léase Boncompagni 1851; Santoyo 2000: 120-128) se sabe, sin embargo, que conocía el griego, el árabe y el latín, y que sus traducciones abarcan una multiplicidad de temas (tales como la astronomía, geometría, óptica, matemáticas o la alquimia). Entre sus traducciones más importantes destacan, sin duda, el *Almagesto* de Ptolomeo y el *Al-jabr* de al-Khwārizmī, «la cual tuvo un peso decisivo en todos los matemáticos posteriores hasta el Renacimiento» (Moreno 2007:43).
12. Vernet (1978: 84) confecciona, a propósito de las traducciones del árabe al latín, un inventario por materias que permite examinar las «tendencias culturales» de la época, en la que van a predominar las ciencias exactas (matemáticas, astronomía, etc.), con el 47% del total.

De acuerdo con las palabras de Vernet, examinaremos las designaciones más elementales del álgebra desarrollada por al-Khwārizmī; concretamente, las expuestas en el capítulo 2 de su *Al-jabr w'almuqābala*, en el que presenta las *especies* de números y las formas que estos adoptan en esta disciplina:

> He encontrado que los números que se necesitan en el cálculo de *al-jabr* y *w'almuqābala* son de tres especies, que son: ***raíces***, ***tesoros*** y ***números simples*** no relacionados con raíz ni con tesoro. La ***raíz*** [< árabe *jidr*] es cualquier cosa que se multiplica por sí misma, como la unidad, o los números, que son superiores, o las fracciones, que son inferiores. El ***tesoro*** [< árabe *māl*] es todo lo que resulta de la raíz multiplicada por sí misma. El ***número simple*** [< árabe *adad mufrad*][13] es todo lo que, entre los números, es expresable y no se relaciona con raíz ni con tesoro. (Rashed 2007: 96-97 [traducido y citado por Puig 2010: 89])

Estas designaciones forman parte de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente las cuadráticas o de segundo grado, que resultan al considerar simultáneamente los seis tipos de ecuaciones canónicas posibles, compuestas mediante la combinación de los siguientes términos:[14]

3.1.1. درهم *> dirham > dragma*

El vocablo árabe درهم transliterado: *drikhem* (según Bashmakova y Smirnova 2000: 65) o —más frecuentemente— *dírham* 'moneda' o 'unité monétaire', como argumentan Youschkevitch (1976: 35), Franci (2010: 181) y Oaks (2012: 42), es el nombre empleado por al-Khwārizmī para referirse al número simple o término independiente de una ecuación, variable pero conocido, que pasó al latín traducido como *dragma* (*Oxford Latin Dictionary*, *OLD*). Así lo certifica el siguiente fragmento extraído por Høyrup (1991: 9) de la traducción del *Al-jabr w'almuqābala* confeccionada por Gerardo de Cremona:

> Census et decem radices equantur triginta novem ***dragmis***.[15] (1986 [Hughes ed.]: 234)

Cifrado al sistema matemático de símbolos (SMS) del álgebra elemental actual,[16] equivale a la ecuación $x^2 + 10x = \mathbf{39}$, en la que se comprueba que las unidades son contadas como *dirhams* o *dragmas*.

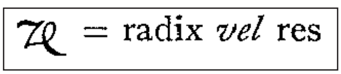
13. Oaks (2012: 42) puntualiza sobre este aspecto que «units were counted in *dirhams*, a unit of currency, or sometimes as *āhād* ('units') or *min al-'adad* ('in number') and often the name was dropped together. So "ten dirhams", "ten units", "ten in number" and "ten" all take the meaning of the number ten».
14. Agradecemos enormemente a la Dra. Dña. Concepción Vázquez de Benito las indicaciones y correcciones de las transcripciones en árabe que, a continuación, presentamos.
15. «In the examples the numbers are named *dragme*, which recall al-Khwarizmi's *dirhams*» (Franci 2010: 181). No obstante, también se documenta, aunque con menor frecuencia, el sustantivo *denario* (tomado del latín *denarĭus*, según DRAE) 'moneda romana' en las traducciones latinas revisadas.
16. Para más información, léase Puig (2003).

3.1.2. شيئ *> shay' > res o* جذر *> jidhr > radix*

A continuación, hallamos la adaptación al latín de dos términos técnicos. Por un lado, en primer lugar, el vocablo árabe شيئ > *shay*', empleado por los matemáticos islámicos tanto para designar la incógnita de una ecuación, en líneas generales, como para expresar, en ciertas ocasiones, cada uno de los valores que puede tener esta misma, fue traducido al latín como *rēs* 'cosa' (*DECH*) en la versión latina del *Al-jabr* atribuida a Gerardo de Cremona (Paradís y Malet 1989: 96).

