MARÍA ASUNCIÓN SÁNCHEZ MANZANO

BOECIO

INSTITUTIO ARITHMETICA
Fundamentos de Aritmética

CIONES GRIEGAS Y LATINAS

1. *El autor y su época.*

Anicio Manlio Severino Boecio nació en Roma hacia 480 de nuestra era. Era miembro de la familia de los Anicios, que se decían descendientes de Macrino y se habían convertido al cristianismo dos siglos antes. Probablemente antes de los diez años quedó huérfano de padre. Por la posición social destacadísima de éste, un aristócrata que había sido cónsul en 487, continuó desenvolviéndose en los círculos más selectos de la capital del imperio. Fue educado por otro ilustre representante de la clase senatorial, Quinto Aurelio Memio Símaco[1], a quien va dedicada esta obra sobre la doctrina de los números.

Este intelectual, tan destacado en la Roma de entonces, colaboró como asesor de los ostrogodos y favoreció entre sus conciudadanos la difusión de la cultura griega, importante para las relaciones con el pujante imperio oriental bizantino.

La carrera política de Boecio es al principio bastante rápida, pues llegó a ser cónsul sin colega en el año 510. Otra señal de su notable influencia fue la preparación temprana de la carrera política de sus hijos, fruto de su matrimonio con una hija de Símaco, Rusticiana. Éstos ocuparían el consulado en el año 522, cuando todavía no habían alcanzado la edad adulta. Poco después tuvo la responsabilidad de *magister officiorum*, encargado de la supervisión de todos los funcionarios del estado, pero las envidias e intrigas palaciegas y las dificultades de convivencia entre los ostrogodos arrianos y los romanos católicos determinaron una acusación contra él, en la que estaba comprometida su coherencia como asesor del rey, en su dignidad personal e intelectual. La condena dc los jefes religiosos arrianos Dióscuro, Timoteo Eluro, Pedro el Monje, y Pedro de Fulon, con el comienzo del reinado de Justino en Bizancio, determinaron un empeoramiento de las relaciones entre Teodorico y los católicos de Italia. Un tal Cipriano denunció correspondencia entre el emperador bizantino y los miembros del senado romano. El principal acusado fue Albino, cónsul en 493, que había intercedido por la unidad de la Iglesia oriental y occidental con el apoyo del papa Hormisdas. Cipriano señaló que las cartas eran indicio de una conspiración de los católicos contra Teodorico. Boecio defendió a Albino y al senado, pero no convenció al rey de la falsedad de las acusaciones. Se le condenó sólo por las declaraciones de unos testigos, pretextando incluso el uso de la magia. Durante el largo internamiento y en la prisión de Calvenzano, en una zona de Pavía, escribe su obra más leída, copiada y publicada hasta nuestros días: la *Consolatio philosophiae*[2], cuyos valores morales y estéticos resumen toda una larga tradición erudita. En 524 es ajusticiado y no tardará en seguirle con el mismo destino su suegro Símaco al año siguiente.

---

[1] Este notable cortesano de la familia de los Símacos (recuérdese a Quinto Aurelio Símaco, el gran orador del final del siglo IV que había defendido frente a San Ambrosio la restauración del altar de la Victoria) había sido cónsul con Odoacro en 485, prefecto de Roma y dirigente del senado en 524-525. Conocemos un fragmento de la obra histórica que compuso, en siete libros (cf. Luiselli, G., "Note sulla perduta Historia Roman di Quinto Aurelio Memmio Simmaco", *Studi Urbinati* 49 [1975] 529-535).

[2] Cf. Gruber, J., *Kommentar zu Boethius De Consolatione Philosophiae*, Berlín , 1978.

2. *Labor intelectual.*

Su formación intelectual le habría permitido emprender con éxito el proyecto de traducir y comentar conjuntamente las obras de Platón y Aristóteles, pero la condena impuesta por el rey le impidió terminarlo. Su interpretación de Platón le viene a través de su maestro Amonio, discípulo de Proclo. El plan inicial de traducir la obra del pensador griego sólo se pudo llegar a realizar parcialmente. Conocemos una traducción suya del diálogo *Timeo*.

Nos ha llegado completa la traducción y comentario del *Organon* aristotélico. Parece que el orden de sus traducciones fue: *Isagoge* de Porfirio, *Categorías* de Aristóteles, el *De interpretatione*, los *Analytica priora*, *Analytica posteriora*, *Topica* y *Sophistici elenchi*. Se conocen dos comentarios de distinta altura (uno para alumnos, otro más erudito) a la *Isagoge* de Porfirio y otro al *De interpretatione*. Muy destacable es su interés por la lógica, que muestra en sus escritos *De categoricis syllogismis, Introductio ad categoricos syllogismos, De hypotheticis syllogismis, De divisione, De topicis differentiis*. También fue recordado por sus obras teológicas *De catholica fide, Contra Euthycen et Nestorium, Vtrum Pater* y *Hebdomades*. Las aportaciones principales de Boecio a la filosofía posterior se concentran sobre todo en la definición de persona (antecedente de Tomás de Aquino) y en la de libertad moral. En el concepto de ser humano como sustancia individual e irrepetible se distancia de la filosofia neoplatónica. San Agustín y Boecio consiguen elevar la capacidad de la lengua latina para la filosofía y la ciencia.

Entre la obra científica de Boecio, menos conocida que su *Consolación de la filosofía*, se nos ha conservado la *Institución musical* y esta *Institución aritmética*, cuyo modelo es el tratado de Nicómaco de Gerasa (primera mitad del siglo II); se ha perdido para nosotros su obra astronómica (que todavía se podía consultar en el siglo X) y no se ha conservado su tratado de geometría íntegramente (tenemos unos fragmentos tan sólo y una falsificación). La primera geometría pseudoboeciana data, según Jean-Yves Guillaumin[3] del siglo VIII, y fue empleada para la redacción de una *Geometrica ars anonyma* ; la otra, pudo tener origen en el siglo XI.

La denominación del canon de las ciencias que pasan a la Edad Media como *quadrivium* (no ya con el sentido anterior de "encrucijada" sino con el de "cuatro caminos hacia el conocimiento") se encuentra por vez primera en esta obra de Boecio (*arith.* 1,1) por lo que constituye un testimonio interesante en la transmisión de la cultura antigua al medievo. La aritmética estudia el número en sí mismo y por sí mismo, la música el número relativo, para crear armonía, la geometría el espacio en reposo frente a la astronomía que estudia el espacio en movimiento, la conjunción de las tres dimensiones en diferentes planos. El conocimiento de la aritmética, que se proyecta hacia la geometría, la astronomía y la música, define una concepción filosófica racionalista del mundo, en donde todo tiene su lugar y su medida, en perfecta armonía coherente. La manifestación gozosa y vitalista de esta filosofía, apoyada en una larga serie de trabajos medievales, estallará, llamativa y atrayente, en el Renacimiento. En la época antigua, Nicómaco, Teón de Esmirna, Jámblico y Proclo dan la primacía a la aritmética frente a la geometría, más apreciada por los romanos en cuanto aplicable a la agrimensura.

---

[3] Introd. a *Boèce. Institution arithmétique*, París, 1995, p. XXVI.

La valoración que podemos hacer de su aportación teórica a la matemática se puede centrar en estas ideas sobre todo:

a) La distinción entre los conceptos de número y cantidad. Parece que esta distinción aparece en la obra de Teón de Esmirna, del s. II d.C.

b) La adaptación del método de exposición de los tratados griegos, en una labor notable de síntesis y sistematización.

c) La transferencia de métodos matemáticos a otras disciplinas y saberes.

El principio del número es la diferencia entre unidad y pluralidad, que se expresa en el debate entre lo uno y lo otro, la alteridad. El concepto especial de la unidad como perfección ideal —frente a la que la alteridad es una corrupción, una contingencia que se aparta de la sustancia, el fundamento real y esencial del mundo— tiene antecedentes bien conocidos en la filosofía antigua. Esta misma idea se mantendrá durante mucho tiempo en la teología cristiana. La distinción fundamental entre igualdad y desigualdad es un desarrollo o corolario de esta teoría de la unidad neoplatónica que encuentra su aplicación en la unidad de la verdad y en la unidad de la ciencia, y que tiene consecuencias también en los planos social y moral típicamente occidentales. Éstas son algunas de las claves de este pequeño librito, que contiene los gérmenes de esta temática tan enraizada en el debate de muchas generaciones sobre el origen, estructura y composición del mundo.

3. *Pervivencia de la obra y del legado intelectual de Boecio.*

La aritmética es el primer estadio, el fundamental de iniciación en la cultura. De ahí la sólida fundamentación y trabazón de los contenidos culturales que perviven y se desarrollan durante siglos en el Occidente europeo, y que constituyen las raíces de nuestra civilización actual. El tratado de Boecio pudo servir para la instrucción de los monjes en *Vivarium*, el monasterio fundado por su contemporáneo Casiodoro, y junto con la obra de éste, formó parte de la tradición que conocería más tarde San Isidoro. Su libro tercero de las *Etimologías* debe mucho al manual de Boecio. De esta manera debió salvar la época oscura de la transmisión de la cultura latina y llegar al Renacimiento carolingio, edad en la que se hicieron muchas copias que garantizaban su difusión posterior.

Gerberto de Aurillac, el papa del año mil con el nombre de Silvestre II, de probable origen español, apreciaba mucho esta obra y envió una copia al emperador germánico Otón III. Fue autor preferido de Conrado de Hirsau y de Juan de Salisbury. Guillermo Occham tiene influencia boeciana. La alegoría de la naturleza que observamos en Alain de Lille, o en la *Divina Comedia* dependen en sus orígenes del despliegue imaginativo conseguido en las obras poéticas boecianas. La atención que prestó a la metodología matemática boeciana la escuela de Chartres definió un estilo arquitectónico, que se aplicó a la edificación de numerosas catedrales góticas e iglesias del Císter. Así por ejemplo, la iglesia de San Miguel de Hildesheim en el Norte de Alemania (Baja Sajonia), tiene las proporciones armónicas fundadas en esta teoría.

Pero también la doctrina de los números procedente de la Antigüedad se puso en relación con las abundantes referencias numéricas de la Biblia. Por eso, comienza a tener una importancia mayor cuando se incorpora a la discusión sobre la exégesis hebrea del Antiguo Testamento. Durante la Edad Media se conoce en Occidente la matemática árabe, más desarrollada. Todos estos elementos, procedentes de diferentes culturas, forman un crisol muy interesante para el nacimiento del empirismo en la Edad Moderna. La influencia de las teorías del número en las ideas filosóficas, teológicas y astronómicas a partir del siglo XII es muy destacable. Así el mallorquín Raimundo Lulio fundó su lógica y su "árbol de las ciencias" a partir de una instrucción en la filosofía y teología cristianas, en la ciencia árabe y en la exégesis judía, si bien su sistema resulta enteramente original. De ahí el atractivo que ejerció sobre los autores posteriores, en competencia con San Alberto Magno. Fue una de las fuentes de Nicolás de Cusa, y de la escuela neopitagórica de Juan Pico della Mirandola. Uno de los tratados más repetidamente imprimidos en el Renacimiento temprano, el de Jordano Nemorario (Jourdain de Neuvre = 1236) tiene por base el tratado boeciano de aritmética[4]. Algunas aplicacones, incluso lúdicas, de estas teorías nos son conocidas por el matemático y especialista en lenguas orientales y clásicas Lefèvre d'Etaples[5].

4. *El incunable de la Colegiata de San Isidoro de León.*

Se conocen más de 180 manuscritos de la obra de Boecio. La edición príncipe fue realizada por E. Ratdolt en Ausburgo, en 1488 y ya entonces los números romanos fueron sustituidos por numeración arábiga, como en el nuestro de San Isidoro de León. El códice de la biblioteca isidoriana contiene una de las primeras impresiones de la obra en el Renacimiento temprano. Tenemos una muestra del interés que todavía tenían las obras matemáticas de Boecio a comienzos del XVI, en una edición conjunta de los comentarios de Lefèvre d'Etaples con los de J. Clichtove y una obra de Ch. De Bovelles[6]. Menéndez Pelayo en su obra *La ciencia española* recuerda un curso de Pedro Ciruelo sobre artes liberales publicado en 1516, cuya primera parte es una paráfrasis de la aritmética boeciana[7]. Una de las ediciones europeas más notables es la de París de 1521 *Arithmetica duobus discreta libris, adiecto commentario Girardi Ruffi, mysticam numerorum applicationem perstringente declarata, Parisiis, Apud Simonem Colinoeum.*

---

[4] Se puede leer con traducción inglesa en la edición de Busard, H.L.L., *Jordanus Nemorarius. De elementis arithmeticae artis*, Stuttgart, 1981.

[5] Este estudioso realizó un compendio que fue muy difundido durante el siglo XVI; cono cemos una edición de París fechada en 1549: *Arithmetica speculativa Boetii per Iacobum Fabrum in compendium redacta*, Parisiis, Iuvenus.

[6] Tenemos ejemplares en Sevilla, colección de la Biblioteca Capitular y en la Colombina: *"In hoc libro contenta epitome compendiosaque introductio in libros arithmeticos divi Severini Boetii, Jacobus Faber Stapulensis/ adiecto familiari commentario dilucidata Iudoci Clichtovei Neoportuensis/ Caroli Bouvilli liber de quadratura circuli, liber de cubicatione sphere. In almo Parisiarum, Volphgangus Hopilius et Henricus Stephanus,* 1503 (y después otra edición de 1510). Notable es también una edición vienesa de 1515 *Arithmetica communis. Proportiones breves. De latitudinibus formarum. Algorithmus G. Peurbachi. In integris Algor. Jo. de Gmunden. De minuciis physicis,* editada por Georgius Collimitius, en que se reproduce la edición de la aritmética boeciana con el título de communis según lo había hecho en 1500 J. de Murs .

[7] Menéndez Pelayo, M., *La ciencia española*, vol. III *Inventario bibliográfico de la ciencia española*, epígrafe X, *Ciencias matemáticas, puras y aplicadas (astronomía, cosmografía, geodesia, etc.)*, p. 213 *Cursus quattuor mathematicarum libri artium liberalium* (1516), donde además de la paráfrasis de la obra boeciana, se recoge la geometría de Tomás Bravardin, la perspectiva de Juan de Cantorbery y un tratado de música.

El texto latino recogido en la colección Migne, vol. 63, de 1860 reproduce la edición de H. L. Glareanus, publicada en Basilea en 1546. La edición crítica de G. Friedlein, publicada en Leipzig, para la colección Teubner en 1867 (reproducida después en Francfort, por la editorial Minerva, en 1966) fue un precedente de la de J.Y.Guillaumin de 1995. Recientemente ha sido publicada una nueva edición crítica realizada por H. Oostout y J. Schilling en la Colección *Corpus Christianorum,* publicada en Turnhout, en el año 1999. Guillaumin critica la traducción inglesa de M. Masi[8] (Amsterdam, 1983). Esta traducción está precedida de una introducción en la que dedica un pequeño apartado a la iconografía de las artes liberales y otro a la aplicación de las teorías de la proporción a la catedral medieval. Más interesante para la influencia del texto en la cultura europea es el capítulo introductorio en el que recoge comentarios y obras que se han fundado en él.

El incunable de San Isidoro nº 288, semejante en cuanto al texto al que está catalogado con el nº 161, corresponde a la edición de Venecia de 1499 —en letra gótica con abreviaturas, una edición cuidada y corregida— que fue publicada por los hermanos Juan y Gregorio de Gregoriis. Tiene algunas erratas en los gráficos, fácilmente salvables para el lector. Nuestra traducción intenta expresar el contenido de una manera sencilla, por lo que se ha preferido a veces conservar los nombres latinos de los conceptos matemáticos y algunos términos técnicos griegos que Boecio recoge, como *epimoron, epitrito, epitetarton, diapasson, diatessaron, diapente, hemiolia proportio...* Algunos conceptos reciben una exposición relativa al sistema matemático que se desarrolla en la obra, pero pueden ser explicados de manera menos prolija. El "par paritario" es la potencia de dos, y el el "impar paritariamente" es el número obtenido por duplicación de un impar. El concepto de número *parte altera longior* se ha traducido por la perífrasis un tanto incómoda "número que tienen una parte más larga que la otra", pero que da la medida de la proyección geométrica con que se conciben las cantidades en este tratado.

Un estudio del vocabulario técnico latino fue realizado en la tesis doctoral de A. Alberte dirigida en Valladolid por M. Bravo, no publicada, pero de gran interés para comprender la transmisión del lenguaje técnico de las ciencias del griego al latín. Estudió los campos semánticos de las operaciones matemáticas y de las figuras. Estudia también la aceptación de la terminología adoptada por Boecio en obras de Casiodoro y de San Isidoro, así como las diferencias con la seguida por Marciano Capela.[9] El aprovechamiento de algunos vocablos empleados ya por Cicerón y por tratadistas de arquitectura o de métrica para la matemática, nos advierte sobre el valor de la sistematización del léxico realizada en la obra que presentamos.

Mª Asunción Sánchez Manzano.
Universidad de León.

[8] *Boethian number theory. A Translation of the 'De institutione arithmetica'.*

[9] Agradecemos al Archivo de Valladolid y al autor la reseña de estos datos.

Tabula

Bibliografía.

BARRETT, H.M., *Boethius. Some Aspects of his Time and Work*, Cambridge, 1940 (repr. Nueva York, 1965).

BONNAUD, R., "L'éducation scientifique de Boèce", *Speculum* 4 (1929) 198-206.

BRAGARD, R., "l'harmonie des sphères selon Boèce", *Speculum* 4 (1929) 206-213.

BUTLER, B.C., *Number Symbolism*, Londres, 1970.

CHADWICK, H., *The Consolations of Music, Logic, Theology and Philosophy*, Oxford, 1981.

COURCELLE, P., *Les Lettres grecques en Occident de Macrobe à Cassiodore*, París, 1948[2].

COURCELLE, P., *Histoire littéraire des grandes invasions germaniques*, París, 1964[3].

ECKHARDT, C.D. (ed.), *Essays in the Numerical Criticism of Medieval Literature*, Lewisburg, 1980.

EVANS, G.R., "Introduction to Boethius' *Arithmetica* of the Tenth to the Fourteenth Century", *History of Sciences* 16 (1978) 22-41.

EVANS, G.R., "A Commentary on Boethius' *Arithmetic* of the Twelfth or Thirteenth Century", *Annals of Science* 35 (1978) 131-141.

GERSH, S., *Middle Platonism and Neoplatonism. The Latin Tradition*, Notre Dame (Indiana), 2 vols, 1986.

GIBSON, M.T. (ed.), *Boethius. His Life, Thought, and Influence*, Oxford, 1981.

GUILLAUMIN, J.-Y., *Boèce. Institution arithmétique*, París, 1995 (ed. biling.)

HEATH, T., *A History of Greek Mathematics*, Oxford, 1981.

HOPPER, V.F., *Medieval Number Symbolism*, Nueva York, 1938.

MASI, M., *Boethius and the Liberal Arts. A Collection of Essays*, Berna, 1981.

MIERI, F. DI, "Il *de Institutione arithmetica* di Severino Boezio", *Sapienza* 37 (1984) 179-202.

OBERTELLO, L., "Boezio, le scienze del quadrivio e la cultura medievale", *Atti dell'Accademia Ligure* 289 (1971) 152-170.

OBERTELLO, L., *Severino Boezio*, Génova, 1974, 2 vols.

OBERTELLO, L., *Atti del Congresso Internazionale di Studi Boeziani* (Pavía, 1980), Roma, 1981.

PATCH, H.R., *The Tradition of Boethius. A Study of his Importance in Medieval Culture*, Nueva York, 1935.

PATCH, H.R., "The Beginings of the Legend of Boethius", *Speculum* 22 (1947) 443-445.

REISS, E., *Boethius*, Boston Mass., 1982.

TIGERSTEDT, E.N., *The Decline and Fall of the Neoplatonic Interpretation of Plato. An Outline and Some Observations*, Helsinki, 1974.

Cajon 51. n.º 1.

De Arithmetica ad Patritium sinmachum libri duo.
De Musica libri quinqz.
De Geometria libri duo.

De [illegible] libros [illegible].

De [illegible].

INSTITUCIÓN ARITMÉTICA

Anicio Manlio Severino Boecio

Dos libros sobre aritmética dedicados al patricio Símaco.

Arithmetica

¶ Incipiunt duo libri de Arithmetica anitij manlii seuerini Boetii viri clarissimi ⁊ illustrissimi excõsulis: ordinarii: patricii: ad patricium simmachum.

In dãdis accipiendisq̧ munerib⁹ ita recte officia pcipue īter eos q̄ se se magni faciũt estimãtur si liquido cõstabit nec ab hoc aliđ qđ liberali⁹ afferret inuẽtū. nec ab illo vnq̧ qđ iocũdius beniuolentia cõplecteret̃ acceptũ. Hec ipse ɔsiderãs. attuli nõ ignaua opus pondera qbus ad facin⁹ nihil instructius est. cũ habendi sitis incãduit. ad meritũ nihil vili⁹ cũ ea sibi victor anim⁹ calcata subiecit: sed ea q̄ ex grecarũ opulentia litteraꝝ ⁊ in rõane orõnis thesauꝝ sumpta ɔnexim⁹. Ita. n. mei quoq̧ opis mihi rõ ɔstabit: si q̄ ex sapientie doctrinis elicui. sapiẽtissimi iudicio cõprobent. vides igit̃ vt tã magni laboris effect⁹ tuũ tm̃ expectet examẽ: nec ī aures pdire publicas nisi docte sẽtẽtie astipulatiõe nitat̃. In quo nihil mirũ videri đꝫ: cuꝫ id op⁹ qđ sapiẽtie inẽta psequit̃: nõ auctoꝝ ſꝫ aliẽo incũbit arbitrio. Suis qppe instrumẽtꝭ res rõnis expẽditur: cũ iudiciũ cogit̃ subire prudẽtie: Sꝫ huic munusculo: non eadẽ q̄ ceteris īminẽt artib⁹ munimẽta ɔstituo. Neq̧. n. fere vlla sic cũctis absoluta ptib⁹ nullius indiga suis tm̃ ẽ sciẽtia nixa psidiis: vt nõ ceteraruꝫ quoq̧ artiũ adiumẽta desideret Nã in effigiãdis marmore statuis: ali⁹ excidẽde molis labor ẽ: alia formãde īaginis rõ: nec eiusdẽ artificis man⁹ politi opis nitor expectat. Ac picture manib⁹ tabule cõmisse fabroꝝ. cere rustica obseruatõe decepte: coloꝝ fuci mercatoꝝ solertia pquisiti: lintea operosis elaborata textrinis multiplicẽ mãm pstant. Nõne idẽ quoq̧ ī belloꝝ visit̃ instrumẽtis. Hic spicula sagittis exacuit: illi validus thorax nigra gemit īcude. Ast ali⁹ crudi vmbõis tegmina pprii laboris orbi infigẽda mercat̃: tã multꝭ artib⁹ ars vna pficit̃. Ast nr̃i laboris absolutio lõge ad faciliorẽ currit euẽtũ. Tu. n. sol⁹ manũ supmo operi īpones: in quo nihil de decernẽtiũ necesse ẽ laborare ɔsẽsu. Quãlibet. n. hoc iudiciũ multꝭ artib⁹ phet̃ excultũ vno tñ cumulat̃ examīe. Expiare igit̃ lꝫ quãtũ nobis in hoc studio lõgis tractus ociis labor adiecerit An reꝝ subtiliũ fugas exercitate mẽtis velocitas cõprehẽdat: vtrũ ieiune macies orõnis ad ea q̄ sũt caligãtib⁹ īpedita sentẽtiis expediẽda sufficiat. Qua ī re mihi aliẽi quoq̧ iudicii lucra q̄runt̃. Cũ tu vtrarũq̧ peritissim⁹ litteraꝝ possis graie orõnis exptib⁹ quãtuꝫ de nobis iudicare audeãt: sola tm̃ pnũciatiõe pscribere. At nõ alteri⁹ obnoxius īstitutꝭ arctissima memet īpe trãslatiõis lege ɔstringo: sed paululũ liberi⁹ euagatus aliena itineri. nõ vestigiis insisto. Nã ⁊ ea q̄ de numeris a nicomacho diffusius disputata sũt: moderata breuitate collegi. Et q̄ trãscursa veloci⁹ angustiorem intelligentie pstabãt aditũ: mediocri adiectiõe reseraui. vt aliqñ ad euidẽtiã reꝝ nr̃is ẽt formulis ac descriptionib⁹ vteremur. Qđ nobis q̄ꝫtis vigiliis ac sudore ɔstiterit facile sobri⁹ lector agnoscet. Cũ igit̃ q̄tuor matheseos disciplinarũ de arithmetica q̄ ẽ prima pscriberẽ: tu tm̃ dign⁹ eo mũere videbare coq̧ magis ī enarrato op⁹ ẽẽ intelligebã. Nã ⁊ si apud te facilis venire locus eẽt: aliquãdo tñ ipsam formidabat facilitatẽ suspecta securitas. Arbitabar eñī nihil tãte reuerentie oblatũ iri oportere: qđ nõ elaboratũ īgenio: pfectũ studio: dignũ postremo tãto ocio videretur. Nõ igit̃ ambigo quin p tua in me beniuolentia supuacua resecces: hiantia suppleas errata reprehẽdas cõmode dicta mira aī alacritate suscipias. Que res īpulit pigrã ɔsiliũ morã. Nimios. n. mihi fructus placitura restituent. Noui qppe quãto studiosi⁹ nostra q̄ꝫ ceteroꝝ bõa diligamus Recte ergo q̄si aureos cereri culmos ⁊ maturos bacho palmites: sic ad te rudimẽta noui opis trãsmisi. Tu tm̃ paterna gratia nostrũ pbabis mun⁹. ita ⁊ laborꝭ mei pmitias doctissimo iudicio cõsecrabis: ⁊ non maiore censebitur auctor merito q̄ꝫ probator.

Incipiunt capitula primi libri.

/1r./

Comienzan los dos libros sobre aritmética del muy noble e ilustre patricio Anicio Manlio Severino Boecio, que fue cónsul, dirigidos al patricio Símaco.

Al dar y recibir presentes, sobre todo entre personas que se tienen en gran estima, se considera si va a quedar claro que uno no ha encontrado nada que ofrecer que demostrara más generosidad por su parte, mientras que el otro no ha recibido nunca nada con mayor satisfacción y benevolencia. Con estas reflexiones me he decidido a ofrecerte riquezas nada despreciables —no hay nada que disponga más al crimen que el estar encendido por el afán de poeseer, nada que sea de más valor para mérito, cuando el espíritu, quedando vencedor, las ha dejado tendidas a sus pies— sino las que he tomado del abundante legado de la cultura griega para transladarlas al tesoro de la enseñanza romana.

De este modo también estará claro el valor de mi riqueza, si lo que he tomado de las doctrinas de la sabiduría, obtiene la aprobación de un hombre muy sabio. Por tanto, verás cómo el producto de un esfuerzo tan grande no espera otro juicio que el tuyo, y no se ha publicado sin la aprobación de tu sentencia docta. En eso no hay nada que sorprenda, porque esa obra que busca las aportaciones de los descubrimientos al saber, depende de un juicio no de su autor, sino de otro. Pues con sus propios instrumentos se valora un trabajo intelectual, aún cuando es aconsejable asumir el juicio de un hombre experto.

Pero para este modesto presente, no puedo establecer los mismos límites que protegen a las demás artes, pues no hay por así decir ninguna ciencia que esté completa en todas sus partes, sin que le falte ninguna y apoyándose solamente en sus propias fuerzas, para no precisar de los recursos de las demás artes. De hecho, para esculpir estatuas de mármol, uno se ocupa de sacar el bloque y otro de dar forma, y la mano de otro artista cuida la blancura de la obra una vez pulida. Y la pintura se ha confiado a las manos de un artesano, la cera es recogida por un campesino, los comerciantes especializados ponen a prueba los estucados de colores; los lienzos elaborados con complicados telares producen un material múltiple.

¿No es verdad que ocurre lo mismo con el instrumental empleado en las guerras? Éste agudiza las puntas de las flechas y aquél hace gemir sobre el yunque negro la firme coraza, en tanto que otro compra un fondo de escudo en bruto para fijarlo como protección al escudo que es su trabajo propio; tan numerosas son las artes que contribuyen a la realización de un solo arte. Pero el acabado perfecto de mi trabajo se encamina a un destino mucho más inmediato. Tú serás el único en dar la última mano a la obra, a propósito de la cual no cabe inquietarse por el consenso de la crítica.

Comoquiera que este juicio está justificado por una cultura fundada en muchas artes, con un único examen alcanza su culminación. Puedes estimar el interés de este trabajo por el esfuerzo prolongado en largo tiempo dedicado a este afán: si un espíritu rápido y experimentado comprende bien las sutilidades que corren el riesgo de escaparse, o si la sobriedad y la concisión en la expresión bastan para aclarar lo que está confuso en las frases oscuras. En ese sentido me reporta beneficio el juicio de otro, pues tu gran conocimiento de las dos culturas te permite con una sola puntualización poner coto a todos los juicios que pudieran osar hacerme los que no dominan la lengua griega. Pero no por depender de otro me acojo a una ley muy estricta de traducción, sino que un poquito más libremente he divagado por un camino ajeno, sin pisar sobre las huellas de otro. Pues he reunido con moderada extensión lo que Nicómaco discutió de manera más extensa sobre los números. Y lo que era más difícil de entender porque iba más deprisa, lo he hecho más accesible con adiciones moderadas, y para dar claridad a los conceptos, he recurrido alguna vez a tablas y esquemas.

Esto que ha representado para mí preocupación y esfuerzo, lo estimará el lector prudente. Por eso al escribir este tratado de aritmética, que es la primera de las cuatro disciplinas de la matemática, tú eres el único que creo digno de este presente y entendía que debe estar libre de error. Porque incluso, si podía encontrar indulgencia por tu parte, mi tranquilidad inquieta temía quizá esa misma facilidad. En efecto, creía que a una persona que respeto tanto, no se le debía ofrecer nada que no pareciera convenientemente hecho, perfectamente trabajado, digno en definitiva de todo el tiempo que le he dedicado.

En consecuencia, no dudo de que por tu benevolencia hacia mí suprimas todo lo que esté de más, remedies los errores y aceptes con sorprendente celeridad lo que sea correcto. Este cuidado ha aligerado mi demora. Pues si muestras tu acuerdo, recibiré a cambio enormes frutos. Conozco cuánto más interés y atención ponemos en nuestros beneficios que en los de los demás. Luego te he transmitido por así decir los frutos dorados de Ceres y los racimos maduros de Baco, te envío este nuevo trabajo todavía en bruto. Así consagrarás tú con tu juicio de hombre sabio las primicias de mi trabajo y el autor no tendrá mayor mérito que su corrector.

Comienzan los capítulos del libro primero:

¶ Prohemiũ in quo diuisio mathematice. Capl'm .i.

Inter omnes prisce au-
ctoritatis viros: qui py
thagora duce puriore
mentis ratione vigue
runt: constare manife
stum est haud quẽquã
in philosophie discipli
nis ad cumulum perfe
ctiõis euadere: nisi cui
talis prudentie nobili-
tas quodam quasi qua
driuio vestigatur. Qd'
recte solertiam intuen
tis non latebit. Est enĩ
sapientia rerum que sunt suiq; immutabilem substan
tiam sortiuntur comprehensio veritatis. Esse autem
illa dicimus que nec intentiõe crescunt: nec retractio
ne minuuntur: nec variationibus permutantur: sed
in propria semper vi sue se nature subsidiis nixa custo
diunt. Hec autẽ sunt qualitates, quantitates: forme
magnitudines. paruitates: equalitates: habitudines
actus dispositiones: loca: tempora: ⁊ quicquid aduna
tum quodammodo corporibus inuenitur. Que ipse
quidem natura incorporea sunt ⁊ immutabilis sub-
stantie ratione vigentia: participatiõe vero corporis
permutantur: ⁊ tactu variabilis rei in vertibilem in
constantiam transeunt: Hec igitur quoniam vt di-
ctum est natura immutabilem substantiã vimq; sor-
tita sunt: vere proprieq; esse dicuntur. Horũ igitur
idest que sunt proprie: queq; suo nomine essentie no-
minantur: scientiã sapientia profitetur. Essentie au-
tem gemine partes sunt: vna continua ⁊ suis partib'
iũcta: nec vllis finibus distributa: vt est arbor: lapis:
⁊ omnia mundi huius corpora: que proprie magnitu
dines appellantur. alia vero disiuncta a se ⁊ determi
nata partibus ⁊ quasi aceruatim in vnum redacta
concilium: vt grex: populus: chorus: aceruus ⁊ quic-
quid quorum partes propriis extremitatibus termi-
nantur. ⁊ ab alterius fine discrete sunt. His propriũ
nomen est multitudo. Rursus multitudinis alia sunt
per se vt tres vel quatuor, vel tetragon': vel quilibet
numerus qui vt sit nullo indiget. Alia v'o per seipsa
non constant: sed ad quiddam aliud referuntur: vt du
plum. vt dimidium: vt sesqualterum: vel sesquitertiũ
⁊ quicquid tale est: quod nisi relatum sit ad aliud: ipẽ
esse non possit. Magnitudinis vero alia sunt manen
tia motuq; carentia: alia vero que mobili semper ro-
tatione vertuntur: nec vllis temporibus acquiescunt.
Horum ergo illam multitudinem que per se est: ari-
thmetica speculatur integritas. Illam vero que ad
aliquid musici modulaminis temperamenta perno-
scunt. Immobilis vero magnitudinis geometrica no
ticiam pollicetur. Mobilis scientiam astronomice di-
sciplinie peritia vendicauit. Quibus quattuor parti-
bus si careat inquisitor: verum inuenire non possit:
ac sine hac quidem speculatione veritatis nulli recte
sapiendum est. Est enim sapientia earum rerum que
vere sunt: cognitio ⁊ integra comprehensio. Quod
hec qui spernit: idest has semitas sapientie. ei denun
cio non recte philosophandum. Siquidem philoso-
phia est amor sapientie: quam in his spernẽdis ante
contempserit. Illud quoq; addendum arbitror quod
cuncta vis multitudinis ab vno pgressa termino: ad
infinita progressionis augmenta concrescit. magnitu
do vero a finita inchoans quantitate modum in diui
sione non recipit. Infinitissimas enim sui corporis
suscipit sectiones. Hanc igitur nature infinitatem in
determinatamq; potentiam philosophia sponte re-
pudiat. Nihil eniẽ quod infinitum est: vel scientia po
test colligi vel mẽte comprehendi. Sed hinc sumpsit
sibi ipsa ratio: in quibus posset indagatricem verita-
tis exercere solertiam. Diligit enim de infinite mul-
titudinis pluralitate finite terminum quantitatis: ⁊
interminabilis magnitudinis sectione reiecta defini-
ta sibi ad cognitionem spacia depoposcit. Constat igi
tur quisquis hec pretermiserit. omnem philosophie
perdidisse doctrinam. Hoc igitur illud quadriuium
est quo his viandum sit quibus excellentior animus a
nobis cum procreatis sensibus ad intelligentie certio
ra perducitur. Sunt enim quidam gradus certeq; p
gressionum dimensiones: quibus ascendi progrediq;
possit: vt animi illum oculum: qui (vt ait plato) multẽ
oculis corporalibus saluari constituiq; sit dignior: qd'
eo solo lumĩe vestigari vel ĩspici veritas queat. Hũc
inquam oculum demersum orbatumq; corporeis sen
sibus he discipline rursum illuminent. Que igitur ex
his prima discenda est: nisi ea que principium matris
q; quodammodo ad ceteras obtinet portionem. hec
est autem arithemtica. Hec enim cuntis prior est
non modo quod hanc ille huius mundane molis con
ditor deus primam sue habuit ratiocinationis exem-
plar: ⁊ ad hanc cuncta constituit quecunq; fabricãte
ratione per numeros assignati ordinis inuenere con-
cordiam: sed hoc quoq; prior arithmetica declaratur
quod quecunq; natura priora sunt: his sublatis simul
posteriora tolluntur. Quod si posteriora pereant: ni
hil de statu prioris substãtie permutatur. vt animal
prius est homine. Nam si tollas animal statim quoq;
hominis natura deleta sit. Si hominem sustuleris:
animal non peribit. Et econtrario ea semp posterio
ra sunt que secum aliud quodlibet inferunt: ea priora
que cum dicta sunt nihil secum de posterioribus tra-
hunt: vt eodẽ quoq; homine. Naẽ si hominem di-
xeris: simul quoq; animal nominabis. Idem est enim
homo quod animal. Si animal dixeris non speciem
simul hominis intulisti. Non est enim idẽ animal qd'
homo. Hoc idẽ in geometrica vel in arithmetica vi
detur incurrere. Si enim numeros tollas: vnde triã
gulum vel quadratũ vel quicquid in geometrica ver
satur: que omnia numerorum denominatiua sunt. At
vero si quadratum triangulumq; sustuleris: omnisq;
geometrica consumpta sit tres: ⁊ quatuor aliorumq;
numerorũ nõ peribunt vocabula. Rursum cũ aliquã
geometricã formaẽ dixero. est illi simul numerorũ no
men implicitũ. Cum numeros dixero nondum vllã
formam geometricam nominaui. Musica vero quã
prior sit numerorũ vis. hinc maxime probari potest
quod non modo illa natura priora sunt que per se con
stant: quam illa que ad aliquid referuntur: sed etiam
eaipsa musica modulatio numerorum nominibus an
notatur. Et idẽ in hac euenire potest: quod in geome
trica predictum est. Diatessaron enim ⁊ diapente ⁊
diapason: ab antecedentis numeri nominibus nũcu-
pantur. Ipsorum quoq; sonorum aduersus se propor
tio: solis neq; aliis numeris inuenitur. Qui enim so-
nus in diapason symphonia est: idem duplicis nume
ri proportione colligitur. Que diatessaron ẽ modula
tio epitrita collatione componitur. Quam diapente
symphoniã

/1v./

Prólogo sobre la división de la matemática.

Capítulo I.

Entre los hombres de autoridad inveterada que guiados por Pitágoras han mostrado el resplandor supremo de su espíritu y la fuerza de su pensamiento, se tiene la opinión de que no llegó nadie en los conocimientos de filosofía a la perfección consumada si el acrecimiento de tan noble sabiduría no pisaba, por así decir, en cuatro vías[1]. A ese punto se hará evidente la experiencia del observador. Pues la sabiduría es la comprensión de la verdad de las realidades que existen y han recibido una sustancia inmutable. Sin embargo, decimos que existen aquellas que no aumentan en extensión ni menguan por reducción, ni cambian por variaciones, sino que se mantienen siempre en la virtud propia de su naturaleza con sus recursos.

No son las cualidades, cantidades, formas, grandeza o pequeñez, igualdades, similitudes, actos, disposiciones, lugares, tiempos y cualquier cosa que se halla unida a los cuerpos de cualquier modo que sea. Las naturalezas incorpóreas e inmutables tienen permanencia, fundamento, vigencia, pero por mezcla con las realidades corpóreas, se alteran y con el contacto de una realidad variable son afectados por la mutación y el cambio.

Por tanto, como se ha dicho, aquellas de éstas que por naturaleza han recibido una sustancia y una virtud inmutable, se dice que lo son verdadera y propiamente. Así, de éstas, es decir, las que lo son propiamente, que se conocen con el nombre de esencias, la sabiduría propone la ciencia. Pero las esencias se dividen en dos grupos: una esencia continua e integrada por todas sus partes, no dividida por límites, como es un árbol, una piedra y todos los cuerpos de este mundo, que propiamente se llaman magnitudes; otra desintegrada y definida por partes, y formada por la reunión de todas, como un rebaño, un pueblo, un coro, un montón, y cualquiera de ellos se define en partes con límites propios. Son discretas por tener un fin cada una respecto a otra. Su nombre propiamente es multiplicidad.

A su vez, de la multiplicidad, unas existen por sí o son tres o cuatro o un tetrágono o cualquier número que no necesita de nada más para existir. Pero otras no existen por sí, sino que son relativas a otras, como el doble o la mitad, o la proporción sesquiáltera, la sesquitercia, o cualquiera semejante, que si no es relativa a algo, no puede existir. Otros tipos de magnitud son las que permanecen y carecen de alteración y las que van cambiando siempre con una rotación

[3] Los cuatro caminos medievales para alcanzar el conocimiento.

cambiante, sin descansar en ningún momento. Luego la aritmética en su conjunto tiene por objeto de estudio aquella multiplicidad que existe por sí; la multiplicidad relativa es el objeto del conocimiento de la música y de sus combinaciones armónicas. En cambio, en tanto que la geometría promete el conocimiento de una magnitud inmóvil, la pericia de la disciplina astronómica reclama el conocimiento de una magnitud en movimiento. Si el investigador carece de estas cuatro disciplinas, no puede encontrar la verdad y sin esta reflexión sobre la verdad nadie puede tener un conocimiento cierto. Pues la sabiduría es un conocimiento y una comprensión cabal de las realidades que son verdaderas. Si alguien las desprecia, esto es, desprecia estos senderos del saber, no puede filosofar correctamente, puesto que la filosofía es un amor de la sabiduría, que antes ha menospreciado al rechazar éstas.

Considero que hay que añadir que toda multiplicidad aumenta desde un comienzo y va creciendo hacia un aumento infinito de la progresión. Pero la magnitud que empieza desde una cantidad finita, no recibe medida por la división, pues admite infinitísimas fragmentaciones de su cuerpo. Por tanto, la filosofía espontáneamente rechaza esta infinitud de una naturaleza y una potencia indeterminada. En efecto, lo que es infinito no lo puede abarcar la ciencia ni comprender la mente. Pero de aquí tomó este fundamento para sí: en algunas podría ejercerse una experiencia que buscara la verdad. Pues de la pluralidad de una multitud infinita se extrae el punto de partida de una cantidad finita, y rechazada la partición de una magnitud interminable, reclama espacios definidos para su conocimiento.

Por tanto, se ve que quien olvida eso ha echado a perder toda la enseñanza de la filosofía. Así aquella cuádruple vía es por la que deben caminar quienes, teniendo una inteligencia superior, son guiados por nosotros sirviéndonos de los conceptos antes deducidos para llegar a abstracciones más ciertas de la inteligencia. Pues hay algunos grados y dimensiones de las progresiones por las que se puede ascender y alcanzar, como el ojo de la inteligencia, que según dice Platón es más digno de ser preservado y desarrollado que los ojos del cuerpo. Y con este solo ojo se puede investigar y buscar la verdad.

Este ojo está sumergido y enterrado por los sentidos corporales hasta que las enseñanzas lo iluminan. Por eso hay que aprender esto por la primera vía; se comienza por ella que es principio y por así decir madre, porque en cierta medida obtiene una participación en las restantes. Esta es la aritmética. Pues es anterior a todas las demás no sólo porque aquel Dios creador de la masa de este mundo la concibió como primera y modelo de razonamiento, y para todo esto determinó, por su razón creadora, que todo alcanzara una armonía por medio de los números del orden que les había asignado. Pero por eso también la aritmética se ve claro que es anterior , porque todo esto es anterior por naturaleza, y si se suprime esto, se cierra la posibilidad de existir a todo lo que viene después. Y si se niega esa posibilidad de existir a lo que viene detrás, la sustancia anterior no experimenta una alteración.

Así en el caso de un animal que existe antes que el hombre; pues si suprimes al animal en ese momento la naturaleza del hombre queda aniquilada, si suprimes al hombre, el animal subsistirá. Y a su vez son secundarias las realidades que aportan consigo algo, sea lo que sea. Mientras que son primarias aquellas que cuando se pronuncian no arrastran consigo nada posterior; así ocurre con el hombre.

En efecto, si dices hombre, también estarás nombrando al animal, pues lo mismo es hombre que animal, pero si dices animal no has designado al mismo tiempo a la especie del hombre. Claro que no es lo mismo animal que hombre. Esto parece suceder también con la geometría y la aritmética. Pues si suprimes los números, de dónde se obtiene el triángulo, el cuadrado o cualquier concepto en geometría: todos son indicativos de los números. Pero si suprimes el cuadrado y el triángulo, toda la geometría se echa a perder, pero el número tres y el cuatro y los nombres de los otros números no quedarán afectados. A su vez, cuando nombro una forma geométrica, lleva implícito el nombre de su número, mientras que si nombro los números, aún no he citado ninguna forma geométrica. En la música cuán anterior es el valor de los números. De aquí se puede probar sobre todo que, no sólo son primordiales las naturalezas que se bastan por sí, sino también aquellas que son relativas a algo. Pero también en la música se distingue la modulación por los nombres de los números, y puede ocurrir en ésta lo mismo que se ha dicho para la geometría.

Porque la cuarta, la quinta y la octava toman sus nombres de un número preexistente. También la proporción entre los sonidos se encuentra con los números solos y no con otra cosa. En efecto, estos sonidos en un acorde de octava forman una melodía, que se consigue por la proporción del doble (*diapason*). También esta modulación de la cuarta (*diatessaron*) se compone con un cálculo de proporción epitrita. Llaman a la melodía del compás de cinco (*diapente*)

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA LEON

symphoniam vocant: hemiolia medietate coniungit. Qui in numeris epogdous est. idem tonus in musica. Et ne singula persequi laborem huius operis sequentia quanto prior sit arithmetica sine vlla dubitatiōe monstrabunt. Sphericam vero atqꝫ astronomicam tanto precedit. quanto due relique discipline hāc tertiam natura precedunt. In astronomica enim circuli sphera: centrum: paralelliqꝫ circuli mediusqꝫ axis est que omnia geometrice discipline cura sunt. Quare est etiam ex hoc ostendere seniorem geometrice vim quod omnis motus est post quietem: ⁊ natura semper statio prior est. Mobilium vero astronomia immobilium geometrica doctrina est: vel quod armonicis modulationibus motus ipse celebratur astrorū. Quare constat quoqꝫ musice vim astrorum cursus antiquitate precedere: quam superare natura arithmeticam dubium non est: cum prioribus quam illa est antiquior videatur. Proprie tamen ipsa numerorum natura omnis astrorum cursus. omnisqꝫ astronomica ratio constituta est. Sic enī ortus occasusqꝫ colligimus: sic tarditates velocitatesqꝫ errantium siderum custodimus: sic defectus ⁊ multiplices lūe variationes agnoscimus. Quare quoniam prior vt claruit arithmetice vis est: hinc disputationis sumamꝰ exordium.

De substantia numeri. Capitulū. ii.

Omnia quecūqꝫ a primeua rerum natura constructa sunt. numerorum videntur ratione formata. Hoc enim fuit principale in animo conditoris exemplar. Hinc enim quatuor elementorum multitudo mutuata est: hinc temporum vices: hinc motus astrorum celiqꝫ conuersio. Que cum ita sint cumqꝫ omnium status: numerorum colligatione fungatur: eum quoqꝫ numerum necesse est in propria semper sese habentem equaliter substantia permanere: cuꝫ que compositum non ex diuersis: Quid enim numeri substantiā coniungeret: cum ipsius exemplum cuncta iunxisset: sed ex seipso videtur esse compositus. Porro autem nihil ex similibꝰ componi videtur: nec ex his que nulla rationis proportiōe iunguntur: ⁊ a se omni substātia naturaqꝫ discreta sunt. Constat ergo quoniam cōiunctus est numerus: neqꝫ ex similibus esse coniunctū neqꝫ ex his que ad se inuicem nulla ratiōe proportionis herent. Erunt ergo numeros prima que coniungant: ad substantiam quidem que constent: semperqꝫ permaneant. Neqꝫ enim ex non existentibus effici quicquam potest: ⁊ sunt ipsa dissimilia ⁊ potentia componendi. Hec autem sunt quibus numerus constat par atqꝫ impar. Que diuina quadam potentia cum disparia sint contrariaqꝫ: tamen ex vna genitura profluunt: ⁊ in vnam compositionem modulationemqꝫ iunguntur.

De diffinitione ⁊ diuisione numeri ⁊ diffinitiōe paris ⁊ imparis.