Por otro lado, el vocablo árabe جذر transliterado como *jidhr* 'raíz', se adaptó al latín como *rādix, -ĭcis* 'íd.' (*DECH*) y, de un modo similar, se utilizaba para designar el valor de la primera potencia de la incógnita: *x*.

De este modo, las palabras latinas *res* y *radix* aparecen como sinónimos para designar lo desconocido en la versión latina del Álgebra de al-Khwārizmī traducida por Roberto de Chester (Karpinski 1915), tal como se deduce de esta nota que el inglés emplea en su versión del *Al-jabr w'almuqābala*:


= radix *vel* res

(1915 [Karpinski ed.]: 65),

y como pone de manifiesto este ejemplo:

Substantia et **10 *radices*** 39 coaequantur drachmis (1915 [Karpinski ed.]: 70),

fragmento que, en lenguaje simbólico actual, se expresa $x^2 + \mathbf{10x} = 39$[17].

3.1.3. مال *> māl > census o substantia*

Finalmente, destacamos el arabismo مال: *māl* 'sum of money' (según Oaks 2012: 41), 'fortuna', 'cantidad de dinero', frecuentemente traducido como 'treasure' (Høyrup 1991: 8), y en español 'tesoro'. Esta *especie* de número obtuvo, en su paso al latín, dos soluciones distintas: una, la más extendida, es el término latino *census*, *-ūs* (*OLD*), acuñado por Gerardo de Cremona en el siglo XII para la traducción del árabe *māl* empleado por al-Khwārizmī en su *Al-jabr w'almuqābala* para la expresión de la segunda potencia de la incógnita, esto es, el cuadrado de la incógnita, x^2. Afirma Høyrup que esta traducción es preferible a la convencional «square» ('cuadrado'), ya que esta puede inducir al error por varias razones:

> Firstly, «square» possesses geometrical connotations, which were only to be associated with *māl* in later times indeed by those generations who had learned their algebra from al-Khwārizmī. The customary translation therefore makes a fool of al-Khwārizmī when he takes great pain to explain that a geometrical square represents the *māl*. Secondly, the *algebraic* understanding of «square» is

17. El algoritmo de resolución de esta ecuación $x^2+10x=39$, es decir, del tipo $x^2+bx=c$, es, según Rankin (1992), la siguiente: $x = \sqrt{(½ \cdot 10)^2 + 39} - ½ \cdot 10$.

> also misleading: The square is the second power of the unknown, and no unknown in its own right [...]. Thirdly, speaking of the *māl* as a second power of the unknown makes us believe that the *root* is meant as the *root of the equation* once again a meaning only taken on by the term as a consequence of al-Khwārizmī's work. To al-Khwārizmī, the *root* is simply the *square root* of the *māl*. (1991: 8)

En cambio, Roberto de Chester, por el contrario, tradujo *māl* por *substantia, -ae* (*OLD*) para designar el mismo concepto: la segunda potencia o cuadrado de la incógnita, como se comprueba en las siguientes instrucciones aplicadas a las tres formas o tipos de ecuaciones canónicas «simples», traducidas en notación algebraica moderna como: $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$ [a, b, $c > 0$]:

Substantiae radices coaequant Substantiae numeros coaequant, et Radices numeros coaequant.

(1915 [Karpinski ed.]: 68),

así como en la clasificación de las 3 formas «compuestas», hoy expresadas: $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $bx + c = ax^2$ [a, b, $c > 0$]:

Substantia et radices numeros coaequant Substa[n]tia et numeri radices coaequant, et Radices et numeri substantiam coaequant.

(1915 [Karpinski e d.]: 70).[18]

En esta línea, expone Vernet (2006: 151): «son muy indicativas las formas de expresar la terminología científica. Cuando esta existe en una lengua y falta en otra se producen una serie de fluctuaciones, antes de que se imponga una palabra de modo indiscutible», como en el siguiente apartado certificamos:

3.2. Su introducción y vernacularización en los tratados matemáticos del Renacimiento hispano

En el medievo, los principales transmisores de la doctrina establecida por el árabe al-Khwārizmī serán Leonardo de Pisa,[19] a través de su *Liber Abacci* (1202) —libro en el que condensó los conocimientos aritméticos y algebraicos árabes y

18. Tanto las formas canónicas simples como las compuestas generan en la obra de al-Khwārizmī polinomios en los que solo tienen cabida las potencias positivas: «tesoro igual a raíces; tesoro igual a números; raíces igual a números» (para las simples) y «tesoro y raíces igual a números; tesoro y números igual a raíces; raíces y números igual a tesoro» (para las compuestas).
19. Más conocido como Fibonacci (hijo de Bonaccio, mercader y funcionario comercial) (Pisa, 1180 – ¿?, 1250). Viajó por negocios, y por placer, por toda Europa y el Cercano Oriente (Moreno 2007) y fue el introductor de las cifras hindo-arábigas (Bell 2000: 113). En su obra más notable, *Liber Abacci* (1202), recoge las aportaciones árabes y judías sistematizándolas admirablemente (Vera 1991: 112).

orientales, el cual ejerció una gran influencia en la etapa pre-renacentista (Paradís y Malet 1989: 93-99)—, Guillermo de Lunis, que tradujo al italiano (Franci 2003, Hissette 1997 y 2003), aproximadamente en 1250, el tratado de *Al-jabr w'almuqābala*, tal como recalca Marco Aurel, a propósito de las distintas designaciones de la disciplina objeto de nuestro estudio:

> La *Regla* vulgarmente llamada *de la cosa* o *Arte mayor*, que por su propio nombre (como dize ***Guillelmo de Lunis***, ***que es el que primero trasladó la dicha Regla de arábigo en lengua italiana***) se llama *Álgebra* y *Almucábola*, que es *restauratio* et *oppositio.* (1552: fol. 68v)

Y, por último, el más influyente: Luca Pacioli,[20] que compiló en una obra matemática de carácter enciclopédico, titulada *Suma de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* (1494), todos los conocimientos de álgebra de los siglos anteriores —como los contenidos de aritmética y álgebra del *Liber Abacci*—, motivo por el que, según Martín Casalderrey (2000: 84), «se convirtió en la lectura básica para los algebristas del siglo XVI, que, apoyados en ella, pudieron hacer nuevos descubrimientos».

En efecto, los ecos de esta corriente italiana de algebristas aparecerán reflejados en los tres tratados matemáticos más representativos del Renacimiento hispano, que son: *Libro primero de Arithmética algebrática* (1552), de Marco Aurel;[21] *Arithmética práctica y speculativa* (1562), de Juan Pérez de Moya;[22] y *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometría* (1567), de Pedro Núñez Salaciense.[23]

20. Luca Pacioli (Sansepolcro, 1445 – Roma, 1517) fue uno de los autores más sobresalientes del Quattrocento italiano y es considerado como «il punto de partenza della matematica del Rinascimento» (Giusti y Maccagni 1994: 15). La *Summa* de Pacioli es la primera obra matemática impresa en lengua vernácula y el último de los tratados del ábaco. Fundamental para el desarrollo del Álgebra en los siglos posteriores e influencia directa de los matemáticos y algebristas hispanos del Quinientos.
21. Se conocen pocos datos sobre su biografía; de origen alemán, afincado en Valencia, fue maestro de escuela (1541) y publicó la primera obra impresa en España cuyos contenidos versan sobre la *regla de la cosa* o Álgebra, de ahí que en el prólogo exponga (1552: fol. IIIr): «*es cosa nueva lo que trato y jamás vista ni declarada, y podrá ser que ni aun entendida ni imprimida en España*» (Picatoste 1891, Rey Pastor 1926, Paradís y Malet 1989).
22. Matemático andaluz (Santisteban del Puerto, ca. 1513 – Granada, 1597), fue uno de los autores más célebres del panorama científico del siglo XVI hispano debido a su labor divulgativa. Su obra alcanzó multitud de ediciones (unas 30, desde la fecha de su primera publicación en 1562 hasta 1875) y fue muy conocida dentro y fuera de nuestras fronteras (Picatoste 1891, Rey Pastor 1926, Valladares Reguero 1997).
23. Cosmógrafo y matemático portugués (Alcácer do Sal, 1502 – Coimbra, 1578), es, junto a Pérez de Moya, otro de los autores más destacados del Quinientos (Picatoste 1891, Rey Pastor 1926, Ventura Sousa 1985). Su *Libro de Álgebra*, publicado 30 años antes en su lengua materna, portugués, tal como explicita el autor en el prólogo (1567: fols. IIIr-IIIv), supuso un gran avance, ya que «al dedicar las dos primeras partes al Álgebra como tal confiere a este saber una entidad propia, que hasta entonces no se le había concedido» (Flórez Miguel 2006: 418).