Capi. iii.

Et primum quid sit numerus diffiniendū est. Numerus est vnitatum collectio: vel quantitatis aceruus ex vnitatibus profusus. Huius igitur prima diuisio est: in imparem atqꝫ parem. Et par quidē est: qui potest in equalia duo diuidi vno medio non intercidente: impar vero quem nullus in equalia diuidit quin in medio predictus vnus intercidat. Et hec quidem huiusmodi diffinitio vulgaris est ⁊ nota.

Diffinitio numeri paris ⁊ imparis s̄m pytagoram.

Capitulum. iiii.

Talia autem secundum pythagoricam disciplinam talis est. Par numerus est qui sub eadem diuisione potest in maxima paruissimaqꝫ diuidi: maxima spacio: paruissima quantitate: secundum duorum istorum generum contrarias passiones. Impar vero numerus est: cui hoc quidem accidere non potest: sed cuius in duas inequales summas naturalis est sectio. Hoc est autem exemplar. vt si quilibet datus par numerꝰ diuidatur: maior quidem quantuꝫ ad diuisionis spacia pertinet: nō inuenietur quaꝫ discreta medietas: quātitate vero nulla minor sit: quaꝫ in gemina facta partitio: vt si par numerus qui est. 8. diuidatur in. 4. atqꝫ alios. 4. nulla erit alia diuisio que maiores partes efficiat. Porro autem nulla erit alia diuisio que totum numerum minore diuidat quantitate. In duas enim partes diuisione nihil minus est. Cum enim totum quis fuerit trina diuisione partitus: spacii quidē summa minuitur: sed numerus diuiosinis augetur. Quod autem dictum est secundum duorum generū contrarias passiones huiusmōi est. Predocuimꝰ enī quantitatem in infinitas pluralitates accrescere spacia vo. i. magnitudines in infinitissimas minui paruitates: atqꝫ ideo hic contra euenit hec namqꝫ paris diuisio spacio est maxima paruissima quantitate.

quid

Alia secundum antiquiorem modum diuisio paris ⁊ imparis. Capitulum. v.

alia

Secundum antiquiorem vero modum alia est paris numeri definitio. Par numerus est qui in duo equalia: ⁊ in duo inequalia partitionem recipit. sed vt in neutra diuisione vel imparitati paritas: vel paritati imparitas misceatur: preter soluꝫ paritatis principē binarium numerum qui inequalem non recipit sectionem: propterea quod ex duabus vnitatibus constat ⁊ ex prima duorum quodammodo paritate. Quod aūt dico tale est. Si enim ponatur par numerus: potest in duo equalia diuidi: vt denarius diuiditur in quinos. Porro autem ⁊ per inequalia vt idem denarius in. 3. ⁊ in. 7. Sed hoc modo vt cum vna pars fuerit diuisionis par: alia quoqꝫ par inueniatur: ⁊ si vna impar: reliqua ab eius imparitate non discrepet. vt in eodem numero qui est denarius. Cum enim diuisus est in quinos: vel cum. in. 3. ⁊ in. 7. vtreqꝫ in vtraqꝫ portione partes impares extiterunt. Si autem ipse vel alius numerus par diuidatur in equales: vt octonariꝰ in. 4. ⁊ in. 4. ⁊ item per inequales vt idem octonarius: in. 5. ⁊ in. 3. in illa quidem diuisione vtreqꝫ partes pares facte sunt: in hac vtreqꝫ impares extiterūt. Neqꝫ vnquā fieri potest: vt cum vna pars diuisionis par fuerit: alia impar inueniri queat. aut: cum vna impar sit: alia par possit intelligi. Impar vō nūerus est qui ad quālibet illā diuisionē p inequalia semper diuidit vt vtrasqꝫ spēs nūeri semper ostendat: nec vnquam altera sine altera sit: sed vna pars paritati: imparitati alia deputatur. vt. 7. si diuidas in. 3. ⁊ in. 4. altera portio par: altera impar est. Et hoc idem in cunctis imparibus numeris inuenitur. Neqꝫ vnquaꝫ in imparis diuisione preter se esse possunt he gemine species que naturaliter vim numeri substantiamqꝫ cōponunt.

Diffinitio paris ⁊ imparis per alterutrum

Capitulum. vi.

/2r./

acorde de quinta porque se conjunta por una proporción entre números que se contienen en proporción hemiolia. Esto que en los números es el epogdo, es también el tono en la música. Y si proseguimos el desarrollo de esta obra explicando cada una de las relaciones, quedará demostrado sin ninguna duda cuán primordial es la aritmética. Antecede tanto a la esférica y a la astronómica cuanto las dos disciplinas restantes preceden a esta tercera por naturaleza. En efecto, en la astronomía los círculos, la esfera, el centro, los círculos paralelos y el eje medio, todos éstos, son objeto de la disciplina geométrica. Por este motivo también por esto se debe mostrar el valor más antiguo de la geometría, porque todo movimiento es posterior a un estado inmóvil y por naturaleza la inmovilidad es siempre primordial. La astronomía es móvil y la geometría es una disciplina inmóvil.

El movimiento mismo de los astros se opera por las modulaciones armónicas. Por esa razón se ve claro también que el valor de la música precede por antigüedad a los movimientos de los astros. No hay duda de que la aritmética es superior por naturaleza, pues parece más antigua que las anteriores a ella. Sin embargo, por la naturaleza misma de los números se ha establecido propiamente todo movimiento de los astros y toda regla astronómica. Así calculamos el orto y el ocaso, así vigilamos los retrasos y la velocidades de las estrellas errantes, así reconocemos las desapariciones y múltiples variaciones de la luna. Por eso, porque el valor de la aritmética brilló primero, de aquí tomamos el comienzo de esta exposición, el exordio.

Sobre la sustancia de los números.

Capítulo II.

Todo lo que a partir de la naturaleza primigenia de las cosas se ha constituido, parece formado en razón de los números. En efecto, esto fue un motivo principal en el ánimo del creador. A partir de aquí una masa de los cuatro elementos fue cambiando, y de aquí las fases en el tiempo, de aquí el movimiento de los astros y el desplazamiento circular del cielo. Siendo esto así la posición de todas las cosas se fragua por una combinación de números, es preciso que ese número permanezca siempre estable en la misma sustancia, y no esté compuesto de otros diversos. Pues, ¿qué se podrá relacionar con la sustancia del número, puesto que es el modelo del número el que ha relacionado todo, más que el compuesto de sí mismo? Sin embargo, por otra parte, nada parece componerse de sustancias semejantes ni de elementos que se unan en alguna proporción de razones, y se distingan de sí por sustancia y naturaleza. Luego queda claro que el número es un conjunto, que no es la unión de cosas semejantes ni de elementos que se unen unos a otros sin una proporción. Luego resultará que las sustancias primordiales se unen a los números, y como primordiales en sustancia siempre participan y siempre permanecen. Pues no se puede conseguir que algo exista a partir de realidades no existentes; los principios primordiales deben ser cosas diferentes y tener la posibilidad de combinarse. Éstos son los principios por los que existen los números: el par y el impar, que por cierta potencia divina, aunque son dispares y contrarios, proceden de un solo origen y se unen en una composición y harmonía.

De la definición y división del número y de la definición de los pares y de los impares.

Capítulo III.

En primer lugar hay que definir qué es el número. Número es un conjunto de unidades, o un acervo de cantidad extenso según sus unidades. La primera división de éste es en número impar y par. Y par es el número que puede dividirse en dos partes iguales sin tener que partir una unidad a la mitad; impar aquel número que no se divide en dos partes iguales sin partir la antedicha unidad por medio. Esta definición es vulgar y conocida.

Definición del número par e impar según Pitágoras.

Capítulo IIII.

Pero aquella según la enseñanza de Pitágoras es como sigue: número par es el que puede dividirse por la misma división en las partes más grandes posibles y en las más pequeñas, en las mayores respecto al espacio y en las más pequeñas respecto de la cantidad, según los resultados contrarios de esos dos criterios. Número impar es aquél al que no le puede ocurrir esto, sino que tiene una división natural en dos sumas desiguales. Éste es el ejemplo: dado cualquier número par, se divide; se encontrará que es mayor en cuanto se refiere a los espacios de la división, ninguna medianía tan definida, pero que no hay ninguna menor en cantidad que sea al mismo tiempo una división en dos partes iguales. Si el número es 8, se divide en 4 y en 4: no habrá división que consiga unas partes mayores. Pero además no habrá división que mengüe la totalidad del número en menor cantidad. Pues no hay división menor que la división en dos partes. En efecto, si se divide por tres, la suma del espacio disminuye mientras que el número de la división aumenta.

Se ha expuesto lo que sucede según los resultados contrarios de los dos criterios. Hemos dicho que la cantidad se acrecienta en infinitas pluralidades mientras que el espacio disminuye hasta magnitudes infinitésimas y por eso aquí sucede de manera contraria que la división de un número par es la mayor posible en cuanto al espacio y la menor en cantidad.

Otra división del número par y del impar según una manera algo más antigua.

Capítulo V.

Ahora bien, según una manera algo más antigua hay otra división del número par. El número par se puede dividir en dos iguales, y admite la partición en dos desiguales, pero en ninguna de las divisiones se mezcla la paridad con la imparidad o la imparidad con la paridad. Aparte del solo número principal de la paridad, un número binario que no admite una partición desigual, por eso está formado por dos unidades y a partir de una primitiva paridad de los dos de algún modo. Declaro que es así. Pues si se considera un número par, se puede dividir en dos iguales, como un denario se divide en quinos. Además también ese puede dividir en dos desiguales como un denario en 3 y en 7. Pero de este modo una parte de la división es par, si la otra lo es también; pero si una es impar, la otra no discrepa de la imparidad de ésta.

Como en ese mismo número que es el denario, pues se divide en quinos, o bien que se divide en 3 y 7, y una y otra tienen partes impares en las dos porciones. Pero si ese mismo u otro número par se divide en números iguales, como un octonario en cuatro y cuatro; e igualmente por desiguales como el mismo octonario en 5 y en 3. En aquella división ciertamente se han hecho dos partes pares; en esta hay dos impares. Y no puede suceder que siendo par una parte de la división, pueda encontrarse otra impar. Si una parte es par, se puede deducir otra par. Número impar es aquél que siempre se divide en cualquier división en partes desiguales, de modo que siempre muestre las dos posibilidades del número, y nunca hay una sin la otra, pero una parte se imputa a la paridad y otra a la imparidad. Como si divides 7 en 3 y 4, una parte es par y la otra impar. Y se advierte esto en todos los números impares. Nunca en la división del impar, se pueden dar una sin la otra, estas dos especies que de manera natural componen el valor y la sustancia del número.

QUod ſi hec etiã per alterutras ſpecies de finienda ſunt: dicetur imparem numerum eſſe qui vnitate differt a pari: vel incremẽ to: vel diminutione. Item par numerus ẽ qui vnitate differt ab impari vel incremẽ to vel diminutione. Si enim pari vnum dempſeris vel vnum adiecceris: ⁊ impar efficitur: vel ſi impari idem feceris: par continuo procreatur.

¶De principalitate vnitatis. Cap. vij.

OMnis quoqꝫ numerus circum ſe poſitorũ ⁊ naturali ſibimet diſpoſitione iunctorum medietas eſt. Et qui ſuper duos illos ſunt qui medio iunguntur ſi componantur: ẽt ipſorum ſupradictus numerus media por tio eſt: ⁊ rurſus illorum qui ſunt ſuper ſecundo loco iunctos cum ipſi quoqꝫ ſint compoſiti prior hiſ nume rus medietatis loco eſt: ⁊ hoc erit vſqꝫ dum occurrẽs vnitas terminum fecerit. Ut ſi ponat quis quinariũ numerum altrinſecus circa ipſum ſunt ſupra .4. infe rius ſex. Hi ergo ſi iuncti ſunt: faciunt .10. quorum .5. numerus medietas eſt. Qui autẽ circa ipſos ideſt circa .6. ⁊ .4. ſunt .3. ſcilicet ⁊ .7. idẽ ſi iuncti ſunt eo rum quinarius numerus medietas eſt. Rurſus iſtorꝫ qui altrinſecus poſiti ſunt ſi iungantur etiam hi qui quinarii numeri dupli ſunt. Naꝫ ſuper .3. ſunt .2. ſup. .7. ſunt .8. Hi ergo ſi iuncti ſunt faciunt .10. quorum quinarius rurſus medietas eſt. Hoc idem in omnibꝰ numeris euenit: vſqꝫ dum ad vnitatis terminum per ueniri queat. Sola enim vnitas circum ſe duos ter minos non habet: atqꝫ ideo eius qui eſt prope ſe ſolꝰ eſt medietas. Nam iuxta vnum ſolus eſt binarius na turaliter conſtitutus cuius vnitas media ꝑs eſt. Qua re conſtat primam eſſe vnitatem cunctorum qui ſunt in naturali diſpoſitione numerorum ⁊ eam rite totꝰ quamuis prolixe genitricem pluralitatis agnoſci.

¶Diuiſio paris numeri. Capl̃m. viij.

paris PAris autem numeri ſpecies ſunt .3. Eſt .n. vna que dicitur pariter par: alia vero pa riter impar. tertia impariter par. Et con traria quidem: loca que optinentia ſummi tatum videntur eſſe pariter par: ⁊ pariter impar. Medietas autem quedam que vtrorũqꝫ par ticipat eſt numerus qui vocatur impariter par.

¶De numero pariter pari eiuſqꝫ proprietatibus. Capitulum .ix.

PAriter par numerus eſt. qui poteſt in duo paria diuidi: eiuſqꝫ ꝑs in alia duo paria partiſqꝫ pars in alia duo paria: vt hoc to tiens fiat: vſqꝫ dum diuiſio partium ad in diuiſibilem naturalter perueniat vnitatẽ. Ut .64. numerus habet medietatem .32. hic autem medietatem .16. hic vero .8. hunc quoqꝫ quaterna rius in equa partit̃. qui binarii duplꝰ eſt: ſed binarꝰ vnitatis medietate diuiditur: que vnitas naturali ter ſingularis non recipit ſectionẽ. Huic numero vi .1. detur accidere vt quecunqꝫ eius fuerit pars cum no mine ipſo vocabuloqꝫ pariter par inueniatur: tum ẽt quãtitate. Sed ideo mihi videtur hic numerus pari ter par vocatus: quod eius omnes partes ⁊ nomine ⁊ quantitate pares pariter inueniantur. Quomodo autem ⁊ nomine ⁊ quantitate pares habeat partes hic numerus poſt dicemus. Horum autem genera .2. tio talis eſt. Ab vno enim quoſcunqꝫ in duplici ꝓpor tione notaueris: ſemper pares pariter procreantur. Preter hanc autem generationem vt naſcantur ali ter impoſſibile eſt. Huius autem rei tale videtur per ordinem deſcriptionis exemplum. Sintqꝫ cuncti du plices ab vno .1.2.4.8.16.32.64.128.256.512. atqꝫ hinc ſi fiat infinita progreſſio: tales cũctos inuenies. factiqꝫ ſunt ab vno in duplici proportione: ⁊ omnes ſunt pariter pares. Illud autem non minima conſide ratione dignũ eſt: quod eius omnis pars ab vna par te quacunqꝫ que intra ipſum numerũ eſt denomina tur: tantamqꝫ ſummam quantitatis includit: quota pars eſt alter numerus pariter paris illius qui eum continet q̃ntitatis. Itaqꝫ fit vt ſibi partes ipſe reſpõ deant: vt quota pars vna eſt tantam habeat altera quantitatem: ⁊ quota pars iſta eſt: tantam in prio re ſummam neceſſe ſit multitudinis inueniri. Et pri mum fit ſi pares fuerint diſpoſitiones: vt due medie partes ſibi reſpondeant. poſt vero que ſup ipſas ſunt ſibi inuicem conuertantur: atqꝫ hoc idem fiat donec vterqꝫ terminuſ extremitates incurrat. Põatur enĩ pariter paris ordo ab vno vſqꝫ .128. hoc modo .1.2.4. 8.16.32.64.128. ⁊ ea ſit ſumma maxima. In hoc igi tur quoniam pares diſpoſitiones ſunt: vna medietas non poteſt inueniri. Sunt igitur due: ideſt .8. ⁊ .16. q̃ conſiderande ſunt quemadmodum ipſe ſibi reſpon deant. Totius enim ſumme ideſt .128. octaua pars ẽ. 16. ſextadecima .8. Rurſus ſuper has partes que ſũt ipſe ſibi inuicem reſpondebunt: ideſt .32. ⁊ .4. Nam 32. quarta ꝑs ẽ totius ſũme .4. v° trigeſimaſecunda. Rurſus ſuper has ꝑtes .64. ſecũda pars ẽ .2. v° ſexa geſima quarta. Donec extremitates limitem faciãt: quas dubiũ nõ ẽ eadẽ reſpõſiõe gaudere. Eſt enĩ oĩs ſũma ſemel .128. vnꝰ v° centeſimꝰ vigeſimus octauꝰ. Si autem impares termios ponamus ideſt ſummas idem enim terminos quod ſummas nomino: ſecundũ imparis naturam poteſt vna medietas inueniri: atqꝫ vna ſibi ipſa eſt reſponſura. Si .n. ponatur hic ordo. 1.2.4.8.16.32.64. vna erit ſola medietas ideſt .8. q̃ 8. ſumme totius ꝑs eſt octaua ⁊ ſibiipſi ad denomi tionem quantitatemqꝫ conuertitur. Eodẽqꝫ modo ſicut ſuperius circa ipſum qui ſunt termini: donant ſi bi mutua nomina ſecundum proprias quãtitates vo cabulumqꝫ permutant. Naꝫ .4. ſextadecima pars eſt totius ſumme .16. vero quarta. Et rurſus ſuper hos terminos .32. ſecunda pars eſt totius ſumme .2. vero trigeſima ſecunda: ⁊ ſemel tota ſumma .64. ſunt: ſexageſimaquarta vero vnitas inuenitur. Hoc igitur eſt quod dictum eſt: omnes eius partes ⁊ nomine ⁊ quantitate pariter pares inuẽiri. Hoc quo qꝫ multa conſideratione: multaqꝫ conſtantia diuinita tis perfectum eſt: vt ordinatim diſpoſite minores ſũ me in hoc numero ⁊ ſuper ſeipſas coaceruate: ſequẽ ti minus vno ſemper equentur. Si enim vnum iun gas his qui ſequuntur duobus: ſiunt .3. ideſt qui vno minus quaternario cadunt. Et ſi ſuperioribus addas 4. ſunt .7. qui ab octonario ſequente ſola vnitate vin cuntur. Sed ſi eoſdem .8. ſupradictis adiunxeris .15. fient. qui par .16. numeri exiſteret quantitati. niſi mi nor vnitas ſpediret. Hoc autem prima etiam nume ri progenies ſeruat atqꝫ cuſtodit. Namqꝫ vnitas que prima eſt: duobus ſubſequentibus ſola eſt vnitate cõ tractior: vnde nihil mirum eſt: totum ſumme cremẽ tum proprio conſentire principio. Hec autem nobis conſideratio maxime proderit in his numeris cogno ſcendis quos ſuperfluos vel imminutos imperfecto ſqꝫ monſtrabimus. Illic enim coaceruata quantitas partium numeri totius termino comparatur. Illud

quoqꝫ

La definición del par respecto del impar de manera relativa uno al otro.

Capítulo VI.

/2v./

Si también hay que definir las dos especies de manera relativa una a la otra: se dirá que el número impar es el que se diferencia del par en una unidad, por incremento o por mengua. A su vez, el número par es el que se diferencia del impar en una unidad por incremento o mengua. Pues si restas uno al número par, o si le añades uno, se obtiene uno impar, y si le haces lo mismo al impar, se produce el par de inmediato.

Sobre la primacía de la unidad.

Capítulo VII.

También todo número es la media de la suma de los números situados y unidos a él en la serie natural. Y si se suman los números que hay por encima de aquellos dos que se unen a ése que está en medio de ellos, ese número al que nos referimos es la porción media entre ellos, y a su vez los que de ellos están en segundo lugar, si también se suman, el número primero de éstos ocupa el lugar de la media; y esto ocurrirá hasta que la unidad venga a poner el límite.

Por ejemplo, si se considera un quinario, en su entorno están además del cuatro, el seis. Luego si se suman hacen 10 y el número 5 es la media entre los dos. Pero si sumamos los que están en torno a ellos, esto es, en torno al seis y al cuatro, que son el 3 y el 7, el número quinario es la media de ellos. A su vez, si sumamos los que están situados junto a esos, también son duplos del número quinario. Pues por encima del 3 está el 2 y sobre el 7, está el 8. Si se suman hacen 10 y el quinario es de nuevo la media de los dos. Esto mismo ocurre en todos los números hasta que se pueda llegar al límite de la unidad. En efecto, la unidad es el único número que no tiene dos términos en torno a sí y por eso él solo es media del que está junto a él.

En efecto, junto al uno está situado por naturaleza el dos, del cual la unidad es la media. Por eso se observa que es primaria la unidad respecto a todos los números que se encuentran en su orden natural y que se la reconoce con razón generadora de toda pluralidad por muy crecida que sea.

División del número par.

Capítulo VIII.

Hay tres especies del número par. Hay una que se llama par paritariamente, y otra impar paritariamente; la tercera, par imparitariamente. Y ciertamente sus contrarios y los lugares que alcanzan en una suma, parecen ser par paritariamente, e impar paritariamente. Pero una media que participa de las dos es el número que se llama par imparitariamente.

Del número par paritariamente y de sus propiedades.

Capítulo IX.

Un número par paritariamente es el que puede dividirse en dos pares, y una parte de él en dos pares y una parte de esa parte, en otros dos pares. Esto sucede tantas veces hasta que la división de las partes llega a la unidad, indivisible por naturaleza. Así el número 64 tiene como mitad el 32, éste como mitad el 16, y éste el 8. A éste el cuatro divide por igual, y éste, es doble de dos. Pero el dos se divide por la media de la unidad. Esta unidad por naturaleza singular no admite divisiones. A este número parece ocurrirle que cualquier parte de él que haya, se encuentra con el mismo nombre y designación par paritariamente y también por la cantidad. Pero por eso me parece que se llama este número par paritariamente, porque todas las partes de él son por nombre y cantidad pares paritariamente. Después diremos de qué manera las partes de ese número son pares por nombre y por cantidad este número. La generación de éstos es como sigue. Pues puedes observar que partiendo de uno, siempre se producen pares paritariamente en proporción del doble. Aparte de esta generación, es imposible que nazcan de otro modo. Parece que un ejemplo de esta característica por orden de serie es el siguiente: sean todos los dobles a partir de la unidad: 2,4,8,16,32,64,128,256,512 y así se hace una progresión infinita. Hallarás todos de la misma manera y se han conseguido a partir de la unidad en proporción del doble; y todos son pares paritariamente.

Vale la pena hacer una consideración nada banal: que toda fracción de ella toma nombre de un término cualquiera comprendido dentro del mismo número, e incluye una cantidad equivalente a otro número que designa qué parte de aquél par paritario originario es el otro número. Por tanto, resulta que las partes mismas se corresponden de modo que según sea una parte, ésa es la cantidad de la otra, y según la de otra parte, sea necesario encontrar la suma de pluralidad en la anterior. Y primero resulta que si hay lugares pares, dos partes intermedias se corresponden. Pero después las que están por encima de éstas, se corresponden a su vez entre sí, y que esto mismo sucede hasta que los dos extremos lleguen a término.

Considérese una serie par paritariamente desde el uno al 128, de esta manera: 1,2,4,8,16,32,64,128 y éste es el número mayor. En esta serie, puesto que son lugares pares, no se puede encontrar una media. Así que sean dos números, es decir, 8 y 16; hay que observar cómo se corresponden. Pues la suma total es 128, la octava parte es 16, la décimosexta, 8. A su vez, las que por encima de estas partes se corresponden entre sí: 32 y 4. Pues 32 es la cuarta parte de la suma total y 4 la trigésimosegunda. De nuevo, por encima de estas partes 64 es la mitad y 2 la sexagésimacuarta, hasta que los extremos fijan el límite. No hay duda de que estos extremos con la misma solución se satisfacen. Pues hay una suma de todo de una vez, 128 de donde la unidad es la centésima vigésimoctava parte.

Sin embargo, si consideramos términos impares, esto es sumas impares, pues empleo igualmente términos que sumas, según la naturaleza impar, se puede encontrar una media, que sólo se va a corresponder consigo misma. En efecto, si consideramos la serie 1,2,4,8,16,32,64 habrá una sola media, esto es 8, y 8, que es la octava de la suma total, se sirve de sí misma en cuanto a la denominación y a la cantidad. De modo semejante, como antes, hay por encima de ella otros términos, que se otorgan mutuamente el nombre y cambian de denominación según las cantidades asignadas. Pues 4 es la decimosexta parte de la suma total y 16 la cuarta. Y a su vez por encima de estos términos 32 es la mitad de la suma total y 2 la trigesimosegunda; y siendo 64 la suma total, la unidad resulta ser su sexagesimocuarta parte. En consecuencia, esto es lo que se ha dicho: todas sus partes por nombre y por cantidad resultan ser pares paritariamente.

Esto es también el efecto de la consideración atenta y gran constancia de la divinidad: que en ese número, las sumas menores dispuestas en serie, y aumentadas sobre sí mismas, siempre se igualan al siguiente menos uno. Pues si añades uno al dos que sigue, resultan 3, es decir, pasan a ser uno menos de cuatro, y si a los anteriores les añades 4, son 7, que sólo son superados por el ocho en una unidad. Pero si les añades 8 a los anteriores, resultan 15, que sería igual en cantidad al número 16 si no se lo impidiera una unidad menos. Sin embargo, esta característica del número se mantiene y se conserva. Porque la unidad es la primera, a la que le sigue el dos, del que se diferencia por una sola unidad. De ahí que no sorprenda que todo incremento de la suma sea acorde con su propio principio. Ahora bien, esta consideración nos ayuda mucho al conocimiento de estos números, que según mostraremos, tienen la característica de abundancia o deficiencia e imperfección. Pues allí se compara la cantidad aumentada de las partes con la suma del número total.

quoqꝫ nulla possumus obliuione transmittere: quod in hoc numero respondentibus sibi inuicem partib⁹ multiplicatis: maior extremitas eiusdeȝ numeri summa conficitur. Et primum si pares fuerint dispositiones medii multiplicantur: atqꝫ inde qui super ipsos sunt: vsqꝫ ad supradictas extremitates. Si enim fuerint pares dispositiones: secundum naturam paris duos in medio terminos continebũt: vt in ea. dispositione numerorum in qua extremus terminus. 128. finitur. In hoc enim numero medietates sunt. 8. scilicet ⁊. 16. que in se multiplicate: maiorẽ summã crescente pluralitate conficient. Octies enim. 16. vel sedicies. 8. si multiplices. 128. summa concrescit. Atqꝫ hi numeri qui super eosdem sunt si multiplicẽtur idẽ faciunt. Nam. 4. ⁊. 32. in se si multiplices: supradictã facient extremitatem. 4. enim trigies: ⁊ bis: vel quater. 32. ducti. 128. immutabili necessitate complebunt Atqꝫ hoc vsqꝫ ad extremos terminos cadit: idest. 1. ⁊. 128. Semel enim extremus terminus. 128. est. Centies vigies atqꝫ octies vnitate multiplicata. nihil de priore quãtitate mutabitur. Si autem impares fuerint dispositiones: vnus medius terminus inuenitur. atqꝫ ipse sibi propria multiplicatione respondet. In eo namqꝫ ordine numerorum: vbi extremus terminus: 64. pluralitate concluditur. sola inuenitur vna medietas: idest. 8. Quam si octies idest in semetipsaȝ multiplices. 64. explicabit. Atqꝫ idem reddũt illi qui super hanc medietatem sunt vt dudum hi qui super duas positi faciebant. Nam quater. 16. 64. sunt. ⁊ sedecies. 4. ideȝ complent. Rursus bis. 32. facti a. 64. non discedunt. ⁊ trigies bis duo. eosdem cumulant: ⁊ semel. 64. vel vnitas sexagiesquater multiplicata: eundem numerum sine vlla varietate restituent.

¶De numero pariter impari eiusqꝫ proprietatibus. Capitulum. x.

Pariter autem impar numerus est qui ⁊ ipse quidem paritatis naturam substantiaȝ qꝫ sortitus est: sed in contraria diuisione nature numeri pariter paris opponitur. Docebitur namqꝫ qꝫ lõge hic dissimili ratione diuidatur. Nam quoniam par est in partes equales recipit sectionem partes vero eius mox indiuisibiles atqꝫ insecabiles permanebunt vt sunt. 6. 10. 14. 18. 22. ⁊ his similes. Mox enim hos numeros si in gemina fueris diuisione partitus: incurris in imparem quem secare non possis. Accidit auteȝ his qꝺ omnes partes contrarie denominatas habent: qꝫ sũt quantitates ipsarũ partiũ que denominantur. Neqꝫ vnquam fieri potest: vt quelibet pars huius numeri eiusdem generis denominationem quantitatẽqꝫ suscipiat. Semper enim si denominatio fuerit par. quãtitas ptis erit impar: ⁊ si fuerit denominatio impar: quantitas erit par: vt in. 18. secunda eius pars est: id est media quod paritatis nomen est. 9. que impar est quantitas. Tertia vero que impar est denominatio sex: cui par pluralitas est. Rursus si conuertas sexta pars que par est denominatio: tres sunt: sed ternari⁹ impar est. Et nona pars quod impar est vocabulum. 2. qui par numerus est. Atqꝫ ideȝ in aliis cunctis qui sunt pariter impares inuenitur. Neqꝫ vnquam fieri potest: vt cuiuslibet. partis. sit eiusdeȝ generis nomẽ ⁊ numerus. Fit autem hoȝ procreatio numerorum si ab vno disponantur quicunqꝫ duobus differunt: id est omnibus: imparibus naturali sequentia atqꝫ ordine constitutis. Namqꝫ hi si per binarium numerum multiplicentur omnes pariter impares: rite pluralitas dimensa efficiet. Ponatur enim prima vnitas. 1. ⁊ post hunc qui ab hoc duobus differt. idest tres: ⁊ post hunc qui rursus a supiore duobus idest. 5. ⁊ hoc in infinitum: ⁊ sit huiusmodi dispositio. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. Hi ergo naturaliter sequentes impares sũt: quos nullus in medio par numerus distĩguit. hos si per binarium numerus distingui. si per hos si per binarium numerum multiplices: efficies hoc modo. bis vnum idest. qui diuiditur quidem: sed ei⁹ partes indiuisibiles reperiuntur propter insecabilis vnitatis naturam. Bis. 3. bis. 5. bis. 7. bis. 9. bis. 11. ⁊ deinceps ex quib⁹ nascuntur hi. 2. 6. 10. 14. 18. 22. Quos si diuidas: vnam recipiunt sectionem: ceteram repudiantes: quod secunda diuisio ab imparis medietate partis excluditur. His autem numerus ad se inuiceȝ quaternarii sola distãtia est. Namqꝫ inter duo ⁊ sex numeros. 4. sunt. Rursus ĩter. 6. ⁊ 10. ⁊ inter. 10. ⁊. 14. ⁊ ĩter. 14. ⁊. 18. idem quaternarius differentiam facit. Hi namqꝫ omnes quaternaria sese numerositate transcendunt. Quod iccirco cõtingit. quoniaȝ primi qui positi sunt idest eorum fundamenta: binario se numero precedebãt quos quoniam per binarium multiplicauimus: in quaternarium numerum creuit illa progressio. Duo eniȝ per bis multiplicati: quaternarii faciunt summam. Igitur in naturalis numeri dispositione: pariter impares numeri quinto loco a se distant: solis. 4. se precedunt. 3. in medio transeuntes per binarium numerum multiplicatis imparib⁹ procreati. Contrarie vero esse dicũtur he species numerorum: idest pariter par: ⁊ pariter impar. quod ĩ numero pariter impari solam diuisioneȝ recipit maior extremitas: in illo vͦo solus minor terminus sectione solutus est. ⁊ quod in forma pariter paris numeri ab extremitatibus incipienti: ⁊ vsqꝫ ad media progredienti quod continetur sub extremis terminis idem est illi quod continetur sub intra se positis summulis. Atqꝫ hoc idẽ vsqꝫ ad duas medietates fuerit ventum in dispositionibus scilicet paribus. Si autem fuerint impares dispositiones quod ab vna medietate conficitur hoc idem sub altrinsecus positis partibus procreat. Atqꝫ hoc vsqꝫ dum ad extremitates processio fiat. In ea eniȝ dispositione que est. 2. 4. 8. 16. idẽ reddunt. 2. per. 16. multiplicati: quod. 4. per octonarium numerum ducti. Utroqꝫ enim modo. 32. fient. Quod si impar sit ordo vt est. 2. 4. 8. idem facient extremi quod medietas. Bis enim. 8. sunt. 16. quatuor quater sunt. 16. qui numerus a quaternario in se ducto perficitur. In numero vero pariter impari si fuerit vnus in medio terminus: circũ se positorũ terminorum si in vnũ redigantur medietas est. Et idem eorũ quoqꝫ qui super hos sunt terminos medietas est. Atqꝫ hoc vsqꝫ ad extremos omnium terminorum vt in eo ordine qui est pariter imparium numeroruȝ. 2. 6. 10. iunctus binarius cum denario. 12. explet. cuius senarius medietas inuenitur. Si vͦo fuerint due medietates iuncte: ipse vtreqꝫ equales erũt super se terminis constitutis. vt est in hoc ordine. 2. 6. 10. 14. Iuncti enim. 2. ⁊. 14. in. 16. crescunt: quos senarius cuȝ denario copulatus efficiet. Atqꝫ hoc in numerosioribus terminis initio sumpto a mediis euenit vsqꝫ dum ad extrema veniatur.

¶De numero impariter pari eiusqꝫ proprietatibus. Capitulum. xi.

/3r./

Tampoco podemos pasar por alto que en este número si se multiplican las partes que se corresponden entre sí, el extremo mayor coincide con ese número y su cantidad. Y primero, si hay lugares pares, son muchos los términos intermedios y de ahí avanzan los que están por encima hasta los extremos mencionados antes. Pues si son lugares pares, según la naturaleza del par quedarán comprendidos en medio dos términos, como en el caso de la serie en que el término extremo termina con el 128. Pues en este número las medias son 8 y 16, que multiplicadas entre sí alcanzarán la totalidad al crecer la progresión. Efectivamente, si multiplicas 8 por 16 o 16 por 8 la totalidad alcanza 128. Y si se multiplican estos números que están por encima, llegan a lo mismo. Pues si multiplicas 4 y 32, resulta el número extremo mencionado. Pues cuatro por treinta y dos o treinta y dos por cuatro completarán por necesidad inmutable 128 y esto ocurre hasta que se llega a los términos extremos, esto es, 1 y 128, ya que el término extremo multiplicado una vez es 128: la unidad multiplicada por ciento veintiocho. Nada quedará alterado de la cantidad anterior.

En cambio, si los lugares son impares, se encuentra un término medio, y éste se corresponde con su propia multiplicación. Pues en esa serie de números en que el término extremo se limita con el 64, se halla una sola media, esto es, 8, que si la multiplicas por sí misma, se obtendrá 64. Y lo mismo darán aquellos números que están por encima de esta media, como los situados por encima de las dos. Pues 16 por cuatro son 64 y 4 por dieciséis alcanzan la misma cifra. A su vez, 32 por dos son 64 y no se diferencian de dos por treinta y dos, a la misma cifra se elevan; y 64 por uno o la unidad multiplicada por 64 restablecerán el mismo número sin ninguna variación.

Del número impar paritariamente y de sus propiedades.

Capítulo X.

Ahora bien, un número impar paritariamente es aquel al que le ha correspondido la naturaleza y la sustancia del par, pero en una división contraria se opone a la naturaleza del número par paritariamente. Se mostrará de qué manera éste se divide con una característica diferente. Pues porque es par, admite una partición en partes iguales, pero permanecerán según su característica, indivisibles e inseparables, como son 6,10,14,18,22 y los semejantes a éstos. Pues por esa característica si divides estos números entre dos, encontrarás un impar que no se puede dividir. Por otra parte, les sucede a éstos que tienen todas sus partes denominadas de manera contraria a la de las cantidades de esas partes que se designan. Y nunca puede ser que cualquier parte de este número reciba una denominación y una cantidad del mismo género. Pues siempre si la denominación es par, la cantidad será impar y si la denominación es impar, la cantidad será par. Así en 18, la mitad es su parte segunda, esto es, su media, que es un nombre del género par y 9 es la cantidad impar. La tercera parte es una denominación impar de seis, que tiene una pluralidad par. A su vez si hallas la sexta parte, que es una denominación par, son tres, pero el tres es impar. Y la novena parte, que es un nombre impar, se corresponde con 2 que es número par. Y lo mismo se encontrará en todas las demás que son impares paritariamente. Y nunca puede ser que el nombre y el número de cualquier parte sea del mismo género.

El cálculo de estos números se hace partiendo de la unidad y eligiendo los que se diferencian en dos unidades, esto es, todos los impares según su secuencia natural y constituidos en serie. En efecto, si éstos se multiplican por dos, todos serán impares paritariamente, su pluralidad medida regularmente lo determinará.

Considérese la unidad primera y después, el número que se diferencia de ella en dos, es decir, tres; a continuación el superior que se diferencia de éste en dos, esto es, 5 y esto hasta el infinito, por lo que se consigue una serie de esta manera: 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19. Éstos son los impares en su secuencia natural, a los que no separa ningún número par en el medio, sino que se diferencian en dos unidades.

Si estos números se multiplican por dos, se obtendrá el resultado de este modo: uno por dos, esto es, el dividendo, pero se advertirá que sus partes son indivisibles por la naturaleza de la unidad indivisible. Tres por dos, 5 por dos, 7 por dos, 9 por dos, 11 por dos y así en adelante, de donde resultan 6,10,14,18,22; si se dividen éstos, admiten una sola sección, descartando cualquier otra, porque una segunda subdivisión de la parte impar por la mitad queda excluida. A su vez el número en sí respecto a éstos tiene una diferencia de cuatro. Pues entre dos y seis hay cuatro números. Por su parte, entre 6 y 10, entre 10 y 14, entre 14 y 18 se decanta una diferencia de 4. En efecto, todos se incrementan por medio del número cuatro.

Eso ocurre porque los primeros propuestos, esto es, los fundamentos de ellos, se sucedían con intervalo de dos unidades y los hemos multiplicado por dos, la progresión crece de cuatro en cuatro. Pues si se multiplica dos por dos, hacen una cantidad total de cuatro.

Por tanto, en la disposición de un número natural, los números impares paritariamente se sitúan a una distancia de cinco lugares: siendo cuatro los que le preceden, pasando tres por medio, multiplicados por dos los impares. Pero se llaman de manera contraria estas clases de números , esto es, par paritariamente e impar paritariamente, porque en el número impar paritariamente el extremo mayor admite una sola división, porque en aquel número el término menor sólo se divide una vez, y en forma de un número par paritario que tiene dos extremos y que avanza hacia una media que está comprendida entre esos dos extremos. Ese número le corresponde porque se contiene en las cantidades parciales.

Y esta progresión se lleva hasta los extremos. Pues en la serie que es 2,4,8,16, lo mismo da dos por 16 que 4 por ocho, de las dos maneras son 32. Si se hace una serie de lugar impar, como es 2,4,8, lo mismo darán los extremos que la media. Pues 8 por dos son 16 y cuatro por cuatro son 16, que se consigue con una multiplicación de cuatro por sí mismo. Pero en un número impar paritariamente si hay un solo término en medio, los números en torno si se reducen en uno, queda la media. Y esto hasta el final de todos los términos como en esta serie que es de números impares paritariamente 2,6,10, se suman 2 y 10 y llegan a 12, cuya media se encuentra en 6, Si hay dos medias sumadas, éstas serían iguales a los términos establecidos por encima de ellas. Por ejemplo en la serie 2,6,10,14. Pues 2 y 14 se suman en 16, que será la suma de seis y diez. Y si sucede en una progresión de varios términos a partir de la media, se llega hasta los extremos.

Impariter par numerus est ex vtrisqꝫ con- fectus ⁊ medietatis loco gemina extremita te conducitur: vt qua ab vtroqꝫ discrepet. eadem ad alterutrum cognatione iungatur Hic autem talis est qui diuidit in equas partes: cuiusqꝫ pars in alias equas diuidi potest: ⁊ et aliquando partes partium diuiduntur: sed non vt vs qꝫ ad vnitatem progrediatur equabilis illa distinctio vt sunt .24. ⁊ .28 Hi enim possunt in medietates di uidi: ⁊ eorum rursus partes in alias medietates sine aliqua dubitatione soluuntur. Sunt etiam quidā alii numeri quorum partes alias recipiunt diuisiones: s; ipsa diuisio ad vnitatem vsqꝫ non peruenit. Igitur in eo quod plus q̄ȝ vnam suscipit sectionem: habet simi litudinem pariter paris: sed a pariter impari segre- gatur. In eo vero quod vsqꝫ ad vnum sectio illa non ducitur. pariter imparem non refutat: sed a pariter pari disiungitur. Contingit autem huic nūero ⁊ vtra qꝫ habere que superiores non habent: ⁊ vtraqꝫ que il li recipiunt optinere. Et habet quidem quod vtriqꝫ non habent quod cum in vno solus maior terminus diuideretur: in alio vero solus minor terminus non diuideretur. in hoc neqꝫ sol' maior terminus diuisio nem recipit: neqꝫ minor solus termin' a diuisione se iungitur. Nam ⁊ partes soluuntur ⁊ vsqꝫ ad vnita tem sectio illa non peruenit. sed ante vnitatem inue- nitur terminus quem secare non possis. Optinet au- tem que illi quoqꝫ recipiunt. quod quedam partes ei' respondent: denominanturqꝫ secundum genus suum ad ꝓpriam quantitatem: ad simīlitudinem scilicet pariter paris numeri. Alie vero partes contrariam denomi- nationem sumunt proprie quantitatis ad pariter imparis scilicet formam. In .24. enim numero par ē quantitas parti a paris numero denominata. Nam quarta .6. secunda vero .12. sextam vero .4. duodeci- ma .2. que vocabula partium a quantitatis paritate non discrepant. Contrarie vero denominant cuȝ ter tia pars octo: octaua vero .3. vigesima autem quarta .1. que denominationes cum pares sint inueniuntur impares quantitates. ⁊ cum sint pares summe: sunt impares denominationes. Nascuntur auteȝ tales nu meri ita vt substantiam naturamqꝫ suam in ipsa etiā propria generatione designent: ex pariter paribus ⁊ pariter imparib' procreati. Pariter enim impares cuncti dudum ordinatim positis imparibus nascebā tur. pariter vero pares ex duplici progressione. Di- sponantur igitur oēs in ordiem naturaliter impares ⁊ sub his a quattuor incohantes omnes duplices ⁊ sint hoc modo:

3	5	7	9	11	13
4	8	16	32	64	128

His igitur ita positis si primus primi multiplicatio ne concrescat: idest si quaternarii ternarius: vel si idē primus secundi: idest octenarii ternarius vel si idem primus tertii idest .16. ternarius ⁊ idem vsqꝫ ad vlti mum. vel si secundus primi ⁊ secundi. vel si secun- dus tertii ⁊ eadem vsqꝫ ad extremum multiplicatio proferatur. vel si tertius a primo inchoās vsqꝫ in ex tremum transeat. Atqꝫ ita quartus ⁊ omnes in ordi- nem superiores multiplicent eos qui sub ipsis in dis- positione sunt omnes impariter pares procreabunt. Huius autem rei tale sumamus exemplum: si tres q̄ ter multiplices .12. fient: vel si .5. quatuor multiplicent .20. numerus excrescet: vel si item .7. multiplicent .4. 28. succrescet: atqꝫ hoc vsqꝫ in fineȝ. Rursus si .8. mul tiplicent .3. nascentur .24. Si .8. in .5. fiunt .40. si .8. in .7. colligentur .56 Atqꝫ ad hunc modum si omnes inferiores duplices: a superioribus multiplicentur: vel si superiores eosdem inferiores multiplicent: cun ctos qui nati fuerint impariter pares inuenies. Atqꝫ hec est admirabilis huius numeri forma: quod cum fuerit ipsa dispositio descriptioqꝫ ꝓspecta numeroꝝ ad latitudinem pariter imparium: ad longitudinem pariter parium numerorum proprietas inuenitur: Sunt enim duabus medietatibus equales due extre mitates: vł vna medietate due duplices extremitates In longitudinem vero pariter paris numeri rem pro prietatemqꝫ designat. Quod eniȝ sub duabus medie tatibus cōtinetur. equale est ei quod sub extremis cō ficitur: vel quod ab vna medietate nascitur. equale ē illi quod sub vtrisqꝫ extremitatibus continetur. De- scriptio autem que supposita est: hoc modo facta est Quantoscunqꝫ in ordine pariter parium numeroruȝ ternarius numerus multiplicauit: quicūqꝫ ex eo pro- creati sūt: primo sunt versu dispositi. Rursus qui eos dem multiplicāte quinario nati sunt: secundo loco cō stituti sunt. Post vero quos septenari' ceteros mul tiplicando procreauit. eosdem tertio conscripsimus loco: atqꝫ idem reliqua descriptionis parte perfeci- mus.

In hac formula sequenti similitudo pariter paris ⁊ pariter imparis ad impariter parem ostenditur.

Del número par imparitariamente y sus propiedades.

Capítulo XI.

/3v./

El par imparitariamente es un número que se obtiene de las dos clases de números y ocupa la posición de término medio entre dos extremos, de forma que la distinción que los separa es la característica que lo une al otro grupo. Pero éste es el que divide en partes iguales y una parte de él se puede dividir en otras equivalentes; algunas veces se dividen las partes de las partes, pero aquella distinción equivalente avanza hasta la unidad. Por ejemplo 2,4 y 28. Pues éstos pueden dividirse en mitades, y las partes de éstas a su vez en otras mitades sin ninguna duda. También hay algunos otros números cuyas partes reciben otras divisiones y la división misma no llega hasta la unidad. Por tanto, en el hecho de que admite más de una división tiene una semejanza con el par paritariamente, pero se diferencia del impar paritariamente. Sin embargo, en el rasgo de que no llega en la división hasta el uno, no repugna al impar paritariamente, sino que se distingue del par paritariamente.