En estos textos, las «especies de números» de al-Khwārizmī se denominan *dignidades*,[24] las cuales se designarán y sincoparán[25] del siguiente modo:

3.2.1. Dragma o número > n.

En primer lugar, encontramos dos términos heredados del latín, ***dragma*** (< tomado del lat. *dragma*, *OLD*) y ***número*** (< tomado del latín *nŭmĕrus*, *DECH*), para designar el *número simple* o término independiente de una ecuación, en el primer libro que contiene un apartado dedicado al Álgebra impreso en la Península, a mediados de la centuria:

> Y para evitar algunos yerros de equivocar un número por otro, quiero poner diez caracteres en una continua proporción y nombrar a cada uno por sí, por su propio nombre que le conviene y pertenesce conforme a su género o dignidad, y son los siguientes: el primero se llama ***dragma*** o ***número***; el segundo, raýz o cosa; el tercero, censo. (Aurel 1552: fol. 69r)

> Declaración de los caracteres y de sus números y primero del ***número*** o ***dragma***: El ***n.*** en esta materia significa y es tomado como uno, que en multiplicar ni haze crescer, ni en partir menguar, como verás en su lugar. Y es siempre número o quantidad discreta y sabida; no como los otros caracteres. Como si dixiesses 3 ***n.*** ducados, dirás claramente que son 3 ducados, mas diziendo 3 co. ducados, o 4 ce. ducados, etc., estos tales no se podrían determinadamente dezir quántos ducados son, por ser quantidad oculta y no sabida, hasta tanto que por alguna ygualación te sea declarada la valor de la co., como verás en las igualaciones. (Aurel 1552: fols. 69r-69v)

Esta designación se sincopa, en palabras del alemán, «por evitar la prolixidad de escrivir tales nombres a la larga» (1552: fol. 69r), y aparecerá representada mediante la letra inicial del vocablo *número* **>** ***n***., como se advierte en el siguiente ejemplo:

> Y los [caracteres] que aquí porné no es de necessidad por fuerça que éstos y no otros hayan de ser, porque cada uno puede poner los que a él plazerán, o si querrá escrivir los dichos nombres a la larga, podrá hazerlo, pues no haze nada al caso. Yo, al presente, pongo los siguientes: ***Dragma*** o ***número***, assí: ***n***. Rádix o cosa, assí: co. Censo, assí: ce. Cubo, assí: cu. (Aurel 1552: fols. 69r-69v)

Únicamente Marco Aurel, que sigue el esquema en la nomenclatura y simbolismo para las notaciones de las distintas potencias de la incógnita que Christoff Rudolff utiliza en su *Die Coss* (1525), mantiene las connotaciones arábigas: *dragma* < *dirham* < درهم.

24. Véase Molina Sangüesa (en evaluación).
25. De ahí la etapa de esta rama de las matemáticas que se conoce como *álgebra sincopada* en la que, según Etayo Miqueo (1986: 147), «se intercalan abreviaturas para hacer más ágil el razonamiento, que sigue expresándose sin embargo en palabras».

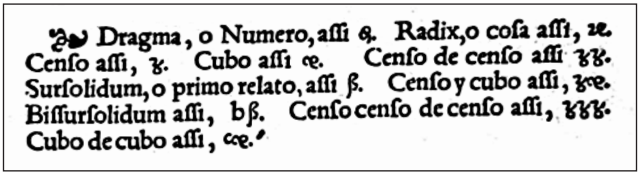

Dragma, o Numero, aſſi. Radix, o coſa aſſi,
Cenſo aſſi, Cubo aſſi. Cenſo de cenſo aſſi
Surſolidum, o primo relato, aſſi. Cenſo y cubo aſſi,
Biſſurſolidum aſſi, Cenſo cenſo de cenſo aſſi,
Cubo de cubo aſſi,

Figura 1. Notaciones Marco Aurel (1552: fol. 69r).

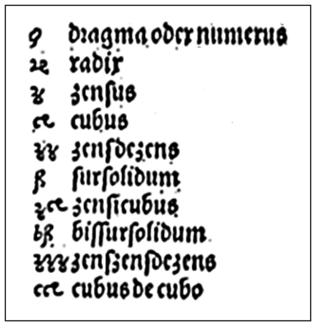

dragma oder numerus
radix
zenſus
cubus
zenſdezens
ſurſolidum
zenſicubus
biſſurſolidum
zenſzenſdezens
cubus de cubo

Figura 2. Notaciones Christoph Rudolff (1525: 174).

3.2.2. Cosa, raíz o lado[26] > *co.* > *x*

El término ***cosa***, tomado del italiano *còsa*, y este del latín *causa* (*DECH*) para la traducción del latín *rēs* 'cosa' (*DECH*) que, a su vez, es la transliteración del árabe *shay*, además de designar a la cantidad desconocida o ignota, es decir, a la incógnita de una ecuación, se emplea en los tratados matemáticos del Quinientos en una segunda acepción referida a «cada uno de los valores que puede tener la incógnita de una ecuación» (DRAE, s. v. *raíz*), en notación simbólica actual: *x*, de cuyo valor atribuido, destaca Moya, depende el del resto de las potencias de la incógnita:

> De lo que se ha dicho en estos characteres queda claro que, si la ***cosa*** vale 2, el valor de los demás characteres procederá en dupla proporción; y si valiesse la ***cosa*** 3, procederá en tripla, y si 4, en quádrupla, de suerte que, sabido el valor de la ***cosa***, el de los demás characteres es notorio. (1562: 451-452)

Además del vocablo *cosa* (§ 3.1.2.), hallamos el nombre ***raíz*** (del latín *rādix, -ĭcis* 'íd.', *DECH*) que, entre sus múltiples acepciones, es empleado por los algebristas hispanos como sinónimo de ***cosa*** para representar cada uno de los valores que puede tener la ***x*** o incógnita de una ecuación:

26. Destacan Paradís y Malet (1989: 68) la presencia de esta clasificación en otras obras árabes, como la de Al-Aamoulí, en la que los autores «hacían la siguiente aclaración de la notación utilizada: La cantidad que se multiplica por ella misma se llama *raíz* en aritmética, *lado* en geometría y *chaï* (cosa) en álgebra; el resultado se llama entonces cuadrado».

> Y para evitar algunos yerros de equivocar un número por otro, quiero poner diez caracteres en una continua proporción y nombrar a cada uno por sí, por su propio nombre que le conviene y pertenesce conforme a su género o dignidad, y son los siguientes: el primero se llama dragma o número; el segundo, ***raýz*** o cosa; el tercero, censo; [...]. (Aurel 1552: fol. 69r)

Por último, documentamos el sustantivo *lado* (del latín *lătŭs*, *DECH*) como sinónimo de *cosa* y *raíz*:

> El ***co***. es raýz o ***lado*** de un quadrado equilátero y es el primero de los números de una continua proporción, porque n. es como uno, el qual no es número. (Aurel 1552: fol. 69v)

> El segundo se dize cosa. Es raýz o ***lado*** de un número quadrado, y éste es el primero de los números de una continua proporción. Su valor es variable, porque, assí como si aviendo de poner algunos números proporcionales puede el primero ser unas vezes una quantidad y otras vezes otra, assí esta cosa no tendrá proprio valor, antes tendrá el que le quisieres dar, assí por enteros como por quebrados. (Pérez de Moya 1562: 449)

Esto refleja las frecuentes imbricaciones entre álgebra y geometría. Como se vislumbra en alguno de estos ejemplos, la sincopa empleada por los matemáticos del Quinientos, en este caso, es ***co.***

Cosa es el término necesario para poder calcular con lo desconocido. Tal fortuna tuvo esta adaptación del árabe شيئ > ***shay***, que, con el trascurso de los años, ***cosa*** se empleó para designar no solo la incógnita, sino el Álgebra en sí, entendida como disciplina independiente de las matemáticas, cuya esencia o núcleo es el término utilizado para descubrir lo ignoto o desconocido: la ***cosa***, de ahí que, en los siglos XV-XVI, vulgarmente se le denomine *Regla de la cosa* o *Regla del cos* (que procede de la adaptación del término italiano *còsa* al alemán: *coss*) para evitar, así, el uso del nombre bárbaro *álgebra*.

3.2.3. Censo > ce. > x^2

Como hemos estudiado en el subapartado **3.1.3.**, Gerardo de Cremona tradujo al latín el arabismo *māl* por ***census***, y no por *quadratus*, y esta traducción, en consecuencia, desencadenó que la palabra *census*, que en latín significa 'patrimonio', 'riqueza',

> fuera usada en libros de álgebra escritos en latín en la época medieval, y también más adelante cuando en el Renacimiento empezaron a aparecer libros de álgebra en lenguas vernáculas. En estos, la palabra *census*, convertida en término técnico, cuyo significado en lenguaje natural ya carecía de importancia, no se tradujo sino que se castellanizó (*censo*), catalanizó (*cens*) o italianizó (*censo*). (Puig 2010: 90)

Esta designación se impuso sobre la propuesta por Roberto de Chester: ***substantia***.

Tal como se deduce de los testimonios del Quinientos, se puede definir ***censo*** como la «segunda potencia de un número o expresión algebraica, que se obtiene multiplicando estas cantidades por sí mismas» (en notación simbólica actual: x^2):

> El tercero se dize ***censo***. Denota un número quadrado. Procede de la multiplicación de la cosa por sí misma. Como si pones por exemplo que la cosa vale 2, el ***censo*** valdrá 4; y si la cosa vale 3 el ***censo*** valdrá 9, y assí procederás en infinito. De lo qual se entiende ser la cosa raýz del ***censo***. (Pérez de Moya 1562: 449)

Esta, a su vez, evolucionará a la síncopa o abreviatura ***ce.***:

> Dragma o número, assí: *n*. Rádix o cosa, assí: *co*. Censo, assí: ***ce.*** Cubo, assí: *cu*. Censo de censo, assí: *cce*. Sursolidum o primo relato, assí: *R*. Censo y cubo, assí: *cecu*. Bissursolidum, assí: *RR*. Censo, censo de censo, assí: *ccce*. Cubo de cubo, assí: *ccu*. (Aurel 1552: fol. 69r)

> Por el que dizen número, *n*.; por la cosa, *co*.; por el censo, ***ce.***; por cubo, *cu*.; por censo de censo, *cce*.; por el primero relato, *R*.; por el censo y cubo, *cecu*.; por el segundo relato, *RR*.; por censo de censo de censo, *ccce*., por cubo de cubo, *ccu*. (Pérez de Moya 1562: 452-453)

En este sentido, Cajori (1993: 108) recalca que:

> The most commonly notations used by Luca Pacioli and by several later Italian writers of the sixteenth century employs for x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7..., the abbreviations *co*. (cosa), *ce*. (censo), *cu*. (cubo), *ce.ce*. (censo de censo), etc.

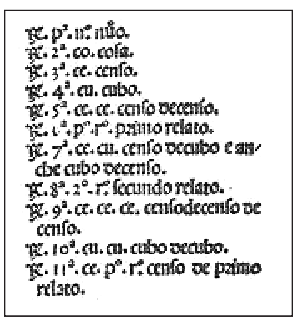

℞. pª. nº. nũo.
℞. 2ª. co. coſa.
℞. 3ª. ce. cenſo.
℞. 4ª. cu. cubo.
℞. 5ª. ce. ce. cenſo decenſo.
℞. 6ª. pº. rº. primo relato.
℞. 7ª. ce. cu. cenſo decubo e anche cubo decenſo.
℞. 8ª. 2º. rº. ſecundo relato.
℞. 9ª. ce. ce. ce. cenſodecenſo de cenſo.
℞. 10ª. cu. cu. cubo decubo.
℞. 11ª. ce. pº. rº. cenſo de primo relato.

Figura 3. Notaciones Luca Pacioli (1494: 155, Al margen).

de acuerdo con la corriente establecida por la escuela italiana y la influencia ejercida por la *Suma* de Pacioli, la cual determinó en gran parte, según Paradís y Malet (1989: 135), «las notaciones empleadas en Italia, y en los países que culturalmente dependían de ella, hasta prácticamente 1600». De hecho, afirman que

> la contribución más importante de la *Suma* son las notaciones. En la obra de Pacioli se da un paso adelante fundamental, desde la simple y pesada retórica de los árabes y del mismo Fibonacci, hacía una simbología específica de las relaciones algebraicas. (1989: 135-136)

Como se puede comprobar en los ejemplos expuestos, ***número***, ***cosa*** y ***censo*** son los elementos nucleares de las primeras notaciones algebraicas, a través de las cuales se expresan o generan potencias superiores, sirviéndose de un principio aditivo o multiplicativo de estos mismos.

En síntesis, estos aspectos nos llevan a afirmar, de acuerdo con la tesis defendida por Cifoletti (1996: 125), que, «in the course of the sixteenth century [...], algebra was transformed into a new discipline, from a practical, 'occult' and secondary art to a discipline of high theoretical status within a specific national context».

4. Conclusiones

En el análisis llevado a cabo hemos podido comprobar la pervivencia del innegable legado árabe —representado en la figura de al-Khwārizmī— para el desarrollo del Álgebra como disciplina independiente de las matemáticas hasta bien entrado el siglo XVI:

> Les mathématiciens des pays islamiques exercèrent une influence féconde sur le développement de la science en Europe et l'enrichirent aussi bien de leurs propres découvertes que de celles qu'ils avaient héritées des Grecs, des Indiens, des Syriens, des Babyloniens, etc. (Youschkevitch 1976: 164)

De este modo, se certifica un total paralelismo entre los conceptos expuestos por el padre del álgebra en su *Kitāb al-Mukhtasar fīhisāb al-jabr w'almuqābala* (ca. 825) y la terminología empleada por los matemáticos del Quinientos hispano. En efecto, por un lado, los términos técnicos primitivos: ***dirham***, ***shay'***, ***jidhr*** y ***māl*** —marcados por una conceptualización monetaria, al parecer, tradición de las gentes de *al-jabr*— o *especies de números* establecidas por el matemático árabe, corresponden a ***dragma***, ***raíz***, ***cosa*** y ***censo***, esto es, las denominadas *dignidades* de los algebristas del Renacimiento. Como hemos demostrado, estos vocablos son empleados para referirse al término independiente de una ecuación y a las primeras potencias de la incógnita, cuyas combinaciones permiten establecer «todo lo que es necesario para calcular» en la práctica algebraica.