A este número le sucede que tiene características que les faltan a los precedentes y recibe otras que ellos admiten. Y tiene ciertamente lo que dos clases no tienen: que mientras en una, el término mayor es el único que se divide, en la otra, hasta el término menor no se divide; en ésta, ni se divide el término mayor solo, ni hasta el término menor solo se sustrae a la división. Pues sus partes se dividen y aquella división no llega hasta la unidad, sino que encuentra un término antes de la unidad que no puedes dividir. Obtendrás los que también características que ellos admiten, porque sus partes se corresponden y se llaman en cuanto a la cantidad, según su género, a semejanza, claro está, del número par paritariamente. Otras partes toman la denominación contraria a la de su cantidad propia, a imagen del impar paritariamente. Pues en el número 24, la cantidad par ha sido determinada para la parte por el número del par. En efecto, la cuarta parte es el 6, la mitad el 12, la sexta el 4, la duodécima el dos, nombres que no resaltan del rasgo par de su cantidad. Pero las llaman de manera contraria cuando la tercera parte es 8, la octava es 3, la vigesimocuarta, uno. Aunque estos nombres sean pares, sus cantidades resultan impares y aunque son pares las superiores, los nombres son impares. Tales números surgen de modo que designen su sustancia y naturaleza incluso desde su propio modo de generarse: se obtienen de los pares paritariamente y de los impares paritariamente. Claro que todos los impares surgían en serie en los lugares impares mientras que los pares paritariamente en progresión del doble. Por tanto, que se dispongan todos los impares naturalmente en orden y bajo éstos, todos los dobles desde el cuatro son de este modo

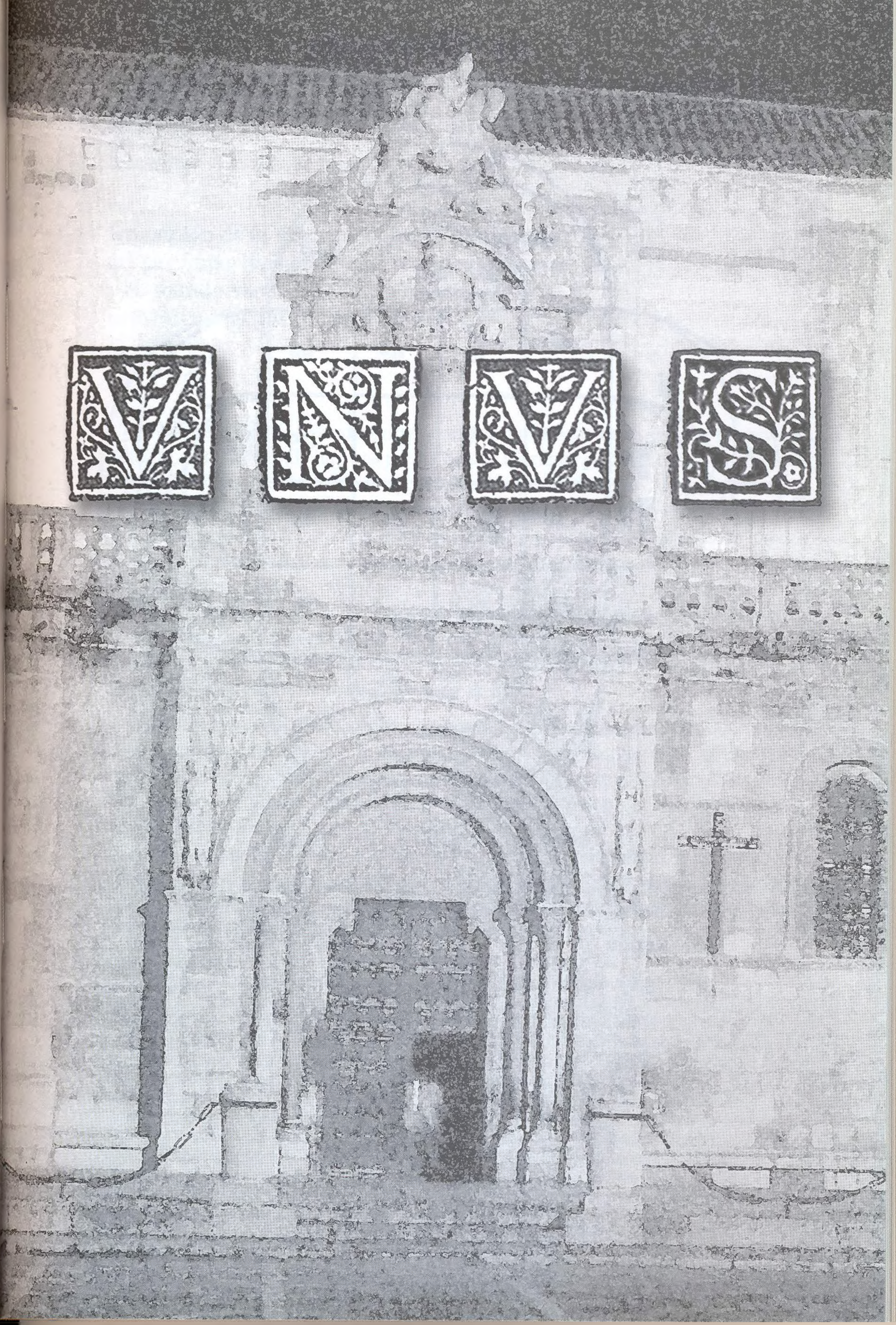
3	5	7	9	11	13
4	8	16	32	64	128

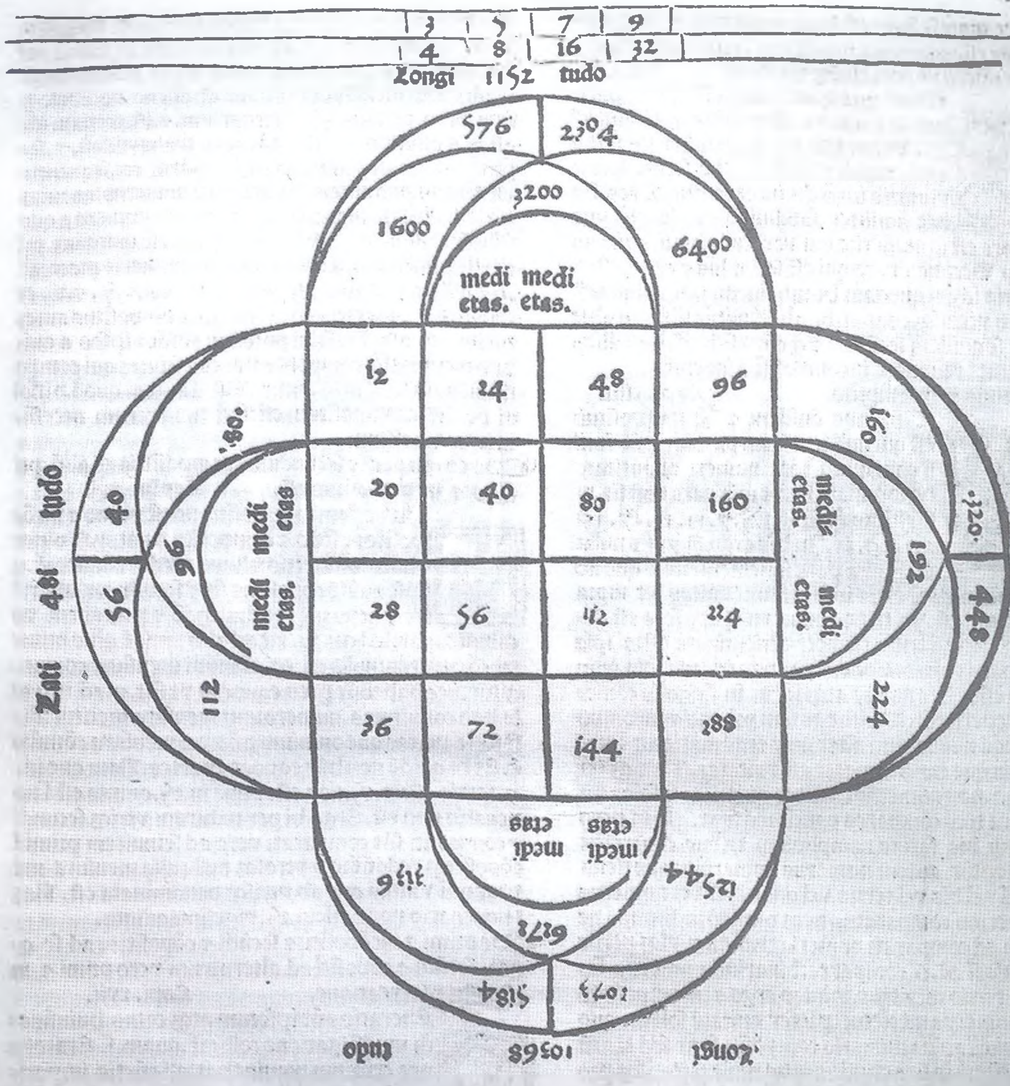
Por tanto, dispuestos así, si el primero se acrecienta con la multiplicación del primero, esto es, el tres por cuatro, o si ese mismo primero por el segundo, esto es, tres por ocho, o si avanza la multiplicación de ese mismo primero por el tercero, esto es, tres por 16, y así hasta el último; o si el segundo por el primero y el segundo, o el segundo por el tercero, y de este modo hasta el extremo, o si comenzando por el tercero a partir del primero se va llegando al extremo, y así el cuarto y todos los superiores en la serie se multiplican por los que están en un lugar más bajo, se crearán todos los pares imparitariamente.

Pero vamos a tomar un ejemplo de esta característica: si multiplicas cuatro por tres, serán 12.; si cuatro por cinco, se consigue el número 20; si 4 por 7 se llega a 28 y así hasta el final. A su vez, si multiplican 8 por 3 se obtiene 24; si 8 por 5, son 40, si 8 por 7 se juntan 56. Y según este procedimiento, si todos los inferiores dobles se multiplican por los que están encima, te encontrarás que los que se han obtenido son pares imparitariamente.

Y ésta es la característica admirable de este número: que habiendo visto esta disposición y descripción (véase el esquema en fol. 4r.) de los números pares imparitariamente en sentido horizontal, y de los números pares paritariamente en sentido vertical, se advierte una propiedad: hay dos medias y los dos extremos son iguales, como donde hay una media, los dos extremos son dobles. A lo largo, aparece la característica y la propiedad del número par paritariamente: porque el producto de las dos medias es igual al de los dos extremos, o lo que se obtiene a partir de multiplicar una media por sí misma es igual al producto de ambos extremos. La descripción que se le añade más abajo se ha hecho de este modo. En toda serie de números pares paritariamente el número tres ha multiplicado, y los que se han generado a partir de él, se han dispuesto en la primera línea. A su vez, los que se obtienen de multiplicar por cinco se han colocado en la segunda. Pero después, los que se obtienen multiplicando por siete, los hemos colocado en tercer lugar, y lo mismo haremos con la parte de la descripción restante.

C. En este esquema (impreso en fol. 4r.) se muestra la semejanza del número par paritariamente y la del impar paritariamente con respecto al par imparitariamente.


VNVS



Descriptionis ad impariter paris in latitudine: in longitudine ad pariter paris naturam pertinentis expositio.

Capitulum.xii

Superius igitur digeste descriptionis hec ratio est. Si ad latitudinem respicias: vbi est duorum terminorum vna medietas: ipsosque terminos iungas: duplos eos medietate propria repies vt. 36.&.20.faciunt. 56.quorum medietas est.28.qui medius est inter eos terminus constitutus. Et rursus.28.&.12.si iungas faciunt.40.quorum.20.medietas medius eorum terminus inuenitur. At vero vbi duas medietates habent vtreque extremitates iuncte: vtrisque medietatibus equales fiunt. vt. 12.&.36 .cum iunxeris fiunt.48.horum si medietates sibimet applicaueris: idest.20.&.28.idem erit.atque in alia parte latitudinis eodem ordine qui fiant numeri notati sunt. Neque vlla in re ratio vtriusque latitudinis discrepabit: idemque in eodem ordine in ceteris numeris pernotabis: & hoc secundum formam pariter imparis numeri fit in quo hanc proprietatem esse supra iam scriptum est. Rursum si ad longitudinem respicias vbi duo termini vnam medietatem habent quod fit ex multiplicatis extremitatibus: hoc fit si medius terminus sue capiat pluralitatis augmenta. Nam duodecies.48.faciunt.576. Medius vero eorum terminus idest.24.si multiplicetur: eosdem rursus. 576. procreabit. Et rursus si.24.in. 96.multiplicetur faciunt. 2304. Quorum medius terminus idest.48.si in semet ipsum ducatur idem. 2304 . procreantur. Ubi autem termini duo duas medietates includunt: quod fit multiplicatis extremitatibus. hoc idem redditur in alterutram summam medietatibus ductis. Duodecies enim.96.multiplicatis.1152. procreantur: due vero eorum medietates idest.24.&.48. si in semet ipsas multiplicentur: eosdem. 1152. restituent. Atque hoc est ad imitationem cognationemque numeri pariter paris: a quo participatione tracta hec ei recognoscitur ingenerata proprietas. Et in alio vero latere longitudinis: eadem ratio descriptioque notata est.

/4r./

(consúltese el cuadro en fol. 4r.)

Exposición de la descripción de la naturaleza del par imparitariamente en sentido horizontal y en sentido vertical de lo pertinente a la naturaleza del par paritariamente.

Capítulo XII.

El fundamento de la descripción expuesta más arriba es éste: si observas la banda horizontal, donde hay una media de dos términos y sumas esos dos términos, hallarás que esos dobles con media propia, 36 y 20, hacen 56, cuya media es 28, que está establecido como término medio entre ellos. Y a su vez, si sumas 28 y 12, hacen 40, de los cuales es 20 la media, el término se ecuentra en medio de los dos. Ahora bien, cuando hay dos medias, la suma de los extremos sale igual a la de las dos medias; por ejemplo: si sumas 12 y 36 son 48, si sumas las medias, esto es, 20 y 28, saldrá igual resultado. Y si se observa la otra parte en sentido horizontal de la misma serie, se han escrito los números que resultan. Y en ninguna cosa se diferenciará el comportamiento de una u otra línea horizontal, advertirás el mismo funcionamiento en los demás números de la serie.

Y esto ocurre en la forma de número impar paritariamente en el que ya se ha descrito antes esa propiedad. A su vez, si se observa en sentido vertical, donde dos términos tienen una media, lo que resulta de multiplicar los extremos, es lo mismo que sucede si el término medio recibe los aumentos de su propia multiplicación. Pues 48 por 12 son 576; si se multiplica el medio de esos términos, esto es, 24, por sí mismo, de nuevo se generará 576. Y a su vez si 24 se multiplica por 96, hacen 2304, cuyo término medio es 48, que si se multiplica por sí mismo, se generará 2304. Cuando dos términos incluyen dos medias, multiplicados los extremos da lo mismo que tomando para multiplicar las medias entre sí. Pues 96 por 12 dan 1152, pero sus dos medias, esto es, 24 y 48 si se multiplican entre sí, dan también 1152. Y esto sucede por imitación y parentesco del número par paritariamente, por la participación tomada a partir de él, se le reconoce una propiedad ingenerada. Y en el otro lado vertical se ha escrito el mismo comportamiento y descripción.

Quare manifeſtum eſt hunc numerum ex prioribus
duobus eſſe procreatum:qm̄ eoꝝ retinet ꝓprietates.

¶De numero impari eiuſqꝫ diuiſione Capi.xiii.

Impar quoqꝫ numerus eſt: qui a paris
numeri natura ſubſtantia qꝫ deiunct⁹
eſt. Siquidem ille in gemina membra
equa diuidi poteſt:hic ne ſecari queat
vnitatis impedit interuentus.Tres ha
bet ſimiliter ſubdiuiſiones.quaruʒ vna
eius pars eſt is numerus qui vocatur primuſ ⁊ incom
poſitus.Secunda vero qui eſt ſecundus ⁊ compoſit⁹.
Et tertia is qui quadam horum medietate coniunct⁹
eſt:⁊ ab vtriuſqꝫ cognatiōe aliud naturaliter trahit
ꝗ eſt ꝑ ſe quidem ſecūdus ⁊ ꝗ cōpoſitus:ſed ad alios
comparat⁹ primus ⁊ incompoſitus inueniť.

¶De primo ⁊ incompſito. Capi. xiiii.

Et primus quidem ⁊ Incompoſitus
eſt qui nullam aliam partem habet ni
ſi eam que a tota numeri quantitate
denominata ſit.vt ipſa pars non ſit ni
ſi vnitas vt ſunt.3.5.7.11.13.17.19
.23.29.31.In his ergo ſingulis nulla
vnqꝫ alia pars inuenietur:niſi que ab
ipſis denominata eſt:⁊ ipſa tantum vnitas vt ſupra
iam dictum eſt. In tribus enim vna pars ſola eſt.id-
eſt:tertia:que a tribus ſcilicet denominata eſt:⁊ ipſa
tertia pars vnitas.Eodemqꝫ modo quīarii ſola quin
ta pars eſt:⁊ hec vnitas atqꝫ idem in ſingulis conſe-
quens reperietur.Dicitur autem primus ⁊ incompo
ſitus quod nullus eum alter numerus metiatur :pre-
ter ſolam que cunctis mater eſt vnitateʒ. Namqꝫ ter
narium.2.non numerant.iccirco quoniam ſi ſolos du
os contra tres compares pauciores ſunt. Sin vero
binarium bis facias : ampliorem tribus concreſcit
in.4.Metitur autem numerus numerum:quotiens
vt ſemel vel bis vel tertio vel quotienſlibet numerus
ad numerum comparatus neqꝫ diminuta ſumma ne
qꝫ aucta ad comparati numeri terminum vſqꝫ perue
nit vt duo ſi ad.6.compares:binarius numerus ſe-
narium tertio metietur.primos ergo ⁊ incompoſitos
nullus numerus metietur:preter vnitatē ſolam: quo
niam ex nullis aliis numeris compoſiti ſunt ſed tantū
ex vnitatibus in ſemetipſis acutis multiplicatiſqꝫ pro
creantur.Ter enim vnus.3.⁊ quinquies vnus quin-
qꝫ.⁊ ſepties vnus.7.fecerunt.Et alii quideʒ quos ſu
pra deſcripſimus eodem modo naſcuntur.Hi autem
in ſemetipſos multiplicati faciunt alios nūeros velut
primi:eoſqꝫ primam rerum ſubſtantiam vimqꝫ ſorti
tos:cunctorum a ſe procreatorum velut quedam ele
mēta reperies . quia ſcilicet ⁊ incōpoſiti ſunt:⁊ ſim-
plici generatione formati:atqꝫ in eos omnes quicun
qꝫ ex his prolati ſunt numeri reſoluuntur:ipſi vō ne-
qꝫ ex aliis producuntur:neqꝫ in alia reducuntur.

¶De ſecundo ⁊ compoſito. Capi.xv.

Secundus vero ⁊ compoſitus ⁊ ipſe qui-
dem impar eſt propterea quod eadem im
paris proprietate formatus eſt:ſed nullaʒ
in ſe retinet ſubſtantiam principaleʒ com
poſituſqꝫ eſt ex aliis numeriſ.habetqꝫ par
tes : ⁊ a ſeipſo ⁊ ab alieno vocabulo denominatas.
ſed a ſeipſo denominatam partem ſolam ſemper in
his inuenies vnitatem.ab alieno vero vocabulo vel
vnam:vel quotlibet alias:quanti fuerint ſcilicet nu-
meri quib⁹ ille compoſitis procreatur.vt ſunt hi. 9.
15.21.25.27.33.39.Horum ergo ſinguli habēt quidē
a ſe denominatas partes proprias ſcilicet vnitates.
vt.9.nonam ideſt.1.15.quintamdecimam:eandē rur
ſus vnitatem.⁊ in ceteris quos ſupra deſcripſimus
idem conuenit.Habent etiam ab alieno vocabulo ꝑ
tem.vt.9.tertiam.ideſt ternarium.⁊.15.tertiam id-
eſt.5.⁊ quintam:ideſt.3.21.vero tertiaʒ:ideſt.7.ſe-
ptimam.3.⁊ in omnibus aliis eadem conſequentia
eſt.Secundus autem vocatur hic numerus:quoniaʒ
nō ſola vnitate metitur ſed etiam alio numero a quo
ſcilicet coniunctus.eſt. Neqꝫ habet in ſe quicquaʒ pri
cipalis intelligentie: Nam ex aliis numeris procreať
.9.quidem ex tribus.15.vero ex tribus.⁊.5 . ⁊.21 . ex
tribus ⁊.7 .⁊ ceteri eodem modo.Compoſitus auteʒ
dicitur eo quod reſolui poteſt in eoſdeʒ ipſos a qui-
bus dicitur eſſe compoſitus:in eos ſcilicet qui compo
ſitum numeruʒ metiuntur . Nihil autem quod diſſol
ui poteſt incompoſitum eſt:ſed omni rerum neceſſi-
tate compoſitum.

¶De eo qui per ſe ſecundus ⁊ compoſitus ad aliū pri
mus ⁊ incompoſitus eſt. Caplm .xvi.

His vō contra ſe poſitis:ideſt primo ⁊ incō-
poſito:⁊ ſcdo ⁊ compoſito ⁊ naturali diuer
ſitate diſiunctis:alius ī medio cōſiderať.q
ipſe quidē cōpoſitus ſit ⁊ ſecūdus.⁊ alteri⁹
recipiens mēſionē:atqꝫ idō ⁊ ptis alieni vo
cabuli capax:ſed cuʒ fuerit ad aliū eiuſdē gn̄is nume
rū cōparatus:nulla cū eo cōmuni menſura coniun-
gitur:nec habebūt ptes equocas vt ſūt.9.ad.25.nul
la hos communis numeroꝝ menſura metitur:ni-
ſi forte vnitas que omnium nūeroꝝ menſura cōmūis
ē.Et hi quidē non hn̄t equocas partes.Nam que in.
9.tertia eſt:in.25.non eſt:⁊ que in.25.quinta eſt ī no
uenario non eſt.Ergo hi per naturam vtriqꝫ ſecundi
⁊ compoſiti ſūt comparati vero ad ſeinuicem primi ī
cōpoſitiqꝫ reddūť:qđ vtroſqꝫ nulla alia menſura me
titur niſi vnitas que ab vtriſqꝫ denominata eſt. Naʒ
ī nouenario nona eſt:in.25.vigeſimaquinta.

¶De primi ⁊ incōpoſiti:⁊ ſecūdi ⁊ cōpoſiti:⁊ ad ſe q-
dem ſecūdi ⁊ cōpoſiti ad alterutrum vero primi ⁊ in
cōpoſiti procreatione. Capi. xvii.

Generatio aūt ipſorum atqꝫ ortus huiuſmo-
di inueſtigatione colligiť.quam.ſ. Eratoſte
nes cribrum nominabat:qđ cūctis impari-
bus ī medio collocatis per eam quā traditu
ri ſum⁹ artē:q primi:q ve ſecundi quiqꝫ ter-
tij generis videanť eſſe diſtinguitur.Diſponāť enim
a ternario nūero cūcti in ordinē impares: ī quālibet
longiſſimā porrectionē.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.
25.27.29.31.33.35.37.39.41.43.45.47.49.His
igitur ita diſpoſitis conſiderandum:primus numer⁹
quē eoꝝ qui ſunt in ordīe poſiti primū metiri poſſit.ħ
duob⁹ preteritis illū qui poſt eos eſt poſit⁹ mox meti
tur.Et ſi poſt eundem ipſum quē mēſus eſt:alii duo
trāſmiſſi ſunt:illū qui poſt duos eſt rurſus metitur.
Et in eodem mō ſi duos quis reliquerit:poſt eos q
eſt a p̄io numero metiendus eſt.Eodēqꝫ mō relictꝭ
ſemꝑ duob⁹ a primo in infinitū pergentes metiěťur
Sed id non vulgo neqꝫ confuſe.Nam prim⁹ numer⁹
illū qui eſt poſt duos ſecundū ſe locatos ꝑ ſuā quāti-
tatē metitur.Ternarius enī nūerus tertio.9.metiť.
Si autem poſt nouenarium duos reliqro:qui mihi
poſt illos ſcurrerit:a p̄io metiendus ;eſt per ſecundi
imparis quantitatē:ideſt per quinarium.Nā ſi poſt.
9. duos relinquam ideſt.11.⁊.13 .ternariuſ nūer⁹.15.
metietur per ſecundi numeri quantitatem: ideſt per
quinarii

/4v./

Por eso está claro que este número se ha creado a partir de los anteriores, puesto que mantiene sus propiedades.

Sobre el número impar y su división.

Capítulo XIII.

El número impar se distingue del par por naturaleza y sustancia. Ciertamente aquél se puede separar en dos partes iguales, pero éste no puede porque se lo impide el obstáculo de la unidad. Tiene de manera semejante tres subdivisiones, de las cuales una parte es el número que se llama primo y no compuesto; la segunda es el secundario compuesto y la tercera es la formada por una media de estas dos. Por parentesco de uno y otro arrastra características de manera natural, porque es ciertamente por sí secundario y compuesto, pero comparado con otros resulta primo y no compuesto.

Sobre el número primo y no compuesto.

Capítulo XIIII.

El número primo y no compuesto es aquél que no tiene otra división que la que recibe la denominación de la cantidad del número, y esa parte es la unidad. Sea la serie 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. En cada uno de éstos no se encontrará ninguna otra parte que no reciba la misma denominación que ellos mismos y la unidad, como se ha dicho. Pues en tres hay una sola parte, esto es, la tercera parte, que se llama así por el número tres y la unidad es su tercera parte. De igual modo, del cinco hay una sola quinta parte que es la unidad y lo mismo se advertirá siguiendo con cada una de ellas. Pero se llama primo y no compuesto porque no lo mide ningún otro número, excepto la unidad, que es madre de todos. Pues al tres no lo numera el dos, por razón de que si comparas dos solo con tres, son menos. Pero si multiplicas dos por dos, crece más que tres. Pero un número mide a un número cada vez que, como el uno, el dos , el tres o cualquier número se compara con un número y su cantidad ni menguada ni acrecida llega al término del número comparado, como si comparas 2 con 6; el número dos mide al seis en tres. Luego a los primos y no compuestos no los mide ningún número excepto la unidad sola, porque no están compuestos de ningún otro número, sino sólo se generan a partir de unidades sumadas entre sí y multiplicadas. Pues uno tres veces forma 3 y uno cinco veces, cinco y uno siete veces, han hecho siete. Y otros que hemos descrito antes se generan de esta manera. Pero éstos multiplicados por otros de su misma clase hacen como primarios, otros números y a éstos les corresponde una sustancia y un valor primarios. Encontrarás en todos los producidos a partir de ellos como por así decir ciertos elementos, a saber, que están formados por generación sencilla y no compuesta, y en ellos se resuelven todos los números creados así. Pero ellos mismos no se generan a partir de otros, ni se reducen a otros.

Del número secundario y compuesto.

Capítulo XV.

El número secundario y compuesto es ciertamente impar porque se ha formado por la propiedad del impar, pero no conserva en sí ninguna sustancia principal, y está compuesto de otros números. Tiene partes que se llaman según su nombre y con otra denominación ajena, pero en éstos siempre encontrarás la unidad como la parte sola que se llama con un nombre derivado del suyo, en cambio, derivados del nombre de otro número, una o cuantas se quiera, según los números que fueran, es decir, los números con los cuales compuestos se crea aquél. Por ejemplo, son éstos el 9, 15, 21, 25, 27, 33, 39. Luego cada uno de éstos tienen unas partes propias llamadas según ellos, esto es, la unidad respecto a cada uno, como de nueve es una novena parte, de 15 una decimoquinta es la misma unidad, y en los otros que hemos escrito antes lo mismo ocurre. También tienen una parte nombrada con otra denominación, como 9 una tercera parte, esto es, tres, y 15 una tercera parte, esto es, 5, y una quinta, es decir, 3. Pero para 21, el tercio, esto es, 7, la séptima 3, y en todos los demás la misma secuencia. Sin embargo, este número se llama secundario porque no lo mide la sola unidad, sino también otro número, a saber, aquél al que está unido. Y no tienen en sí ninguna característica inteligible que los distinga como principios, pues se genera a partir de otros números, 9 a partir de tres, quince a partir de tres y de 5, y 21 a partir de 3 y de 7, y los demás del mismo modo. Se llama compuesto porque puede descomponerse en esos mismos números de los que se dice que es compuesto, a saber, aquellos que miden el número compuesto. No es simple ninguna cosa que pueda disolverse, sino que por necesidad está compuesta de otras cosas.

Del número que es por sí secundario y compuesto pero respecto a otro, primo y no compuesto.

Capítulo XVI.

Estas condiciones son contrapuestas, es decir, primo y no compuesto frente a secundario y compuesto, distintos en varias características, pero se considera otro intermedio, y éste ciertamente es compuesto y secundario, recibiendo la medida de otro número y por eso admitiendo otra parte de distinta denominación. Pero cuando se compara con otro número del mismo género, éste no se une con ninguna medida común con él, y no tendrá partes del mismo nombre. Por ejemplo 9 respecto a 25, no se unen con ninguna medida común, salvo si se considera la unidad como medida común de todos los números. Y estos no tienen partes del mismo nombre. Pues en 9 hay una tercera, que en 25 no hay; y en 25 hay una quinta, que no hay en nueve. Luego éstos son por naturaleza secundarios y compuestos, pero comparados entre sí resultan primos y no compuestos. Y a éstos no los mide ninguna otra medida que la unidad, que recibe una denominación según cada uno: para nueve es la novena parte y en 25, la vigesimoquinta.

De la generación del número primo y no compuesto, del secundario y compuesto, y del que en sí es secundario y compuesto pero respecto de otro, es primo y no compuesto.

Capítulo XVII.

Ahora bien, la generación de éstos y por la investigación de la génesis de éste, se deduce la que llamaba Eratóstenes criba, porque colocados todos los pares en el interior por medio de un método que vamos a explicar se distinguen cuáles parecen ser de la primera clase, cuáles de la segunda y cuáles de la tercera. En efecto, dispónganse desde el número tres todos los impares en serie, en una progresión todo lo larga que se quiera: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49. Entonces, así dispuestos, hay que estudiarlos: el número primo como aquél de los que están colocados en la serie puede ser medido en primer lugar, y dejando dos, es aquél que detrás de ellos puede ser medido después. Aunque a continuación de ése que se ha medido se han pasado dos, se mide de nuevo aquél que está tras los dos. Y de este modo, si alguien deja dos, detrás de ellos hay que medir a partir del número primero, y de esa manera, saltándose siempre dos, se mide desde el primero hasta el infinito. Pero esto no de modo nada vulgar y ni desordenado. Así el número primero, aquél que está después de los dos colocados detrás de él, se mide según su cantidad. Pues el número tres se mide como tercio de 9. En cambio, si después de nueve dejo los dos que me encuentro detrás de ellos, hay que medirlos desde el primero, esto es, por el segundo de cantidad impar, es decir, por el cinco. Efectivamente, si tras el nueve dejo dos, esto es, 11 y 13, el 15 se mide por el tres, por la cantidad del segundo número, esto es, quinarij quoniam ternarius.15.quinquiēs metitur. Rurſus ſi a quindenario incboans duos intermiſero qui poſterioꝛ poſitus eſt:eius pꝛimus numerus menſura eſt per tertij imparis pluralitatem. Nam ſi poſt.15.intermiſero.17.⁊.19.incurrit.21. quem ternari⁹ numerus ſecundum ſeptenariam metitur.21.enī numeri ternarius ſeptima pars eſt. Atq; boc in infinitum faciens:reperio primum numerum ſi binos intermiſero omnes ſequentes poſt ſe metiri ſecundum quantitatem poſitoꝛum oꝛdine imparium numeroꝝ Si vero quinarius numerus qui.in ſecundo loco eſt conſtitutus:velit quis cuius pꝛima ac deinceps ſit mē ſura inuenire:tranſmiſſis.4. imparibus quintus ei quem metiri poſſit.occurrit. Intermittantur enim.4.impares ideſt.7.⁊.9.⁊.1.⁊.13.poſt bos eſt quintus decimus:quem quinarius metitur:ſecundum pꝛimi ſcilicet quantitatem:ideſt ternarij.quinq; enī.15.tertio metitur. Ac deinceps ſi quattuoꝛ intermittat eum qui poſt illos locatus eſt:ſecundus ideſt quinarius ſui quantitate metitur. Nā poſt quindecim intermiſſis.17.⁊.19.⁊.21.⁊.23.poſt eos.25.repio:quos quinarius ſcilicet numerus ſua pluralitate metitur. Quinquies enim quinario multiplicato. 25. ſuccreſcunt. Si vero poſt bunc quilibet.4.intermittat:eadem oꝛdinis ſeruata conſtantia:qui eos ſequitur ſecundum tertij.i.ſeptenarij numeri ſummam a quinario metietur. Atq; bec eſt infinita pꝛoceſſio. Si vero tertius numerus quem metiri poſſit exquiritur: ſex ī medio relinquentur:⁊ quem ſeptimuȝ oꝛdo monſtrauerit:bic per pꝛimi numeri.i.ternarij quantitatē metiendus eſt. Et poſt illum ſex alijs interpoſitis: quem poſt eos numeri ſeries dabit:per quinarium.i.per ſecundum tertij eum menſura percurret. Si vero alioſ rurſus ſex in medio quis relinquat:ille qui ſequitur ꝑ ſeptenarium numerum ab eodem ſeptenario metiendus eſt:ideſt per tertij quantitatem. Atq; bic vſq; in extremum ratus oꝛdo pꝛogreditur. Suſcipient ergo metiendi viciſſitudinem:quemadmodum ſunt in oꝛdinem naturaliter impares conſtituti. Metientur autē ſi per pares numeros a binario incboantes poſitos inter ſe impares rata intermiſſione tranſiliant:vt pꝛimus duos:ſecundus.4.tertius.6.quartus.8.quint⁹.10. Uel ſi locos ſuos conduplicent ⁊ ſecundum duplicationem terminos intermittant vt ternarius qui pꝛimus eſt numerus ⁊ vnus.(Omniſq; enim pꝛim⁹ vn⁹ eſt)bis locum ſuum multiplicet:faciatq; bis vnum. Qui cum duo ſint.pꝛimus duos medioſ tranſeat.rurſus ſecundus ideſt quinarius:ſi locum ſuum duplicet.4.explicabit:bic quoq;.4.intermittat. Item ſi ſeptenarius qui tertius eſt locum ſuum duplicet: ſex creabit. Bis enim.3.ſenarium iungunt.bic ergo in oꝛdinem ſex relinquat. Quartus quoq; ſi locum ſuum duplicet.8.ſuccreſcent.ille quoq;. 8. tranſiliat.atq; boc quidem ceteris perſpiciendum. Modum autem menſionis ſecundum oꝛdinem collocatoꝛum ipſa ſeries dabit. Nam pꝛimus pꝛimum quem numerat.ſecundum pꝛimum numerat:ideſt ſecundum ſe.⁊ ſecundum pꝛimus quem numerat:per ſecundum numerat.⁊ tertiū per tertium ⁊ quartum item per quartum. Cum autem ſecundus menſionem ſuſceperit pꝛimum quē numerat ſecundum pꝛimum metitur.ſecundū vero quē numerat per ſe.ideſt per ſecundum ⁊ tertium per tertium.⁊ in ceteris eadem ſimilitudine menſura conſtabit. Alios ergo ſi reſpicias:vel qui alios menſi ſunt:vel qui ipſi ab alijs metiuntur: inuenies omnium ſimul communem menſuram eſſe non poſſe. neq; vt omnes quemquam alium ſimul numerent. quoſdam autem ex bis ab alio poſſe metiri ita vt ab vno tantum nūerentur.alios vero vt etiam a pluribus.quoſdam autē vt pꝛeter vnitatem eoꝛum nulla menſura ſit. Qui ergo nullam menſuram pꝛeter vnitatem recipiunt:bos pꝛimos ⁊ incompoſitos iudicamus.qui vero aliquam menſuram pꝛeter vnitatem vel alienigene partis vocabulum ſoꝛtiuntur:eos pronunciemus ſecundos atq; compoſitos. Tertium vero illud genus per ſe ſecūdi ⁊ compoſiti:pꝛimi vero ⁊ incompoſiti ad alterutrum comparari:bac inquiſitoꝛ ratione reperiet. Si enim quoſlibet illos numeros ſecundum ſuam in ſemetipſos multiplices quantitatem: qui pꝛocreantur ad alterutrum comparati:nulla menſure communione iunguntur. Tres enim ⁊.5.ſi multiplices:tres tertio.9.faciunt:⁊ quinquies.5.reddent.25. His igitur nulla eſt cognatio communis menſure. Rurſus.5.7. quos pꝛocreant ſi compares:bi quoq; incommenſurabiles erunt. Quinquies enim quinq; vt dictum eſt eſt.25.ſepties.7.faciunt.49. Quoꝛum menſura nulla communis eſt:niſi foꝛte omnium boꝛum pꝛocreatrix ⁊ mater vnitas.

De inuentione eoꝛum numeroꝛum qui ad ſe ſecundi ⁊ compoſiti ſunt:ad alios vero relati pꝛimi ⁊ incōpoſiti. Capitulum.xviii.

QUa vero ratione tales numeros inuenire poſſimus:ſi quis nobis eoſdem pꝛoponat ⁊ imperet agnoſcere vtrum aliqua menſura commenſurabiles ſint:an certe ſola vnitas vtroſq; metiatur:reperiendi ars talis eſt. Datis enim duobus numeris inequalibus:auferre dē maioꝛe minoꝛē opoꝛtebit.⁊ qui relictus fuerit: ſi maioꝛ eſt:auferre ex eo rurſus minoꝛeȝ:ſi vero mīoꝛ fuerit eum ex reliquo maioꝛe detrabere. Atq; boc eo vſq; faciendum:quoad vnitas vltima vicem retractionis impediat:aut aliquis numerus impar neceſſario ſi vtriq; numeri impares pꝛoponantur. Sed eum ꝗ relinquitur numerum ſibiipſi videbis equalem. Ergo ſi in vnum incurrat viciſſim iſta ſubtractio: pꝛimi contra ſe neceſſario numeri dicentur:⁊ nulla alia mēſura niſi ſola vnitate coniuncti. Si vero ad aliquē numerum vt ſuperius dictum eſt:finis diminutionis incurrerit:erit eus numerus qui metiatur vtraſq; ſummas.atq; eundem ipſum qui remāſerit. dicem⁹ vtrorumq; communem eſſe menſuram. Age enim duos numeroſ propoſitos babeam⁹:quos iubeamur agnoſcere:an eos aliqua menſura communis metiatur Atq; bi ſint.9.ſcȝ:⁊.29.boc igitur faciemus modo reciꝓcam diminutionem. Auferamus de maioꝛe minoꝛem:boc eſt:de.29.nouenarium relinquentur.20. Ex bis ergo.20.rurſus minoꝛē detrabamus.ideſt.9.⁊ relinquētur.11. Ex bis rurſus detrabo.9.relicti ſūt 2. Quos ſi detrabo nouenario:⁊ relicti ſūt.7. Quod ſi duo rurſus ſeptenario dempſeriȝ:ſuperſunt.5.atq; ex bis alios duos:tres rurſum exuberant. quos alio binario diminutos ſola vnitas ſuperſtes egredit.rurſus ſi ex duob⁹ vnū auferam:ī vno termin⁹ detractionis berebit:quem duoꝛum illoꝝ nūeroꝝ ideſt. 9.⁊.29.ſolum neq; alium conſtat eſſe menſuram.bos ergo contra ſe pꝛimos vocabimus. Sed ſint alij numeri nobis eadem conditione pꝛopoſiti.i.21.⁊.9.vt ꝗles bi ſint inueſtigentur cum ſibimet fuerint inuiceȝ

- ois· primus
est vnus nūs

/5r./

por el cinco, porque el tres mide al 15 cinco veces. A su vez, si empezando por el quince, dejo dos en medio, el primer número es medida del que está situado en el lugar siguiente, por la pluralidad del tercer impar. En efecto, si después del 15 dejo el 17 y el 19, llega el 21, que el tres mide según el número 7; bien, pues el tres es su séptima parte. Y haciendo esto hasta el infinito, me encuentro con que el primer número mide a todos los que le siguen, si dejo dos entre medias, según la cantidad de los números impares colocados en serie.

Pero en cuanto al número cinco, que está situado en segundo lugar, si alguien quiere encontrar que él es la primera medida y sucesiva, pasados cuatro impares, se le presenta el quinto, que se puede medir con él. Pues si se dejan pasar cuatro impares, esto es, 7, 9, 11 y 13, después viene el quince, que se mide con el número cinco, es decir, según la cantidad del primero, esto es, el número tres, porque 5 mide a 15, por el número tres. Y en adelante, si se dejan pasar cuatro, el que está colocado detrás de ellos, se mide por cinco, es decir, por el segundo, según su propia cantidad. Pues detrás del quince, se dejan pasar 17, 19, 21, 23 y después de ellos encuentro el 25; a éstos, el número cinco mide con su pluralidad. En efecto, cinco multiplicado por cinco crecen hasta 25. Pero si cualquiera salta detrás de éste, cuatro de la misma serie, manteniendo el orden, el número que sigue, se medirá por el número cinco según el valor del tercero, es decir, del número siete. Y ésta es una sucesión infinita.

Pero si se pregunta a qué número puede medir el número tres, se dejan seis en medio y a éste lo puede mostrar el situado en séptimo lugar; éste ha de ser medido por medio de la cantidad del primer número, el tres. Y detrás de él, dejando en medio otros seis, el número siguiente detrás de ellos será medido según el número 7 por el propio número 7, es decir, según la cantidad del tercero. Y esta serie avanza hasta el extremo.

Luego aceptan diversidad de medidas los impares situados según su orden natural. El número de impares que se han de saltar entre los dos números considerados depende de la serie de los pares desde el dos. De manera que para el primero se saltan dos, para el segundo, cuatro, para el tercero, seis, para el cuarto, ocho, para el quinto, diez. Si el lugar ocupado por el número en la serie es doble, se saltan los términos según esa duplicación. Para el tres, que es el primer número (porque en una serie el número uno es el que está antes que todos), multiplica por dos su lugar, y se hace dos veces uno, que como son dos, se pasará para el primer número, dos intermedios. A su vez el segundo, es decir, el cinco, si duplica su lugar, llegará al cuatro, éste también deja pasar cuatro términos. Igualmente, si el siete, que tiene el tercer lugar, si duplica su lugar, llegará al sexto. Pues dos por tres suman seis. Luego, éste deja seis en la serie. El cuarto también, si duplica su lugar, llega al octavo. Él salta también ocho y esto hay que observarlo en los demás.

En cambio, la cantidad de la medida será dada por la serie, según el orden en el que están colocados los números. Pues el primero numera al primero de la serie, según el primero al que él numera, esto es, según él mismo; el segundo que mide al primero, le mide según el segundo de la serie; el tercero, según el tercero, el cuarto, igualmente según el cuarto. Pero, si es el segundo el que mide, el primer número que mide, es según el primero de la serie que él mide; y el segundo que mide, lo mide según él, esto es, por el segundo; el tercero, según el tercero; y los demás serán medidos de la manera anterior. En consecuencia, si observas otros, o los que han medido otros, o los que son medidos por otros, hallarás que no puede haber al mismo tiempo una medida común, y que tampoco todos numeran al mismo tiempo a otro número; en cambio, algunos de éstos se les puede medir por otro, de manera que por naturaleza son medidos solamente por ese número, o bien otros pueden ser medidos por muchos, pero que algunos no tienen otra medida que la unidad.

Luego, juzgamos primos y no compuestos a los que no admiten otra medida que la unidad; llamamos secundarios y compuestos a los que admiten otra además de la unidad o reciben el nombre de una parte de otro número distinto de sí. En cuanto al tercer género, del que es por sí secundario y no compuesto, pero que se puede comparar con otro, primo y no compuesto, el observador lo advertirá por este criterio. Si se multiplica cualquiera de estos números por su cantidad, los que se generan , comparados con otro no están unidos ninguna medida común, pues si multiplicas tres y 5, tres por tres hacen nueve y cinco por cinco, veinticinco; por tanto, éstos no tienen ningún parentesco de medida común.

A su vez, si comparas a los que generan cinco y siete, éstos tampoco tendrán medida común, pues cinco por cinco es veinticinco y 7 por siete hacen 49; éstos no tienen medida común, a menos que sea la unidad, generadora y madre de todos éstos.

Sobre la manera de hallar los números que en sí son secundarios y compuestos, pero respecto a otros, son primos y no compuestos.

Capítulo XVIII.

Por qué método podemos hallar tales números, si alguien nos propone y ordena probar si son mensurables con alguna medida o si la unidad es la única que los mide, el procedimiento para hallarlo es el siguiente. Dados dos números distintos, hay que restar el menor del mayor y a lo que reste, si es mayor, volverle a restar el menor, pero si es menor, restárselo al otro, que queda mayor, y esto hay que hacerlo hasta que la unidad impida seguir restando, o algún número impar de modo necesario, si los dos números propuestos son impares. Pero verás que el número que queda es igual a sí mismo, por lo que si se llega a esa sustracción, se llamarán necesariamente números primos entre sí y no relacionados por ninguna otra medida que la sola unidad.

Pero si es un número impar, como se ha dicho antes, al final de la sustracción, habrá un número que mida los dos números, y diremos que éste mismo número que ha quedado es la medida común de los otros dos. Sea que tenemos dos números propuestos de los que nos ordenan averiguar si alguna medida común los mide. Son 9 y 29. Así que les hacemos la sustracción de restar el menor del mayor, esto es, de 29 menos nueve quedan veinte, y de nuevo le restamos 9, y quedan 11, y otra vez le restamos nueve, y quedan 2, si resto 2 de nueve, quedan 7, y si de nuevo le restamos dos, quedan 5 y de éste dos otra vez, y quedan tres, que si se le restan de nuevo dos, sólo sale la unidad, y a su vez, si de dos resto uno, la sustracción se detiene en el confín del uno, que se ve que es la única medida común de aquellos dos números, esto es, del 9 y del 29. Por tanto, llamamos a éstos primos entre sí.

Pero sean también otros números propuestos por el mismo criterio, 21 y 9 y se nos dice que se investiguen éstos, comparándolos entre sí.

comparati. Rurſus aufero de maiore minoris numeri quantitatem. ideſt. 9. de. 21. relinquentur. 12. Ex his rurſus demo. 9. ſuperſunt. 3. Qui ſi ex nouenario retrahabantur: ſenarius relinquetur. Quibus item ſi quis ternarium demat. 3. relinquentur. de quibus tres detrahi nequeunt. atqꝫ hic eſt ſibi ipſi equalis. Nam. 3. qui detrahebantur vſqꝫ ad ternarium numerum peruenerunt. a quo quoniam equales ſunt: detrahi minuiqꝫ non poterunt. Hos igitur commenſurabiles pronunciabimus ⁊ eſt eorum qui eſt reliquus ternarius menſura communis.

Alia partitio paris ſecũdum perfectos imperfectos ⁊ vltra quam perfectos.

Capitulum. xix

At de imparibus numeris quantum introductionis permittebat breuitas expeditum eſt. Rurſus numerorum parium ſic fit ſecunda diuiſio. Alii enim eorum ſunt ſuperflui. alii diminuti ſecundum vtraſqꝫ habitudines inequalitatꝫ. Omnis quippe inequalitas: aut in maioribus aut in minoribus conſideratur. Illi. n. immoderata quodammodo plenitudine proprii corporis modum partium ſuarum numeroſitate precedunt. Illos autez veluti paupertate inopes oppreſſoſqꝫ quadam nature ſue inopia minor quam ipſi ſunt partium ſumma componit. atqꝫ illi quidem quorum partes vltra quam ſatis eſt ſeſe porrexerunt. ſuperflui nominantur. vt ſunt. 12. vel 24. Hi enim ſuis partibus comparati maiorem partium ſummam toto corpore ſortiuntur. Eſt enim duo denarii medietas. 6. pars tertia. 4. pars quarta. 3. pars ſexta. 2. pars duodecia. 1. eſt Omniſqꝫ hic cumulus redũdat. in. 16. ⁊ totius corporis ſui multitudinem vincunt Rurſus. 24. numeri medietas eſt. 12. tertia. 8. quarta. 6. ſexta. 4. octaua tria: duodecima. 2. viceſimaquarta vnum qui omnes triginta ⁊ ſex rependunt. In qua re manifeſtum eſt quod ſumma partium maior eſt: ⁊ ſupra proprium corpus exundat. Atqꝫ hic quidem quoniam compoſite partes totius ſummam numeri vincunt: ſuperfluus appellatur. Diminutus vero ille cuius eodem modo compoſite partes totiꝰ termini multitudine ſuperantur. vt. 8. vel. 6. habet eniꝫ octonarius partem mediam: ideſt. 4. habet ⁊ quartam ideſt duo. habet ⁊ octauam ideſt vnum que cuncte in vnum redacte. 7. colligunt: minorẽ ſcilicet ſummam toto corpore concludentes. Rurſus. 14. habẽt medietatem ideſt ſeptenarium. habent ſeptimã: ideſt. 2. habent quartamdecimam ideſt. 1. que in vnuꝫ ſi collecte ſint: denarii numeri ſumma concreſcit: toto ſcilicet termino minor: Atqꝫ hi quidem hoc modo ſunt: vt prior ille quem ſue partes ſuperant talis videatur: tamqꝫ ſi quis multis ſuper naturam manibus natus vt centimanus gigas: vel triplici coniunctus corpore: vt gerion tergeminus vel quicquid vnqꝫ monſtruoſum natura in partium multiplicatione ſurripuit. Ille vero vt ſi naturaliter quadam neceſſaria parte detracta. aut minus oculo naſceretur: vt cyclopee frontis dedecus fuit: vel quo alio curtatus mẽbro: naturale totius ſue plenitudinis diſpendium ſortiretur. Inter hos autem velut inter equales intemperantias medii temperamentum limitis ſortitus eſt ille numerus qui perfectus dicitur: virtutis ſcilicet emulator qui nec ſuperuacua progreſſione porrigitur: nec contracta rurſus diminutione remittitur ſꝫ medietatis obtinens terminum ſuis equus partibus nec craſſatur abundantia: nec eget inopia. vt ſex vel. 28. Namqꝫ ſenarius habet partem mediam ideſt. 3. ⁊ tertiam ideſt. 2. ⁊ ſextam ideſt. 1. que in vnam ſummam ſi redacte ſint par totum numeri corpus ſuis partibus inuenitur. 28. vero habet medietatẽ. 14. ⁊ ſeptimam. 4. nec caret quarta ideſt. 7. poſſidet quartamdecimam. 2. ⁊ Reperies in eo viceſimam octauam. 1. que in vnum redacte totum partibus corpus equabunt. 28. enim iuncte partes efficient.