Asimismo, por otro lado, las técnicas —basadas en justificaciones de construcciones geométricas con forma cuadrangular— y el modo de resolución de los problemas, así como el método para despejar la incógnita, permanecen en parte inalterados en el trascurso de los siglos.

No obstante, este hecho no hubiera sido posible sin la esencial labor realizada por los traductores del siglo XII, quienes, preocupados por la pervivencia y difusión de la ciencia griega y árabe, fueron los transmisores de una doctrina de la que hoy somos deudores.

En este trascurso, la época medieval, caracterizada por la adaptación al latín de los vocablos árabes, aportará interesantes soluciones para la designación de los nuevos conceptos relativos al Álgebra. Estos aspectos tendrán repercusiones en las tendencias léxicas que se establecerán a posteriori, en el Renacimiento, cuando comiencen a difundirse y proliferar obras matemáticas en lenguas vernáculas, como las que hemos estudiado; momento en el que, finalmente, tras una época marcada por la fluctuación terminológica —recordemos, por ejemplo, el caso de ***census*** vs. ***substantia***—, unas tendencias triunfarán sobre otras para el intento de vulgarizar una ciencia nueva, no tratada antes en español.

En definitiva, este trabajo pretende ser una muestra de lo que nuestra cultura debe a los árabes, al menos en lo que respecta a las ciencias matemáticas en sus dos vertientes:[27] la Aritmética, por la numeración de posición y los numerales indoarábigos, y el Álgebra, por su establecimiento como una disciplina independiente, que emana del libro de *Al-jabr w'almuqābala* de al-Khwārizmī revisado, con el que el Occidente latino «por primera vez tuvo noticia del razonamiento abstracto» (Vera 1991: 81).

Referencias bibliográficas

Aurel, Marco (1552). *Libro primero de Arithmética algebrática*. Valencia: Joán de Mey.

Bashmakova, Ivanova; Smirnova, Gallina (2000). *The beginnings and evolution of Algebra*. EE.UU.: The Mathematical Association of America.

Bell, Eric Temple (2000). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Boncompagni, Baldassare (1851). «Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del secolo decimosecondo, e di Gherardo da Sabbioneta, astronomo del secolo decimoterzo». *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei* IV, pp. 387-493.

Boyer, Carl (2003). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Cajori, Florian (1993). *A History of Mathematical Notations*. La Salle (Illinois): Open Court Publishing.

Cifoletti, Giovanna (1996). «The creation of the history of algebra in the sixteenth century». En: Goldstein, Catherine; Gray, Jeremy; Ritter, Jim (coords.). *L'Europe mathématique: Histoires, mythes, identités*. París: Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, pp. 121-142.

Corominas, Joan; Pascual, José Antonio (1980-1991). *Diccionario Crítico Etimológico Castellano e Hispánico*. Madrid: Gredos.

Couchoud, Sylvie (1993). *Mathématiques Egyptiennes. Recherches sur les connaisances mathématiques d'Egypte pharaonique*. París: Éditions Le Léopard d'Or.

Etayo Miqueo, José Javier (1986). «El álgebra del cinquecento». En: *Historia de la Matemática hasta el siglo xvii*. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, pp. 147-169.

27. Las principales aportaciones aritmético-algebraicas realizadas por los árabes fueron decisivas, según Paradís (1989: 47), «para preparar el terreno de la futura eclosión de la matemática en la Europa renacentista».

Flórez Miguel, Cirilo (2006). «Ciencias, siglos xv-xvii». En: Rodríguez-San Pedro Bezares, Luis Enrique (coord.). *Historia de la Universidad de Salamanca, vol. III. Saberes y confluencias*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, pp. 409-433.

Folwer, David; Robson, Eleanor (1998). «Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in context». *Historia Mathematica*, 25, pp. 366-378.

Franci, Raffaella (2003). «Una traduzione in volgare dell'*al-jabr* di al- Khwarizmi (Ms. Urb. Lat. 291 Biblioteca Apostolica Vaticana)». En: Franci, Raffaella; Pagli, Paolo; Simi, Annalisa (eds.). *Il sogno di Galois. Scritti di storia della matematica dedicati a L. Toti Rigatelli per il suo 60º compleanno*. Siena: Centro Studi della Matematica Medioevale, pp. 19-49.

— (2010). «The history of algebra in Italy in the 14th and 15th centuries. Some remarks on recent historiography». *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica. Nova Època*, 3 (2), pp. 175-194.

Giusti, Enrico; Maccagni, Carlo (1994). *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*. Florencia: Editorial Giunti.

Glare, Peter G.W. (1968-1982). *Oxford Latin Dictionary*. Oxford: Clarendon Press.

Hissette, Roland (1997). «Guillaume de Luna ou de *Lunis* ou *Lunense*: une même traducteur d'Averroès et de traités d'*al-Jabr*?». *Bulletin de Philosophie Médiévale*, 39, pp. 121-129.