De generatione numeri perfecti.

Capitulum. xx.

ESt autem in his quoqꝫ magna ſimilitudo virtutis ⁊ vitij. Perfectos enim numeros raro iuẽies: eoſqꝫ facile numerabiles: quippe qui pauci ſunt: ⁊ nimis conſtanti ordine procreati: at vero ſuperfluos ac diminutoſ longe multos infinitoſqꝫ reperies: nec vllis ordinibꝰ paſſim inordinateqꝫ diſpoſitos: ⁊ a nullo certo fine generatos. Sunt autem perfecti numeri intra denarium numerum. 6. intra centenarium. 28. intra millenarium numerum. 496. intra decem milia. 8128. Et ſemper hi numeri duobus paribus terminantur. 6. ⁊. 8. ⁊ ſemper alternatim in hos numeros ſummarum fine perueniunt. Nam ⁊ primum ſex deinde. 28. Poſt hos. 496. idem ſenarius qui primus. poſt quẽ 8128. idem octenarius qui ſecundus. Generatio autẽ procreatioqꝫ eorum eſt fixa firmaqꝫ nec quo alio modo fieri poſſint: nec vt ſi hoc modo fiant aliud quiddam vllo modo valeat procreari: Diſpoſitos eñi ab vno omnes pariter pares numeros in ordinem quouſqꝫ volueris: primo ſecundum aggregabis: ⁊ ſi primus numerus incõpoſitus ex illa coaceruatione factꝰ ſit totam ſummã in illũ multiplicabis quẽ poſterius aggreuaueras. Si vero coaceruatione facta primus ⁊ incompoſitus non inuentus fuerit ſed compoſitus ⁊ ſecundus hunc tranſgredere atqꝫ alium qui ſequitur aggregabis. Si vero nec dum fuerint primus ⁊ incompoſitus: alium rurſus adiunge ⁊ vide quid fiat Quod ſi primum incompoſitumqꝫ reperies: tunc in vltime multitudinem ſumme coaceruationem multiplicabis. Diſponantur enim omnes pariter pares numeri hoc modo. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. facies ergo ita: pones. 1. eiqꝫ aggregabis. 2. Tunc reſpicies ex hac aggregatione qui numerus factus ſit: ſunt. 3. qui ſcilicet primus ⁊ incompoſitus eſt: ⁊ poſt vnitatem vltimum binarium numerum aggregaueras. Si igitur ternarium ideſt qui ex coaceruatione collectus eſt per binarium multiplices qui eſt vltimus aggregatus: perfectus ſine vlla dubitatione naſcetur. Bis enim. 3. 6. faciunt. qui habent vnam quidem a ſe denominatã partem ideſt ſextam tres vero medietatem ſm dualitatem. at vero duo ſm coaceruationem ideſt ſm tertiariuꝫ: quoniã coaceruati tres multiplicati ſunt. Uigintiocto autem eodem modo naſcũtur. Si eñi ſuper vnuꝫ ⁊ duo qui ſunt tres addas ſequentẽ pariter parẽ ideſt. 4. ſeptenariam ſũmam facies ſed vltimũ nũerũ quaternariũ cõſequẽter adiũxeras: per hũc igiẽ ſi illam coaceruationẽ multiplicaueris: pfectus numerus procreatur. Septies enim 4. 28. ſunt qui eſt ſuis partibus par: habens vnũ a ſe denominatum

/5v./

De nuevo resto del mayor la cantidad del número menor, esto es, de 21, 9 y quedan 12, de éstos quito nueve y quedan 3, que si se le restan a 9, quedará 6, del que si se restan 3 quedan 3 y no se puede restar de 3, pues éste es igual a sí. Pues los tres que se restaban llegaron hasta el número tres, del que no se pudieron restar ni sustraer porque es igual. Por tanto, consideramos a éstos mensurables y que la medida común a los dos, es el tres que ha quedado.

Otra división del número par, según perfectos, imperfectos y más que perfectos.

Capítulo XIX.

Se ha explicado sobre los números impares cuanto la brevedad de la introducción permitía. Por su parte, los números pares tienen una segunda división, pues unos son abundantes, otros deficientes según los dos aspectos de la desigualdad. En efecto, se considera toda desigualdad o en mayores o en menores. Aquéllos destacan por la inmoderada plenitud de su cuerpo, por la pluralidad de sus partes. Pero una suma de partes menor que ellos compone a los otros, a los que les ha correspondido tal indigencia, que están como oprimidos por su pobreza, por el defecto de su naturaleza.

Se llama abundantes a aquellos que obtuvieron partes por encima de lo que les resultaba suficiente, como son el 12 y el 24. Pues éstos, comparados en sus partes, han recibido mayor suma de las partes que su cuerpo en total, ya que la media es 6, la tercera parte, 4, la cuarta, el tres, la sexta, dos y la duodécima uno. Y todo este cúmulo redunda en 16 que sobrepasa la multiplicidad de su cuerpo. A su vez, la media del número 24 es 12, la tercera parte, 8, la cuarta, 6, la sexta, 4, la octava 3 y la duodécima 2 y la vigesimocuarta, uno, que dan un balance de treinta y seis. En esto se ve claramenteque la suma de las partes es mayor y desborda por encima de su propio cuerpo. Y éste, porque las partes compuestas superan a la suma del número, se llama abundante.

Pero el deficiente es aquél cuya suma de las partes, operada del mismo modo, es superada por la pluralidad del término en total. Por ejemplo, 8 y 6 , pues ocho tiene por media 4 y tiene una cuarta parte dos y una octava que es uno; todas sumadas dan 7, esto es, un número menor que su cuerpo entero. A su vez, 14 tiene una media, esto es, 7, y una séptima parte, que es 2 y una decimocuarta, que es uno, con lo que si se suman se llega a diez, es decir, a una cifra menor que el término en total.

Y éstos ciertamente son de esta manera: aquel anterior, al cual superan sus partes, parece como si alguien hubiera nacido con muchas manos, más de las que le eran naturales, como un gigante de cien manos, o con tres cuerpos, tal que Gerión o cualquier monstruo que se salió de naturaleza por multiplicación de sus partes. Pero si se le sustrae una parte necesaria por naturaleza, si se nace sin un ojo, como fue la fealdad del Cíclope o sin algún miembro, se entiende como un defecto natural de su plenitud total. Pero entre éstos como entre desigualdades semejantes, se ha establecido la moderación del término medio, aquel número que se llama perfecto, es decir, emulador de la virtud que no avanza en una progresión supérflua ni retrocede con una mengua forzada, obteniendo un término de su media igual a sus partes; ni engorda por abundancia ni padece necesidad, como el 6 o el 28.

Pues el 6 tiene una parte media, esto es, el 3 y una tercera, esto es, el dos y una sexta, esto es, el uno, que si se suman se ve que el cuerpo del número llega a igualar a sus partes. Veintiocho tiene por media 14, una séptima parte que es 4 y una cuarta que es 7, y una decimocuarta que es 2, y encontrarás en él una vigesimoctava que es uno; sumadas igualarán al cuerpo total con sus partes, pues las partes sumadas harán 28.

Sobre la generación del número perfecto.

Capítulo XX.

Hay en éstos también una gran similitud con la virtud y el vicio. Pues rara vez encontrarás números perfectos y éstos, fácilmente numerables, pues son pocos y se generan en un orden muy constante, pero hallarás muchos más e infinitos abundantes y deficientes, dispuestos por todas partes sin orden ni formando serie y sin límite a su generación. Los números perfectos son: dentro de la decena, 6, dentro de la centena, 28, dentro del millar, 496, dentro de la decena de millar 8128. Y siempre estos números terminan en dos pares, seis y ocho, y siempre llegan alternativamente en el final de estos términos a estos números. Pues en primer lugar el 6, después, 28, detrás de éstos, 496, terminado en seis como el primero, después, 8128 termina en 8 como el segundo. Pero la generación y creación de éstos es fija y firme y no se puede hacer de otro modo, y si se hace de esta manera, no se puede crear ninguno de otro modo.

Pues, dispuestos todos los números pares paritariamente en serie desde la unidad hasta el límite que se quiera, sumarás el segundo al primero, y si se consigue un número primo y no compuesto, multiplicarás el resultado de la suma por aquél que habías añadido en segundo lugar. Pero si hecha la suma no se encuentra un número primo y no compuesto, sino compuesto y secundario, lo pasarás y añadirás el que le sigue. Y si tampoco resulta primo y no compuesto, añade otro de nuevo y mira qué sale. Si encuentras uno primo y no compuesto, multiplicarás el resultado por la cantidad de la última suma.

Dispónganse todos los números pares paritariamente de este modo 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 y operarás así: pondrás uno y le sumarás 2. Entonces, hallarás de esta suma qué número ha resultado. Son tres, es decir , un número que es primo y no compuesto, y después de la unidad le habías sumado el número dos por último. Por tanto, si se multiplica el tres, esto es, el resultado de la suma, por dos, que es el último que se ha sumado, nacerá sin ninguna duda un número perfecto. Pues 3 por dos hacen seis, que tiene la unidad como parte denominada según su nombre, esto es, sexta, tres, su media y dos su tercera parte. Pero dos denominada según su multiplicador, esto es, tres, porque tres lo ha multiplicado. Veintiocho nace del mismo modo. Pues si además de uno y dos que son tres, añades el siguiente par paritariamente, esto es, 4, harás una suma de siete, pero consiguientemente has añadido como último número el cuatro, luego si multiplicas por éste aquella suma, se crea un número perfecto. Pues siete por cuatro son 28, que es igual a sus partes, y tienen uno como la parte denominatum ipest vigesimumoctauum. medietateꝫ vero s'm binarium. 14. s'm quaternarium. 7. septimā vero s'm septenarium. 4. s'm omnium collectionem quartumdecimum duo: qui vocabulo medietatis opponitur. Ergo cum hi reperti sint. si alios inuenire se ceteris: eadē oportet ratione vt vestiges. Pones eniꝫ vnum licebit: ⁊ post hunc. 2. ⁊. 4. qui in septenarium cumulantur: sed de hoc dudum extitit. 28. perfectus numerus. Huic igitur qui sequitur pariter par idest. 8. continens iungatur accessio: qui prioribus superueniens. 15. restituit. Sed hic primus ⁊ incompositus si est. Habet enim generis alterius partem super illam que est a seipsa denominata: quintamdecimam scilicꝫ vnitatem. Hunc igitur quoniam secundus est compositus preterito: ⁊ adiunge superioribus continentem pariter parem numerum idest. 16. Qui cum. 15. iunctus vnum ac. 30. conficiet. Sed hic primus rursus ⁊ incompositus est. Hunc igitur cum extremi aggregati summa multiplica: vt fiant sedecies. 31. qui. 496. explicant. Hec autem est intra millenariuꝫ numeruꝫ perfectas suis partibꝰ equa numerositas. Igitur prima vnitas virtute atqꝫ potentia non etiaꝫ actu vel re ⁊ ipsa perfecta est. Nam si primam ipsam sumpsero de proposito ordine numerorum: video primaꝫ atqꝫ incompositam: quam si per seipsam multiplico eadem mihi vnitas procreatur. Semel enim vnum solam efficit vnitatem que partibus suis equalis ē potentia solum ceteris etiam actu atqꝫ opere perfectis. Recte igitur vnitas propria virtute perfecta est qđ ⁊ prima est ⁊ incomposita: ⁊ per seipsam multiplicata se se ipsa conseruat. Sed quoniam de ea quantitate q̄ per se sit dictum est: operis sequentiam ad illā que refertur ad aliquid transferamus.

De relata ad aliquid quantitate.
Capitulum. xxi.

Ad aliquid vero quātitatis duplex est prima diuisio. Omne enim aut equale est: aut inequale quicquid alterius comparatione metitur. Et equale quidem est: quod ad aliqđ comparatum neqꝫ minore summa infra est neqꝫ maiore transgreditur: vt denarius denario: vel ternarius ternario vel cubituꝫ cubito: vel pes pedi: ⁊ his similia. Hec autem pars relate ad aliquid quantitatis idest equalitas naturaliter indiuisa est. Nullus enim dicere potest: quod equalitatis hoc quidem tale est illud vero huiusmodi. Omnis enim equalitas vnā seruat in propria moderatione mensuram. Illud etiā quod que ei quantitas comparatur: nō alio vocabulo atqꝫ ipsa cui comparatur edicitur. Nam quemadmodum amicus amico amicus est: vicinusqꝫ vicino: ita dicitur equalis equali. Inequalis vero quātitatis gemina diuisio est. Secatur enim quod inequale est in maius atqꝫ minus que contraria sibimet denominatione funguntur. Namqꝫ maius minore maius est: ⁊ minus maiore minus est: ⁊ vtraqꝫ non eisdem vocabulis quemadmodum s'm equalitatem dictuꝫ est: sed diuersis distantibusqꝫ signata sunt ad modum discentis scilicet vel docentis: vel cedentis vel vapulantis vel quecunqꝫ ad aliquid relata aliter denominatis cōtrarijs comparantur.

De speciebus maioris inequalitatis ⁊ minoris.
Capitulum. xxii.

Maioris vero inequalitatis quinqꝫ partes sunt. Est enim vna que vocatur multiplex alia superparticularis. tertia superpartiens quarta multiplex superparticularis: quinta multiplex superpartiens: His igitur quinqꝫ maioris partibus opposite sunt alie quinqꝫ partes minoris: quemadmodū ipsum maius minori semper opponitur: que minoris species ita singillatim speciebus. v. maioris his que supradicte sunt opponuntur: vt eisdem nominibus nuncupentur sola tantum sub prepositione distantes. Dicitur enim submultiplex: subsuperparticularis: sub superpartiens: multiplex subsuperparticularis: ⁊ multiplex subsuperpartiens.

De multiplici eiusqꝫ speciebus earumqꝫ generationibus Capitulum. xxiii.

Rursus multiplex est prima pars maioris inequalitatis: cunctis alijs antiquior natura qꝫ prestantior: vt paulopost demonstrabimus. Hic autem numerus huiusmodi est: vt comparatus cum altero: illum contra quem comparatus est habeat plus quā semel. Quod primū in naturalis numeri dispositione conuenict. nā qꝫ ad vnū cuncti qui sequuntur: omnium ordine multiplicium sequentias varietatesqꝫ custodiunt. Ad primum enim idest vnitatē. 2. duplus. 3. triplus. 4. quadruplus: atqꝫ ita in ordinem progredientes: omnes texuntur multiplices quantitates. Quod autem dictuꝫ est: plus q̄ꝫ semel: id a binario numero principium capit: ⁊ in infinitum per ternarium quaternariumqꝫ ⁊ ceterorum ordinem sequentiamqꝫ progreditur. Contra hunc vero discriminatus est ille qui vocatur submultiplex: ⁊ hec quoqꝫ prima minoris quantitatis species est. Hic autem numerus huiusmodi est: qui in alterius comparatione productus: plus q̄ꝫ semel maioris nūerat summā: sua. s. quātitate cū eo equaliter inchoās equaliterqꝫ determinās. Idem autē dico numerat quod metitur. Si igitur bis solum maiorē nūerū minor nūerus metiaē: subduploꝫ vocabitur. si vo ter: subtriplus. si quater subq̄druplus: ⁊ fit p hec in infinitū p̄gressio: additaqꝫ eos sp sub p̄positione nominabis: vt vnꝰ duorꝫ subduplus: triū subtriplus. 4. subquadruplus appelleē ⁊ consequenter. Cum aūt naturaliter multiplicitas ⁊ submultiplicitas infinita sit eorum quoqꝫ spēs per proprias generationes in infinita consideratiōe versanē. Si enim positis i naturali constitutiōe numeris singulos p suas consequētias pares eligas: omnium ab vno parium atqꝫ impariuꝫ sese sequentium duplices erunt: ⁊ huius speculatiōis terminꝰ nō deficit. Ponatur enī naturalis numerus hoc modo. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. Horū ergo si p'mū sumas parē. idest. 2. primi duplus erit idest vnitatis. Si vo sequētē parē idest. 4. secundi duplus est: idest duorum. Si vo tertiū parē sumas. idest. 6. tertij nūeri i naturali constitutione duplꝰ ē. i. ternarij. Si vo quartū parem ipsarum idest. 8. quarti numeri idest quaternarij duplus ē. Ideqꝫ i ceteris i infinitū sumētibus sine aliquo impedimēto p̄cedit. Triplices aūt nascuntur: si i eadem dispositiōe naturali duo semp intermittāē: ⁊ qui post duo sunt ad naturalē numerū cōpareē excepto ternario: q vt vnitatis triplus sit solum binarium pretermittit. Post vnū ⁊ duo. 3. sunt qui triplus vniꝰ est. Rursus post. 4. ⁊. 5. sunt. 6. q secūdi nūeri idest duorum

/6r./

denominada como él, esto es, la vigesimoctava, y como media, según el número 2, el 14, y según el número cuatro, una cuarta parte 7 y según el 7, una séptima, contiene el cuatro, por lo que si se hace una reunión de todos, cumo décimocuarta, 2, que corresponde a la mitad.

Luego habiendo encontrado éstos, si buscas encontrar otros, es necesario que investigues con el mismo criterio. Pues podrás poner uno, y después de éste, 2 y 4, que suman siete, pero de esto queda excluido el 28, el número perfecto. Por tanto, el que sigue a éste, par paritariamente, es el 8, que inmediatamente se une como cantidad, que sumada a las anteriores da 15. Pero éste no es primo, es compuesto, pues tiene una parte de otra clase, además de la que recibe una denominación de sí mismo, la decimoquinta, es decir, la unidad. En consecuencia éste, porque es secundario y compuesto, pásalo, y suma a los anteriores el siguiente par paritariamente, esto es, el 16, que con el 15 hacen treinta y uno. Y éste a su vez es primo y no compuesto. Multiplica éste por la suma del último que has sumado, para que hagan 16 por 31, que llegan a 496. Ésta es la pluralidad igualada a sus partes dentro del millar.

Por tanto, la unidad primera es perfecta, por su virtud y potencia, aunque no en acto o en realidad. Pues si sustraigo esta primera de la serie propuesta de números, veo que es primera y no compuesta, y si la multiplico por sí misma, se me genera la misma unidad. Pues uno por uno es una sola unidad igual a sus partes y en potencia sólo a las demás perfectas en acto y en efecto.

La unidad por su propia virtud es bien perfecta así como prima y no compuesta, multiplicada por sí misma, se mantiene. Pero porque hemos tratado de la cantidad que es en sí, pasemos en la secuencia de la obra a aquella que es relativa.

Sobre la cantidad relativa.

Capítulo XXI.

La primera división de la cantidad relativa consiste en dos clases. Pues todo lo que se mide por comparación con otro, o es igual, o es desigual. Y es igual ciertamente lo que comparado con otro ni es menor por defecto, ni mayor, por exceso, como el diez con el diez, o el tres con el tres o el codo con otro codo o el pie con el pie y ejemplos semejantes a éstos.

Sin embargo, esta primera división de la cantidad relativa, esto es, la igualdad es por naturaleza indivisa, pues nadie puede decir que tal igualdad es de tal naturaleza y aquella de esta otra. En efecto, toda igualdad conserva su medida de una sola y misma manera. También la cantidad que se compara con ella, no se llama con otra denominación que esa misma a la que se compara. Pues al igual que un amigo es amigo de su amigo y uno es vecino de otro, así se dice del igual con su igual. Pero la cantidad desigual tienen una división en dos, pues se separa lo que es desigual en más y en menos, que reciben una denominación contraria entre sí. Pues el mayor es mayor respecto al menor y el menor es menor respecto al mayor. Y los dos no con los mismos nombres según se ha dicho de la igualdad, sino que se han señalado con nombres diversos y diferentes, como el del que aprende y el que enseña, o el que da palos y el que los recibe o cualquier cosa que se compare con otra con la que se relaciona de otra manera siendo contrarias sus denominaciones.

Sobre las especies de desigualdad, mayor y menor.

Capítulo XXII.

Hay cinco partes de desigualdad mayor. Pues hay una que se llama múltiplo y otra superparticular, una tercera superpartiente, una cuarta múltiplo superparticular y una quinta múltiplo superpartiente. Por tanto, a éstas cinco partes del mayor se oponen otras cinco partes de la menor, según el mismo mayor se opone siempre al menor. Estas especies de la menor que se oponen tan particularmente a estas especies de la mayor que se han dicho antes, se diferencian únicamente por un solo prefijo según se llaman con esos mismos nombres. Pues se dice submúltiplo, subsuperparticular, subsuperpartiente, múltiplo subsuperparticular y múltiplo subsuperpartiente.

Del múltiplo, de sus especies y de la generación de ellas.

Capítulo XXIII.

De nuevo, el múltiplo es la primera parte de la desigualdad mayor, más antigua y más importante que las demás, según demostraremos un poco más tarde. Ahora bien, este número es de esta manera: comparado con otro contiene a ese otro más de una vez. Esta propiedad se encontrará primero en la serie del número natural, puesto que comparados con la unidad, todos los que siguen hasta el uno, presentan ordenados todos los múltiplos en sucesión y diferenciados. Pues para el primer lugar que es la unidad, el 2 es el doble, el tres, el triple, el 4 el cuádruple y así progresando en serie, se entretejen todas las cantidades múltiples. Sin embargo, se ha dicho "más de una vez". Esto toma su comienzo en el número dos y avanza hacia el infinito por la secuencia del tres, el cuatro, y la serie y secuencia de los demás.

Pero aquél que se llama submúltiplo se distingue y se opone al múltiplo, por ser una especie de la cantidad menor. Este número es como sigue: aquél que en comparación con otro numera la suma del mayor por medio de su propia cantidad, empezando con el mayor de manera igual y terminando de manera igual. Digo en el mismo sentido numera que mide. Por tanto, si el número menor mide al número mayor sólo dos veces, se llamará subdoble, si tres, subtriple, si cuatro, subcuádruple. Y así una progresión hasta el infinito; añadiendo a ellos el prefijo sub- los nombrarás, como uno respecto de dos, se llamará subduplo, de tres subtriplo, de cuatro, subcuádruplo y así consiguientemente. Como la multiplicidad y la submultiplicidad es infinita por naturaleza, también la de los que se pueden observar en sus propias generaciones hasta el infinito.

Pues si colocados unos números en una sucesión natural, eliges los pares en su sucesión, uno a uno, serán dobles de todos los pares y de los impares que se sigan desde el uno; esta observación se puede seguir sin límite. Pues dispóngase un número natural de esta manera: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. De éstos, si tomas primero los pares, esto es, el 2, será el doble del uno, es decir, de la unidad. Pero si tomas el siguiente par, esto es, el 4, es doble del segundo, es decir, del 2. Si tomas el tercer par, esto es, el 6, será el doble del tercer número de la serie natural, esto es, del tres. Si observas el cuarto par, esto es, el 8, es el doble del cuarto número, esto es, del cuatro. E igual tomando los demás se avanza sin ningún impedimento.

Los triples se crean si en la misma serie se dejan pasar dos siempre, y los que están detrás de esos dos se comparan con el número natural, a excepción del tres. Y como es el triple de la unidad, se pasa el dos solo. Detrás del uno y el dos, son tres, que es el triple de la unidad. A su vez, detrás del 4 y el 5 está el 6, que es el triple del segundo número, es decir, triplus eſt. Rurſus poſt .6. ſunt .7. ⁊ .8. ⁊ poſt hos .9. qui tertij numeri ideſt ternarij triplus eſt. Atqꝫ hoc idem in infinitum ſi quis faciat ſine vlla offenſione procedit. Quadruplorum vero generatio incipit ſi quis tres numeros intermittat. Poſt vnum quippe .⁊ .2. ⁊ .3. ſunt .4. qui primi ideſt vnius quadruplus eſt. Rurſus ſi intermiſero quinarium: ſenarium: ⁊ ſeptenarium: octonarius mihi quartus occurrit: tripl⁹ ſcilicet intermiſſis: qui binarij ideſt ſecundi numeri quadruplus eſt. At vero ſi poſt octo tres terminos intermiſero ideſt .9. ⁊ .10. ⁊ .11. duodenari⁹ qui ſequitur ternarij numeri quadruplus eſt. Atqꝫ hoc idem in infinitum progreſſis neceſſe eſt euenire: ſemperqꝫ vna terminorum intermiſſione ſi creſcat adiectio: ordinatas te multiplicis numeri vices inuenire miraberis. Si enim .4. intermittas: quincuplus inuenitur: ſi quinqꝫ ſexcuplus. ſi ſex ſeptuplus ſemperqꝫ ipſius multiplicitatis nomine vno minus intermiſſionis vocabulo procreantur. Nam duplus vnum intermittit: triplus .2. quadruplus .3. quincuplus .4. Et deinceps ad eundē ordinem ſequentia eſt. Et omnes quidem dupli ſm proprias ſequentias parium numerorum pares ſunt. Tripli vero vnus ſemper par terminus impar alius inuenitur. Quadrupli vero rurſus ſemper parem cuſtodiunt quantitatem. Conſtituūturqꝫ a quarto numero vno ex prioribus per ordinem poſitis paribus intermiſſo primo pari binario: poſt hunc .8. intermiſſo ſenario. poſt hunc .12. tranſmiſſo denario. Atqꝫ hoc idē in ceteris. Quincupli vero propoſitio ſm triplicis ſimilitudinem alternatim paribus atqꝫ imparibus poſitis ordinatur.

De ſuperparticulari eiuſqꝫ ſpeciebus earumqꝫ generationibus.

Capitulum. xxiiii.

Superparticularis vero eſt numerus ad alterum comparatus: quotiens habet in ſe totum minorem ⁊ partē eius aliquā. Qui ſi minoris habeat medietatem: vocatur ſeſqualter. ſi vo tertiam partem: vocatur ſeſquitertius. ſi vero quartam: vocatur ſeſquiquartus. ⁊ ſi quintam. vocatur ſeſquiquintus. Atqꝫ his nominibus i īfinitū ductis ī īfinitū quoqꝫ ſuppticulariū forma progreditur. Et maiores quidem numeri hoc modo vocantur: minores vero qui habētur toti ⁊ eorū aliq pars: vnus ſubſeſqualter: alter ſubſeſquitertius: alius ſubſeſquiquartus: alius vero ſubſeſquiquintus: atqꝫ idem ſm maiorum normam multitudinemqꝫ protenditur. Voco autem maiores numeros duces: minores. comites. Superparticularium quoqꝫ infinita ē multitudo: ob eam rem quod eiuſdem ſpecies interminābili progreſſione funguntur. Nam ſeſqualter habebit quidem duces omnes poſt ternarium numerū naturaliter triplices. Comites vero omnes poſt binarium naturaliter pares: hoc modo: vt primus primo ſecundus ſecundo. tertius tertio comparetur: ⁊ deinceps. Deſcribantur enim longiſſimi verſus triplicium naturalis numeri atqꝫ duplicium: ⁊ ſit hoc modo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Primus igitur verſus continet numerum naturalem ſecundus ei⁹ triplicem: tertius vero duplices: atqꝫ in eo ſi ternarius binario: vel ſi ſenari⁹ quaternario vel nouenarius ſenario comparetur: vel omnes triplices ſuperiores ſi duplicibus numeris conſequentibus opponātur emiolia ideſt ſeſqualtera proportio naſcetur. tres enim habent intra ſe duo ⁊ eorum mediam partem. ideſt .i. ſex quoqꝫ continent intra ſe .4. ⁊ eorū medietatē ideſt .2. ⁊ nouem intra ſe ſenarium claudūt: ⁊ eius mediam partem: ideſt .3. eodemqꝫ modo in ceteris. Dicendum vero ſi quis ſecundam ſpeciem ſuperparticularis numeri conſiderare deſideret ideſt ſeſquitertiam: quali ratione reperiat: ac diffinitio quidem huius comparationis talis eſt. Seſquitertius eſt. qui minori comparatus habet eum ſemel ⁊ eius tertiam partem ſed hi inueniuntur ſi omnibus a quaternario numero continuatim quadruplis conſtitutis: a ternario numero triplices comparentur eruntqꝫ duces quadrupli: comites tripli. Sit enim in ordine hoc modo numerus naturalis: vt ſub eo quadrupli: ⁊ ſub eo tripli ſint. ſupponatur ſub primo quadruplo primus triplus ſub ſecundo ſecundus: ſub tertio tertius: ⁊ eodē modo cuncti eiuſdem primi verſus tripli in ordinem dirigatur.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	8	12	16	20	24	28	32
3	6	9	12	15	18	21	24

Igitur primum primo ſi compares ſeſquitertia ratio continebitur. Nam ſi .4. tribus compares: habebunt in ſe .4. totum ternarium ⁊ eius tertiam partē ideſt .1. ⁊ ſi ſecundum ſecundo ideſt octenarium ſenario compares: idem inuenies habebit enim octenari⁹ ſenarium totum ⁊ eius tertiā ptē ideſt .2. ⁊ per eandem ſequentiam vſqꝫ in infinitum progrediendum ē. Notandum quoqꝫ eſt: quod .3. comites ſunt. duces .4. rurſus .6. comites: duces .8. ⁊ in eodem ordine ceteri ſimili modo vocant̄ duces ſeſquitertij: comites ſubſeſquitertij: ⁊ in cunctis ſm hunc modum poſita conuenit ſeruare vocabula.

De quodam vtili ad cognitionem ſuperparticularibus accidente. Capitu. xxv.

Hoc aūt admirabile profundiſſimūqꝫ ī iſtorum ordinibus inuenit̄: quod prim⁹ dux primuſqꝫ comes ad ſe īuicē nulla nūeri ītermiſſiōe copulant̄. Nā primi ſe nullo ī medio poſito tranſcunt: ſecundi interponūt .i. tertij. duos quarti .3. ⁊ deinceps vna ſemper minore quā ipſi ſūt ītermiſſione ſucreſcunt. Atqꝫ hoc vel in ſeſqualteris: vel in ſeſquintertijs: vel in alijs ſupparticularis partibus neceſſe eſt inueniri. Namqꝫ vt quaternarius ꝯ ternariū cōparet̄: nullum itermiſimus: poſt .3. enim mox .4. ſunt. At vo .6. contra .8. in ſecūdo .ſ. ſeſquitertio: vna facta eſt intermiſſio. Inter .6. n. ⁊ .8. ſolus eſt ſeptenarius qui tranſmiſſus eſt numerus. Rurſus vt 9. ⁊ .12. cōparemus: qui ſunt in diſpoſitiōe tertij: duorum mediorum eſt facta trāſmiſſio. Inter .9. enī ⁊ .12. ſunt .10. ⁊ .11. ſecundum hunc modum quarta diſpoſitio .3. quinta .4. intermittit.

Deſcriptio per quā docetur ceteris ſequalitatis ſpeciebus antiquiorem eſſe multiplicem Capi. xxvi.

Quoniam autem naturaliter ⁊ ſm proprius ordinis conſequentiā: multiplicē inequalitatis ſpēm cūctis ppoſuimus: primāqꝫ ſpēm eſſe mōſtrauimus: licet hoc nobis poſterioris opis ordine clareſcat: hic quoqꝫ pſriptes id qđ ppoſuim⁹ plāſſime breuiterqꝫ doceam⁹. ſit tal' dſcriptō ī q̄ pōat̄ ī ordinē vſqꝫ ad dēariū nūeꝫ cōtinui

/6v./

el triple de dos. De nuevo, detrás del 6 están el 7 y el 8, y tras éstos, el 9 que es el triple del tercer número, esto es, del tres. Y esto si alguien lo hace igual hasta el infinito avanza sin ningún obstáculo. La generación de los cuádruples comienza pasando tres números. Pues después del uno, 2, 3, el 4 es el primer cuádruplo de uno. A su vez, si dejo el cinco, el seis, y el siete, se me presenta el ocho en cuarto lugar, es decir, dejando tres en medio, que es el cuádruplo del segundo número, esto es, del dos. Pero si después del ocho dejo tres números, esto es, el 9, el 10 y el 11, el número que sigue es el cuádruplo del número tres. Y es necesario que esto mismo ocurra a los números, en progresión hacia el infinito, y si crece la serie dejando algunos números, te sorprenderás de encontrar ordenadas las repeticiones de un número múltiplo. Pues si dejas pasar cuatro, se halla el quíntuple, si cinco, el séxtuple, si seis, el séptuple y siempre se generan con el nombre de un múltiplo, dejando pasar ese número menos uno. Pues el doble, deja pasar uno, el triple, 2, el cuádruple, 3, el quíntuple, 4, y en adelante la secuencia en el mismo orden. Y todos los dobles según sus propias secuencias de los números pares, son pares. Pero los triples son alternativamente par e impar. A su vez, los cuádruples siempre conservan la cantidad par. Y su serie parte del cuarto número, se salta de cada vez uno de los primeros pares colocados antes por orden, dejando el primer par, el dos; y tras éste, el 8, dejando el diez, y tras éste el 12. Y esto igual en los demás. Pero en la serie del quíntuple, a semejanza del triple, se ordenan alternativamente, pares e impares.

Del número superparticular de sus especies y de la generación de ellas.

Capítulo XXIIII.

El número superparticular es un número que comparado con otro, contiene al menor en sí un número de veces y alguna parte de él. Éste, si tiene una mitad, se dice que la proporción es sesquiáltera (de una vez y media), si contiene una tercera parte, se dice que es sesquitercia (de una vez y un tercio), si una cuarta parte, se dice que sesquicuarta (una vez y un cuarto); si la quinta, sesquiquinto (una vez y un quinto). Y con estos nombres llevados hasta el infinito, progresa también la serie de los superparticulares. Mientras que los números mayores se llaman de esta manera, los menores se contienen en otro una vez y una parte de ellos. Uno es el que se contiene una vez y media (subsescualter), otro, el que se contiene una vez y un tercio (subsesquitercio), otro, el que se contiene una vez y un cuarto (subsesquicuarto), otro el que se contiene una vez y un quinto (subsesquiquinto), lo mismo se extiende según la norma y la multiplicidad de los mayores. Ahora bien, llamo a los números mayores, antecedentes, y a los menores, consecuentes. Infinita es la multitud de los superparticulares, por el motivo de que se emplean las especies de él en una progresión interminable. En efecto, el número que contiene a otro una vez y media, tendrá como antecedentes todos los triples naturales que van detrás del número tres, mientras que como consecuentes todos los pares naturales que siguen al dos, de esta manera, como se compara el primero al primero y el segundo al segundo, el tercero al tercero y en adelante. Pues escríbase una línea de triples del número natural y otra de dobles de este modo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Así, la primera línea contiene el número natural, la segunda su triple, la tercera, su doble. Pero si se compara el tres con el dos, el seis con el cuatro, o el nueve con el seis, o si se confrontan todos los números triples superiores con sus correspondientes números dobles, se creará una proporción hemiolia, esto es, la sesquiáltera. Pues 3 tiene dentro de sí dos y mitad de 2, esto es, 1. E igualmente el seis contiene dentro de sí el cuatro y la mitad de éste, es decir, dos; el nueve encierra dentro de sí el seis y su mitad, esto es, 3, y de igual manera en los restantes. Si alguien desea considerar la segunda especie del número subparticular, esto es, la que considera la proporción sesquitercia, hay que indicarle con qué método lo hallará. Y la definición de esta relación es como sigue. La proporción sesquitercia es el número que comparado con uno menor lo contiene una vez y la tercera parte. Pero éstos se hallan disponiendo seguidamente los cuádruples desde el cuatro y comparándolos con los triples desde el tres; los antecedentes serán los cuádruples y los consecuentes, los triples. Pues sea de este modo en serie el número natural, se disponga debajo el cuádruple y debajo de éste, el triple. Colóquese bajo el primer cuádruple el primer triple, bajo el segundo, el segundo, bajo el tercero, el tercero, y del mismo modo todos de esa misma primera línea se conjunten con la serie del triple.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	8	12	16	20	24	28	32
3	6	9	12	15	18	21	24

Así, si comparas con el primero, se contendrá la proporción de sesquitercio. Pues si comparas el 4 con el tres, el cuatro tendrá dentro de sí el tres y su tercera parte, esto es, uno; si se compara el segundo con el segundo, esto es, el ocho con el seis, hallarás que el ocho contiene al seis entero y a su tercera parte, esto es, el dos, y hay que avanzar por la misma secuencia hasta el infinito. También hay que notar que el tres es consecuente y el cuatro es antecedente, y a su vez, el 6 es consecuente y el 8 es antecedente y en la misma serie, los restantes se llamarán de modo semejante antecedentes los que contienen una proporción de sesquitercio y consecuentes los que la tienen de subsesquitercio; en todos los situados de este modo conviene conservar los nombres.

De cierta observación útil para el conocimiento de los superparticulares.

Capítulo XXV.

Se advierte una observación sorprendente y profundísima para estas series: que el primer antecedente y el primer consecuente están muy unidos, no se separan por ningún número. Pues los primeros pasan sin dejar ningún número en medio, los segundos lo dejan pasar, los terceros, dejan dos, los cuartos, tres y en adelante van aumentando, dejando pasar siempre uno menos del que presentan ellos. Y esto es necesario que se halle en los que tienen la proporción sesquiáltera, los que la tienen sesquitercia, o en otras clases de superparticulares. Pues si se compara un cuatro con un tres, no dejamos ninguno entre medias, detrás del 3 vienen el 4; pero 6 frente a 8 en segundo lugar con proporción sesquitercia, se ha dejado pasar un número. Entre el 6 y el 8 está el 7 solo, que es el número que se ha pasado. A su vez, si comparamos 9 y 12, que están en tercer lugar, se han dejado pasar dos. Pues entre 9 y 12 están el 10 y el 11; según este orden, el cuarto lugar deja pasar tres y el quinto, cuatro.

Descripción por la cual se muestra que el múltiplo es anterior a las demás especies de desigualdad.

Capítulo XXVI.

Porque de manera natural y por la propia secuencia de orden hemos expuesto antes que el múltiplo es una especie de desigualdad, y hemos mostrado que es la primera especie, aunque esto se nos vaya a aclarar más adelante en la obra, también aquí vamos a explicar bien y brevemente lo que hemos adelantado. Sea la descripción en su orden desde el principio hasta el número diez tinui numeri ordo naturalis ꝛ secundo versu duplus ordo texatur: tertio triplus: quarto quadruplus: ꝛ hoc vsq; ad decuplum. Sic enim cognoscemus quē admodum super particulari ꝛ super partienti: ꝛ cun ctis alijs princeps erit species multiplicis: ꝛ quedam alia simul inspiciemus ꝛ ad subtilitatem tenuissima: ꝛ ad scientiam vtilissima: ꝛ ad exercitationem mentis iocundissima.

Tetragolla — Longitudo — Secunda vnitas

Prima vnitas — Latitudo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Latitudo — Tertia vnitas

Secunda vnitas. — Longitudo, — Tetragona

Ratio atq; expositio digeste formule.

Capitulum. xxix.

Si igitur duo prima latera proposite formule que faciunt angulum: ab vno ad. 10. ꝛ 10. procedentia respiciantur ꝛ bis subteriores ordines comparentur qui scilicet. a. 4. angulum incipientes: in vigenos terminum ponunt: duplex idest prima species multiplicitatis ostenditur. ita vt primus primum sola superet vnitate: vt duo vnum secundus secundum binario superuadat: vt quaternarius binarium: tertius tertium tribus: vt senarius ternarium: quartus quartum quaternari numerositate transcēdat: vt. 8. quaternarium ꝛ per eandem cuncti sequentiam sese minoris pluralitate ꝑtereāt. Si vo terti⁹ āgulus aspiciat: q ab. 9. īchoās lōgitudinē latitudinēq; tricenis altrīsecus nūeris extēdit: ꝛ hic cū prīa latitudine ꝛ lōgitudīe cōparetur: triplex specieb⁹ multiplicitatis occurrit: ita vt ista comparatio per. x. litteram fiat. Hicq; se numeri superabunt secūdū paritatis factam naturaliter ꝯnexionem. Primus enim primū duob⁹ superat: vt vnū 3. secūdus secundum quaternario: vt binarium senarius. tertius tertiū sex: vt ternariū nouenarius. ꝛ ad eūdē ceteri modū ꝓgressionis augescūt. Quā rē. nobis. s. ꝛ ipsa naturalis obiecit integritas: nihil nobis extra machinantib⁹: vt in ipso modulo descriptionis apparet. Si quis aūt quarti āguli terminū qui sedecī numeri quātitate notatus ē: ꝛ lōgitudinē latitudinēq; in quadragenos determinat velit superioribus cōparare ꝑ. x. littere formā ꝓportione collata quadru

/7r./

de manera natural en la primera línea, en la segunda, escríbase el doble, en la tercera, el triple, en la cuarta el cuádruple y esto hasta el décuple. Pues así advertiremos de que modo funcionan el subparticular y el superpartiente y la principal será la especie del múltiplo. Veremos algunas otras, cuestiones de detalle muy poco importantes y observaciones muy útiles para el conocimiento, y muy agradables para el ejercicio de la mente.

(obsérvese el cuadro en fol. 7r.)

Razón y exposición de la tabla anterior.

Capítulo XXVII.

Si se consideran los dos primeros lados de la tabla de arriba que forman un ángulo, partiendo del uno a los dos números diez y se comparan las líneas interiores, que hacen ángulo partiendo del cuatro y llegando al veinte en los dos lados, se ve aparecer el doble, la primera especie del múltiple, de forma que el primer número sobrepasa el primero en una sola unidad –dos a uno-, el segundo supera al segundo en dos –cuatro a dos- el tercero al tercero en tres –seis a tres, el cuarto supera al cuarto en la cantidad del número cuatro –ocho a cuatro- y así todos se superan en la cantidad del menor. Si se considera el tercer ángulo, el que parte de nueve y se desarrolla a un lado y a otro, en longitud y en anchura hasta el número treinta, si se compara con la primera línea en longitud, se ve aparecer la especie del múltiplo que es el triple. La comparación se hace según la forma de la letra x y estos números se superan según la serie del número par: el primer número supera al primero en dos –tres y uno, el segundo supera al segundo en cuatro –seis y dos- el tercero al tercero en seis –9 y 3- y del mismo modo continúa la progresión por aumento de todos los demás. Es la naturaleza misma sin sufrir alteración la que nos lo muestra; nosotros no añadimos nada artificioso, según se ve en el funcionamiento de la tabla.

Si se quiere comparar a las líneas de arriba el término del cuarto ángulo cuya cima está marcada por el número 16, determinando una longitud y una anchura hasta el número cuarenta, la comparación que se establece según la forma de la letra x destacará pli multitudinẽ pnotabit. Hisq; est ordinabilis sup se progressio vt primus primum trib⁹ superet. vt. 4. vnitatem. Secundus secundũ senario vincat: vt octo binarium. Tertius tertiũ nouenario transeat: vt duo denarius ternarium: ꝛ sequentes summule trium se semp adiecta quãtitate transiliant. Et si quis subteriores aspiciat ãgulos idẽ per oẽs multiplicitatis species eisq; ad decuplũ dispositissima ordinatione perueniet. Si quis vero in hac descriptione superparticularis species requirat tali modo reperiet. Si enim secũdũ angulũ notet cuius est initium quaternarius: eisq; superiacet binarius: atq; hunc sequentem quis accomodet ordinem: sesqualtera proportio declarabitur. Nam tertius secũdi versus sesqualter est. vt tres ad duo: vel sex ad quartuor: vel. 9. ad. 6. vel. 12. ad. 8. Itemq; in ceteris qui sunt in eadem serie numeri: si talis cõiugatio misceat: nulla varietatis dissimilitudo surripiet. Eadem tamen summax supergressio ẽ i hoc quoq; que in duplicibus fuit. Primus enim primum idest ternarius binarium vno superat: secũdus vero secundum duo si terti⁹ tertiũ tribus ꝛ deinceps. Si vo quartus ordo tertio cõparet: vt. 4. ad. 3. ꝛ eosdem ceteros ordine consecteris: sesquitertia cõparatio colligit: vt. 4. ad. 3. vl. 8. ad. 6. ꝛ. 12. ad. 9. videsne vt in omnibus his sesquitertia comparatio conseruet. Preterea eos qui sub ipsis sunt: si idem faciens seqntes versus alterutris cõparaueris oẽs sine vllo ĩpedimẽto species superparticularis agnosces. Hoc aũt in hac ẽ dispõne diuinũ qd oẽs angulares numeri tetragoni sunt. Tetragonus autem dicitur vt breuissime dicã quod post latius explicabitur: quem duo equales numeri multiplicant. vt in hac quoq; descriptione est vnus enim semel. vnus est: ꝛ est potestate tetragon⁹. Itẽ bis duo. 4. sũt Ter. 3. 9. quos in semetipsas multiplicationes primi ordinis perfecere. Circuz ipsos vero qui sunt idest circum angulares. longilateri numeri sunt. Longilateros autem voco quos vno se supergredientes numeri multiplicant. Circum. 4. enim. 2. sunt. ꝛ. 6. sed duo nascũtur ex vno et duob⁹: cuz vnũ bis multiplicaueris. sed vnitas a binario vnitate precedit. Sex a vero duobus ꝛ tribus bis enim tres senarium reddunt. Nouenarium vero sex ꝛ. 12. claudũt qui. 12. ex tribus nascuntur ꝛ. 4. Ter enim. 4. fiunt. Senarius vero ex duobus ꝛ tribus Bis enim. 3. faciunt. 6. qui omnes vno maioribus lateribus procreati sunt. Nã cũ. 6. ex biñario ternarioq; nascũtur: tres binarium numerum vno superant cunctiq; alij eiusdem modi sunt: vt primo ꝛ secundo ordine ad alterutrum multiplicatis terminis procreentur. ita vt quod nascitur ex duobus longilateris altrinsecus positis: ꝛ bis medio tetragono tetragonus fit. Et rursus quod ex duobus altrinsecus tetragonis. ꝛ vno medio longilatero bis facto nascitur: ipse quoq; tetragonus fit. ꝛ vt angulorum totius descriptionis ad angulares tetragonos positorum vnius anguli sit prima vnitas: alterius vero qui contra est tertia. Bini vero altrinsecus anguli secundas habeant vnitates. ꝛ duo angularium tetragonorum anguli equum faciunt quod sub ipsis continetur illi quod fit ab vno illorum qui est altrinsecus angulorum. Multa eniz sunt alia que ĩ hac descriptione vtilia possunt admirabiliaq; perpendi q̃ interim propter castigatam introducendi breuitatez ignota esse permittimus. Nunc vero ad sequentia ꝓpositum conuertamus.

De tertia inequalitatis specie que dicitur superpartiens: deq; speciebus eius earumq; generationibus. Capitulum. xxviii.

Isitur post duas priores habitudines multiplices ꝛ superparticulares: ꝛ eas que sub ipsis sunt submultiplices: ꝛ sub superparticulares tertia inequalitatis species inuẽitur: que a nobis superius superpartiens dicta est. Hec est autem que fit cũ numerus ad alium comparatus: habet eum totum infra se: ꝛ eius insuper aliquas pater: vel duas: vel. 3. vel. 4. vel quot ipsa attulerit comparatio. Que habitudo incipit a duabus partibus tertijs. Nam si duas medietates habuerit: qui illuz intra se totum coercz duplus pro superpartiente componitur. Habebit autem vel duas tertias vel duas quintas vel duas septimas vel duas nonas. ꝛ ita progredientibus si duas solas partes minoris numeri superhabuerit: per easdem partes imparibus numeris minorez maior summa trãscendit. Naz si eũ habeat totũ ꝛ duas eius q̃rtas: superparticularis necessario reperitur. Nam due quarte medietas est: ꝛ fit sesqualtera comparatio. Si vero duas sextas: rursus est superparticularis. Due enim sexte pars tertia est. Quod si in comparatione ponatur sesquitertie habitudinis efficiet formam. Post hos nascuntur comites qui sub superpartiẽtes vocantur. hi autem sunt qui habentur ab alio numero ꝛ eoruz vel due: vel. 3. vel. 4. vel quotlibet alie partes. Si ergo numerus alium intra se numerum habens eius duas partes habuerit: superbipartiens nominatur si vero tres supertripartiens quod si. 4. supquadripartiens: atq; ita progredientibus in infinitum fingere nomina licet. Ordo autem eorum naturalis est: quotiens disponuntur a tribus omnes pares atq; impares numeri naturaliter constitui. ꝛ sub his aptãtur alij qui sũt a quinario nũero incipientes oẽs impares. His igitur ita dispositis: si primus primo: secundus: secundo: tertius tertio: ꝛ ceteri ceteris comparẽtur: superpartiens habitudo procreatur. Sit. n. dispositio hoc modo.

3	4	5	6	7	8	9	10
5	7	9	11	13	15	17	19

Si igitur quinarij numeri ad ternariũ comparatio consideretur: erit superpartiens ille qui vocatur superbipartiens. Habet enĩ quinarius totos in se tres ꝛ eorum duas partes: idest. 2. Si vero ad secundum ordinem speculatio referatur supertripartiens proportio cognoscetur. atq; in sequentibus per omnes dispositos numeros omnes in infinitum species huius numeri conuenienter ordinatasq; respicies. At vero quemadmodum singuli procreentur si in infinituz quis curet agnoscere: hic modus est. Habitudo eniz superbipartientis: si vtrisq; terminis duplicetur: semper superbipartientis ꝓportio procreatur. Si eniz quis duplicet. 5. faciet. 10. si tres faciet. 6. qui. 10 contra senarium comparati superbipartientem faciunt habitudinem: ꝛ hos ipsos rursus si duplicaueris: idem ordo proportionis accrescit. Idemq; si in infinitum facies: statum prioris habitudinis non mutabit. Si vero supertripartientes

/7v./

la multiplicidad del cuádruple, y se tendrá para esos números una progresión ordenada por la relación con los que están arriba: el primero superará al primero en tres –se trata del cuatro y de la unidad- el segundo superará al segundo en seis –8 y 2- el tercero superará al tercero en nueve –12 y 3- y los números siguientes, si se relacionan con su correspondiente, les sobrepasarán siempre en el valor de tres. Y si se considera los ángulos de abajo, se llegará de la misma manera, pasando por todas las especies del múltiplo hasta el décuple, con la máxima regularidad en la serie.

Ahora, si se busca en la tabla la especie de los superparticulares, se encontrará de este modo. Si se marca el segundo ángulo, el que parte del cuatro y arriba del cual se encuentra el número dos, y se le compara la línea siguiente, aparecerá la relación sesquiáltera. Pues la tercera línea está en la relación sesquiáltera con la segunda. Los ejemplos: 3 en relación a dos, seis en relación a 4, 12 en relación a 8, y siguiendo así con todos los números de la misma serie. Si la unión y relación de los términos se opera de esta forma, no se producirá ninguna alteración ni diversidad. También aquí lo que excede de unas cantidades respecto de otras es lo mismo que lo que se ha visto con los dobles. Pues el primer número, 3, supera al segundo, 2, en uno; el segundo supera al segundo en dos, el tercero al tercero en tres y así en serie.

Si se compara ahora la cuarta línea con la tercera –por ejemplo, 4 y 3- y se puede continuar con las otras en el mismo orden- se formará la proporción sesquitercia. Así 4 en relación con 3, 8 en relación con 6, 12 en relación con 9. ¿Se ve cómo todos los términos conservan entre ellos la proporción sesquitercia? En cambio, si se procede a comparar las líneas que están situadas por encima de éstas, se advertirá sin ninguna dificultad todas las especies del superparticular.

Una característica divina en la tabla es que todos los números en diagonal son cuadrados. Se llama cuadrado –digámoslo en breve, se desarrollará después- el número formado por la multiplicación de los dos números iguales, como se ve en la tabla. En efecto, uno por uno uno, o uno es un cuadrado en potencia, de la misma forma dos por dos 4 o 3 por 3 hacen 9, números formados por los números de la primera línea multiplicados por sí mismos.

Los números que están en el entorno de la diagonal son longuiláteros. Llamo longuiláteros a los números formados por la multiplicación de los números que superan el uno. Así alrededor del 4 están el 2 y el 6; el 2 nace de uno y de 2, cuando se multiplica dos por uno o la unidad es superada por el número 2 en una unidad; en cuanto al 6, nace de 2 y 3, porque 2 por 3 son 6. Y 9 está encerrado entre el 6 y el 12, el cual nace de 3 y de 4, tres por 4 son 12; el 6 nace de 2 y de 3, porque 2 por 3 hacen 6. En la generación de estos números hay siempre un lado mayor que la unidad. Pues 6 nace de 2 y 3, 3 supera el número 2 en la unidad; lo mismo en los otros. De forma que están formados por la multiplicación de términos de la primera línea por los términos correspondientes de la segunda línea. Ocurre que el número que nace de los dos longuiláteros que se corresponden y de dos veces el cuadrado que está entre ellos es un cuadrado. Si se consideran los ángulos de la tabla en su conjunto, los que están situados cerca de los cuadros angulares encierran el uno, la unidad de primer rango, el segundo –el que se le opone- la unidad de tercer rango, y los otros dos que se corresponden encierran cada uno una unidad de segundo rango, y dos números de ángulo-los cuadrados angulares- tienen su producto igual al cuadrado de uno de los números del ángulo que se encuentra al otro lado.

Todavía habría más cosas que aprovechar y admirar en esta tabla, si se examina atentamente, pero la brevedad en la que se mantiene esta introducción nos permite pasarlas en silencio por el momento. Continuemos.

De la tercera clase de la desigualdad, que se llama superdivisor, sus especies y la generación de ellas.

Capítulo XXVIII.

Después de las dos primeras relaciones del múltiple y del superparticular y después de las relaciones que se derivan, las del submúltiple y la del subsuperparticular se encuentran en la tercera especie de desigualdad, es lo que hemos llamado antes superpartiente.

Hay una relación superpartiente cuando un número comparado con otro contiene en sí mismo ese número entero, y además, partes de ese número, dos, tres, cuatro o todas las que haya en la relación considerada.

Esta relación comienza en los dos tercios, pues si el número que encierra en sí mismo otro número entero contiene además dos mitades de ese número, lo que sale es un doble, en lugar de un superpartiente. Comprenderá también los dos quintos, dos séptimos, dos novenos, y así la serie, según la progresión de los impares.

Si el número mayor tiene solamente además dos partes del menor, supera al menor gracias a esas partes en los números impares. Pues si contiene a ese número entero y dos cuartos de este número, es sin duda un superparticular lo que se descubre, porque dos cuartos es una mitad y esto da una proporción sesquiáltera. Con los dos sextos, todavía es un superparticular, porque los dos sextos es un tercio, y si se introduce en la relación, da un tipo de proporción sesquitercia.

Después de los superpartientes nacen sus derivados, que se llaman subsuperpartientes. Son los que son contenidos en otro número que tiene más de dos, tres, cuatro o cualquier número de partes de él. Luego si un número que contiene en sí mismo a otro, contiene a la vez dos partes de ese número, se llama superbipartiente; tres supertripartiente, cuatro, supercuadripartiente, y se pueden establecer los nombres de estos números siguiendo la progresión hasta el infinito.

Se tiene la serie natural de los superpartientes cuando se disponen a partir del 3 todos los números, pares e impares, que debajo de ellos les corresponden otros, todos impares a partir del cinco. Estos números, estando dispuestos de esta manera, si se compara el el primero con el primero, el segundo con el segundo, el tercero con el tercero y así en serie todos los demás, se crea la relación superpartiente. Sea la serie siguiente:

3	4	5	6	7	8	9	10
5	7	9	11	13	15	17	19

Si se considera la relación del número 5 al 3, será un superpartiente que se llama superbipartiente, pues el número 5 contiene la totalidad del 3 y dos partes de este número, esto es 2. Si la observación se hace con la segunda pareja, se verá que es una relación supertripartiente, y así en adelante, recorriendo hasta el infinito la serie de los números que se han propuesto, se verán todas las especies de este número, en el orden conforme a su serie.

Ahora veamos cómo se hace la generación de cada uno de ellos, si se quiere examinar hasta el infinito. La relación del superbipartiente, si está doblada en uno o el otro de sus dos términos, siempre genera una proporción superbipartiente. Si se multiplica por dos el 5, dará 10, y 3, dará 6. El 10 comparado con el 6 da una relación superbipartiente. Si se multiplican de nuevo estos números por sí mismos, se obtienen la misma relación; si se opera así hasta el infinito, la primera relación se mantendrá sin cambios.

tientes inuenire contendis: primos supertripartientes. idest. 7. est. 4. triplicabis ꝛ huiusmodi nascētur. Si vo q ex his nati fuerint ternarij multiplicatione produxeris: idem rursus efficient. Quod si superquadripartientes quēadmodum in infinitum ꝓgrediant optes addiscere: primas eorum radices in quadruplū multiplices licet: idest. 9. ꝛ. 5. ꝛ eos qui illa multiplicatione proferentur: rursum in quadruplum: ꝛ eandē fieri ꝓportiōes inoffensa nimirū ratiōe reperies Et cetere species vna semper plus multiplicatiōe crescentibus radicibus oriūtur. Radices aūt ꝓportionū voco numeros in superiore dispositione descriptos. q̄ si quibus omnis summa supradicte comparationis innititur. In hoc quoqꝫ vidēdū est: qm̄ cum due partes minore plus in maioribus sunt: tertij semper vocabulū subaudit. Ut superbipartiens q dicit qm̄ duas minoris numeri tertias partes habet: dicatur superbipartiens tertias. Et cum dico supertripartiens: subaudiri necesse sit supertripartiens quartas: quoniam tribus super quartis exuberat. Et superquadripartiē ti subauditur superquadripartiens quintas. ꝛ ad eundem modum in ceteris vno semper adiecto superhabitas partes subauditio facienda est. vt eorum germana conuenientiaqꝫ his nomina hec sint. vt qui dicitur superbipartiens: idem dicatur superbitertius. Qui dicitur supertripartiens is sit supertriquartus. ꝛ qui dicitur superquadripartiens: idem dicatur supquadriquintus eademqꝫ similitudine vsqꝫ in infinitū nomina producantur.

De multiplici superparticulari. Cap. 29.

Hitur relate ad aliquid quātitatis. simplices ꝛ prime species he sūt. Due vero alie ex his velut ex aliquibus principijs componuntur vt multiplices superparticulares. ꝛ multiplices superpartiens. horumqꝫ comites submultiplices superparticulares: ꝛ submultiplices superpartientes. Namqꝫ in his vt in predictis proportionibus: minores numeri ꝛ eorum quoqꝫ species omnes addita sunt prepositione dicuntur. Quorū diffinitio talis reddi potest: Multiplex superparticularis est: quotiens numer⁹ ad numerum comparatus: habꝫ eum plusqꝫ semel ꝛ eius vnaꝫ partem. hoc ē. habet eū aut duplum aut triplū: aut quadruplum: aut quotiēslibet: ꝛ eius quālibet aliquam partem: vel mediā: vel tertiā: vel quartam vel quecunqꝫ alia partium exuberatione contigerit. Hic ergo ꝛ multiplici ꝛ superparticulari ꝯsistit. Qd. n. cōparatum numerum plusqꝫ semel habet multiplicis est. Hoc vero quod minorem ī habenda parte transcendit: supparticularis. Itaqꝫ ex vtroqꝫ noīe facto vocabulo est. speciesqꝫ illius ad illarum scilicet sunt imaginem proportionum: ex qb⁹ ipse numerus originem trahit. Nā prīa ps huius vocabuli que multiplicis noīe possessa ē: multiplicis numeri spēs vocabulo noīanda est. Que vo superpticularis est: eodē vocabulo nūcupabitur quo superparticularis numeri spēs vocabant. Dicet enim q duplicē habuerit aliū numerū: ꝛ ei⁹ mediaꝫ ptē: duplex sesqlter: qui vero tertiam: duplex sesquitertius: qui quartam: duplex sesqqrt⁹. ꝛ deinceps. Si vero ter eū totū contineat ꝛ eius mediam ptē: vel tertiam: vel quartā dicit triplex sesqualter: triplex sesquitertius. triplex sesquiquartus ꝛ eodem modo in ceteris. Diceturqꝫ q̄druplus sesqualter: quadruplus sesquitertius: quadruplus sesquiquartus: ꝛ quotiens totum numeruꝫ in semetipso continuerit: per multiplicis numeri species appellat: quā vero partē cōparati numeri clauserit secūdū superparticularē cōparationem habitudinēqꝫ vocabit. Hoꝝ autē exēpla hmōi sunt. Duplex sesqualter est: vt qnqꝫ ad duo. hñt enī. 5. binarium nūerū bis ꝛ ei⁹ mediā idest. 1. Duplex vero sesquitertius ē septenarius ad ternarium cōparatus. At vero nouenari⁹ ad quaternarium duplex sesquiquartus. Si vero. 11. ad. 5. duplex sesquiquintus. Et hi semper nascentur dispositis in ordinem a binario nūero oībus naturaliter paribus imparibusqꝫ terminis: si contra eos omnes a quinario nūero impares comparentur. vt primum primo: secundū secundo: tertiū tertio caute ꝛ diligenter apponas. vt sit dispositio talis.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	7	9	11	13	15	17	9	21	23

Si vero a duobus parib⁹ omnibus dispositis terminis: illi qui a quinario numero incboantes: quinario numero rursus sese transiliunt comparentur: omnes duplices sesqualteros creant vt est subiecta descriptio.

2	4	6	8	10	12
5	10	15	20	25	30

Si vero a tribus incboent dispositiones: ꝛ tribus sese transiliant: ꝛ ad eos aptentur qui a septenario incboantes: septenario sese numero trāsgrediūtur: omnes duplices sesquitertij habita diligēter cōpatiōe nascūt. vt subiecta descriptio mōet.

3	6	9	12	15	18	21
7	14	21	28	35	42	49

Si vero omnes in ordinem quadrupli disponātur: hi qui naturalis numeri quadrupli sunt: vt vnitatis quadruplus: ꝛ duorum triumqꝫ ꝛ quattuor: atqꝫ quinarij: ꝛ ceterorum sese sequentium vt ad eos aptentur a nouenario numero incboantes semper sese nouenario precedentes: tunc duplicis sesquiquarte proportionis forma texetur.

4	8	12	16	20	24
9	18	27	36	45	54

Ea vero species hui⁹ numeri que est triplex sesqualtera hoc modo procreatur: si disponantur a binario numero omnes in ordinē pares: ꝛ ad eos septenario numero incboātes: septenario sese supergredientes: solito ad alterutrum modo comparationis aptentur.

2	4	6	8
7	14	21	28

Si aūt a ternario nūero īgressi cunctos naturalis nūeri triplices disponamus: ꝛ eis a denario numero denario sese supgrediētes ordine cōparem⁹: oēs triplices sesqtertij ī ea termīoꝝ ꝯtinuatione ꝓuenient.

3	6	9	12
10	20	30	40

De eorum exēplis in superiore formula inueniēdis. Capitulum 30

Orum autem eorumqꝫ qui sequuntur exempla integre planeqꝫ possumus pernotare: si in priorem descriptionem quam fecimus cum de superparticulari ꝛ multiplici loqueremur: vbi ab vno vsqꝫ in denarium multiplicationum summa concreuit: diligens velim⁹ acumen intendere. Ad primum enim versum omnes qui sequuntur collati ordinatas conuenientesqꝫ mul

/8r./

Si se quiere hallar supertripartientes, se multiplicarán por tres los primeros supertripartientes, y se dará lugar a números de esta naturaleza. Si ahora se multiplica por tres los números que se habrán producido así, se obtendrá aún la misma relación.

Si se quiere ver cómo se hace hasta el infinito la progresión de los supercuadripartientes, se pueden multiplicar por 4 sus raíces primeras, 9 y 5, y multiplicar de nuevo por 4 los productos de esta multiplicación y se verá que se forma siempre la misma proporción, sin que el método tenga ningún fallo. Y todas las demás especies nacen si se aumentan siempre las raíces por una multiplicación de más de uno. Se llaman raíces a los números dispuestos en el cuadro de arriba, que sirven de fundamento sobre el que descansan las proporciones que hemos descrito.

También hay que reparar en lo siguiente: cuando hay en el número mayor dos partes del menor además del número menor en sí, el nombre del tercio está sobreentendido, y debe ser que el que se llama superbipartiente , porque contiene dos tercios del número pequeño, se llame superpartiente de dos tercios; y cuando digo supertripartiente, se debe entender superpartiente de tres cuartos, porque supera al menor en tres cuartos; por supercuadripartiente se sobreentiende superpartiente de cuatro quintos y de la misma manera para todos los demás, sumando siempre una unidad a las partes contenidas por el número mayor, hay que sobreentender lo mismo, y que su parentesco y las proporciones que existen entre ellos están en los números siguientes. El que se llama superbipartiente, que se llama también superbitercio, el supertripartiente que es también supertricuarto, el que se llama supercuadripartiente, se llama también supercuadriquinto y así en adelante, se continúa la serie de estos nombres hasta el infinito.

Sobre el múltiplo superparticular.

Capítulo XXIX.

Las especies de cantidad relativa simples y principales son éstas, pero otras dos se componen de éstas y de algunos principios, como los múltiplos superparticulares, y los múltiplos superpartientes; consecuentes de éstos son los submúltiplos superparticulares y submúltiplos superpartientes. En las proporciones explicadas antes los números menores y también todas las especies de ellos se nombran con un añadido morfológico. Se puede hacer una éxplicación de ellos como sigue. El múltiplo superparticular es un número que comparado con otro lo contiene más de una vez y una parte de él, esto es, tiene el doble, el triple, el cuádruple o las veces que sea, y alguna parte, bien la mitad, o la tercera parte, la cuarta o cualquiera otra multiplicidad de partes. Luego se compone del múltiplo y del superparticular. Respecto del número comparado, contenerlo más de una vez es propio del múltiplo. Pero esto de que deba tener una parte lo distingue y es propio del superparticular. Así se forma la denominación a partir de un nombre y el otro. Las especies de él se hallan a imagen de aquellas proporciones, de las que el número tiene su origen. Pues la primera parte de esta denominación, que está incluida en el nombre de múltiplo debe ser nombrada según las especies del múltiplo, pero también es superparticular y se llama con los nombres con que se llamaban las especies del número superparticular. Pues el que contiene el doble a otro número y una media parte, es el doble sesquiáltero; el que tienen un tercio, doble sesquitercio; el que tiene una cuarta parte, doble sesquicuarto y así en adelante. Pero si lo contiene tres veces y una media parte, o una tercera parte, o una cuarta, será triple sesquiáltero, triple sesquitercio, triple sesquicuarto y de la misma manera los restantes. Y se dirá cuádruple sesquiáltero, cuádruple sesquitercio, cuádruple sesquicuarto y se puede continuar las veces que sea, según lo contenga, se le aplica el nombre de las especies del número múltiplo, pero puede encerrar una parte del número comparado que se llamará según la comparación y la proporción superparticular. Los ejemplos son los siguientes: doble sesquiáltero es la comparación de cinco a dos, pues dentro del cinco cabe dos veces el dos y una mitad de él que es uno. Doble sesquitercio es la relación entre siete y tres. Pero la de nueve con cuatro es un doble sesquicuarto. Si se comparan el 11 con el 5, es un doble sesquiquinto. Y éstos siempre se hallarán al colocar todos los números pares e impares en su orden natural comenzando desde el dos, y enfrentándolos a todos los impares empezando desde el cinco. Si contrapones con cuidado y atención el primero con el primero, el segundo con el segundo, el tercero con el tercero, sea la siguiente disposición:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

Pero si se disponen todos los pares desde el dos y aquellos que comenzaban por el número cinco a su vez saltan de cinco en cinco, se hallan todos dobles sesquiálteros, como muestra la tabla siguiente:

2	4	6	8	10	12
5	10	15	20	25	30

si se comienza la disposición desde el tres y saltan de tres en tres, y se les adjunta la serie que empieza por siete, pasando de siete en siete, surgen de la comparación todos los dobles sesquitercios, como muestra la tabla siguiente:

3	6	9	12	15	18	21
7	14	21	28	35	42	49

Dispónganse todos los cuádruples en orden, éstos que son cuádruples del número natural, como el cuádruple de la unidad, y del dos, del tres, del cuatro y del cinco, y de los que le siguen para adjuntarles una serie que comienza desde el número nueve, siempre con diferencia de nueve de uno a otro; entonces se establece una proporción del doble sesquicuarto:

4	8	12	16	20	24
9	18	27	36	45	54

Esa especie de este número que es triple sesquiáltero se crea de este modo: si se disponen todos los pares en orden desde el dos, se les presenta con los que comienzan desde el número siete, y van incrementándose en siete; se confrontan según el modo de comparación que hemos ido haciendo:

2	4	6	8
7	14	21	28

si disponemos comenzando por el tres todos los triples del número natural y les comparamos con la serie que comienza en diez y va creciendo de diez en diez, se hallarán por la secuencia de los términos todos los triples que tienen un tercio:

3	6	9	12
10	20	30	40

Cómo encontrar en la tabla anterior ejemplos de esos números.

Capítulo XXX.

Podemos mostrar los ejemplos de éstos y de los que siguen de manera clara y completa, si se quiere buscar con atención en la descripción anterior que hemos hecho, cuando hablábamos del múltiplo y del superparticular, en la que el cálculo ha ido crecido del uno hasta la multiplicación por diez. Pues respecto a la primera línea todos los números que siguen reunidos darán las especies ordenadas y ajustadas tiplicis species reddent. Si vero ad secundum cũctos qui tertij sunt ordinis aptaueris ordinatas species su per particularis agnosces. Quod si tertio ordini quicunq̃ sunt in quinto versu compares: super partientis numeri species positas conuenienter aspicies. multiplex vero superparticularis ostenditur: cum ad secundum versum omnes qui sunt quinti versus serie comparantur vel qui sunt in septimo vel qui sunt in nono atq̃ ita si in infinitum sit ista descriptio in infinitum huius proportionis species procreabuntur. manifestum autem etiam hoc est quod horum comites semper cum sub prepositione dicentur. vt est subduplex sesqualter: subduplex sesquitertius. subduplex sesquiquartus ⁊ ceteri quidem adhunc modum.

¶ De multiplici superpartiente. Cap. 31.

Multiplex vero superpartiẽs ẽ: quotiẽs nũerus ad numerũ cõpatus hꝫ in se aliuꝫ numeruꝫ totũ plusquã semel: ⁊ eius vel duas vel. 3. vel quotlibꝫ plures particulas: secundum numeri suppartientis figurã. In hoc quoq̃ propter causam superius dictam non erũt due medietates: neq̃ due quarte: neq̃ due sexte: sed due tertie: vel due quinte: vel due septime ad priorem similem consequentiã. Non est aũt difficile ẜm priorũ exẽpla positorũ: hos quoq̃ ⁊ preter nostra exempla numeros inuenire. Uocabunturq̃ hi ẜm proprias partes. duplex superbipartiens: vel duplex supertripartiens: vel duplex superquadripartiens. Et rursus triplex superbipartiens: ⁊ triplex supertripartiens: ⁊ triplex superquadripartiens: ⁊ similiter. Ut. 8. ad. 3. cõparati faciunt duplicem superbipartientem. ⁊. 16. ad 6. ⁊ omnes quicunq̃ ab. 8. incipientes: octonario sese numero transgrediuntur: comparati ad eos qui a tribus inchoantes ternarij sese quantitate pretereunt. Nec erit difficile alias eius ptes ẜm predictũ moduꝫ diligentibus reperire. Hic quoq̃ illud meminisse debemus quod minores ⁊ comites non sine sub prepositione nominantur: vt sit subduplex superbipartiens: subdup ex supertripartiens.

¶ Demonstratio quemadmodum omnis inequalitas ab equalitate processerit. Capitulum. 32.

Restat aũt nobis profundissimam quãdam tradere disciplinam: que ad oẽs nature vi rerumq̃ integritateꝫ maxima ratione pertineat. Magnus quippe in hac scientia fructus: est si quis non nesciat qḋ bonitas diffinita est ⁊ sub scientiam cadens: animoq̃ semp imitabilis ⁊ pceptibilis prima natura est: ⁊ sue substantie decore perpetua. Infinitum ṽo malicie dedecus est: nullis proprijs principijs nixum. sed natura semp errans a boni diffinitiõe principij tanq̃ aliquo signo optime figure impressa compõitur: ⁊ ex illo erroris fluctu retinetur. Nam nimiam cupiditatem: ireq̃ immodicam effrenationem: quasi quidam rector anim⁹ pura intelligentia roboratus astringit. ⁊ has quodammodo inequalitas formas temperata bonitate constituit. Hoc aũt erit pspicuum: si intelligamus omnes inequalitatis species ab equalitatib⁹ creuisse primordijs: vt ipsa quodammodo equitas matris ⁊ radicis obtinens vim ipsa omnes inequalitatis species ordinesq̃ profundat. Sint eniꝫ nobis tres equales termini. i. tres vnitates: vel. 3. bini: vel tres terni: vel tres quaterni: vel quantos vltra libet ponere. Quod eniꝫ in vnis tribus terminis euenit: idem contingit in ceteris. Ex his igitur ẜm precepti nostri ordinem videas primum nasci multiplices: ⁊ in his duplices prius: dehinc triplos: deinde quadruplos: ⁊ ad eundem ordinem consequentes. Rursus multiplices si conuertantur: ex his superparticulares oriuntur: ⁊ ex duplicib⁹ quidem sesqualteri: ex triplicibus sesquitertij: ex quadruplis sesquiquarti: ⁊ ceteri in hunc modum. Ex superparticularibus vero conuersis superpartientes nasci necesse est. ita vt ex sesqualtero nascatur supbipartiens supertripartientem sesquiterti⁹ gignat: ⁊ ex sexquiquarto superdripartiens. Rectis autem positis neq̃ conuersis prioribus superparticularibus multiplices superparticulares oriuntur. Rectis ṽo superpartientibus multiplices superpartientes efficienter.

Precepta autem tria hec sunt: vt primum numerum prĩo facias parẽ: ẜm ṽo prĩo ⁊ secundo: tertium prĩo duobus secundis ⁊ tertio. Hoc igitur cum in terminis equalibus feceris. ex his qui nascentur duplices erunt. De quibus duplicibus si idem feceris: triplices procreantur. ⁊ de his quadruplices. atq̃ in infinituꝫ omnes formas nũeri multiplices explicabit: iaceant igitur. 3. termini equales.

1	1	1

Ponatur itaq̃ primo primus equalis idest vnus. Secundus vero primo ⁊ secundo. i. 2. tertius vero primo duobus secundis ⁊ tertio par sit. idest vni ⁊ duob⁹ vnis ⁊ vni qui sunt. 4. vt est descriptio.

1	1	1
1	2	4

Videsne vt duplici proportione sequens ordo texatur. Fac rursus idem de duplicibus vt sit primus primo equalis: idest vni. secundus primo ⁊ secundo: idest vni ⁊ duobus q sunt. 3. tertius primo idest vni duobus secũdis idest. 4. ⁊ tertio idest quattuor. qui simul. 9. fiunt ⁊ venit hec forma.

1	1	1
1	2	4
1	3	9

Rursus si de triplicibus idem feceris: continuus quadruplus procreabitur. Sit enim primus. primo equus idest vnus. sit secundus primo ⁊ secũdo equalis idest. 4. sit tertius prĩo duob⁹ secũdis ⁊ tertio eq̃lis. i. 16

1	1	1
1	2	4
1	3	9
1	4	16

Et in ceteris quidem ad hanc formam tribus his preceptis vtemur. Si ṽo qui ex eq̃libus nati sunt multiplices eos disponamus ⁊ scḋm hec precepta vertamus: ita vt cõuerso sint ordine: sesqualter ex duplici procreabitur. sesquitertius ex triplici. sesquiq̃rtus ex quadruplo. Sint enim. 3. duplices termini qui ex equalibus creati sunt ⁊ q vltim⁹ ẽ prim⁹ ponatur huiusmõi

4	2	1

¶ Et cõstituat̃ primo ĩ hoc ordine prim⁹ par. i. 4. secũdus vero primo ⁊ secundo par idest. 6. tertius ṽo primo duobus secundis ⁊ tertio idest. 9.

4	2	1
4	6	9

¶ Ecce tibi illa sesqualtera quantitas ex termino dupli

citatis

/8v./

del múltiplo. Pero si confrontas en la segunda línea todos los que hay del tercer orden, reconocerás ordenadas las especies del superparticular. Si comparas todos los que son del tercer orden en la quinta línea, verás dispuestas convenientemente las especies del número superpartiente. Se muestra el múltiple superparticular cuando se comparan con la línea segunda todos los que están en la quinta línea o los que están en la séptima o los que están en la novena y así sea hasta el infinito esa descripción; se crearán hasta el infinito las especies de esta proporción. Sin embargo queda claro que los consecuentes de éstos siempre se llamarán de manera adecuada con el prefijo sub-, como subdoble sesquiáltero, subdoble sesquitercio, subdoble sesquicuarto y los demás de este modo.

Del múltiplo superpartiente.

Capítulo XXXI.

El múltiplo superpartiente es un número que comparado con otro, lo contiene en sí entero más de una vez, y dos, o tres o cuantas sean las partes de ese número, un número de partes según la clase del número superpartiente. En éste, también por la causa antes citada, no habrá dos medios, ni dos cuartos, ni dos sextos, sino dos tercios, dos quintos, dos séptimos, en semejanza constante con el anterior. No es difícil encontrar ejemplos de los formulados antes y también otros números además de nuestros ejemplos. Se llamarán éstos según sus partes propias, doble superbipartiente, doble supertripartiente o doble supercuadripartiente, y así otros semejantes. Por ejemplo, la comparación entre 8 y 3 forma un doble superbipartiente y la de 16 a 6, y todos los que empiezan desde el ocho y van creciendo de ocho en ocho, comparados con los que empiezan por tres y se pasan de tres en tres. No será difícil para los que observen atentamente encontrar otras partes según el método expresado antes. Aquí tenemos que recordar que los menores y los consecuentes se nombran con el prefijo sub-, como es el subdoble superbipartiente, o el subdoble supertripartiente.

Demostración de cómo toda desigualdad ha derivado de una igualdad.

Capítulo XXXII.

Nos resta explicar cierta enseñanza profundísima que es pertinente a la naturaleza entera y a la totalidad de las cosas con un fundamento muy sólido. Pues en este conocimiento hay un gran beneficio. Es el bien, definido y objeto de la ciencia, y que el espíritu puede siempre percibir e imitar, que es primero por naturaleza y eterno en la belleza de su sustancia, mientras que la deformidad del mal es indefinida y no se apoya en ningún principio que sea propio de él, sino que por naturaleza siempre errante, no tiene composición más que en cuanto que está informado por el principio del bien, que es definido, como por un sello muy hermoso, separado de las corrientes del error. Pues el deseo y sus excesos, la cólera desenfrenada son reprimidos por el espíritu, que es como un conductor fortalecido por la inteligencia pura, y éste regulándolos mediante el bien, modera los sentimientos que son como las especies de desigualdad.

Quedará claro, si lo entendemos, que todas las especies de desigualdad surgen de la igualdad como de un principio y que así esa equidad en cierto modo de raíz y de madre, cobrando fuerza, da fundamento a todas las especies y órdenes de desigualdad. Pues tenemos tres términos iguales, tres unidades o tres veces dos, o tres veces tres, o tres veces cuatro o tres veces el número que se quiera poner de los siguientes. En efecto, lo que ocurre en tres unidades, sucede en los demás. Por tanto, a partir de éstos puedes ver según el orden de nuestro modelo que primero nacen los múltiplos, y entre éstos antes los dobles, después los triples, más tarde los cuádruples que les siguen en esa misma serie. A su vez, si se invierte el orden de los múltiplos surgen de éstos los superparticulares. Y de los dobles, los sesquiálteros, de los triples, los sesquitercios, de los cuádruples, los sesquicuartos y los demás de este modo. Es necesario que los superpartientes nazcan de la inversión del orden de los superparticulares. De igual manera del sesquiáltero nace un superbipartiente y al supertripartiente lo genera un sesquitercio, y del que representa un sesquicuarto, un supercuadripartiente. Ordenados los puestos y no invertidos los anteriores superparticulares nacen los múltiplos superparticulares. Ordenados los superpartientes, de ellos salen muy bien los múltiplos superpartientes. Éstas son las tres reglas: que al principio cuentes con un número igual al primero, un segundo igual a la suma del primero con el segundo, un tercero, igual a la suma del primero con dos veces el segundo y con un tercero.

Por tanto, puedes hacer esto en términos iguales; los que nacerán de éstos serán dobles. Si haces lo mismo con estos dobles, se crean triples, y de éstos, cuádruples y hasta el infinito extenderá todas las clases del número múltiplo. Sean entonces tres términos iguales:

1	1	1

Dispóngase un primero igual al primero, esto es, uno. Pero después la suma del primero con un segundo, 2, y para un tercero la suma del primero, dos veces el segundo, y un tercero, uno más dos unos, más uno que son cuatro. Ésta es la descripción

1	1	1
1	2	4

¿Ves que se establece una serie con la proporción del doble? Haz de nuevo lo mismo con los dobles de modo que el primero sea igual, esto es, el segundo es igual a la suma del primero con el segundo, esto es, el uno y el dos que hacen 3; el tercer término es igual al primero, 1 y dos veces el segundo, esto es, uno, y dos segundos, es decir, cuatro, y el tercero, cuatro, para que juntos hagan nueve, y queda de esta forma:

1	1	1
1	2	4
1	3	9

A su vez, si de los triples haces lo mismo, se creará la serie de cuádruple. Pues sea el primero, el igual al primero es el uno; sea un segundo igual al primero y el segundo, esto es, cuatro; sea un tercero, con el primero y dos segundos y un tercero, igual a 16.

1	1	1
1	2	4
1	3	9
1	4	16

Y en los demás apliquemos de esta forma estos tres modelos. Si éstos que han surgido de sus iguales, los mútiplos, los disponemos y los transformamos según estos modelos, de manera que constituyan una serie: se creará a partir del doble, el sesquiáltero, y del triple el sesquitercio, y del cuádruple el sesquicuarto. Pues sean tres términos dobles, que se han creado a partir de términos iguales que el último sea el primero de este modo:

4	2	1

Y establézcase en primer lugar en esta serie un primero igual, 4, un segundo igual al primero con el segundo, esto es 6; y un tercero con el primero dos segundos y el tercero, esto es, nueve:

4	2	1
4	6	9

Aquí tienes la cantidad sesquiáltera a partir del doble.

citatis crozit: Videam⁹ nūc ad eūdē modū ex triplici
q nascatur. disponātur .n. triplices supiores: conuerso
scilȝ ordine sicut duplex hic est quoqȝ ordo dispositus

9	3	1

Ponatur ergo primus primo equus idest. 9. secun-
dus primo ꝛ secundo idest .12. tertius prīo duob⁹ secū
dis ꝛ tertio equus idest. 16.

9	3	1
9	12	16

Rursus secunda species supparticularis nūeri idest
sesquitertius procreatus est. Quod si ideȝ de quadru
plo quis facere velit: sesquiquartus continuo nascet̄
vt monstrabit subiecta descriptio.

16	4	1
16	20	25

Ac si quis idem de cunctis in infinitū ptibus multipli
catis faciat: conuenienter ordinē supparticularitatis i
ueniet. Quod si conuersos superparticulares aliquis
sm̄ hec precepta conuertat: cōtinuo videat superpar
tientes accrescere. ꝛ ex sesqualtero quidē superbipar
tiens: ex sesquitertio supertripartiēs procreatur. ꝛ ce
teri secundum communes denominationis species si
ne vlla ordinis iterpollatiōe nascēt. Disponāt̄ igit̄ sic

9	6	4

Superioris igit̄ descriptionis primo primus equus
nūerus ascribat̄ idest. 9. secūdus vo prīo ꝛ secundo:
idest. 15. terti⁹ vo prīo: duob⁹ secundis ꝛ tertio .i. 25

9	6	4
9	15	25

Si ergo sesquitertium eodem modo vertamus. ordo
supertripartiens inuenitur. fit enim prima proposi-
tio sesquitertij.

16	12	9

Ponatur secundum priorem modū primo par prim⁹
idest. 16. secundus primo ꝛ secundo idest. 28. terti⁹ pri
mo duobus secundis ꝛ tertio idest. 49. Omnis ergo
summa disposita supertripartientes efficiet.

16	12	9
16	28	49

Rursus si sesquiquartum eodem modo verteris sup
quadripartiens statim quantitas procreabitur. vt est
ea forma quam suppositam vides.

25	20	16
25	45	81

Restat quemadmodum ex superparticularibus ꝛ su
perpartientibus multiplices suppartientes nascātur
ostendere. Quorum binas tm̄ faciā descriptiones. nā
qȝ si rectū ꝛ non conuersum sesqualterum ponimus:
duplex superparticularis excrescit. fit .n. hoc modo.

4	9	9

Ponatur scōm superiorem modum prīo primus eq̄-
lis idest. 4. secūdus primo ꝛ secūdo idest. 10. tertius
primo duobus secundis ꝛ tertio equalis idest. 25.

4	6	9
4	10	25

Eqȝ hec quidē duplex sesqualtera summa pdu
a cta est. Si vo sesquitertiū non ꝯuersū ponam⁹
dupl⁹ sesqterti⁹ inuenit̄. vt sua d̄scriptio docet.

9	12	16
9	21	49

E vo si ad suppartientes animum cōuertam⁹
a eosqȝ ordinatim scōm supiora precepta dispo-
namus: multiplices suppartientes ordinatiȝ pgēitos
repimus. Disponat̄ enim suppartiētis hec formula.

9	15	25

Eriuantur ergo primus primo equus idest. 9.
8 Secūdus primo ꝛ secūdo: idest. 24. terti⁹ pri-
mo duobus secūdis ꝛ tertio idest. 64.

9	15	25
9	24	64

Ideo ne vt ex supbipartiente dupl⁹ supbipar-
v tiens crotus sit. At vero si supertripartienteȝ
ponam: duplex sine dubio tripartiens inuenit̄
vt in subiecta descriptione perspicuum est.

16	28	49
16	44	121

Sic ergo de superparticularibus vel de su
perpartientibus multiplices superparticu
lares vel multiplices superpartientes oriū
tur. Quare constat omnium inequalitatuȝ
equalitatē esse principium. ex eadē enim i
equalia cuncta nascuntur. Ac de his quidē hacten⁹ dis
serendum esse credidimus ne vel infinita sectemur
vel circa res obscurissimas ingredientiuȝ animos de
tinentes: ab vtilioribus moraremur.

Finit liber primus.

Incipiunt capitula libri secundi.

/9r./

Veamos ahora de la misma manera la cantidad que surge del triple. Dispónganse los triples superiores de un número, ordenados al revés, según se han ordenado antes los dobles:

9	3	1

Dispóngase un primero igual al primero, esto es, nueve, un segundo con el primero y el segundo, esto es, 12, y un tercero igual a la suma del primero, dos segundos y un tercero, es decir, 16:

9	3	1
9	12	16

A su vez, se crea la segunda especie del número superparticular, esto es, el sesquitercio. Si se quiere hacer lo mismo con el cuádruple, surgirá una serie de proporción sesquicuarta, como muestra la tabla que sigue:

16	4	1
16	20	25

Y si alguien hace lo mismo con todas las partes del múltiplo hasta el infinito, encontrará entonces la serie de los superparticulares. Y si alguien invierte los superparticulares según estos modelos, verá crecer siempre los superpartientes. Y a partir del sesquiáltero, se crea el superbipartiente y del sesquitercio, se crea un supertripartiente, y los demás surgen, según las especies comunes de la denominación, sin ninguna alteración en el orden. Por tanto, dispóngase

9	6	4

Al primer número de la descripción anterior ascríbasele un número igual, esto es, el 9, un segundo con el primero y el segundo, esto es, 15 y un tercero, con el primero, dos segundos y el tercero, que dan 25

9	6	4
9	15	25

Luego si invertimos del mismo modo el sesquitercio, se halla la serie supertripartiente. Pues sea una primera disposición del sesquitercio:

16	12	9

Dispóngase según el modo anterior un primero igual al primero, esto es, 16, un segundo con el primero y el segundo, esto es, 28, y un tercero con el primero, los dos segundos y el tercero, esto es, 49. Luego toda la serie dispuesta dará los supertridivisores:

16	12	9
16	28	49

A su vez si se invierte una serie de proporción sesquicuarta del mismo modo, al punto se alcanzará una cantidad supercuadripartiente, como es de esta manera que ves debajo:

25	20	16
25	45	81

Nos falta mostrar cómo de los superparticulares y de los superpartientes surgen múltiplos superparticulares y superpartientes. De éstos vamos a hacer dos descripciones, pues si disponemos en orden y no invertimos la serie que tiene la proporción sesquiáltera, irá creciendo el doble superparticular. Sea de esta manera:

4	6	9

Dispóngase según el modo anterior un primero igual al primero, esto es, 4, un segundo con el primero y el segundo, es decir, diez, un tercero igual a la suma del primero, los dos segundos y un tercero, esto es, 25:

4	6	9
4	10	25

Esta serie que resulta es la del doble sesquiáltero. Pero si disponemos en orden no inverso una serie de proporción sesquitercia, se halla un doble sesquitercio, como muestra la descripción:

9	12	16
9	21	49

Si atendemos ahora a los superpartientes y los disponemos ordenadamente según los modelos anteriores, hallamos los múltiplos superpartientes. Dispóngase esta descripción del superpartiente:

9	15	25

Escríbase un primero igual al primero, esto es, 9, un segundo con el primero y el segundo, esto es, 24, y un tercero con el primero, dos segundos, y el tercero, esto es, 64:

¿Ves que el superbipartiente ha surgido del doble superpartiente? Pero si dispongo los supertripartientes, se halla sin duda el doble supertripartiente, como es claro en la descripción escrita debajo:

9	15	25
9	24	64

16	28	49
16	44	121

Luego de los superparticulares o de los superpartientes surgen múltiplos superparticulares o múltiplos superpartientes. Por eso queda claro que el principio de todas las desigualdades es la igualdad. Pues de ella nacen todas las desigualdades. Y de éstas creemos que se ha tratado suficientemente hasta ahora, para no proseguir infinitamente o deteniendo las mentes de los principiantes en cuestiones muy difíciles. Detengámonos por cuestiones más útiles.

Termina el libro primero

Comienzan los capítulos del libro segundo.

Finiunt capitula.

Incipit liber secundus

Quẽadmodum ad equalitatem omnis inequalitas reducatur. Capitulũ primum

Superioris libri disputatiõe digestũ ẽ. quẽadmodum tota inequalitatis substantia a principe sui generis equalitate processerit. sed que re℞ elemẽta sunt: ex eisdẽ p̃cipaliter oĩa cõponuntur: ⁊ in eadẽ rursus resolutione facta resoluũtur. Ut qm̃ articularis vocis elementa sunt lr̃e: ab eis ẽ syllaba℞ ꝓgressa coniunctio: ⁊ in easdẽ rursus terminatur extrẽas. eadẽq; vl optinet sonus in musicis. Iã ṽo mũdũ. 4. corpa nõ ignoramus efficere. Mãq; vt ait ex ibri terraq; aia signũtur ⁊ igni. sed in hec rursus eius. 4. elementa fit postrema resolutio. Ita igit̃ qm̃ ex equalitatis margine cũctas inequalitatis spẽs ꝓfici videmus: oĩs a nobis inequalitas ad equalitatem rursus velut ad quoddã elementum proprij generis resoluatur. Hoc autẽ trina rursus impatione colligit. eaq; resoluendi ars datis quibuslibet tribus terminis inequalib⁹ quidẽ: sʒ ꝓportionaliter cõstitutis: idest vt eandem medius ad primũ vim ꝓportionis optineat: quã q̃ est extremus ad mediũ in qualibet inequalitatis rõne: vel in multiplicibus: vel ĩ superparticularibus: vel in superpartiẽtibus: vel in his que ex his procreantur: hoc est multiplicibus superparticularibus: vel multiplicibus superpartientibus eadem atq; vna ratione indubitata constabit. Propositis enim tribus vt dictum est terminis equis proportionib⁹ ordinatis: vltimum semꝑ medio detrahami⁹: ⁊ ipsum quidem vltimum primũ terminũ collocemus: quod de medio relinquitur secundum. De tertia vero ꝓpositorum terminorum sũma auferamus vnũ primum ⁊ duos secundos eos qui de medietate relicti sunt. ⁊ id quod ex tertia summa relinquitur: tertiũ terminũ constituemus. Videbis igitur hoc facto in minorem modũ sũmas reuerti: ⁊ ad principaliorem habitudinem comparationes ꝓportionesq; reduci. vt si sit quadrupla proportio: primo ad triplam: inde ad duplam: inde ad equalitatẽ vsq; remeare. Et si sit superparticularis sesquiquartus: primo ad sesquitertium: inde ad sesqualteꝛ: postremo ad tres equales terminos redire. Hoc autem nos exẽpli gratia in multiplici tm̃ proportione docebimus. Sollertem ṽo in alijs quoq; inequalitatis speciebus id experientem: eadem ratio preceptorum iuuabit. Cõstituãtur enim tres ad se termini quadrupli.

8	32	128

Aufer igitur ex medio minorẽ: idest ex triginta duobus octonarium: relinquũtur. 24. ⁊ primum octonarium terminũ pones: sm̃ ṽo quod reliquũ fuerit ex medio: idest. 24. vt sint hi duo termini. 8. ⁊. 24. de tertio vero: idest. 128. aufer vnũ primũ: idest. 8. ⁊ duos secũdos qui sũt reliqui: idest bis. 24. ⁊ reliquũtur. 72. His dispositis terminis: ex quadruplis propinquior eq̃tati proportio tripla redacta ẽ. Sũt. n. hi termini.

8	24	72

Ex his aũt ipsis idẽ si feceris: ad duplã rursus cõparatio remeabit. Pone enĩ primũ minori equũ idest. 8. ⁊ ex secũdo aufer primũ. 16. relinquentr̃. Sed ex tertio idest ex. 72. aufer primũ: idest. 8. ⁊ duos secundos idest bis. 16. ⁊ erit reliqua pars. 32. Quib⁹ positis ad duplas proportiones habitudo redigitur.

8	16	32

Idem vero ex his si fiat: rem oẽm ad equalitatis summas eliquabimus. Pone enĩ primum minori equum: idest. 8. ⁊ aufer ex. 16. octonarium: remanent. 8. quibus dispositis: ex tertio idest. 32. sumptis primo: idest. 8. ⁊ duobus secundis idest octonarijs: superfuit. 8. quibus dispositis prima nobis equalitas cadit. vt subiecte summule docent.

9v./

Terminan los capítulos

Comienza el libro segundo.

Cómo toda desigualdad se reduce a la igualdad.

Capítulo I.