— (2003). «L'*al-Jabr* d'al-Khwārizmī dans les mss Vat. lat. 4606 et Vat. Urb. lat. 291 et Guglielmo de Lunis». *Miscellanea Bibliothecae Apostolicae Vaticanae* X, pp. 137-158.

Høyrup, Jens (1991). «"Oxford" and "Cremona": on the relation between two versions of al-Khwarizmi's *Algebra*». *Actes du 3me Colloque Maghrébin sur L'Histoire des Mathématiques Arabes*, vol. II. Argel: Association Algérienne d'Histoire des Mathématiques, pp. 1-24.

Hughes, Barnabas (ed.) (1986). «Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's *Al-jabr*: A Critical Edition». *Mediaeval Studies,* 48, pp. 211-263.

Karpinski, Louis Charles (ed.) (1915). *Robert of Chester Latin translation of the algebra of al-Khowarizmi*. London: Macmillan Company.

Martín Casalderrey, Francisco (2000). *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. Madrid: Nivola.

Millán Gasca, Ana (2004). *Euclides. La fuerza del razonamiento matemático*. Madrid: Nivola.

Molina Sangüesa, Itziar (2015). *Las matemáticas en el Renacimiento hispano: estudio léxico y glosario*. Tesis Doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.

— (en evaluación). «La designación terminológica de las potencias de la incógnita: algunas cuestiones sobre el tránsito del álgebra retórica al álgebra sincopada en el Renacimiento hispano». *Arbor*. Madrid: CSIC.

Moreno, Ricardo (2007). *Fibonacci. El primer matemático medieval*. Madrid: Nivola.

Nesselman, Georg Heinrich Ferdinand (1842). *Versucheiner Kritischen Geschichte der Algebra*, *1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlín: G. Reimer.

Núñez Salaciense, Pedro (1567). *Libro de Álgebra en Arithmética y Geometría*. Amberes: Herederos de Arnoldo Birckman.

Oaks, Jeffrey A. (2012). «Algebraic symbolism in medieval Arabic algebra». *Philosophica*, 87, pp. 27-83.

Pacioli, Luca (1494). *Suma de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*. Venecia: Paganino Paganini.

Paradís, Jaume; Malet, Antoni (1989). *Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias (PPU).

Pérez De Moya, Juan (1562). *Arithmética práctica y speculativa*. Salamanca: Mathías Gast.

Picatoste y Rodríguez, Felipe (1891). *Apuntes para una biblioteca científica española del siglo xvi*. Madrid: Imprenta y Fundación Manuel Tello.

Pisa, Leonardo de (1202). *Liber Abacci*.

Puig, Luis (2003). «Signos, textos y sistemas matemáticos de signos». En: Filloy, Eugenio (ed.). *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual*. México DF: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV, pp. 174-186.

— (2008). «Historias de al-Khwārizmī (2ª entrega). Los libros». *Suma*, 59, pp. 105-112.

— (2010). «Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico». *Suma*, 65, pp. 87-94.

Rankin, Fenella Kathleen Clare (1992). *The arithmetic and algebra of Luca Pacioli (c. 1445-1517)*. London University: Tesis Doctoral.

Rashed, Roshdi (1987). «La périodisation des mathématiques classiques». *Revue de synthèse*, IV, pp. 349-360.

— (ed.) (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rey Pastor, Julio (1926). *Los matemáticos españoles del siglo xvi*. Madrid: Biblioteca Scientia.

Rudolff, Christoph (1525). *Behend und Hübsch Rechnung Durch die Kunstreichen Regeln Algebra, so Gemeincklich die Coss Genennt Werden*. Staβburg.

Santoyo, Julio César (2009). *La traducción medieval en la península ibérica. Siglos iii-xv.* León: Universidad de León.

Valladares Reguero, Aurelio (1997). «El Bachiller Juan Pérez de Moya: Apuntes biobibliográficos». *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses*, 165, pp. 371-412.

Ventura Sousa, Manuel (1985). *Vida e Obra de Pedro Nunes*. Lisboa: Instituto de Cultura e Língua Portuguesa-Ministério da Educação.

Vera, Francisco (1947). *La matemática de los musulmanes españoles*. Buenos Aires: Nova.

— (1991). *La matemática en el Occidente latino medieval*. Badajoz: Publicaciones de la Diputación de Badajoz.

Vernet, Juan (1978). *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente*. Barcelona: Ariel.

— (2006). *Lo que Europa debe al Islam de España*. Barcelona: Acantilado.

Youschkevitch, Adof P. (1976). *Les mathématiques árabes (VIIIe-XVe siècles)*. París: Vrin.