Por la explicación del libro anterior se infiere cómo toda sustancia de desigualdad se remonta a la igualdad primordial de su género. Los elementos primordiales de las cosas son aquellos de los que todas se componen como principios y en los que se descomponen después otra vez cuando se disipan. Por ejemplo, al leer hay elementos de la voz articulada, y la unión de sílabas se construye a partir de ellos y a su vez ese proceso se remite a ellos como a su término último. El sonido en la música tiene el mismo fundamento. Admitimos que forman el mundo cuatro elementos. Pues según dice Lucrecio todas las cosas nacen de las lluvias, la tierra, los aires y el fuego y su disolución final se deriva en estos cuatro elementos. Así a partir de la igualdad, vemos que surgen todas las especies de desigualdad; veamos cómo reducimos toda la desigualdad de nuevo en igualdad, como si volviera a cada elemento, de su propio género. Sin embargo, esto se deduce de una nueva división tripartita, a saber, el arte de reducir, dados tres términos cualesquiera desiguales, estableciendo una proporción entre ellos tal que el medio respecto al primero obtenga el mismo valor proporcional que hay entre el extremo y el medio en cualquier comparación de desigualdad, bien en múltiplos, o en superparticulares, o en superpartientes, o en las variedades que se crean a partir de éstos, múltiplos superparticulares, múltiplos superpartientes, por una proporción incuestionable.

En efecto, propuestos tres términos como se ha dicho, términos ordenados por proporciones iguales, siempre puedo reducir del intermedio el último, y podemos colocar el último mismo como primero; como segundo témino pongamos lo que resta del medio. De la serie de los tres números propuestos restamos un primero y dos veces el segundo, que es restado del término intermedio. Ése que queda del tercer número, lo hacemos tercer término. Por tanto, verás que al hacer esto, los números se reducen y las comparaciones y proporciones se ajustan a un orden más elemental. Por ejemplo, si se trata de una proporción del cuádruple, se puede pasar en primer lugar a una proporción del triple, y de ahí a una del doble, y de ahí a la igualdad. Y si es un superparticular sesquicuarto, en primer lugar, reducimos a la proporción del sesquitercio, y de ahí a la del sesquiáltero, hasta hacer finalmente iguales a los tres términos. Mostraremos esto por ejemplo en una proporción de múltiplo. Al que tenga práctica también en otras especies de desigualdad y lo pruebe se lo facilitará que se aplique el mismo método. Dispónganse tres términos cuádruples entre sí:

8	32	128

Resta el menor del intermedio, esto es, ocho de treinta y dos y queda 24. Pondrás como primer término el ocho junto con el que ha quedado en medio, esto es, el 24, de forma que quedan dos términos, 8 y 24. Del tercero, es decir, del 128, restas un primero, 8, y los dos segundos que han quedado, esto es, dos veces 24 y quedan 72. Dispuestos estos tres términos, de la proporción del cuádruple se ha reducido a la del triple. Son estos tres términos:

8	24	72

Si con éstos haces lo mismo, se reduce a su vez a una proporción del doble. Pues coloca un primero igual al menor, esto es, 8, del segundo resta el primero y quedan 16. Y del tercero, es decir, de 72 resta el primero, 8 y dos segundos, dos veces 16, y quedan 32. Al disponer éstos se reduce la serie a la proporción del doble:

8	16	32

Si se vuelve a hacer lo mismo a partir de éstos reduciremos toda la comparación a la igualdad. Pues coloca como primero uno igual al menor, esto es, 8; réstale ocho a 16 y quedan 8. Después de tomar estos dos, del tercero, es decir, de 32, restados el primero, 8, y dos segundos, dos ochos, quedan 8. Al exponer tales términos nos resulta la igualdad, como muestra el esquema siguiente:

8	8	8

Hinc igitur si quis ad alias inequalitatꝫ species aĩum tendat eãdem conuenientiam inhesitanter inueñiet. Quare pronũciãdũ est nec vlla trepidatione dubitãduz qđ queẽadmodum per se cõstãtis quantitatis vnitas principium ⁊ elementũ est. ita ⁊ ad aliquid relate quãtatis equalitas mater est. Demonstrauim⁹ enim qđ hic ⁊ ei⁹ ꝓcreatio prĩa foret: ⁊ ĩ ea rursus postrẽa ẽ.

¶De inueniendo in vnoquoqꝫ numero quot nucros eiusdem proportionis possit procedere: corũqꝫ descriptio: descriptionisqꝫ expositio. Capitulum .ii.

Est ãt quedam ⁊ hac re ꝓfunda ⁊ mirãda speculatõ ⁊vt ait nicomachus emnocophaton theorema proficiẽs: ⁊ ad platonicã in timeo aĩe gñationẽ: ⁊ ad interualla armonice discipline. Ibi enĩ iubemur ꝓducere atqꝫ extẽdere tres vel quatuor sesqualteros: vel quotlibet sesquitertias ꝓportiones: ⁊ sesqquartas cõparationes: easqꝫ secũdũ propositũ ordinẽ sepe cõtinuas iubemur extendere. Ne ãt hoc labore quodã semꝑ quidem maxio: frequenti⁹ inferaci fiat: hac nobis ratione in quot numeris quanti possint esse superparticulares inuestigandũ est: Oẽs enĩ multiplices tãtarũ similiũ sibimet proportionũ principes erunt: quoto ipi loco ab vnitate discesserunt. Quod ãt dico sibimet similium: tale est: vt dupli sẽper multiplicitas vt supi⁹ dcm̃ ẽ sequalteros creet: ⁊ triplex sit dux sesquitertioruz: q̃druplex⁹ sesquiquartꝫ. Prim⁹ ergo duplex vnũ solũ habebit sequalterꝫ. scđs duos. terti⁹ tres. quartus. 4. ⁊ scđm hũc ordinẽ eadẽ fit in ĩfinitũ ꝓgressio Neqꝫ vnquã fieri põt: vt vel supet proportionũ nũerum vel ab eo fit diminutior equabilis ab vnitate locatio. Primus ergo duplex ẽ binarius numerus: qui vnũ solũ sesqualterũ recipit. i. ternariũ. Binarius. n. 3 ternariũ cõparat⁹ sesqlterã efficit ꝓportinẽ. Ternarius vo qm̃ medietatẽ nõ recipit: ñ est alter numerus ad quẽ in rõe sesqualtera cõpareẽ. Quaternari⁹ vo nũerus scđus duplex est. hic ergo duos sesqualteros ꝓcedit. Est. n. ad ipsũ qdẽ cõparatus senarius numer⁹ ad senariũ vo qm̃ medietatẽ hꝫ: nouenari⁹. ⁊ sunt duo sesqualteri. ad. 4. s. 6. ad sex vo. 9. Nouenarius vo qm̃ medietate caret. ab hac cõparatiõe seclusus est. Terti⁹ vo duplex est. 8. hic ergo. 3. sesqualteros antecedit. Cõparatur. n. ad ipm duodenari⁹ nũerus. ad duodenariũ. 18. ad. 18. rursus. 27. At vo. 27. medio carẽt. Idẽ quoqꝫ in sequentib⁹ euenire necesse est. qđ nos cũ propria ordinatione subdidimus. Sed ꝑ. n. hoc diuina q̃dã nec hũana cõstitutiõe speculatõrib⁹ ocurit: vt quotienscũqꝫ vltimus numerus inueniatur: qui loco duplicis ab vnitate fit par: talis fit vt in medietates diuidi secariqꝫ non possit. Latitudo

1	2	4	8	16	32	
	3	6	12	24	48	
an		9	18	36	72	
gu			27	54	108	
la				81	162	
ris					243.	

Hoc idẽ cõtingit ẽt in triplicibus. ex illis. n. sesquitercii procreanẽ. Nã. qm̃ prim⁹ triplex ẽ ternari⁹ nũerus: hꝫ vnũ sesqteriũ. i. 4. Cuius q̃ternarii tertia ps ñ põt inẽiri: atqꝫ iõ hic epitrito caret. Scđs vo q ẽ nouẽ hꝫ ad se duodenariũ numeꝝ sesqtertiũ. Duodenari⁹ ãt qm̃ hꝫ tertiã ptẽ. in sesquitertia ꝓportiõe cõparaẽ ad eũ numer⁹ sedecĩ: q tertie ptis sectiõe solut⁹ est: Uigintiseptẽ aũt qm̃ terti⁹ ẽ triplex: hꝫ ad se sesqtertiũ trigintasex: ⁊ hic rursus ad q̃dragintaocto eadẽ ꝓportione cõparaẽ. Cui si sexagintaq̃tuor appositi fuerit eandẽ rursus vĩ ꝓportõis explebũt. Quos sexagintaq̃tuor ad nullũ sesquitertiũ rursus aptabis qm̃ ptẽ tertia nõ tenenẽ. Atqꝫ hoc in cũctis triplicib⁹ inuenieẽ: vt extremus eiusdẽ proportionis nũerus tãtos ante se precedẽtes hꝫ: quãto pmi⁹ eoꝝ ab vnitate discesserit. Et quot sup se eiusdẽ proportiõis habuerit numeros quotus ab vnitate prim⁹ eoꝝ iacet ei⁹ ꝑ qua illi cõparatus numerus possit eãdẽ facere ꝓportionem inueniri neqat. Et triplicis qdẽ hec ẽ descriptio. Latitudo.

1	3	9	27	81	243	
	4	12	36	108	324	
an		16	48	144	432	
gu			64	192	576	
la				256	768	
ris					1024	

Et quadrupli secũdũ hanc formã descriptõ est: ad quã. s. q a priorib⁹ instruct⁹ accesserit: nulla ratiõe trepidabit: ⁊ de ceterꝭ qdẽ a multiplicibus eandeꝫ conuenientiam pernotabit.

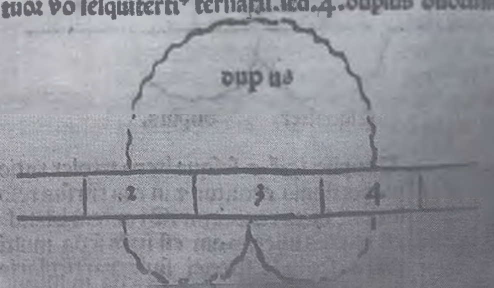
Latitudo.

1	4	16	64	256	1024	
	5	20	80	320	1280	
an		25	100	400	1600	
gu			125	500	2000	
la				625	2500	
ris					3125	

Hinc quoqꝫ ꝑspicuũ ẽ: supparticulariũ quẽadmodũ pri⁹ ostẽsuꝫ ẽ: primos eẽ multiplices. Si qdẽ duplices sesqualteros: triplices sesqtertios: ⁊ cũcti multiplices cũctos in ordinẽ supparticulares creãt. Est ẽt ĩ his hoc quoqꝫ mirabile. Nãqꝫ vbi prĩa latitudo fuerit duplex ⁊ sub eisdẽ q sũt versus cõtinui alternati. positi scđm seriẽ latitudinis duplicesꝭ erũt. Si vo fuerit triplices ⁊ inferiores ordines tripla se ĩ suis terminis multiplicatõe supabũt. At in quadrula q̃drupli. atqꝫ hoc ĩfinita ductũ speculatiõe nõ fallit. angulares ãt oĩuꝫ multiplices euẽire nece ẽ. Erũt ãt duplicũ qdẽ triplices: triplicũ q̃druplices q̃druploꝝ vo qncupli. ⁊ hꝫ eãdẽ ordĩs scđmutabilẽ rõeꝫ sibimet cũcta cõsentiẽt. qb⁹ expositꝭ ad sequẽtẽ opisꝭ seriẽ cõpetẽsꝭ disputatõ cõuertaẽ

¶Qđ multiplex iteruallũ ex qb⁹ supparticularib⁹ medietate posita ĩteruallꝭ fiat: eiusqꝫ inuẽiẽdi regula. ca. 3.

Si igiẽ due prĩe supparticularesꝭ spẽsꝭ cõiũgãẽ ꝑma spẽsꝭ mltiplicitatꝭ creaẽ. oĩs. n. duplex ex sesqltero sesqtertioqꝫ cõpõiẽ: ⁊ oĩs seqlter ⁊ sesqterti⁹ duplicẽ iũgũt. nã ternari⁹ sesqlter ẽ duoꝝ quatuor vo sesquiterti⁹ ternarii. sed. 4. duplus duorum.



/10r./

8	8	8

Por tanto, si alguien se interesa por otras especies de desigualdad, hallará sin duda que el método es adecuado. Por eso hay que declarar sin ninguna sombra de duda que la unidad de la cantidad constane por sí es el principio y el elemento, así como la igualdad es la madre de la cantidad relativa. Pues hemos demostrado que su generación es la primera y a ella se vuelve al final.

De cómo hallar en cada número cuántos números de la misma proporción se pueden crear; descripción y explicación de ellos.

Capítulo II.

Hay una observación profunda y sorprendente en esta cuestión, como dice Nicómaco, deduciendo un teorema muy inspirado, útil para la generación platónica del alma en el *Timeo* y concerniente a los intervalos de la doctrina armónica. Pues hacemos crear y extender tres o cuatro términos de proporción sesquiáltera, o cualquier serie de proporción sesquitercia, y una de proporción sesquicuarta, y las disponemos según el orden propuesto. Y en esta labor, para evitar siempre hacerlo con un esfuerzo demasiado grande e improductivo, debemos investigar con este criterio en cuántos números cuántos superparticulares puede haber. Pues todos los múltiples tendrán tantas proporciones semejantes a ellos, cuantas correspondan al rango que ocupan a partir de la unidad. Me refiero a los semejantes a ellos, a ejemplo de que la multiplicidad del doble siempre tiende a crear una serie de proporción sesquiáltera, y una triple, permita deducir una de proporción sesquitercia, y una cuádruple, una proporción sesquicuarta. Luego el primer doble tendrá un solo sesquiáltero, el segundo tendrá dos, el tercero tres, el cuarto cuatro y siguiendo este orden una progresión hasta el infinito. Nunca se puede conseguir un número que escape a esta proporción, o que a partir de la unidad el rango de un número sobrepase el número de las proporciones al que debe ser igual si no es inferior. Luego el primer doble es el número dos, que admite un solo sesquiáltero, 3, porque el número 2 comparado con el 3 produce una proporción sesquiáltera. El tres, que no admite media, no tiene otro número que se compare en proporción sesquiáltera. El cuatro es el segundo doble, luego éste corresponde a dos sesquiálteros; a éste se le compara el número seis, y a seis, porque tiene una mitad de él, el nueve. Por lo que ya tenemos dos pares de proporción sesquiáltera el seis respecto al 4, y el 9 respecto al 6. El nueve carece de media; está excluido de esta proporción. El tercer doble es el ocho, que es el antecedente de tres sesquiálteros.

Pues se compara el número 8 con el doce y se establece la relación del doce con el 18 y de éste con el 27. Pero el veintisiete carece de media. Y también es necesario que esto les ocurra a los siguientes, lo que hemos dispuesto en nuestra descripción, cada vez con su serie.

Pero esto se nos presenta por cierta ordenación no humana, sino divina: que cuando se encuentra como término último un número que por su lugar, a partir de la unidad es comparable a un doble, resulta tal que no se puede dividir ni separar en mitades.

1	2	4	8	16	32
	3	6	12	24	48
	an	9	18	36	72
		gu	27	54	108
			lar	81	162
					243

Lo mismo pasa con los triples que se crean de los sesquitercios. Pues el primer triple es el número tres, tiene un solo sesquitercio, el 4. De este cuatro como no se puede hallar la tercera parte, carece de proporción epitrito. El segundo, el 9 tiene como sesquitercio el doce, y como el 12 tiene una tercera parte, se compara en proporción sesquitercia con el número 16, que no tiene un tercio. Veintisiete es el tercer triple y está en proporción sesquitercia con treinta y seis, y éste a su vez se compara con el 48 en esa misma proporción. Si a éste se le compara sesenta y cuatro, se alcanzará una proporción de la misma naturaleza. Pero no podrás adaptar sesenta y cuatro a una proporción sesquitercia, porque no tiene tercera parte. Y esto se hallará en todos los triples: que el último número de esa proporción tienen ante sí tantos precedentes cuanto él se separa de la unidad. Y tantos por encima de ellos de esta proporción como el primero se aleje de la unidad. Se puede descubrir en él la parte que permitiera compararlo a un número para conseguir la misma proporción. Y ésta es la descripción del triple.

Longitud

1	3	9	27	81	243
	4	12	36	108	324
	an	16	48	144	432
		gu	64	192	576
			lar	256	768
					1024

Según esta forma se hace la descripción del cuádruple, para la cual se han adelantado los números desde los primeros. No habrá razón para dudar y se advertirá la aptitud de ese mismo procedimiento para los otros múltiplos.

Longitud

1	4	16	64	256	1024
	5	20	80	320	1280
	an	25	100	400	1600
		gu	125	500	2000
			lar	625	2500
					3125

También a partir de este esquema se observa de manera evidente que el superparticular no es primero, que su origen son los mútiplos. Si se crean dobles con proporción sesquiáltera y triples con proporción sesquitercia, y todos los múltiplos generan superparticulares en orden.

Hay asímismo otra observación sorprendente. Pues cuando la primera línea en longitud es doble, los que están colocados en líneas continuas alternadas bajo ellos, serán dobles. Pero si son triples, las líneas inferiores estarán constituidas por términos que se superarán en multiplicación por tres; y en multiplicación por cuatro los cuádruples y esto llevado hasta el infinito no falla. Es necesario que los angulares sean múltiplos de cada clase de números, bien los triples de los dobles, los cuádruples de los triples, los quíntuples de los cuádruples. Y todo será coherente consigo en comparación inalterable del orden; con lo que se ha explicado se puede seguir la serie.

El intervalo múltiplo, a partir de qué intervalos superparticulares se hace, establecido un término medio, y de la regla para hallarlos.

Capítulo III.

Las dos especies primeras superparticulares se relacionan con la primera especie de multiplicidad. Así el doble se compone del sesquiáltero y del sesquitercio. Los sesquiálteros y los sesquitercios reunidos dan lugar al doble. Pues el tres es el sesquiáltero de dos, el cuatro es el sesquitercio de tres, pero 4 es el doble de dos.

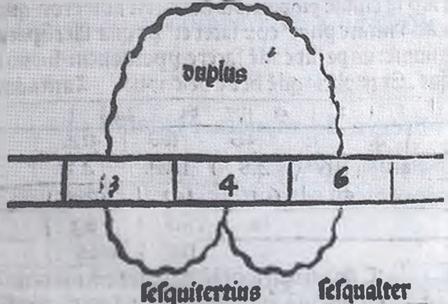
doble

2	3	4

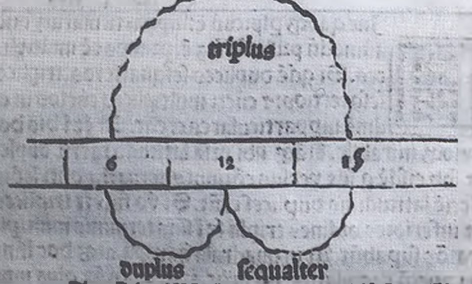
Sesquiáltero / sesquitercio

ſeſqualter ſeſquitertius

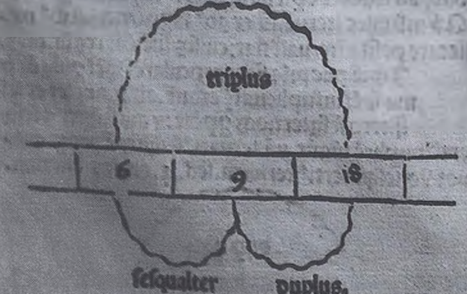
SIc igitur ſequalter ⁊ ſeſquitertius vnum duplicem componunt. At vero ſi fuerint medietas ⁊ duplus inter duplicem ⁊ medium poteſt vna medietas tallis inueniri: q̄ ad alterā extremitatē ſequaltera ſit: ad alteraꝫ ſeſquitertia. Altrinſecus enī poſitis ſenario ⁊ ternario: ideſt duplici ⁊ medietate: ſi q̄ternari⁹ in medio collocetur: ad ternarium numerum ſeſquitertiaꝫ continet rōnem: ad ſenarium v̄o ſeſqualterum.



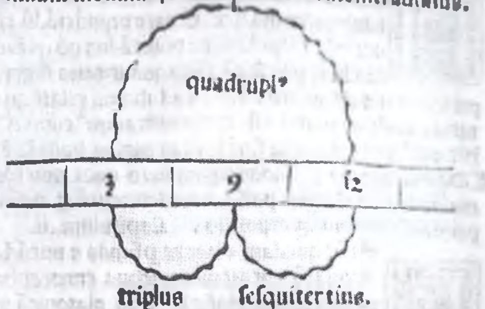
REcte igitur dictū eſt: ⁊ duplicez a ſeſq̄ltero ſeſquitertio que coniungi: ⁊ has duas ſup̄particularis ſpēs duplicez procreare ideſt primā ſpēm multiplicis quātitatis. Rurſus ex prima multiplicis ſpē. i. ex duplici: ⁊ p̄ſa ſupp̄ticulari: ideſt ſeſqualtera ꝯtinēſ multiplicīſ ſpēs: ideſt tripla cōiungitur. Naqꝫ. 12. ſenarii. numeri duplus eſt: decem vero ⁊ octo ad duodenarium ſeſqualter: qui ad ſenarium eſt numerum triplus eſt.



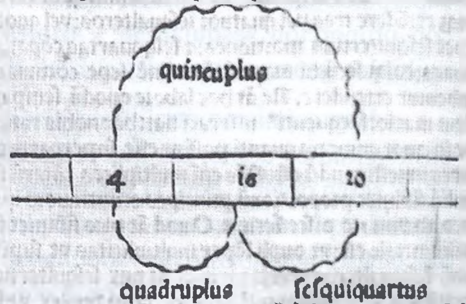
ET poſitis eiſdē. 6. ⁊. 18: nouenari⁹ ſ medietate ponat. erit ad ſenariū ſeſqualter: q̄ ad. 18. ſubduplus eſt. ⁊ ad ſenarium. 18. triplus eſt.



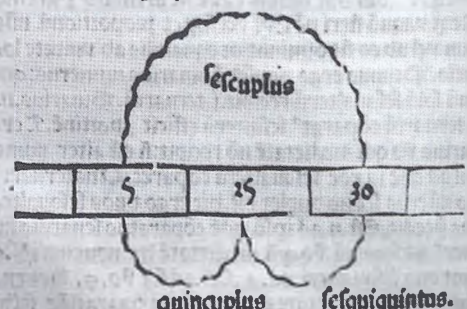
EX duplici igit̄ ⁊ ſeſqualtero triplex ratio proportionis exoritur ⁊ in eas rurſus reſolutione facta reuocatur. Si autem hic: ideſt triplus nūerus qui eſt ſpēs ſcd̄a multiplicis ſecunde ſpeciei ſuperparticularis aptetur: quadrupli continuo forma contexitur: ⁊ in eaſdem rurſus partes naturali partitione ſoluetur: ſecundum modum quem ſuperius demonſtrauimus.



SI vero quadruplus ſeſe ac ſeſquiquart⁹ agglomerent: quincuplus continuo fiet.



ET ſi quincuplus cū ſeſq̄quinto: mox ſeſcupli proportio coniugabitur.



ATqꝫ ita ſecundum hanc progreſſionē cuncte multiplicitatis ſpēs nnc vlla rati ordinis permutatione naſcentur. Ita vero vt duplus cum ſeſqualtero triplicem creet: ⁊ tripl⁹ cū ſeſquitertio quadrupluꝫ. quadruplus cum ſeſquiquarto quincuplum. ⁊ ceteri eodem modo vt nullus hanc continuationem finis impediat

¶De per ſe conſtante quantitate que in figuris geometricis conſideratur cōis rō oīum magnitudinum.

Capitulum. iiii.

HEc quidem de quantate quam ſecundum ad aliquid ſpeculamur ad preſens dicta ſufficiant. Nunc autem in hac ſequentia quedam de ea quantitate que per ſeipſam conſtat neqꝫ ad aliquid refertur expediam. que nobis ad ea p̄deſſe poſſūt: que poſt hec rurſus de relata ad aliquid quantitate tractabimus. Amat enim quodāmodo matheſeos ſpeculatio alterna probationum ratione conſtitui. Nunc autem nobis de his numeris ſermo futurus eſt: qui circa figuras geometricas ⁊ earum ſpacia dimenſioneſqꝫ verſantur. ideſt: de linearibus numeris: ⁊ de triangularibus vel qua

/10v./

Así el sesquiáltero y el sesquitercio componen un doble. Si hubiera una mitad y un doble, entre el doble y un medio podría hallarse una media tal que respecto a un extremo tuviera una proporción sesquiáltera y respecto al otro, sesquitercia. Así se oponen el 6 y el tres, esto es, un doble y su media. Si se coloca el cuatro en medio, este número tiene respecto al cuatro una proporción sesquitercia, y sesquiáltera respecto al seis

doble

3	4	6

Sesquitercia / sesquiáltera

Así está correcto: que los dobles se producen por la reunión de un sesquiáltero y un sesquitercio y que estas dos especies del superparticular crean el doble, esto es, la primera especie de la cantidad múltiplo. A su vez de la primera especie del múltiplo, esto es, el doble, y también de la primera del superparticular, esto es, el sesquiáltero, constituyen la siguiente especie del múltiplo, esto es, el triple. Pues 12 es el doble de seis. El diez y ocho respecto del 12 tiene la proporción sesquiáltera, y es el triple de seis

triple

6	12	18

Doble / sesquiáltero

Dispuestos los mismos 6 y 18, el nueve colóquese el nueve en medio. Se verá que es sesquiáltero respecto al seis y doble respecto al 18; y 18 es el triple de seis.

triple

6	9	18

Sesquiáltero / doble

Del doble y del sesquiáltero surge una proporción del triple y al hacer el análisis, se vuelve de nuevo a ellas. Si el triple, que es la segunda especie del múltiplo se ajusta la segunda especie del superparticular, se formará en continuidad con los anteriores, la serie del cuádruple; de manera contraria, se hará el análisis en esas mismas partes, por una división natural, según el método que hemos demostrado más arriba cuádruple

3	9	12

Triple / sesquitercio

Si se asocia el cuádruple con el que tiene la proporción de sesquicuarto, resultará el quíntuple

quíntuple

4	16	20

Cuádruple / sesquicuarto

Si el quíntuple con el que tiene una proporción sesquiquinta, conjugan la proporción del séxtuple

séxtuple

5	25	30

Quíntuple / sesquiquinto

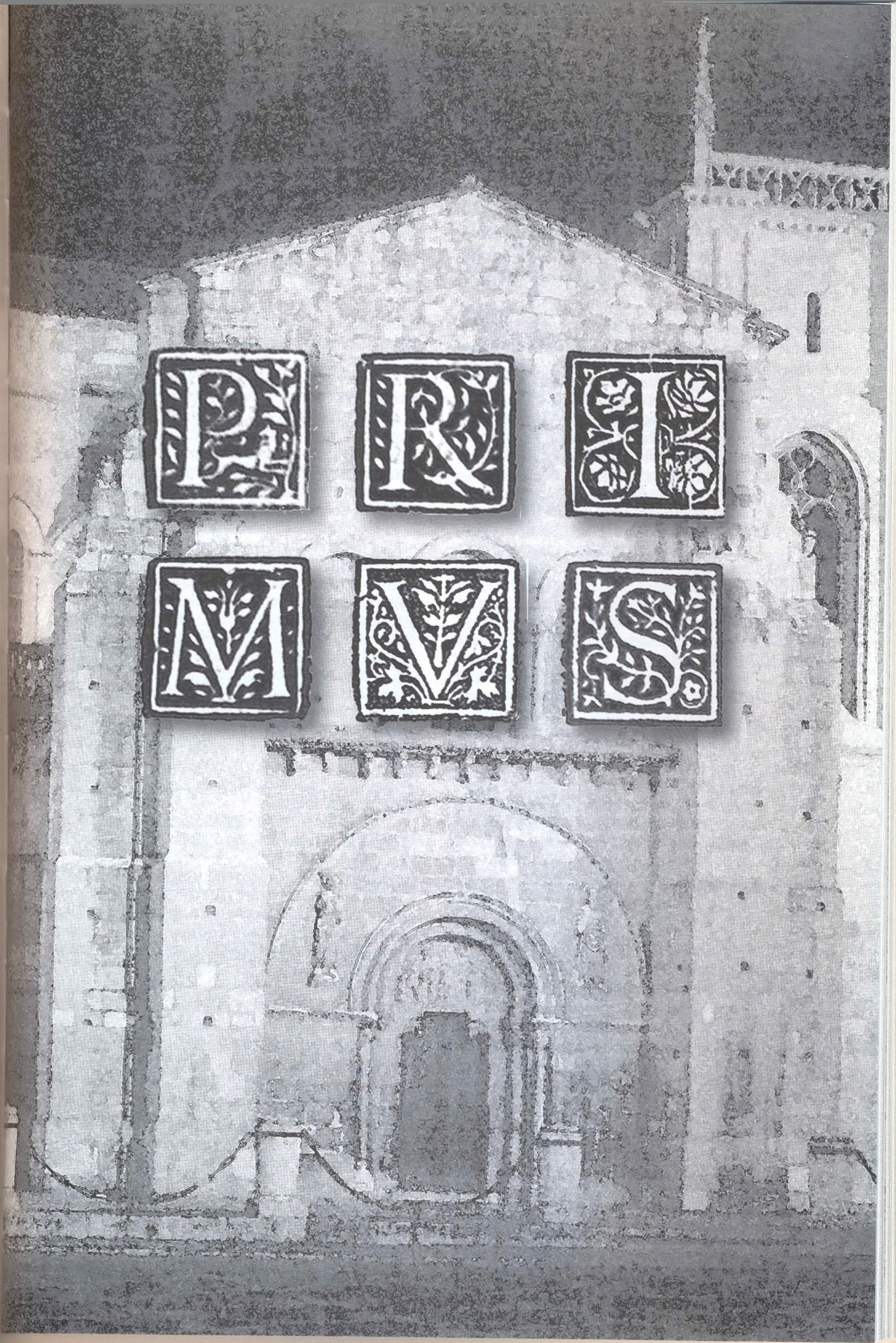
Y así, según esta progresión, las especies de toda clase de multiplicidad surgen sin ningún cambio en el orden previsto. De este modo, el doble crea el triple con el sesquiáltero y el triple con el sesquitercio, el cuádruple, y el cuádruple con el sesquicuarto, el quíntuple, y los demás del mismo modo sin que ningún límite impida esta continuidad.

De la cantidad considerada en sí en las figuras geométricas; los nombres de todas las magnitudes.

Capítulo IV.

Respecto a la cantidad relativa, lo dicho es suficiente por el momento. En lo que sigue tratemos lo que nos puede interesar más de la cantidad considerada en sí y no de modo relativo a otra, y después de esto, volveremos a referirnos a la cantidad relativa. La reflexión de la matemática, en cierto modo, gusta de constituirse con un fundamento alternativo de las demostraciones.

Ahora vamos a hablar de estos números que se aplican a las figuras geométricas y a los espacios y dimensiones de ellas, esto es, de los números lineales, de los triangulares, de los cuadrados,


PRI
MVS

dratis:ceterisq; quos sola pandit plana dimensio nec non de inequali laterum compositione coniunctis. de solidis etiam:idest:cubis:⁊ sphericis vel pyramidis: laterculis etiam vel tignulis ⁊ cuneis que omnia quidem geometrice proprie considerationis sunt. Sed sicut ipsa geometrice scientia ab arithmetica velut quadam radice ac mater producta est:ita etiam eius figurarum semina in primis numeris inuenimus. Planum si quidem fecimus quod omnes disciplinas hec interempta consumeret quas minime constituta infirmaret. Hoc autem cognoscendum est quod hec signa numerorum posita que nunc quoq; homines in summarum designatione describunt:non naturali institutione formata sunt. vt enim quinarii subiectam notulam signant de.v.vel denarii quam descripsimus de.x.⁊ alias huiusmodi:non natura posuit :sed vsus affinxit. Quinq; enim vel decem vel quotlibet alios illis notulis pro compendio notare voluerunt:ne quotiens vnitates quis monstrare vellet.totiens ei virgule ducerentur. Nos autem quotienscunq; aliquid monstrare volumus:in his presertim formulis:ordinatarum virgularum multitudinez non grauamur apponere. Cum enim quinq; volumus demonstrare:facimus quinq; virgulas:ducimusq; eas hoc mō. I I I I I. ⁊ cum.7.totidem.⁊ cum.10. nihilominus.q; naturalius est quemlibet numeruz quantas in se retinet:tot vnitatibus designare quaz notulis Est igitur vnitas vicem optinens puncti:interualli:longitudinisq; principium:ipsa vero nec interualli nec longitudinis capax. quemadmodum punctum principium quidem linee est atq; interualli:ipsum vero nec interuallum nec linea. Neq; enim punctum puncto superpositum vllum efficit interuallum:velut si nihil nulli iungas. Nihil eniz est quod ex nulloruz procreatione nascat̃. Eadem quippe etiam circa equalitatis proportio manet. Nam si quotlibet fuerint termini pares:tantum quidem est a primo ad secundum: quantum a secundo ad tertium. Sed inter primum ⁊ scd̃m:vel secundum ⁊ tertium:nulla est interualli longitudo vel spacium. Si enim tres senarios ponas hoc modo. 6 :6. 6.quẽadmoduz primus est ad secundum:sic est secundus ad tertium. Sed inter primum ⁊ secundum nihil interest. 6.enim.⁊.6.nulla spacii interualla disiungũt. Ita ẽt vnitas in seipsa multiplicata nihil pcreat. Semel.n.i vnũ nihil aliud ex se gignit quã ipa ẽ. Nã quod interuallo caret etiam vim gignendi interualla non recipit.quod in aliis numeris non videtur euenire. Omnis enim numerus in seipsum multiplicatus alium quẽdam efficit maiorem quam ipse est. iccirco quoniam interualla multiplicata maiore sese spacii plititate distendũt. Id vero quod sine interuallo ẽ: pl⁹ quam ipsuz est pariendi non habet potestatẽ. Ex hoc igitur principio:idest ex vnitate prima omnium longitudo succrescit:que a binarii numeri principio in cunctos sese numeros explicat.quoniam primum interuallum linea est:duo vero interualla sunt longitudo ⁊ latitudo.i.linea ⁊ superficies. Tria ergo interualla sunt:longitudo:latitudo:altitudo:idest linea:superficies:atq; soliditas. Preter hec aũt alia interualla inueniri non possunt. Aut enim vnum interuallum erit quod longitudo est aut aliquid quod duob⁹ interuallis expositum est:vt si qua res longitudinẽ habeat ⁊ latitudinem. vel trina interualli dimensione porrigit̃ si longitudine:altitudine:latitudineq; censetur. supra que adeo nihil inueniri potest. vt ipsorum sex motuũ forme ad interuallorum naturas ⁊ numerum componantur. Unum enim interuallum duos in se continet motus. vt in tribus interuallis sex sese motuum summa conficiat hoc modo. Est enim in longitudine ante ⁊ retro. in latitudine sinistra ⁊ dextra : in altitudine sursum ac deorsum. Necesse est ãt vt quicqd fuerit solidum corpus:hoc habeat longitudinem latitudinẽq; ⁊ altitudinem.⁊ quicquid hec tria in se continet:illud suo nomine solidum vocetur. Hec eniz tria circa omne corpus inseparabili coniunctione versantur.⁊ in natura corporum constituta sunt. Quare quicqd vno interuallo caret:illud corpus solidum nõ est. Nã quod duo sola interualla retinet:illud superficies appellatur. Omnis enim superficies sola longitudine ⁊ latitudine continet̃.⁊ hic eadem illa conuersio remanet. Omne enim quod superficies est : longitudinem ⁊ latitudinẽ retinet.⁊ qd̃ hec retinet:illud est supficies. Hec ãt supficies vno tñ iteruallo solidi corporis dimẽsiõe supat̃:q̃ vno rursus interuallo lineã vincit. q̃ lõgitudinis nãm retinẽs latitudinis expers ẽ. Que linea eo qd̃ vni⁹ ẽ iteruallí sortita nãm a supficie vno interuallo:a soliditate duobus spaciis vincit̃. Pũctũ igit̃ alio rursus interuallo a linea vincit̃:ipa.s.que reliqua ẽ lõgitudine. Quare si pũctũ vno idẽ interuallo a linea supgredit̃:idẽ a supficie vĩcitur duob⁹: trib⁹ v̾o interualli dimẽsiõib⁹ a soliditate relinqtur:cõstat punctũ ipm sine vlla corpis magnitudine vel iteruali dimensiõe:cũ ⁊ lõgitudinis ⁊ latitudinis ⁊ pfunditatis expers sit oĩum interualloꝝ eẽ principiũ:⁊ nã insecabile:qd̃ greci athomon vocãt.i.ita diminutũ atq; paruissimũ vt ei⁹ ps inueniri nõ possit. Est igit̃ pũctũ primi iteruallí pĩcipiũ:nõ tñ interuallũ.⁊ linee caput:sed nõdũ linea. Sicut linea quoq; supficiei pricipiũ ẽ:ꝫ ipa supficies nõ ẽ:⁊ secũdi interualli caput est:scd̃z tñ interuallũ ipa non retinet. Idẽ quoq; ⁊ in supficiei rõnem cadit:que ⁊ ipsa solidi corporis ⁊ triplicis interualli nãle sortit̃ initiũ:ipsa v̾o nec tria interualli dimẽsiõe distẽdit̃:nec vlla crassitudĩe solidat̃

¶De numero lineari. Capitulũ. v.

Sic etiã in numero vnitas qdẽ cũ ipa linearis numer⁹ nõ sit:in lõgitudinẽ tñ distẽti nũeri pĩcipiũ est. Et linearis numer⁹ cuz ipse toti⁹ latitudinis expers sit:in aliud tamẽ spaciũ latitudinis extẽti nũeri sortitur initiũ. Supficies quoq; numerorum cum ipsa solidũ corpus non sit:addita tamẽ altitudini solidi corporis caput est. Hoc autem planius his exemplis liquebit. Linearis numerus est a duobus inchoans:adiecta semper vnitate in vnum eundemq; ductum quantitatis explicata congeries. vt est id qd̃ subiecimus.

| ii | iii | iiii | iiiii |

¶De planis rectilineis figuris:quodq; earum principium sit triangulus. capitulum. vi.

Plana v̾o supficies in nũeris inuenit̃ : quotiẽs a trib⁹ ĩchoatiõe facta addita descriptiõis latitudine:in sequentiũ se nãliũ numeroꝝ multitudine anguli dilatant̃: vt sit prim⁹ triangul⁹ nũer⁹. scd̃s q̃drat⁹. terti⁹ q sub quinq; angulis ↄtinet̃:quẽ pentagonũ greci nominant:quart⁹ hexagonus.i.q sex angulis includit: quint⁹ heptagon⁹. sext⁹ octogonus.i.qui.7.vel.8.anguloꝝ terminis dilatãtur.⁊ ceteri eodẽ mõ singillatĩ p nãlem nũeꝝ angulos augeant in plana superscriptione figurarũ. Hi v̾o iccirco a ternario numero ĩchoant: qd̃ latitudinis ⁊ supficiei sol⁹ ternari⁹ pĩcipiũ ẽ.i.geo

/11r./

y de los demás que no se extienden sólo en la dimensión plana, así como de los formados por una composición desigual de los lados; también de los sólidos, esto es, de los cubos, de las esferas y de las pirámides; los ortoedros, las vigas, las cuñas, todos los que propiamente son objeto de la geometría.

Pero como la propia ciencia geométrica ha nacido de la aritmética como de una raíz y madre, así también encontramos la semilla de las figuras de ella en los primeros números. Consideramos claro que si se suprime, hace desaparecer todas las disciplinas y que si no se constituye bien, las debilita. Hay que reconocer estos signos de los números que ahora las personas escriben para anotar las cantidades; no se han establecido de modo natural, como el signo V para el cinco o el diez que escribimos X y otras semejantes no las ha puesto la naturaleza, sino que las ha fijado el uso. Pues han querido anotar de una manera compendiada cinco o diez o cualquier otro número con esos signos, para que quien quiera mostrar tal cantidad de unidades no tuviera que aportar otras tantas varitas. Y nosotros cuando queremos mostrar algo en estas fórmulas sobre todo, no nos molestamos en anotar un montón de varitas ordenadas. Pues si queremos mostrar el cinco no dibujamos cinco varitas y las colocamos de esta manera IIIII y cuando 7 otras tantas, y sin embargo, es más natural designar con tantas unidades cuántas veces un número contiene a otro dentro de sí, que con signos.

La unidad hace las veces de un punto, de un intervalo, de principio de longitud, pero no es equivalente a un intervalo, ni a una longitud, de la misma manera en que un punto es el principio de una línea y de un intervalo, pero en sí mismo no es ni intervalo ni línea. Pues tampoco hace un intervalo un punto superpuesto a otro punto, es como si sumas nada a nada, porque es nada lo que resulta de la generación de lo que no son nada.

Ciertamente también entre igualdades una proporción se mantiene. Pues si se toman términos iguales cuantos se quiera, la misma igualdad hay entre el primero y el segundo, que entre el segundo y el tercero; pero entre el primero y el segundo y entre el segundo y el tercero no hay ningún intervalo de longitud ni espacio. Pues si comparas tres seis de este modo: 6.6.6 el primero es como el segundo y lo mismo el segundo como el tercero, y entre el primero y el segundo no hay nada entre medias, pues entre 6 y 6 no se abre ningún intervalo de espacio. Así la unidad multiplicada por sí misma no sufre pérdida. Pues uno multiplicado por uno no genera otra cosa distinta que ella misma.

Y lo que carece de intervalo tampoco admite la capacidad de generar intervalos, cosa que no parece ocurrir en otros números. Pues todo número multiplicado por sí mismo genera otro mayor que él, y por eso los intervalos multiplicados se hinchan en mayor extensión de espacio. Pero lo que no tiene intervalo no tiene posibilidad de hacer surgir algo que sea más de lo que es él.

Por tanto, de este principio, esto es, de la unidad primera crece la longitud de todas las cosas; desde el principio del número, dos se multiplica para dar origen a todos los números. Porque la primera dimensión es la línea y dos dimensiones son el largo y el ancho, la línea y la superficie; luego tres dimensiones, longitud, anchura y profundidad, son la línea, la superficie y la solidez. No se pueden hallar dimensiones fuera de estas tres. En efecto, si una cosa tiene una dimensión será el largo, si tiene dos dimensiones, tiene largo y ancho, o si se extiende en las tres dimensiones, se considera en largo, ancho y alto; no se puede encontrar nada más, de manera que se compongan las seis formas de movimientos según la naturaleza y el número de las dimensiones. Pues una dimensión contiene en sí dos movimientos, por lo que en tres dimensiones, la suma alcanza los seis movimientos de este modo: en longitud, adelante y atrás, en anchura a derecha e izquierda, en profundidad hacia arriba y hacia abajo.

Necesariamente un cuerpo sólido tiene que tener longitud, anchura y profundidad y lo que estas tres dimensiones contienen en sí, y se llamará propiamente sólido. Pues estas tres se definen en todo cuerpo en unidad inseparable y están fundadas en la naturaleza de los cuerpos. Por eso el cuerpo que carece de una dimensión no es sólido, porque el que sólo tiene dos dimensiones se llama superficie, ya que toda supercifie sólo tiene longitud y anchura, y aquí se queda su correspondencia, puesto que lo que es superficie mantiene longitud y anchura y lo que mantiene estas dos, eso es superficie.

Esta superficie rebaja en una sola las dimensiones del cuerpo sólido y supera a la línea en una sola, pues mantiene la longitud y participa de la anchura. Esta línea sólo tiene una dimensión y se distingue de la superficie por una dimensión y del sólido por dos espacios. La línea aventaja al punto a su vez por otra dimensión, la longitud que resta. Por eso, si la línea se adelanta al punto en un intervalo, se dice que la superficie lo hace en dos, y medido desde la solidez, le faltan tres dimensiones.

Se ve que el punto mismo sin ninguna magnitud propia de un cuerpo ni dimensión, aunque carente de longitud, de anchura y de profundidad, es el principio de todas las dimensiones. Pues es indivisible, los griegos lo llaman átomo, tan diminuto y pequeñísimo es, que no se le puede encontrar ninguna parte.

En consecuencia, un punto es el principio de la primera dimensión, no una dimensión, y la cabeza de la línea, sino que aún no es línea. Tal como la línea no es todavía el principio de la superficie y sin ser ella misma la superficie y el principio de la segunda dimensión, porque no tiene la segunda dimensión. También ocurre eso con la superficie que lleva el principio del cuerpo sólido y de la tercera dimensión y no se extiende en la tercera dimensión, ni se consolida con ningún espesor.

Del número lineal.

Capítulo V.

De igual manera que en el número, la unidad, aunque no es ella misma un número lineal, sí es el principio del número extenso. Y el número lineal, aunque carente de anchura en absoluto, es el comienzo del número extenso hacia la dimensión del espacio. También la superficie en cuanto a números, aunque no es ella misma un cuerpo sólido, respecto de la profundidad es el principio del cuerpo sólido. Esto quedará más claro con los ejemplos siguientes. El número lineal, empezando desde el dos, sumando siempre una unidad, el montante de la cantidad va extendiéndose en uno y el mismo trazo, como esto que hemos escrito a continuación:

II III IIII IIIII

De las figuras planas rectilíneas y que el triángulo es el principio de ellas.

Capítulo VI.

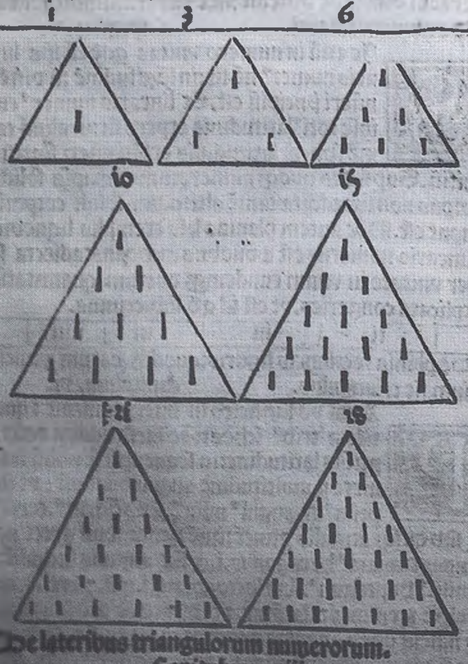
Reconocemos una superficie plana en cuanto a números toda vez que habiendo comenzado desde el tres, se añade la anchura en la descripción. En la multitud de los números naturales que siguen, se abren los ángulos, por lo que el primero es el número triangular, el segundo, el cuadrado, el tercero se contiene en la determinación de cinco ángulos, que los griegos llaman pentágono, el cuarto, hexágono, que se define por seis ángulos, el quinto, heptágono, el sexto, octógono, y los que se extienden en la superficie definida por siete u ocho ángulos, y los demás, del mismo modo cada uno aumenta por el número natural los ángulos en descripción plana de las figuras. Comienzan por el número tres por este motivo, a saber, porque el número tres es el solo principio de la anchura y de la superficie geométrica metrica quoqꝫ idē plāi⁹ īueīt. Due.n.linee recte spaciū nō ɔtinēt.ꝛ oīs triāgularꝫ figura: vł tetragoī: vł pētagoī: vel exagōi: vel cui uslibꝫ q plurib⁹ angulis ɔtieē: si a medietate p singulos āgulos liee pducāt tot cū diuidūt triāguli: quot ipaꝫ figurā āgulos hre ɔtigerit. q̄dratū.n.ita ducte liee ī.4.pētagōuꝫ ī.5.exagonū ī.6.heptagōuꝫ ī.7.ceteros ī suoꝝ āguloꝝ mō mēsuraqꝫ p triāgulos partiūtur. vt ē subīa descriptio

T vero triangula figura cū eā qs ita d u
[a] serit: in alias figuras non resoluit nisi in se ipsam in tria enim triangula dissipat.

Deo hec figura princeps ē latitudinis: vt cete
a re oēs supficies in hanc resoluātur: ipa vo q̄ā nullis est principiis obnoxia: neqꝫ ab alia latitudine sumpsit initiū in sese ipsa resoluatur. Idē aūt ꝛ in numeris fieri sequēs opis ordo monstrabit.

De dispositio triāgulorum numerorum. Cap. 7.

St igit primus triangulus numerus q solis
e tribus vnitatibus dissipatur: ſm superficiei positionem triangula .ſ. descriptione: ꝛ post hunc quicunqꝫ equalitatem laterum in trina laterꝫ spacia segregant.



De lateribus triangulorum numerorum. Capitulum. viii.

D hūc modū in infinita pgressio est oēsqꝫ ordine triāguli equilateri pcreabuntur: ꝛ primum oīum ponēt id quod ex vnitate nascitur: vt hec vi sua triangulus sit. non inde ēt ope atqꝫ actu. Illa nāqꝫ cunctorum ē mater numerorū: quicquid in his qui ab ea nascunt numeris inuenitur: necesse est vt ipsa naturali quadam potestate ɔtineat. ꝛ huius trianguli latus est vnitas. Ternarius vo qui prius est ope ꝛ actu ipo triangul⁹ crescente vnitate binarium numerum latus habebit. Vni enī ꝛ potestate primi trianguli.i.vnitatis vnitas latus est. actu vo ꝛ ope trianguli primi.i.ternarii dualitas: quā greci dyada vocāt. Scdi vo triāguli qui ope atqꝫ actu scds ē.i.senarii: crescente nāli numero in laterib⁹ ternari⁹ īuenit. Tertii.vo.i.denarii q̄ternari⁹ latus ɔtinet: ꝛ q̄rti vo idest.15.quīari⁹ lat⁹ tenet. ꝛ quinti senarius. Idēqꝫ vsqꝫ ī infinitū.

De generatione triāgulorum numeroꝝ. Ca.ix.

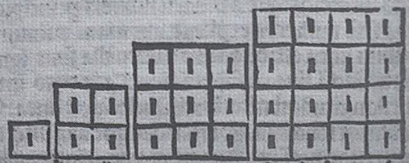
Ascuntur aūt trianguli disposita nāli quā
n titate numeroꝝ: si prioribus semp multitudo sequētium congregetur. Disponat enī naturalis numerus hoc modo.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

X his igit si primū numeꝝ sumā idest vnitatem: habeo primum triangulum: qui est vi ꝛ potestate nondum etiam actu nec opere. Huic si secundum aggregauero qui naturali numerorum dispositione descriptus est idest binarium: primus mihi triangulus opere ꝛ actu nascitur idest ternarius. Si vo huic tertium ex naturali numero adiecero: secundus mihi ope ꝛ actu triangulus procreatur. Super vnum enī ꝛ duo si tertium idest ternarium aggregauero senarius extenditur: secundus.ſ. triangulus. Huic vo si cōsequentem quaternarium supposuero: denarius explicat: qui ē tertius actu triāgulus. quos p latera disponens ad superioris descriptionis exemplar: cunctos triāgulos numeros sine vllius dubitationis erroribus pernotabis. ꝛ quātas vltimus numerus in se vnitates hꝫ quē superioribus aggregabis: tot ipe qui fit triangulus vnitates habebit in latere. Nam ternarium qui est prim⁹ actu triāgulis adiecto bīario vnitati feceram⁹ at hic duos habet in latere. ꝛ senariuꝫ his adiecta ternarii quantitate produximus: cuius latus soli tres cōtinent: ꝛ idem in aliis cunctis quot vnitates habentem numerum superioribus aggregabis: tot vnitatibus eius latera continebuntur.

De quadratis numeris Capitulum. x.

Uadratus vo numerus est: qui etiam ipse quidem latitudinem pandit sed non in tribus angulis vt superior forma: sed.4. Ipse quoqꝫ equali laterum dimensione porrigitur. Sūt autem huiusmodi.



De eorum lateribus. Capitulum. xi.

Ed in his quoqꝫ scdm naturalem numerū
s laterum augmenta succrescūt. Primus.n. vi ꝛ potentia quadratus idest vnitas: vnū habet in latere. Secundus vo qui actu primus idest

/11v./

y también lo mismo en el plano. Pues dos líneas rectas no contienen espacio y toda figura triangular a semejanza del tetrágono, del pentágono o del hexágono o de cualquiera, se define por varios ángulos. Si desde el medio se trazan líneas que corten cada uno de los ángulos, la figura se divide en otros tantos triángulos, cuantos lleve el nombre de la figura, cuatro en el cuadrado, al trazar cuatro líneas, en el pentágono cinco, en el hexágono, seis, en el heptágono, siete, y a los demás los divide el número y la medida por triángulos, como muestra la descripción.

(véase el dibujo en fol. 11v.)

Pero la figura de tres ángulos no se resuelve en otras figuras, si se le hace lo mismo, se disuelve a sí misma en tres triángulos:

(véase el dibujo en fol. 11 v.)

Por eso esta figura es el principio de la anchura, como todas las demás superficies se resuelven en ésta, y ella no depende de otros principios, ni toma origen en otra extensión, se resuelve en sí misma. La siguiente parte de nuestra obra mostrará que lo mismo ocurre en los números.

Disposición de los números triángulos.

Capítulo VII.

Sea un primer número triángulo que se resuelve en tres unidades solas. Véase la disposición de la superficie en la descripción triangular y después de éste, por igualdad de los lados, se separan en tres espacios de los lados:

(véase el esquema en fol. 11 v.)

De los lados de los números triángulos.

Capítulo VIII.

De esta manera se procede en progresión infinita. Se crearán en serie triángulos equiláteros y en primer lugar se pondrá el que nace de la unidad; aunque ésta por su propio valor no es triángulo, a partir de ella se crea realmente y en acto. Pues es madre de todos los números, cualquier cosa que se encuentre en estos números que nacen a partir de ella, es necesario que ella lo contenga por cierta potencia natural. De este triángulo la unidad es el lado. El número 3 es el primer triángulo en realidad y en acto, al crecer la unidad, tendrá un lado del número dos. La unidad es el lado del triángulo unidad, del primer triángulo virtualmente y en potencia; pero el primer triángulo en acto y en realidad, tiene por lado el número 2, que los griegos llaman díada. Es decir, el triángulo que es el segundo en realidad y en acto, es decir, el seis, tiene tres en sus lados al crecer en los lados el número natural. El tercer triángulo, el diez, tiene un lado de cuatro, y el cuartro, esto es, el 15, lo tiene de cinco; el quinto de seis, y así hasta el infinito.

(véase el esquema en fol. 11 v.)

De la generación de los números triángulos.

Capítulo IX.

Los triángulos nacen dispuesta una cantidad natural de los números, si se agrega una pluralidad de seguidores a los anteriores. Pues dispóngase el número natural de este modo:

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Si tomo la cantidad del primer número, esto es, la unidad, tengo el primer triángulo, que existe virtualmente y en potencia, pero no en acto y en realidad: Si agrego a éste un segundo término que está escrito en la disposición natural de los números, esto es, el dos, me nace el primer triángulo en realidad y en acto, esto es, el ternario. Pero si a éste le añado un tercero a partir del número natural, se me crea el segundo triángulo en realidad y en acto. Por encima de uno y dos, si agrego un tercero, es decir, el tres, se extiende un seis, el segundo triángulo.

A éste, si le pongo el cuatro consiguiente, se extiende a un diez, que es el tercer triángulo en acto. A éstos disponiéndoles por los lados a imagen de la descripción anterior (véase el esquema en fol. 11 v.) dibujarás todos los triángulos sin errores ni duda, y cuantas unidades tenga el último número en sí agregarás a los anteriores, y otras tantas unidades tendrá en el lado el triángulo que resulte.

Pues el tres, que es el primer triángulo en acto, lo habíamos hecho añadiendo dos a la unidad, pero éste tenía dos en el lado, y el seis lo hemos conseguido añadiendo a éstos la cantidad de tres. Su lado lo definen tres unidades y lo mismo en todos los demás a los que añadirás a los anteriores el número que tenga las unidades; sus lados se definirán por la adición de otras tantas unidades a los precedentes.

De los números cuadrados.

Capítulo X.

El número cuadrado es un número que también se extiende en anchura, pero no en tres ángulos como la forma anterior, sino en 4. Él avanza por igual dimensión de los lados. Son de esta manera:

(véase el esquema en fol. 11 v.)

De los lados de ellos.

Capítulo XI.

En éstos también crecen los aumentos de los lados según el número natural. El primer cuadrado virtualmente y en potencia, es decir, la unidad, tiene uno de lado. El segundo, que en acto es el primero, esto es, mus idest.4. duobus p latera positz ztinetur. Tertius vo.i.nouē qui secundus est opere: trib' in latere positis aggregatur. Et ad eādē sequētiā cūcti procedūt.

De quadratorum generatiōe rursusq3 de eorum laterib' Capitulum.xii.

Nascūtur aūt tales numeri ex nālis nūeri dispositiōe: nō quēadmodū supiores triāguli: vt ordinatis ad se inuicē numeris cōgregentur: sz vno semp intermisso qui sequitur si cū supiore vel supiorib' colligatur: ordiatos ex se quadratos efficiet. Disponatur enim nālis nūer' hoc mō

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

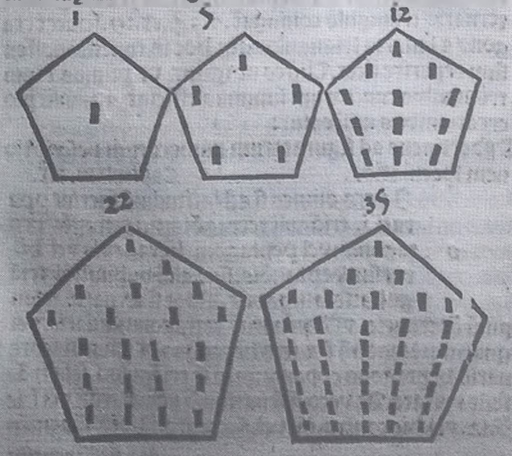
Pro his igit si vnū respiciā: prim' mihi natus ē potestate q̄drat'. Qd si vno relicto priori tertio iunxero: secūdus mihi q̄drat' efficit. Nā si vno relicto binario ternariū apposuero: quaternari' mihi q̄drat' exoritur. Qd si rursus relicto medio quaternario quinariū similiter aggregauero: quadrat' mihi tertius.i. nouenarius pcreat. Vn'.n.z.3.z.5.nouem colligūt At vero si bis intermisso senario septenarium iungam.tota i.16.ei' sūma concrescit: idest q̄rti q̄drati numerositas. Et vt breuiter huius forma pcreatiōis appareat: si cuncti ipares sibimet apponantur. collocato.s.nāli nūero: quadratorum ordo texetur. Est etiā in his hec nāe subtilitas z imobilis ordinatio: qd tot vnitates vnusquisq3 q̄dratorum retinebit in latere: quāti fuerint nūeri ad ziunctionē ppriā zgregati. Nam in p'mo quadrato qm ex vno sit: vn' est i latere. In secundo idest quaternario qm ex vno z tribus pcreatur: qui duo sunt termini: binario lat' texitur. z i nouenario quoniā trib' numeris procreatur: latus ternario continetur. Atq3 idem in aliis videri licet.

De pentagonis eorūq3 lateribus. Ca. xiii.

Pentagon' vo numer' est: q ipse quidem i latitudinē scdm vnitatem descriptis quidē .5. angulis continetur: cūctis.s.lateribus equali dimensione dispositis. Sunt āt hi.

1	5	12	22	35	51	70

Quē quoq3 mō eorum latera succrescūt. Nā primi potestate pentagōi.i.vni'.idē vn' spaciū lateris tenet. Secūdi vo quinarii qui est actu ipo atq3 opere prim' pētagonus: bini p latera fixi sūt Terti' vo idest.12.tribus in lat' auct' ē. Quart'.22. 4.nūerorum in latere quātitate distenditur. Atq3 idē in ceteris scdm vnitatz pgressionē in nāli.s. numero secūdū superiorum figurarum incrementa tenduntur.



De generatione pentagonorum. Ca.xiiii.

Nascuntur aūt hi numeri q extensi in latitudine quīq3 angulos pādūt: ab eadē nālis numeri quantitate in sese coaceruata: ita vt duobus sp interiectis numeris superiori vel superioribus vincēs ternario cū cui iungend' est aggregetur. Namq3 vnitati intermissis duob' z trib' si quatuor iungas: qui tribus ipsam superent vnitatem: quinarius pentagonus procreabitur. Post.4.vo si intermisso quario z senario.7.aggreges duodenariū pentagonū pcreabis. Namq3 vnus z.4.z.7.numeri.12.explebunt. Hoc ēt in aliis fiet. Nam si.10.vel.13.vel.16.vel.19.vel.22.vel.25.superioribus cunctz adiunxeris: eodem quo superius mō pentagoni fient: sm superiorem descriptionem.

22	35	51	70	92	117

De hexagonis eorumq3 generationibus. Ca. xv.

Hexagoni autem qui sex angulis z heptagoni.qui .7.rursus lateribus continentur: sm hunc modum eorum laterum augmenta succrescunt. Nāq3 in trianguli numeri nā pcreationeq3 ipsos numeros iungebamus qui sese in nāli dispositione sequerentur. z se tm vnitate transirent: q̄drati vo numeri.i.tetragōi pcreatio fiebat ex numeris q vno intermisso copulabantur cum se binario superarent pentagoni vo nā fuit ex duobus interpositis relictisq3 qui se ternario vincēt. Scdm quoq3 talia augmta hexagonorum vel octogonorum vel.9.laterum figura vel.10.vel quotlibet aliorum cōpetenti progressione conficitur. Ut enim in pentagono duobus intermissis eos iungebamus qui se ternario superarent. ita nunc in hexagono tribus intermissis eos iungemus qui se quaternario trāscēdant. z erūt quidem eorum radices z fundamenta: ex quibus iunctis oēs hexagoni nascuntur.

1	5	9	13	17	21

Et ad eūdem ordinem consequētes: atq3 ab his sexangulorum forme nascuntur.

1	6	15	28	45	66

Quos ad superiorem modum.s.descriptos: in propriis ordinibus pernotabis.

De heptagonis eorumq3 generationib': z cōmunis oium figurarum inueniende generatiōis regula descriptionisq3 figurarum. Caplm. 16.

Heptem vo angulorum figura est: cū ad eūdē ordinem progressionis vno plusquam in.6.angulorum figura numero intermisso supiori cōiunxeris. Nā si quatuor interpositis qui sese quinario vincant aggregaueris: heptagoni ztinuo figura nascetur. vt hi numeri sint eorum radices z vt superius dictum est fundamenta.

1	6	11	16	21

Qui vero ex his constant hi sunt.

1	7	18	34	55

Quem vero angulorum scdz eūdē ordinē forma pcreatur: ita vt scdz equalē pgressionem primi quoq3 eorum numeri distent. Nā i triāgulo q sūt numeri: que p'ma superficiei figura est: vno sese tantum numeri procedūt: q.s.eorum nām descriptionēq3 pficiūt. In tetragono vero qui secundūs est duobus sese iūcti numeri vincūt: z in pētagono trib' z in hexagono.4. z in heptagono.5.huiusq3 rei null' ē mod'. Hoc aūt nos subiectarū formarum descriptiones docebunt.

/12r./

el cuatro, tiene dos por lado. El tercero, nueve, que es el segundo en realidad, se constituye con tres en el lado, y con la misma secuencia van saliendo los demás.

De la generación de los cuadrados y a su vez de los lados de ellos.

Capítulo XII.

Tales números nacen de la disposición del número natural, no a la manera de los triángulos anteriores, en que se agregaban números de cada vez. Saltándose el que sigue, si se suma al anterior o a los anteriores, ordenados a partir de él saldrán los cuadrados. Dispóngase el número natural de esta manera:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Si se atiende al uno, me nace un cuadrado primero en potencia. Si saltándome el dos, agrego el tres, me sale el segundo cuadrado. Pues si sumo el tres al uno dejando el dos, me sale un cuadrado de cuatro. Si dejando el cuatro, añado uno y tres al número cinco de la misma manera, me crea un tercer cuadrado de nueve. Uno más tres más cinco se reúnen en nueve.Pero si a éstos, saltándo el seis, sumo el siete, la suma crece hasta 16, esto es, la cantidad de cuatro por cuatro. Y como fórmula de creación de este número brevemente: si todos los impares se van sumando, según el orden del número natural, se constituirá la serie de los cuadrados. Y también en éstos esta sutileza y ordenación fija, tantas unidades tendrá en el lado cada uno de los cuadrados cuantas fueran los números añadidos a la suma para construirlo. Pues el cuadrado construido con el uno, lleva uno en el lado. El segundo, esto es, en el de cuatro, construido al sumar tres a uno, como éstos son dos términos, se construye con un lado de dos. Y el de nueve, que resulta de tres números, tiene un lado de tres. Y así se puede ver en otros.

De los pentágonos y de sus lados.

Capítulo XIII.

El número pentágono es el que en anchura siguiendo la unidad se incluye en los cinco ángulos descritos, y estando dispuestos todos sus lados en igual dimensión. Sean éstos:

1	5	12	22	35	51	70

De esta manera crecen sus lados. (véase el esquema en fol. 12 r.) Pues el primer pentágono en potencia tiene el espacio de uno de lado. El segundo, de cinco, que es el primer pentágono en acto y en realidad, tiene dos por lado. El tercero, esto es, el de 12, aumenta teniendo tres de lado, el cuarto, de 22, aumenta a cuatro la cantidad de los números en el lado. Y lo mismo en los demás, siguiendo la progresión de la unidad en el número natural, según se extienden los incrementos de las figuras anteriores.

De la generación de los pentágonos.

Capítulo XIIII.

Éstos números extensos que se ensanchan en 5 ángulos en el plano, nacen a partir de la misma cantidad del número natural aumentada. Así, saltando dos números, irás uniendo el número que haya que sumar al anterior y a los anteriores. Pues a la unidad une, saltando el dos y el tres, el cuatro, que supera en tres a la unidad, y se hará un pentágono de cinco. Después, al cuatro, saltando el cinco y el seis, añadirás el siete, y crearás un pentágono de doce. Pues los números uno, 4 y 7 llegarán a 12. Esto también sucederá en los demás. Pues si sumas10 o 13, 16 o 19, 22 o 25 a todos los anteriores, los pentágonos, se crearán del mismo modo que antes según la descripción anterior:

22	35	51	70	92	117

De los hexágonos y de las generaciones de ellos.

Capítulo XV.

Los hexágonos que se contienen en seis ángulos y los heptágonos en siete ángulos y otros tantos lados crecen según esta manera de aumento de sus lados. Pues como íbamos sumando los números del número triangular para su creación, los que les siguen en el orden natural y van pasando de unidad en unidad, se conseguía la generación del número cuadrado y del tetrágono a partir de números que se unían saltándose uno, como los pentágonos lo superaban a partir de dos, pues se hacía sumando los números elegidos dejando dos entre medias, que crecían de tres en tres.

Según estos aumentos, la figura de seis o de ocho lados o de diez o de cuantos se quiera, se crea en progresión coherente . Pues como el pentágono, saltándose dos, sumaba ese número de sumandos, que crecían de tres en tres, así ahora en el hexágono, saltando tres, vamos sumando los números que se superan de cuatro en cuatro, y serán sus raíces y fundamentos; de la suma de éstos nacen los hexágonos:

1	5	9	13	17	21

Siguiendo el mismo orden, a partir de éstos nacen las formas de los hexágonos:

1	6	15	28	45	66

Advertirás que los descritos se forman de la manera anterior, en sus propios órdenes.

De los heptágonos y de la generación de ellos, para hallar la regla de la generación de odas las figuras y de la descripción de las figuras.

Capítulo XVI.

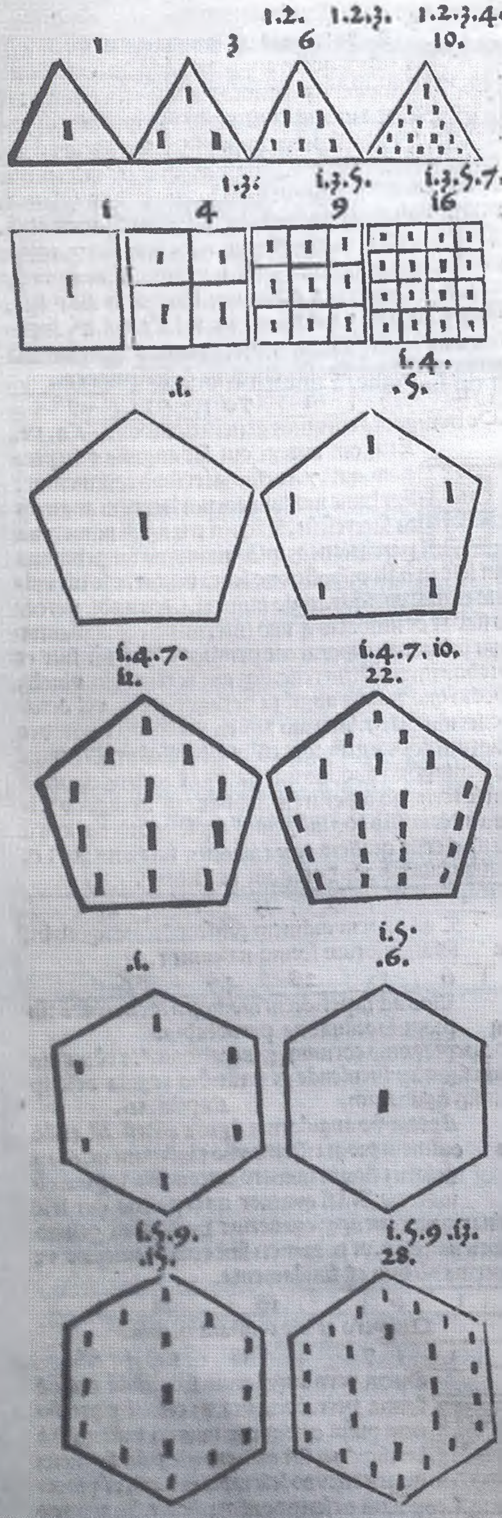
La figura de siete ángulos se forma cuando según el mismo orden de la progresión, saltándose un número más que en la figura de seis ángulos, vas sumando al anterior. Pues si añades dejando cuatro entre medias los números que se van superando en cinco, nacerá de continuo la figura del heptágono, según esos números son sus raíces y como se ha dicho antes, sus fundamentos:

1	6	11	16	21

Pero los que se forman a partir de éstos son:

1	7	18	34	55

La figura de nueve ángulos, siguiendo el mismo orden se crea si distan según una progresión igual también los primeros números de ellos. Pues los números que hay en el triángulo, que es la primera figura de superficie se adelantan en uno solamente, y se aplican a la descripción de ellos. En el tetrágono, que es el segundo, los números sumados se superan en dos, en el pentágono en tres, en el hexágono en cuatro, en el heptágono en cinco y no hay modificación en eso. Las descripciones de las formas que aparecen a continuación nos lo mostrarán:



¶ Descriptio figuratorũ numerorum in ordine. Capitulum .xvii.

Similiter autem licebit ⁊ aliarum formarum que pluribus angulis continetur: quantitates ascribere. Sed quoniam facilius oculis subiecta retinentur: supradictarum formarum numerositas in subteriore descriptione ponatur.

trianguli	1	3	6	10	15	21	28
quadrati:	1	4	9	16	25	36	49
pentagoni	1	5	12	22	35	51	70
hexagoni	1	6	15	28	45	66	91
heptagoni	1	7	18	34	65	81	112

¶ Qui figurati numeri ex quibus figuratis numeris fiant: atq; quod triangulus numerus omnium reliquorum principium sit. Capitulum .xviii.

His igitur ita sese habentib⁹ quid in hac re sit consequens inuestigemus. Omnes enim tetragoni qui sub triangulis sunt naturali ordinatione dispositi: ex superioribus triãgulis procreãtur: illorumq; collectione quadrati figura componitur. Quatuor enim tetragonus fit ex vno ⁊ tribus: idest ex duobus superioribus triãgulis. Nouem vero ex tribus ⁊ .6. sed vtriq; sunt triãguli. At .16. ex .6. ⁊ .10. ⁊ .25. ex .10. ⁊ .15. Idemq; in sequenti ordine quadratorum constans atq; immutabile reperitur. Pentagonorum vero summe conficiuntur ex vno super se tetragono ⁊ altrinsecus triangul⁹ cõstituto. Nãq; .5. pentagonus ex quatuor super se posito tetragono: ⁊ ex vno qui in triangulorũ ordine ponitur aggregatur. Duodecim vero pentagonus ex nouenario super se quadrato: ⁊ tribus secundo triangulo nascitur. Uigintiduo vero ex .16. ⁊ .9. quadrato. s. atq; triangulo ⁊ .35. ex .25. ⁊ .10. ⁊ in ordinem ad eundẽ modum intuentem nulla cunctatio contrarietatis impediet. At vero si hexagonos librata examinatione perspicias: ex eisdem triangulis ⁊ super se positis pentagonis procreantur. Namq; sex hexagonus: ex quinario pentagono ⁊ vno qui est in triangulorum ordine dispositus nascitur. Nec alia est origo .15. hexagoni: nisi ex duodenario pentagono ⁊ ternario triangulo. Quod si .28. rursum hexagonum ex quibus superioribus nascatur addiscas: nullos inuenies nisi .22. pentagonum senariumq; triangulum. Atq; hoc in ceteris. Nec hunc geniture ordinem heptagonorum procreatio refutabit. Namq; ex super se hexagonis: ⁊ ex eminus positis triangulis procreantur. Septem enim heptagonus nascitur ex senario hexagono ⁊ vno prãte triangulo. 18. vero heptagonus ex .15. hexagono ⁊ ternario triangulo coniugatur. ⁊ .34. ex .29. scilicet exagono ⁊ senario triangulo: atq; hoc in cunctis inoffensum reperire licet. Uidẽs ne igitur vt primus omnium triangulus cunctorum summas efficiat ⁊ omniũ procreationibus misceatur:

¶ Pertinens ad figuratorum numerorum descriptionem speculatio. Capitulum .xix.

Si vero omnes si ad latitudinẽ fuerint cõparati. i. triãguli tetragõis: vel tetragõi pen
8 tagonis: vel pentagoni hexagonis vel hi rursus heptagõis: sine aliq dubitatiõe triãgulis: sese supabũt. Nãq; si ternariũ triangulũ quaternario vel quaternariũ tetragonum quinario: vel quinariũ pẽtagonũ senario hexagono vel senariũ septenario heptagono cõpares: prio se triãgulo. i. sola trãscẽdit vnitate. At vero si senarius quẽ nouenariũ: vel hic quẽ .12. vel hic contra .15. vel .5. contra .18. pro inueniendis differentiis

/12v./

(véase el esquema en fol. 12 v.)

Descripción en serie de los números de las figuras.

Capítulo XVII.

De manera semejante se pueden escribir las cantidades de otras formas que se contienen en más ángulos. Pero porque lo que se ve se reitene más fácilmente, dispónganse las cantidades de las formas antedichas en la descripción siguiente:

Triángulo	1	3	6	10	15	21	28
Cuadrado	1	4	9	16	25	36	49
Pentágono	1	5	12	22	35	51	70
Hexágono	1	6	15	28	45	66	91
Heptágono	1	7	18	34	55	81	112

Qué números de las figuras se obtienen a partir de ciertos números de figuras y cómo los números del triángulo son el principio de todos los demás.

Capítulo XVIII.

Siendo así éstos, investiguemos qué constante hay en este comportamiento. Pues todos los tetrágonos que están debajo del triángulo, se han dispuesto según su orden natural. Unos se crean a partir de los triángulos anteriores y al reunirlos se compone la figura de un cuadrado. Pues cuatro resulta de uno y tres, esto es, de los dos triángulos anteriores. Nueve de 3 y 6, pero unos y otros son triángulos. Pero 16 a partir de 6 y 10; 25 a partir de 10 y 15. Lo mismo se encuentra constante e invariable en el orden siguiente de los cuadrados.

La suma de los pentágonos se consigue a partir de un tetrágono que lo contiene y un triángulo constituido con otro fundamento. Pues el pentágono cinco se forma a partir del tetrágono cuatro que lo incluye y se le agrega un número que se pone en el orden de los triángulos. El pentágono doce, a partir del cuadrado nueve que lo incluye y nace con el segundo triángulo de tres. El veintidós, a partir del 16 y del 6, cuadrado y triángulo respectivamente y el 35, a partir del 25 y el 10 y observando en orden del mismo modo, no pondrá reparos ningún titubeo de contrariedad.

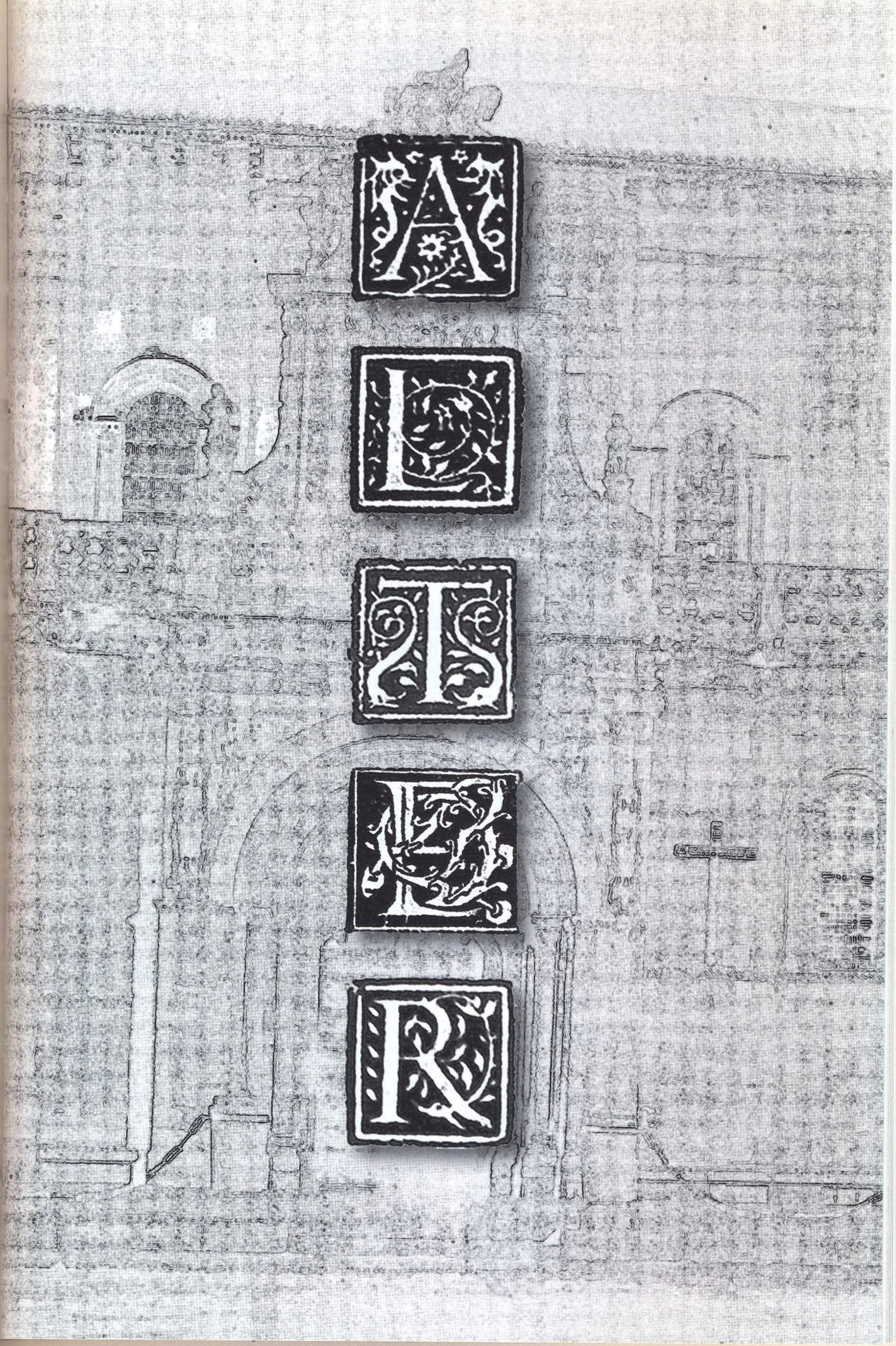
Pero si observas los hexágonos en un examen detallado se crean a partir de los mismos triángulos y los pentágonos situados sobre ellos. Así el hexágono seis se crea a partir del pentágono cinco y de uno, que está dispuesto en el orden de los triángulos. Y el origen del hexágono 15 no es diferente de un pentágono de doce y un triángulo de tres. Y si a su vez se aprende a crear un hexágono de 28, a partir de los anteriores, no encontrarás otro que un pentágono de 22 y un triángulo de seis. Y esto en los restantes.

La creación de heptágonos no negará este orden de generación. Pues se consigue con un hexágono situado encima y unos triángulos dispuestos desde uno. Pues el heptágono siete nace del hexágono seis y un triángulo de uno, que es un triángulo en potencia; un heptágono de 18, a partir de un hexágono de 15 y un triángulo de tres, y esto se puede encontrar sin dificultad en todos. Por tanto, ves que el triángulo, primero de todos, hace las sumas de todos los demás y se incluye en la generación de todos.

Observación pertinente a la descripción de los números de las figuras.

Capítulo XIX.

Si todos se comparan en extensión, los triángulos con los tetrágonos, los tetrágonos con los pentágonos o los pentágonos con los hexágonos o éstos a su vez con los heptágonos, sin ninguna duda se superarán con los triángulos. Pue si comparas un triángulo de tres con uno de cuatro, y un tetrágono de cuatro con uno de cinco, o un pentágono de cinco con un hexágono de seis, o un heptágono de seis con uno de siete, se sobrepasan en el valor del primer triángulo, el de la sola unidad. Pero si es el seis frente al nueve o éste frente al doce, o éste frente al 15, o el 15 frente al 18, para encontrar


A
L
T
E
R

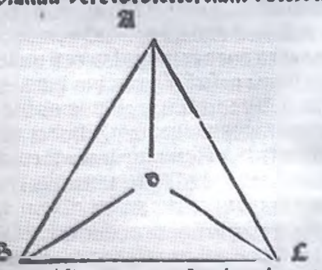
dis differentijs comparetur: secundo se triangulo. i. ternario superabunt. Decem vero ad. 16. et. 16. ad. 22. et. 22. ad. 28. et. 28. ad. 34. si componas: tertio se triangulo vincent idest senario. Atque hoc rite notabitur in aliis cunctis sequentibus sese perspectum: omnesque se trianguli antecedent. Quare perfecte vt arbitror demonstratum est omnium formarum principium elementumque esse triangulum.

De numeris solidis. Cap. 20.

Hinc vero ad figuras solidas facilior via est. Precognito enim quid i planis numerorū figuris vis ipsa quantitatis naturaliter operetur ad solidos numeros non erit vlla cunctatio. Sicut enim longitudini numerorum aliud interuallum idest superficiem vt latitudo ostenderetur adiecimus: ita nunc latitudini siquis addat eam que alias altitudo: alias crassitudo. alias profunditas appellatur: solidum numeri corpus explebit.

De pyramide quod ea sit solidarum figurarum principium sicut triangulus planarum. capi. 21.

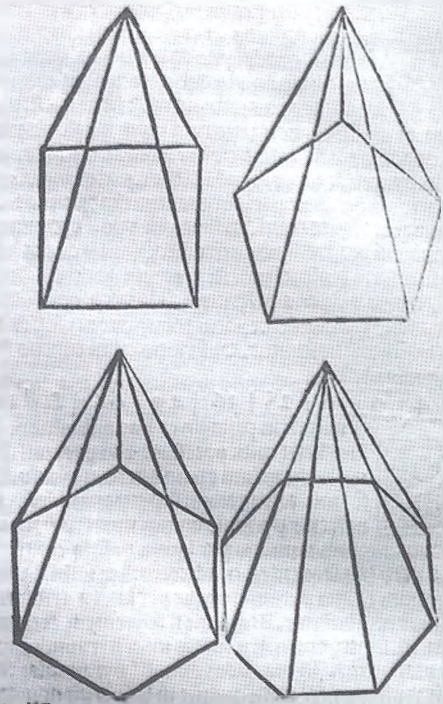
Videtur autem quemadmodum in planis figuris triangulus numerus primus est: sic i solidis qui vocatur pyramis profunditatis esse principium. Omnium quippe iratarus in numeris figurarum necesse est inuenire primordia. Est autem pyramis alias a triangula basi in altitudinem sese erigens: alias a tetragona alias a pentagona: et secundum sequentium multitudines angulorum ad vnum cacuminis verticem subleuata. posito enim triangulo atque disposito: si per tres angulos singule recte linee stantes ponantur: hecque tres inclinentur vt ad vnum medium punctum vertices iungāt sit pyramis. Que cum a triangula basi profecta sit: trib⁹ triāgulis p latera ꝯcluditur hoc mō. Sit. a. b. c. triangulum: si huic igitur triangulo per tres angulos erigantur linee: et ad vnum punctum conuertant quod est. d. ita vt. d. punctum non sit in plano sed pendens: ille scʒ linee ad ipsum erecte verticē et quodam modo cacumen. d. facient: et erit basis. a. b. c. vnū triāgulū: p latera vero tria triangula idest vnuʒ triangulum. a. d. b. aliud vero. b. d. c. tertium vo. c. d. a.



De his pyramidis que a quadratis vel a ceteris mł triangulis figuris proficiscuntur.

Capitulum. xxii.

Item si a tetragona basi proficiscatur. et ad vnum verticem eius linee dirigantur: erit pyramis quatuor triangulorum per latera vno tm̄ tetragono in basi posito super quā figura ipsa fundata est. et si a pētagono surgant quinque linee: quinque rursus pyramis triangulis continebitur: et si ab hexagono sex triangulis nihilominus: et quantoscunque angulos habuerit figura sup quam pyramis residet. tot ipsa per latera triangulis continetur. vt in subiectis descriptionibus palam ē.



Solidorum generatio numerorum. Ca. xxiii.

Dicuntur autem huiusmodi pyramides hoc modo. Prima pyramis de triangulo: secūda pyramis de tetragono: tertia pyramis de pentagono: quarta pyramis de hexagono quinta pyramis de heptagono. Idem i ceteris constat numeris. Nam qm̄ lineares numeros eē diximus: qui ab vno profecti in infinitum currerent vt sunt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

His aūt ordinatim cōpositis et in se inuicem cum distantia iunctis superficies nascebāt. Ut si vnū et duo iūgeres: prim⁹ triangulus nasceret. i. 3. et cū his adiūgerem⁹ tertiū. i. ternariū: senari⁹ triangulus rursus occurreret. et post hos tetragoni vno intermisso: pētagoni vo duob⁹: hexagoni trib⁹: heptagoni relictis quatuor nascebāt. nūc vo ad solidoꝝ corporū ꝓcreationē: ipe nobis supficies nālr figurate ꝓueniēt: et ad faciendas qdē pyramidas a triāgulo ipsi nobis triāguli ꝯponēdi sunt. ad ꝓcreādas vo pyramidas a tetragono: tetragoni. ad eas vo q̄ sūt a pētagono: pentagoni copulandi sūt. et ille q̄ sūt ab hexagono vel heptagono nō nisi hexagonoꝝ vel heptagonoꝝ copulatiōe nascent. prim⁹ ergo pōtate triāgul⁹ vnitas est: eādēque etiā ponemus virtute pyramidā. secūdus vo triāgul⁹ ē ternarius. quē si cū p̄io coniūxero. i. cū vnitate: quaternaria mihi ꝓfunditas pyramidis excrescit. At vo si is tertiū senariū iūxero: denaria pyramidis ꝓcreabit altitudo. His si dēariū iūxero. 20 nūcroꝝ pyramis vēiet atque ita in cunctis alijs eadē rō copulatiōis est. triang pyra mida

Trianguli.

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Pyramides a triangulis.

1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

/13r./

las diferencias compárese, y se superarán en tres, el valor del triángulo que le sigue. Pero si enfrentas el de diez con el de dieciséis y el de 16 al de 22, el de 22 al de 28, y el de 28 al de 34, se superarán en la cantidad del tercer triángulo, esto es, el de seis. Y esto se apreciará regularmente en todos los siguientes respecto a él y en todos los triángulos que le preceden. Por eso se ha demostrado perfectamente según creo, que el principio de todas las formas y elementos es el triángulo.

De los números sólidos.

Capítulo XX.

De aquí hacia las figuras sólidas el camino es más fácil. Pues como se sabe de antemano algo de los números en las figuras planas, el valor mismo de la cantidad de manera natural se aplica a los números sólidos, no habrá ninguna duda. Según hemos añadido a la longitud otro intervalo de números, esto es, la superficie, para que se muestre como anchura, así ahora si alguien añade la que en un aspecto se llama altitud, en otro espesor, en otro profundidad, se llenará el cuerpo del número sólido.

De la pirámide; que ella es el principio de las figuras sólidas como el triángulo de las planas.

Capítulo XXI.

Se ve de qué modo el número triángulo es el primero en todas las figuras planas; así también en los sólidos el que se llama pirámide es el principio de la profundidad. En efecto, es necesario encontrar las semillas de todas las figuras pensadas en los números. Unas veces, la pirámide se levanta en altura desde una base triangular, otras, de una base tetragonal, otras de una pentagonal, y según las cantidades de los ángulos siguientes se eleva hasta el vértice unitario.

Dibujado un triángulo y expuesto a consideración, si se trazan por los tres ángulos otras tantas líneas rectas y éstas tres se inclinan de modo que unan sus vértices en un punto medio, se forma una pirámide. La pirámide que surge de una base triangular, se cierra por tres triángulos y lados de esta manera. Sea el triángulo A.B.C. Si a este triángulo se le elevan líneas que atraviesen los tres ángulos y converjan en un punto, que es D, así el punto D no está en el plano, sino que está suspendido.

Estas líneas elevadas hacia el mismo vértice y cima en cierto sentido hacen D, y será su base A.B.C, un triángulo, y por lados tres triángulos, esto es, un triángulo A.D.B, otro B.D.C y un tercero C.D.A.

(Véase el dibujo en fol. 13 r.)

De estas pirámides que se obtienen a partir de figuras cuadradas, o de otras figuras triangulares.

Capítulo XXII.

Lo mismo si se parte de una base tetragonal y se dirigen las líneas de ella hacia un vértice. Será la pirámide de cuatro triángulos por lados, teniendo un tetrágono en la base, sobrc la cual se ha fundado la figura misma. Y si del pentágono surgen cinco líneas, la pirámide se definirá a su vez por cinco triángulos y si a partir de un hexágono con seis triángulos y cuantos sean los ángulos que tuviera la figura sobre la que se asienta, con otros tantos triángulos por lados se definirá, como se ve claramente en las descripciones siguientes.

La generación de los números sólidos.

Capítulo XXIII.

Las pirámides de esta clase se llaman de este modo: la primera pirámide de triángulo, la segunda, pirámide de tetrágono, la tercera, pirámide de pentágono, la cuarta, pirámide de hexágono, la quinta, pirámide de heptágono. Lo mismo ocurre con los demás números. Pues según vamos citando los números lineales que partiendo del uno corren hasta el infinito, como son

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Después de colocados por orden y sumados entre sí cada uno con una distancia se generaban las superficies. Si sumas el uno y el dos, se creará el primer triángulo, el tres con éstos sumaremos. El tercero, el triángulo de seis saldrá a su vez; y después de éstos los tetrágonos se crean dejando uno entre medias; los pentágonos dejando dos; los hexágonos, dejando tres, los heptágonos dejando cuatro.

Pero ahora, para la creación de los números sólidos, se dispone de las superficies en forma de figuras, y para construir pirámides a partir de un triángulo, debemos componer esos mismos triángulos, para generar pirámides a partir de un tetrágono, tetrágonos; pentágonos para las que se construyen con un pentágono; y aquellas que parten de un hexágono o heptágono no surgen sino de la unión con un hexágono o un heptágono.

En primer lugar, la unidad es el triángulo, y por su valor construimos esa misma pirámide. El segundo triángulo es de tres al que si uno con el primero, y con la unidad, se me acrecienta la profundidad de la pirámide en cuatro. Pero si a eso llego a añadir un tercero de seis, se generará una pirámide de altitud diez. A éstas, si les llego a sumar diez, la pirámide llaga al número 20, y así en todos los demás, se hace la suma de la misma manera:

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Triángulos

1	4	10	20	35	56	84	120	165	220

Pirámides de base triangular

In hac igitur coniunctione necesse est: vt sem per qui vltimus sit coniugatorum numerorum is quasi quodammodo basis sit. Cunctis enim latior inuenitur: ⁊ qui ante ipsum numeri coniunguntur: minores esse necesse est: vsq͡ dum ad vnitatem detractio rata perueniat. que puncti quodammodo ⁊ verticis obtineat locum. Namq͡ in .10. pyramide super sex additi sunt .3. atq͡ vnus. qui senarius superat ternariam quantitatē. ipsi vero tres vnum pluralitate transcendunt. qui vnus extremum terminum progressionis ostendit. Similis quoq͡ ratio in ceteris prospici potest: si eorum procreationes diligentius volueris perscrutari. Ille vero que sunt a tetragono pyramides: eadem tetragonorum super se compositione nascuntur. Descriptis enim cunctis tetragonis idest.

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Si vnitatem primam ex hac dispositione p̄sumā erit mihi potestate ⁊ vi pyramis ipsa vnitas: nondum etiam opere atq͡ actu. At si huic tetragonum superponas idest. 4. nascetur pyramis quinq͡ numerorum: que duobus tantum numeris per latera positis continet Sin vero his sequentes. 9. adiecero: fiet mihi. 14. numerorum forma pyramidis: que per latera trib⁹ vnitatibus concludatur. Atq͡ huic si sequentem tetragonum. 16. superponam. tricenaria mihi pyramidis forma producitur. In his quoq͡ omnib⁹ pyramidis: tot erūt vnitates per latera quante in se fuerint numerorum aggregate quantitates. Nam vnitas que prima pyramis est vnum solum idest seipsam gerit ī latere. Quinq͡ vero que constant ex vno ⁊. 4. duobus per latera designatur. ⁊. 14. que ex trib⁹ numeris cōpositis fit: ternario numero in latere posito constituitur. Hanc aūt pyramidum generationem monstrat subiecta descriptio.

Tetragoni.

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Pyramides a tetragonis.

1	5	14	30	55	91	140	204	285	385

Et ad eundem modum cuncte a ceteris multiangulis profecte forme: in altioris summe spacia producuntur. Omnis enim multorum angulorum forma ex sui generis figura vnitati supposita ab vno ingredientib⁹ ad pyramidū constituēdas figuras vsq͡ ī īfinita p̄gredit̄ Et ex hoc equidē apparere necesse est triāgulas formas ceterarum figurarum eē p̄ncipiū. quod oīs pyramis a quacunq͡ basi profecta vel a q̄drato vel a pētagono: vel ab hexagono vel ab heptagono vel a quocūq͡ similiū: solis triāgulis vsq͡ ad verticē cōtinetur.

De curtis pyramidis. Cap. vigesimūquartū.

Sciet aūt op₃ que sunt curte pyramides vel q̄ bis curte. vel que ter curte: vel quater ⁊ deinceps secundum numerorum adiectionem. p̄fecta enim pyramis est: que a qualibet basi profecta vsq͡ ad primam vi ⁊ potestate pyramidum peruenit vnitatem. Sin vero a qualibet basi profecta vsq͡ ad vnitatem altitudo illa non venerit: curta vocabitur. Recteq͡ huiusmodi pyramis tali nuncupatiōe signatur: si vsq͡ ad extremitatem punctumq͡ non venerit. Hec autē est: vt si quis. 16. tetragono adiiciat. 9. atq͡ huic. 4. ⁊ ab vlterioris sese adiectione vnitatis suspendat: pyramidis equidem figura est: sed quoniam vsq͡ ad cacumen verticis non excreuit: curta vocabit̄ ⁊ habebit summitatem non iam punctum quod vnitas est. sed superficiem: quod est quilibet numerus secundum basis illius angulos porrectus: atq͡ vltimus aggregatus. Nam si tetragona fuerit basis: quadrata diminutione semper ascendit. ⁊ si pentagona basis similiter: ⁊ si hexagona: illa quoq͡ vltima superficies erit hexagona. Ergo in curta pyramide tot erit angulorum superficies quot fuerit basis. Si vero illa pyramis non solum ad vnitatem extremitatemq͡ non peruenit: sed nec ad primū quoq͡ opere ⁊ actu multi angulum eius generis cuius fuerit basis: bis curta vocabitur. vt si a. 16. tetragono p̄ficiscens vsq͡ in. 9. terminū ponat. neq͡ excrescat ad. 4. ⁊ quocūq͡ tetragoni defuerint: totiens eam curtam esse dicemus. Ut si vnitas defuerit primus quadrat⁹: curtā quā greci kaoluron vocant. Si v̄o duob⁹ tetragonis deficit: idest vnitate ⁊ eo q sequit̄: vocat̄ bis curta quā greci dikaoluron appellant. Quod si tribus tetragonis. ter curta dicitur quam greci trikaoluron nomināt: ⁊ quotcūq͡ tetragoni fuerint minus: totiens illam pyramidē curtam esse proponimus. Hoc autem non solum a tetragono pyramidis: sed in omnibus ab omni multiangulo progredientibus speculari licet.

De cubis vel asseribus vel laterculis vel cuneis vel sphericis ⁊ paralellibipedis numeris. Cap. xxv.

At de solidis quidem que pyramidis formā obtinent equaliter crescētib⁹: ⁊ a p̄pria velut radice multianguli figura progredientibus dictum est. Est alia rursus quedam corporū solidorū ordinabilis cōpositio: eorum q dicuntur cubi vel asseres: vel laterculi: vel cunei: vel sphere: vel paralellipipedi. que sunt quotiens superficies contra se sunt: ⁊ ducte in infinitum nunq͡ cōcurrent. Dispositis enim in ordinem tetragonis.

1	4	9	16	25

Quoniam hi solam longitudinē latitudinemq͡ sortiti sunt ⁊ altitudine carent: si per latera solam vnam multiplicationem recipiant: equalem prouehunt profunditatem. Nam quattuor tetragonus duos habet ī latere: ⁊ natus est ex bis duob⁹. Bis. n. duo q̄tuor faciūt. Hos ergo duos ex ipsius latere si multiplices eq̄liter: cubi forma nascet̄. Nam si bis binos bis facies octonāria quātitas crescit: ⁊ est primus hic cubus. Nouem vero tetragonus quoniam. 3. habet in latere: ⁊ factus est ex tribus ī se multiplicatis si enim vnam lateris multiplicationē adiunxeris: rursus alius cubus equali laterum formatione crescit. Ter. n. tres si tertio duxeris. 27. cubi figura p̄ducitur. Et. 16. qui est ex. 4. si quater augescat: ⁊ sexaginta quatuor cubus pari laterum dimensione crassabitur. ⁊ sequentes quidem tetragoni secundum eundem modum multiplicatione facta prouehuntur. Tot autem necesse ē vnitates cubus habeat in latere: quot habuit primus ille tetragonus ex quo ipse productus est. Nam qm̄. 4. tetragonus duos tm̄ numeros habet in latere: duos quoq͡ habet octonarius cubus. ⁊ quoniam nouem tetragonus tribus per latus vnitatibus figurabant: solo ternario. 27. cubi latus vrgetur. Et quoniam. 16. tetragonus quatuor vnitatum latus habebat. totidē 64. cubus in latere gestabit vnitates. Quare etiam vi ⁊ pōtate cubi qd̄ ē vnitas vn⁹ erit ī latere. Oīs. n. tetragon⁹ vna qdē superficies ē q̄tuor āgulorum: totidēq͡ laterū

/13v./

En esta concatenación es necesario que siempre el último de los números sumados sea en cierto modo la base. Se halla una mayor extensión en todos y es necesario que los números que se han sumado antes sean menores y que vayan descendiendo hasta la unidad que ocupa el lugar de un punto en cierto modo y del vértice. Pues en la pirámide de 10 además de seis se han añadido 3 y la unidad, y el seis sobrepasa a la cantidad de tres; pero éstos tres superan al uno en pluralidad, y éste uno choca con el extremo último de la progresión. Un fundamento semejante se puede observar en los restantes, si quieres examinar al detalle la generación de ellos.Aquellas pirámides que salen de un tetrágono, nacen de la misma ampliación del tetrágono por encima de sí. En efecto, desarrollada la serie de todos los tetrágonos, esto es:

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Tendré la pirámide unidad misma en potencia y en valor si tomo la unidad primera de esta serie, pues todavía no lo es en realidad y en acto. Pero si a ésta le superpongo un tetrágono, esto es, 4, nacerá la pirámide del número cinco que se define lateralmente sólo con dos números. Pero si a éste le añado el tetrágono siguiente, el nueve, la forma de la pirámide me crecerá en número de 14, que lateralmente se cierra con tres unidades. Y si superpongo a éste el siguiente tetrágono, 16, me resulta una pirámide de treinta. También en todas estas medidas de una pirámide habrá tantas unidades por los lados cuantas cantidades de números le fueran sumadas. Pues la unidad que es la primera pirámide, lleva en el lado uno solo, esto es, a ella misma. Cinco, que está formado por uno y cuatro se designa por los lados con dos números, y 14, que se forma de tres números, se construye con el número tres puesto en el lado. La descripción siguiente muestra esta generación de pirámides:

Tetrágonos

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Pirámides de base tetragonal

1	5	14	30	55	91	140	204	285	385

Y del mismo modo todas las formas surgidas a partir de los demás triángulos van generándose en los espacios de una suma más elevada. Pues todos en una forma de ángulos más amplios a partir de la figura de su género, partiendo de la unidad y subiendo desde el uno para construir figuras de pirámides en progresión infinita. Y de esto es necesario que se vea que las formas triangulares son el principio de las demás figuras, que toda pirámide salida de cada base , o de un cuadrado o de un pentágono, o de un hexágono o de un heptágono o de otro de los semejantes, se definan por triángulos solos hasta el vértice.

De las pirámides truncadas.

Capítulo XXIIII.

Conviene saber cuáles son las pirámides truncadas, o dos veces truncadas o tres veces truncadas o cuatro o en adelante, según la suma de números. Ésta, surgiendo a partir de cualquier base, llega a la primera de las pirámides en potencia y en valor, la unidad. Pero si saliendo de cualquier base hasta la unidad no se llega a esta altura, se llamará truncada. Y se designa correctamente una pirámide de tal clase con esa denominación, si no llega hasta la extremidad y al punto.

Si alguien superpone al tetrágono 16, 9, y a éste 4 y se contenga de añadir una última unidad, ciertamente es una figura de pirámide, pero como no se ha desarrollado hasta la cumbre del vértice, se llamará truncada y tendrá una cumbre pero no ya un punto que es la unidad, sino una superficie, que es un número prolongado según los ángulos de aquella base y el último que se ha sumado. Pues si la base es tetragonal, siempre asciende por una disminución en cuadrados, y si una base pentagonal, de manera semejante, si hexagonal, aquella superficie última será también un hexágono. Luego en una pirámide truncada, la superficie de los ángulos será tal como sea la base.

Pero si aquella pirámide no sólo no llega hasta la unidad y extremidad, sino que tampoco al primer ángulo en realidad y en acto del mismo género que fuera la base, se llamará dos veces truncada. Si partiendo del tetrágono de 16 se sitúa el término en nueve y no decrece hasta 4 y falta también lo propio del tetrágono, diremos que es otras tantas veces truncada.

Si está menguada en la unidad, el primer cuadrado, será la truncada que los griegos llaman colouros. Si está menguada en dos tetrágonos, se llamará dos veces truncada, que los griegos llaman dicolouros; si en tres tetrágonos, se llama tres veces truncada que los griegos llaman tricolouros y tantas veces como mengüe, proponemos que otras tantas sea truncada. Esto no sólo se puede observar a partir del tetrágono de la pirámide, sino en todos los que se construyen con todos los multiángulos.

De los cubos, de las vigas, de los ortoedros, de las esferas y los números paralelepípedos.
Capítulo XXV.

Acerca de los sólidos que reciben la forma de una pirámide creciendo por igual en todas sus partes y surgiendo como de su propia raíz, la figura poligonal, ya se ha hablado. A su vez hay otra composición susceptible de orden, de los cuerpos sólidos, de los que se llaman cubos o vigas o ortoedros o cuñas o esferas o paralelepípedos, que son tantas como son las superficies con las que se relacionan y construidas sobre éstas corren hasta el infinito sin encontrarse nunca. En efecto, dispuestos en orden los tetrágonos

1	4	9	16	25

Porque a éstos les ha correspondido una sola anchura y longitud y carecen de profundidad; si por los lados reciben una sola multiplicación, se alargan en igual profundidad. Pues un tetrágono de cuatro tiene dos en el lado y ha nacido de estos dos. Dos por dos hacen cuatro. Luego si multiplicas igualmente éstos dos veces de un lado, nacerá la forma del cubo. Si multiplicas dos por dos dos veces, la cantidad crece hasta ocho y éste es el primer cubo.

El tetrágono porque tiene tres en el lado y se ha hecho a partir de tres multiplicados por sí, pues si se hace la multiplicación del lado, de nuevo otro cubo crece en igual formación de los lados. Tres veces el número tres si lo multiplicas por tres se produce la figura de un cubo de 27. Y 16 que es a partir de 4, si se multiplica por cuatro se engrosará un cubo de 64 con igual longitud de los lados y los siguientes tetrágonos se prolongan del mismo modo, hecha la multiplicación. Es necesario que el cubo tenga tantas unidades en el lado cuantas tenía el primer tetrágono a partir del que se ha construido. Pues un tetrágono de 4 tiene el número dos en el lado; el cubo de ocho también tiene dos en el lado, y porque un tetrágono de nueve presentaba tres unidades en el lado, con el tres solo se nutre el lado de un cubo de veintisiete. Y porque un tetrágono de 16 tenía un lado de cuatro unidades, el cubo de 64 llevará otras tantas unidades en el lado. Por eso también la unidad, uno, estará en el lado de un cubo en potencia y en valor, pues se forma un tetrágono, la superficie de cuatro ángulos y otros tantos lados.

laterum. Omnis autem cubus qui ex tetragonorum superficie in profunditatem corporis creuit: per tetragoni .s. latus multiplicatus: habebit quidem superficies .6. quarum singula planitudo tetragono illi priori equalis est. Latera vero .12. quorum vnumquodqꝫ singulis his que superioris fuere tetragoni equum ē. ⁊ vt superius demonstrauimus: tot vnitatum est. Angulos vero .8. quorum singulis sub tribus huiusmodi continetur: quales priores fuere tetragoni vnde cubꝰ ipse productus est. Ergo ex naturaliter profuso nūero: qui in subiecta forma descripti sunt subiecti tetragoni nascuntur. ⁊ ex his tetragonis qui subnotati sūt cubi prouehuntur.

Numerus naturalis.

1	2	3	4	5	6	7

Tetragoni.

1	4	16	25	36	49	

Cubi.

1	8	27	64	125	216	343

Et quoniam omnis cubus ab equilateris quadratis profectus: equus ipse omnibus partibus est. Nam ⁊ latitudini longitudo: ⁊ his duobus compar est altitudo. ⁊ secundum sex partes: idest sursum deorsum: dextera sinistra: ante: post sibi equalē esse necesse ē: huic oppositum contrariumqꝫ esse oportebit: qui neqꝫ longitudinem latitudini: neqꝫ hec duo profunditati: gerat equalia: sed cunctis inequalibus quāuis solida figura sit ab equalitate cubi longissime distare videatᷣ. Hi autem sunt. vt si quis faciat bis tres quater: vel ter quater quinquies. ⁊ alia huiusmodi que per ineq̄les spaciorꝫ gradus inequaliter prouehuntur. Hec āt forma greco nomine scalenos vocatᷣ: nos vero gradatam possumus dicere. quod a miore modo velut gradibus crescant. aūt eandem figuram greci quidā spheniscon. Nos autem cuneum possumus dicere. Etenim quos ad quālibet illam rem constringendam cuneos formant: neqꝫ latitudinis: neqꝫ altitudinis habita ratione: quantum cōmodum fuerit: tantū vel altitudini minuitur vel crassitudini ꝓfunditatis augetur. Atqꝫ ideo hos plerumqꝫ. necesse est omnibus partibus ineq̄libus inueniri. Quidam vero hos bomiscos vocant. i. quasdam arulas que in ionica grecie regione vt ait nichomacus hoc modo formate fuerunt: vt neqꝫ altitudo latitudini: neqꝫ hec longitudini conuenirent. Vocatur aūt aliis quibusdā nominibus que nunc ꝓsequi superuacuū: iudicamꝰ. Igitᷣ cubi equalibus spaciis se porrigentibus ⁊ huius forme quā diximꝰ gradata distributione disposite: medietates sunt: neqꝫ omnibus ineq̄les. quos greci paralellibipedos vocāt. Latini nomen hoc ita vniformiter compositum habere nō possunt. Ut tamen idem pluribus dictum sit: ea namqꝫ hoc nomine vocatur figura: que alternatim positis latitudinibus continetur.

gradatim

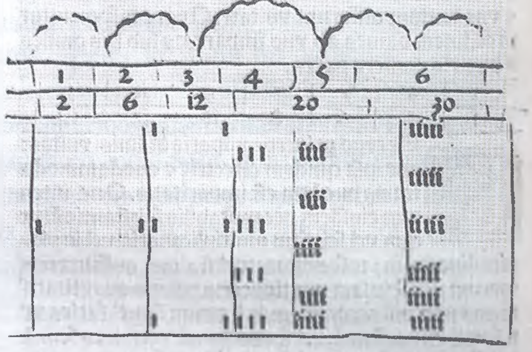
cuneus

De parte altera longioribus numeris: eorumqꝫ generationibus. Capitulum. xxvi.

Huiusmodi vero formas quales sunt que vocātur a grecis heteromikeis nos dicere possumus parte altera longiores. quarū figurarum numerus quoqꝫ hoc modo diffiniendus est. Parte altera longior est numerus quem si in latitudinem describas: ⁊ ipse quidem .4. ꝓuenit laterum ⁊ .4. angulorum sed non cunctis equalibus sed semper minus vno. Namqꝫ nec latera lateribus cuncta cunctis equa sunt: nec longitudini latitudo: sed vt dictum est: cum hinc altera pars maior fuerit: vno tm̄ minorem precedit ac superat. Si enim numerum naturalem disponas in ordinem: ⁊ secundum per primum multiplices: talis nascetur numerus: vel si secundum per tertium. vel si tertium per quartum: vel si quartum per quintum. omnesqꝫ hi vnitate tā tum addita multiplicentur: nascentur parte altera lōgiores. Disponatur enim numerus naturalis.

1	2	3	4	5	6	7

Et tunc quidem hactenus. Si quis igitur faciat vnū bis faciet duo. Et rursus bis tres faciet .6. ter quater faciet .12. q̄ter .5. faciet .20. ⁊ hoc modo ad eūdē ordinē. Quicūqꝫ igitur ita facti sunt: procreabuntur parte altera longiores: vt subiecta descriptio docet. In q̄ ex quibus numeris multiplicati nascuntur parte altera longiores supra ascripti sunt. Qui vero nascuntur subterius subnotati.



De ante longioribus numeris: ⁊ de vocabulo numeri parte altera longioris. Capitulū. xxvii.

Ergo si ab vnitate tantum discrepent qui multiplicantur: descripti superius numeri protendentur. Si vero aliquo nūero vt ter septem vel ter quinqꝫ vel aliquo modo alio ⁊ non eorum latera sola discrepent vnitate non vocabitur hic numerus parte altera longior: sed ante longior. Alterum enim apud pythagoram vel sapientie eius heredes nulli alii nisi tm̄ binario ascribebatur. Hunc alteritatis principium esse dicebant. Eādem autem naturam ⁊ semper sibi similem consentientemqꝫ nullam aliam nisi primeuam ingeneratamqꝫ vnitatem. Binarius autem numerus primus est vnitati dissimilis: iccirco quod primus ab vnitate disiungitur: atqꝫ ideo alteritatis cuiusdam principium fuit: quod ab illa prima ⁊ semper eadem substantia sola tantum est vnitate dissimilis. Merito ergo dicentur hi numeri parte altera longiores: quod eorū latera vnius tantum se se adiecta numerositate precedunt. Argumentum est autem alteritatem in binario numero iuste constitui: quod non dicitur alterum nisi e duobꝰ ab his in quos bene loquendi ratio non negligitur. Amplius quod impar numerus sola vnitate perfici monstratꝰ est: par vero sola dualitate idest solo binario numero. Nam cuiuscumqꝫ medietas est vnus: ille impar est. cuius vero .2. hic paritate recepta: in gemina equa disiungitur. Quare dicendum est imparem nūerū eiusdem atqꝫ in sua se natura tenentis immutabilisqꝫ substantie esse participē. iccirco q̄ ab vnitate

paralle

/14r./

Todo cubo que crece en profundidad de cuerpo a partir de la superficie de los tetrágonos, multiplicado el lado del tetrágono, tendrá 6 superficies, de las cuales cada cara es igual al tetrágono del que se parte. Pero tiene 12 lados, cada uno de ellos es igual a cada uno de éstos que han sido del tetrágono del que se parte, y como hemos demostrado antes, es de otras tantas unidades. Tiene 8 ángulos, cada uno de los cuales se define por tres lados que eran los primeros tetrágonos de donde se ha generado el cubo. Luego a partir de un número extendido de manera natural nacen los tetrágonos que se han descrito de la forma siguiente. Y de estos tetrágonos que se han escrito debajo, se prolongan los cubos:

Número natural

1	2	3	4	5	6	7

Tetrágonos

1	4	9	16	25	36	49

Cubos

1	8	27	64	125	216	343

Porque todo cubo, saliendo de cuadrados equiláteros, es igual en todas sus partes. Pues es igual la longitud a la anchura y a éstas dos es igual la altura, y según seis direcciones, esto es, hacia arriba y hacia abajo, a la derecha y a la izquierda, hacia delante y hacia atrás, es necesario que sea igual a sí y deberá ser opuesto y contrario a éste, el que no lleve ni la longitud igual a la anchura, ni estas dos a la profundidad, sino todo desigual, aunque sea una figura sólida, parece estar muy lejos de la igualdad del cubo.

Éstos resultan si alguien multiplica dos veces tres y por cuatro, o tres por cuatro y por cinco y otros de esta clase que se prolongan por grados desiguales de espacios. Esta forma se llama con el nombre griego de escaleno, pero nosotros podemos llamarla gradual, porque desde el menor va creciendo por grados; o bien algunos griegos llaman a esa misma figura esfenisco, que nosotros podemos llamar cuña.

En efecto, a las cuñas para estructurar aquella figura, sin tener una proporción de altura, se mengua la altura o se aumenta de profundidad la anchura, cuanto sea conveniente. Y por eso, es necesario que éstos se ajusten sobre todo en todas las partes siguientes.

Algunos los llaman bomiscos, es decir, altares pequeños, que en la región jónica de Grecia, según dice Nicómaco se han construido de manera que la altura no es igual a la anchura ni éstas se ajustan a la longitud. Se llama con ciertos otros nombres que ahora juzgamos innecesario mencionar.

Por tanto, alargando los espacios iguales del cubo, las formas de éste que hemos citado se han dispuesto en gradación; hay medias y no desiguales en todas sus medidas, que los griegos llaman paralelepípedos, los latinos no pueden tener este nombre tan regularmente compuesto de una sola forma. Como lo mismo se ha empleado para nombrar a muchos, con ese nombre se llama la figura que está contenida entre superficies colocadas paralelamente.

De los números que tienen una parte más larga que otra y de la generación de ellos.

Capítulo XXVI.

Podemos llamar a las formas de esta clase que son las que los griegos llaman heteromique, figuras que tienen una parte más larga que otra. El número de estas figuras también se ha de dirimir de este modo.

Un número que tiene una parte más larga que otra es un número que en su representación en el plano tiene 4 lados y cuatro ángulos, pero no todos sus lados son iguales, sino que una parte tiene una unidad menos.

Pues ni todos los lados son iguales a todos los lados, ni la longitud a la anchura, sino que como se ha dicho, una de las dos partes es mayor, aventaja y supera en uno a la menor. Pues si dispones un número natural en orden y multiplicas el segundo por el primero, surge ese número que se pretende, o si multiplicas el segundo por el tercero, o el tercero por el cuarto, o si el cuarto por el quinto, y todos éstos se multiplican añadiendo sólo la unidad, nacerán los números que tienen una parte más larga que la otra. Pues dispóngase el número natural

1	2	3	4	5	6	7

Y detengámonos a observarlo un momento. Si alguien multiplica uno por dos, obtendrá dos. Y de nuevo dos por tres, hará seis, y tres por cuatro, hará 12, y cuatro por cinco, obtendrá 20 y de esta manera según el mismo orden. Por tanto, todos los que se han creado así se generarán como números que tienen una parte más larga que la otra, según muestra la descripción siguiente, en la cualj126 se han escrito arriba los números de cuya multiplicación nacen los que tienen una parte más larga que la otra y debajo los que surgen de ellos:

(véase el cuadro en fol. 14 r.)

1	2	3	4	5	6
2	6	12	20	30	42

De los números oblongos y de la denominación del número que tiene una parte más larga que la otra.

Capítulo XXVII.

Luego si hay solamente la diferencia de una unidad entre los números multiplicados, se obtiene la serie de los números que están escritos arriba. Pero si los lados de ellos no se diferencian en una sola unidad, sino en algún número como tres por siete o tres por cinco o de algún otro modo, no se dirá que se trata de un número que tiene una parte más larga que la otra, sino de un oblongo.

Pues en Pitágoras o en los herederos de su sabiduría, la alteridad no se adscribía a otro número que al dos. Decían que el dos era el principio de la alteridad. Acordado a esa misma naturaleza y siempre igual a sí mismo, no hay otro que la primigenia e ingenerada unidad. Pero el número dos es el primero distinto de la unidad, por motivo de que es el primero que se separa de la unidad, y por eso ha sido el principio de cierta alteridad, porque es distinta de aquella primera y siempre idéntica sustancia sola unidad.

Luego con razón se dirá que estos números tienen una parte más larga que otra, porque los lados sólo se aventajan al añadir la cantidad de uno. El razonamiento es que se constituye justamente la alteridad en el número dos porque no dicen alteridad si no hay dos, los que no descuidan la norma de hablar bien.

Se ha demostrado por extenso que el número impar se construye con una sola unidad, pero uno par con la sola dualidad, esto es, con el solo número dos. Pues todo número que que tiene el uno como media es impar, y el que tiene el dos en su media, se separa en dos unidades iguales, porque le ha correspondido la característica del par.

Por eso hay que decir que el número impar es partícipe de esa sustancia de lo mismo, que se mantiene siempre en su misma naturaleza y es inmutable, por eso también se forma a partir de la unidad, formetur:parem vero alterius plenum esse nature:ic circo quod a dualitate completur.

¶ Quod ex imparibus quadrati:ex paribus parte altera longiores fiant. capi.xxviii.

At vero positis in ordinem ab vnitate imparibus:⁊ sub his a dualitate paribus de scriptis coaceruatio impariu͡ʒ tetragonos facit:coaceruatio pariũ superiores efficit parte altera longiores. Quare quoniaʒ tetragono͛uʒ hec natura est vt ⁊ ab imparib⁹ procreẽtur:qui sunt vnitatis participes idest eiusdem imutabilisq͡ʒ substantie:cunctisq͡ʒ partibus suis equales sint quod ⁊ anguli ãgulis:⁊ latera lateribus ⁊ lõgitudini compar est latitudo:dicendum est huiusmodi numeros eiusdem nature atq͡ʒ imutabilis substantie participes. Illos vero numeros quos parte altera longiores paritas creat:alterius dicemus esse substantie. Nam quemadmodum vnus a duobus vno tantuʒ alter est:sic horum latera a se tantum vno sunt altera:⁊ vna tantum differunt vnitate. Quare disponantur in ordinem omnes ab vno impares:⁊ sub his omnes a binario numero pares.

1	3	5	7	9	11	13
2	4	6	8	10	12	14

Est ergo princeps imparis ordinis vnitas: que ipsa quidem effectrix ⁊ quodammodo forma quedam est imparitatis. Que intentum eiusdem nec mutabilis substantie ẽ:vt cum vel seipsam multiplicauerit:vel in planitudine vel in profunditate:vel si alium quẽlibet numerum per seipsam multiplicet:a prioris quantitatis forma non discrepet. Namq͡ʒ si vnum semel facies vl̃ si semel vnum semel:vel si duo semel:vel si tres semel vel si quatuor semel:vel si quemlibet alium numeruʒ multiplicet:a quantitate sua is quem multiplicat numerus non recedit.quod circa alium numerum non potest inueniri. Paris vero ordinis binarius numer⁹ princeps est.que dualitas cum in eodem ordine paritatis sit.tuʒ principiũ totius est alteritatis. Namq͡ʒ si seipsam multiplicet vel per latitudinem vel etiã ꝓfunditatem:vel si quem numerum in suã conglobet quantitatem:continuo alter exoritur. Naʒ his duo vl̃ bis duo bis si faciaſ:vel bis tres vel bis.4.vel bis.5. vel quemlibet alium multipliceſ:quisquis hinc nasciẽ alius quam primo fuerat inuenitur. Nascuntur auteʒ ex superiore descriptione ⁊ ex primo ordine omnes tetragoni hoc modo. Unum enim si respexeris:primus potestate tetragonus est. Sin vero vnum tribus coaceruaueris.4.tetragonus exoritur. Huic si quinariũ iungam nouenarius rursus occurrit. Huic si copules.7.16.quadrati forma se suggerit. Idemq͡ʒ si in ceteris facias omnes competenter quadratos videas procreari. At vero ex secundo paritatis ordine idem cunctĩ parte altera longiores fiunt. Nãq͡ʒ si duos primos respexero:huiusmodi mihi numerus occurrit qui fit ex bis vno. Cum vero duobus sequentes.4.iunxero: pte altera lõgior rursus erit senari⁹ scʒ qui fit ex bis tribus. Cui si sequentem aggregauero nascetur mihi duodenaria forma:que fit ex quater tribus. Quod si continuatim quis faciat cunctos huiusmodi numeros in competenti ordine procreatos videbit. Quam descriptionem scʒ inferior forma demonstrat.

Radices.

1	1.3.	1.3.5.	1.3.5.7.	1.3.5.7.9.

Tetragoni idest quadrati.

1	4	9	16	25

Radices.

2	2.4.	2.4.6.	2.4.6.8.	2.4.6.8.10.

Parte altera longiores.

2	6	12	20	30

¶ De generatiõe laterculoꝝ eoꝝ diffinitiõe.cap.xxix.

Nos autem superius laterculos diximus:q͂ sunt ⁊ ipse qdẽ solide figure hoc modo fiũt. Quotiens equalib⁹ spacijs in lõgitudinẽ latitudinẽq͡ʒ porrectis:mior his addiẽ altitudo. Ut sũt hmõi.3.ter.bis.qui sunt.18. vel.4.q̃ter bis vel alio quolibet modo.vt bis ĩ longitudinẽ latitudinẽq͡ʒ eqs mĩoraltitudo ducaẽ. Hi definiũẽ hoc modo. Laterculi sunt qui fiunt ex equalibus equaliter in minus. Asseres vero ⁊ ipse quidem figure sũt solide:sed hoc modo vt ex equalib⁹ equaliter ducanẽ in maius. Nam si equa fuerit latitudo longitudini ⁊ maior sit altitudo:ille figure a nobis asseres:a grecis docides nominantur.ut si quis hoc modo faciat.4.q̃ter.nouies:qui inde procreantur asseres nomĩati sũt Sphenisci vero quos cuneolos superius appellauim⁹ hi sunt qui ex inequalibus inequaliteꝛ ducti per ineq̃lia creuere. Cubi vo qui ex equalib⁹ eq̃liter ꝑ equalia producti sunt.

¶ De circularibus vel sphericis nũeris. cap.xxx.

Horum vero cuborum quãticũq͡ʒ fuerint ita ducti:vt a quo numero cubite quantitatis lat⁹ coeperit in eundeʒ altitudinis extremitas terminetur:numerus ille ciclicus vl̃ sphericus appellatur:vt sunt multiplicationes que a quinario vel senario proficiscuntur. Nã quinq͡ʒ quinq͡ʒ qui fit.25.ab.5.progressus in eosdem.5. definit. Et si hos rursum quinquies ducas:in eosdem 5.eorum terminus veniet. Quinquies enim.25.fiunt 125:⁊ si hos rursus quinquies ducas:in quinariũ numerum extremitas terminabitur. Atq͡ʒ hoc vsq͡ʒ in infinitum idemsemper euenit. Quod in senario quoq͡ʒ conuenit considerari. Hi autem numeri iccirco cidici vel spherici vocãtur:quod sicut sphera vel circulus in proprij semper principij reuersione formãtur. Est.n. circulus posito quodam puncto ⁊ alio eminus desixo illius puncti qui eminus fixus est equaliter distans a primo puncto circunductio:⁊ ad eundem locuʒ reuersio vnde moueri coeperat. Sphera vero ẽ semicirculi manente diametro circunductio ⁊ ad eundem locũ reuersio vnde reuersio vnde pri⁹ coeperat ferri. Unitas quoq͡ʒ virtute ⁊ potestate ipsa quoq͡ʒ circulus vel sphera est.quotiens enim punctum in se multiplicaueris:in seipsuʒ vnde coeperat terminatur. Si enim facias semel vnum vnus redit.⁊ si hoc rursus semel idẽ est. Igitur si vna fuerit multiplicatio solam planitudinem reddit:⁊ fit circulus. Si scd͡a:mox sphera conficitur. Et enim secunda multiplicatio effectrix semper est profunditatis. Ex.5.igitur.⁊.6.paucas huiusmodi formas subscripsimus.

1	5	6
1	25	36
1	125	216
1	625	1296
1	3125	7776

¶ De natura rerum que dicitur eiusdem nature ⁊ de ea que dicitur alterius nature.⁊ qui numeri cui nature coniuncti sunt.

Capitulum.xxxi.

Ac de

lateraculi

asseres

sphenisci

cunei

cubi

qui di circuli

Sphera qui di

bet.

/ **14v**./

pero el par está lleno de la naturaleza de lo otro, porque se completa con la dualidad.

Que los cuadrados se generan de los números impares, y los números que tienen una parte más larga que la otra, de los pares.

Capítulo XXVIII.

Puestos en orden los impares desde la unidad y escritos bajo éstos los pares desde el dos, la composición de los impares hace los tetrágonos y la composición de los pares hace a los que tienen una parte más larga que la otra. Por eso, porque ésta es la naturaleza de los tetrágonos, que se generan de los impares, que son partícipes de la unidad, esto es, de la sustancia inmutable de lo mismo y son iguales en todas sus partes, porque también lo son los ángulos entre sí y los lados entre sí, y la longitud es igual a la anchura, hay que decir que los números de esta clase son partícipes de esa naturaleza de lo mismo y de esa sustancia inmutable.

La paridad determina esos números que tienen una parte más larga que la otra; diremos que son de la sustancia de la alteridad. Pues de igual manera que uno sólo es otro a partir del dos, así los lados de éstos se distinguen de ellos sólo en uno y difieren sólo en una unidad.

1	3	5	7	9	11	13
2	4	6	8	10	12	14

Por eso dispónganse en orden todos los impares desde el uno y debajo de éstos, todos los pares desde el dos:

Luego el origen de la serie impar es la unidad que se hace a sí misma y en cierto modo produce cierta forma de imparidad. Ésta es una tendencia de la sustancia inmutable de lo mismo: que cuando se multiplica por sí misma, tanto en plano como en profundidad, o si se multiplica otro número cualquiera por ella misma, no cambia respecto a la forma de la cantidad anterior.

Pues si multiplicas uno por uno o bien uno una vez o si dos por uno o si tres por uno, o si cuatro por uno, o si se multiplica cualquier otro número, ese número al que multiplica no lo desplaza, propiedad que no se puede encontrar en ningún otro número. En cambio, el número dos es el origen de la serie par. Esta dualidad está en la misma serie de los pares y es el principio de toda alteridad. Pues si se multiplica por sí misma, por su anchura o también profundidad, o si multiplica a otro número por su cantidad, saldrá otro inmediatamente. Si multiplicas dos por dos, o dos por dos por dos, o dos por tres, o dos por cuatro, o dos por cinco, o cualquier otro, cualquiera que nace de ahí, resulta distinto del que había sido al principio. Nacen de la descripción anterior y de la primera serie todos los tetrágonos de este modo. Pues si observas uno, el primero en potencia es el tetrágono, pero si sumas uno con tres, surge un tetrágono 4. Si añado a éste un cinco, se presenta a su vez el nueve. Si unes a éste siete, se produce la forma de un cuadrado de 16. Y si haces lo mismo en los restantes, pareces promover adecuadamente la creación de todos los cuadrados. Pero de la segunda serie del par, resultan todos los que tienen un lado más largo que otro. Pues si me fijo en el dos, me sale al paso un número de esta clase que se forma con dos veces uno. Pero cuando sumo los siguientes, el 4 con el dos, volverá a salir uno que tiene un lado más largo que otro, el seis, que se forma a partir de dos por tres. A éste 6, si le llego a sumar el siguiente, me surgirá una forma de doce que resulta de cuatro por tres. Si alguien hace esto sin interrupción, verá que se han creado todos los números de esta clase en el orden conveniente. La forma inferior muestra esta descripción:

Raíces

1	1.3	1.3.5	1.3.5.7	1.3.5.7.9

Tetrágonos, esto es, cuadrados

1	4	9	16	25

Raíces

2	2.4	2.4.6	2.4.6.8	2.4.6.8.10

Números que tienen una parte más larga que otra

2	6	12	20	30

De la generación de los ortoedros y de la definición de ellos.
Capítulo XXIX.

Éstos que antes hemos llamado ortoedros, que son figuras sólidas, se hacen de esta manera. Se alargan en espacios iguales la longitud y la anchura, se les aplica una altura menor. Son de esta clase 3, por 3 y por dos que son 18, o 4 por 4 y por dos, o de otro modo que se quiera, y a ésta longitud y anchura iguales se les pone una altura menor. Éstos se definen de este modo. Ortoedros son los que resultan de un número igual por un número igual, por uno menor. Las vigas son también figuras sólidas, pero cuya característica es, que se forman a partir de un número igual multiplicado por un número igual y por un número mayor. Pues si la anchura es igual a la longitud y la altura se hace mayor, resultan aquellas figuras que nosotros llamamos *asseres* (vigas) y los griegos *dokídes*. Si alguien de este modo hace cuatro por cuatro por nueve, lo que se crea de ahí se ha llamado viga. Pero los esfeniscos que he llamado antes cuñas, éstos son los que a partir de un número desigual, por un número desigual, por uno desigual. En cambio, los cubos se han generado de lados iguales prolongados de manera igual.

De los números circulares o esféricos.

Capítulo XXX.

Prolongados los lados de los cubos, de la longitud que fuesen, todos los números multiplicados de tal modo que su extremidad en altura se termine por el mismo número en que comenzara su cantidad cúbica, aquel número se llama cíclico o esférico. Tales números son las multiplicaciones que parten del cinco o del seis. Pues cinco por cinco, que hacen 25, define el avance de cinco en cinco. Y si multiplicas esto de nuevo por cinco, el final del resultado llegará a otro 5, pues cinco por 25 son 125 y si a éstos los multiplicas de nuevo por cinco, terminará de nuevo en cinco. Y esto hasta el infinito siempre ocurre. Conviene considerar esto en el seis también. Éstos números se llaman esféricos o cíclicos porque como la esfera y el círculo se forman siempre con el regreso del primer principio. El círculo situado un punto y otro fijado por encima, la ronda de ese punto que se ha fijado por encima es equidistante del primer punto, y vuelve al mismo lugar desde el que había empezado a moverse. Pero la esfera es un rodeo de un semicírculo manteniendo el diámetro y la vuelta el primer lugar desde donde había empezado primero a moverse. La unidad misma es también virtualmente y en potencia un círculo y una esfera, pues puedes multiplicar un punto por sí y se termina donde había empezado. Pues si se multiplica uno por uno se vuelve al uno y si de nuevo por uno, es lo mismo. Por tanto, si hay una sola multiplicación, da una sola superficie plana y es un círculo, si son dos, se forma una esfera, pues una segunda multiplicación siempre determina la profundidad. A partir de 5 o de 6 hemos escrito unas pocas formas de esta clase:.

1	5	6
1	25	36
1	125	216
1	625	1296
1	3125	7776

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA LEON

Ac de solidis quidem figuris hec ad presens dicta sufficiant. Qui autem de natura rerum propinquis inuestigantes rationibus: quique in mathefeos disputatione versati: quid in quaque re esset primum subtilissime peritissimeque ediderunt: hi rerum omnium naturas in gemina diuidentes hac speculatione distribuunt. Dicunt enim omnes omnium rerum substantias constare ex ea que proprie sueque semper habitudinis est nec vllo permutatur. et ea scz natura que variabilis motus est sortita substantiam. Et illam prima immutabilem naturam vnius eiusdemque substantie vocant. Hanc vo alterius scz quod a prima illa immobili discedens prima sit altera. Quod nimirum ad vnitatem pertinet: et ad dualitatem. qui numerus primus ab vno discedens alter factus est. Et quoniam cuncti secundum vnitatis speciem naturamque impares numeri formati sunt: quique ex his coaceruatis tetragoni fiunt duplici modo eiusdem substantie participes esse dicuntur: quod vel ab equalitate formantur tetragoni: vel coaceruatis in vnum numeris imparibus procreantur. Illi vero qui sunt pares: quoniam binarij numeri forme sunt: quique ex his coaceruati collectique in vnam congeriem parte altera longiores numeri nascuntur: hi secundum ipsius binarii numeri naturam ab eiusdem substantie natura discessisse dicuntur putaturque alterius nature esse participes: iccirco quoniam cum latera tetragonorum ab equalitate progressa in equalitatem: proprie latitudinis ambitum tendant: hi adiecto vno ab equalitate laterum discesserunt: atque ideo dissimilibus lateribus et quodammodo alterius a se coniunguntur. Quare nobis notum est quod ex his ea que sunt in hoc mundo coniuncta sunt. Aut enim proprie immutabilis eiusdemque substantie est quod deus vel anima vel mens est: vel quodcunque proprie nature incorporalitate beatur aut mutabilis variabilisque nature: quod corporibus indubitanter videmus accidere. Unde nunc nobis monstrandum est: hac gemina numerorum natura quadratorum scilicet et parte altera longiorum: cunctas numeri species cunctasque habitudines vel relate ad aliquid quantitatis: vt multiplicium vel superparticularium et ceterorum. vel ad seipsam considerate. vt formarum quas dudum in superiore disputatione descripsimus informari. vt quemadmodum mundus ex immutabili mutabilique substantia: sic omnis numerus ex tetragonis qui immutabilitate perficiuntur. et ex parte altera longioribus qui mutabilitate participant probetur esse coniunctus. Et primo quidem distribuendum est qui hi quos promecai vocant: idest anteriore parte longiores. vel qui quos heteromikeis idest parte altera longiores. Est enim parte altera longior numerus: quicunque vnitate tantum lateri crescit adiecta. vt sunt. 6. scz bis. 3. vel. 12. tres quater. et consimiles. Anteriore vero parte longior est. qui sub duobus numeris huiusmodi continetur: quorum latera non possidet vnitatis differentia. sed aliorum quorumcunque numerorum vt ter. 5. vel ter sex: vel quater. 7. Quodammodo enim longitudine in prolixiorem modum porrecta merito anteriore parte longior dicitur. Cur autem parte altera longiores numeri dicantur. supra iam dictum est. Quadrati vero quoniam equam latitudinem longitudini gerunt: proprie longitudinis vel eiusdem latitudinis aptissime vocabuntur. vt bis. 2. ter. 3. quater. 4. et ceteri. Parte altera vero longiores: quod non eadem longitudine tendantur: alterius quodammodo longitudinis: et parte altera longiores vocantur.

Quod omnia ex eiusdem natura et alterius natura consistunt. idque in numeris primum videri. cap. 32.

Omne autem quicquid in propria natura substantia que est immobile: terminatum definitumque est quippe quod nulla variatione mutetur: nunquam esse desinat: nunquam possit esse quod non fuit. At hec vnitas sola est: et que vnitate formantur: comprehensibilis et determinate et eiusdem substantie esse dicuntur. Ea vero sunt que vel ab equalibus crescunt velut quadrati vel quos ipsa vnitas format: idest impares. At vero binarius et cuncti parte altera longiores: qui a finita substantia discesserunt: variabilis infiniteque substantie nominantur. Constat ergo numerus omnis ex his que longe disiuncta sunt atque contraria: ex imparibus scz et paribus. Hic enim stabilitas: illic instabilis variatio. hic immobilis substantie robur: illic mobilis permutatio. hic definita soliditas hic infinita congeries multitudinis. Que scz cum sint contraria: in vnam tamen quodammodo amicitiam cognationemque miscentur. et illius vnitatis informatione atque regimento vnum numeri corpus efficiunt. Non ergo inutiliter neque improuide qui de hoc mundo deque hac communi rerum natura ratiocinabantur: hanc primam totius mundi substantie diuisionem fecerunt. Et plato quidem in timeo eiusdem nature et alterius nominat quicquid in mundo est atque aliud in sua natura permanere putat indiuiduum inconiunctumque et rerum omnium primum. alterum diuisibile et nunquam in proprij statu ordinis permanens. Phylolaus vero necesse est inquit omnia que sunt vel infinita vel finita esse. Demonstrare scz volens omnia quecunque sunt ex his duobus consistere. aut ex infinita scz esse aut ex finita: ad numeri sine dubio similitudinem. hic enim ex vno et duobus et impari atque pari coniungitur. que manifesta sunt equalitatis atque inequalitatis: eiusdem atque alterius: definite atque indefinite esse substantie. quod videlicet non sine causa dictum est: omnia que ex contrariis consisterent: armonia quadam coniungi atque componi. Est enim armonia plurimorum adunatio: et dissentientium consensio.

Ex eiusdem atque alterius numeri natura qui sunt quadratus et parte altera longior omnes proportionum habitudines constare. Capitulum. xxxiii.

Disponantur ergo in ordinem non iam pares atque impares ex quibus quadrati vel parte altera longiores fiunt: sed hi ipsi qui illis coaceruatis in vnumque redactis et quadrati et parte altera longiores procedunt. Ita enim videbimus istorum quendam consensum et ad ceteras numeri partes procreandas amicitiam: vt non sine causa hoc in omnibus rebus ab numeri specie natura rerum sumpsisse videatur. Sint igitur duo versus tetragonorum ab vnitate omnium: et a binario numero parte altera longiorum.

1	4	9	16	25	36	49
2	6	12	20	30	42	56

Horum igitur si primum compares primo dupli quantitas inuenitur: que est prima multiplicitatis species. Si vero secundum secundo. hemiolie quantitatis habitudo producitur. Si tertium tertio sesquitertia proportio procreatur. Si quartum quarto: sesquiquarta: et si quintum quinto sesquiquinta. et hic superparticularium nominum in quamuis longissimum spacium progrediens: integram inoffensamque reperies. Ita vt in prima dupli proportione vnitate solum sit differentia. nunquam ab vno sola semper discrepans vnitate. In ...

De la naturaleza de lo mismo y de esa que se llama naturaleza de lo otro y qué números están en relación con una y con otra.

Capítulo XXXI.

/15r./

Sea suficiente lo que se ha dicho hasta este lugar sobre las figuras sólidas. Los investigadores de la naturaleza de las cosas con razones ajustadas y los entendidos en la discusión de matemáticas se han pronunciado sutilísima y muy acertadamente sobre las propiedades de todas las cosas distinguiendo todo lo existente en dos grupos, y presentando en su enseñanza la división siguiente. Pues dicen que todas las sustancias de todas las cosas constan de aquella que está siempre en su estado propio y sin experimentar ningún cambio y ni la alteración que presenta la sustancia del movimiento y del cambio. Y llaman a aquella naturaleza primera e inmutable del uno y de lo mismo. Pero la oponen a la sustancia de lo otro porque al apartarse de aquella primera inmóvil, se hace otra.

Sin duda esto es pertinente a la unidad y a la dualidad. El primer número que se aparta del uno, se ha hecho otro.Y porque todos los impares se han formado según su naturaleza y especie, y los tetrágonos que se hacen a partir de la suma de éstos, se dice que participan de la sustancia de lo mismo de manera doble, porque los tetrágonos se han formado a partir de la igualdad, se crean por suma de números impares. Aquellos son pares porque son formas del número dos y los que se construyen a partir de éstos y se recogen en una suma, nacen como números que tienen una parte más larga que otra; éstos, según la naturaleza del número dos se dice que se han apartado de la sustancia de lo mismo y se considera que son partícipes de la naturaleza de lo otro, porque los lados de los tetrágonos se han prolongado de igualdad en igualdad, se extiende al ámbito de su propia anchura, mientras que éstos, se han alejado de la igualdad de los lados al añadir uno, y por eso, se construyen con lados desiguales y en cierta medida distintos de ellos.

Por eso hemos observado que todas las cosas que están en este mundo son compuestos de lo mismo y de lo otro. Pues toda cosa deriva bien de esa naturaleza propiamente inmutable de lo mismo, (como es Dios, el alma o la inteligencia, o cualquier cosa que disfruta de la incorporalidad de su naturaleza propia) o de la naturaleza mudable y variable que vemos que les corresponde a sin duda a los cuerpos.

Por lo que debemos demostrar ahora que con esta naturaleza doble de los números (es decir, de los cuadrados, y de los números que tienen una parte más larga que otra), considerando a todas las clases del número y a todas las series, bien de cantidad relativa (como los múltiplos, los superparticulares y los demás) o considerada en sí misma (así las figuras que hemos descrito en la explicación anterior) según se ha probado que como el mundo está constituido a partir de una sustancia inmutable y de una mudable, todo número a partir de los tetrágonos, surgidos de lo inmutable, y de los números que tienen una parte más larga que la otra, que participan de lo cambiante. Y en primer lugar ciertamente hay que distinguir los que llaman promecas, esto es, oblongos y los heteromecas, los que tienen una parte más larga que la otra.

Pues hay un número que tienen una parte más larga que otra, que crece al añadir una unidad al lado, como es el seis, es decir, dos veces tres, o el 12, cuatro por tres y otros semejantes. El número oblongo se contiene en dos números de esta clase cuyos lados no tienen la diferencia de la unidad, sino de otros números cualesquiera, como cinco por tres, o seis por tres, o siete por cuatro. Pues la longitud prolongada de manera más numerosa con razón se dice que es más larga de una parte que de otra.

Ya se ha dicho antes por qué se llaman así los números que tienen una parte mayor que otra. Los cuadrados, porque tienen igual longitud que anchura se dirán muy adecuadamente "de su longitud propia" o "de su misma anchura" como dos por dos, tres por tres, cuatro por cuatro y los demás. En cambio, los que tienen una parte más larga que la otra, porque no se extienden en la misma longitud, se dice que tienen otra longitud en cierta medida y "que tienen más larga una parte que otra".

Que todo se constituye de la naturaleza de lo mismo o de la naturaleza de lo otro, y que esto se ve primero en los números.
Capítulo XXXII.

Todo lo que en su propia naturaleza y sustancia es inmóvil, está delimitado y definido, puesto que no se altera por ninguna variación, nunca deja de ser, nunca puede ser lo que no ha sido. Sin embargo, ésta es la unidad sola y lo que se forma con la unidad, se dice que es de sustancia comprensible, determinada y de lo mismo. Éstas son las que crecen en igualdad, como los cuadrados, o a los que forma la unidad misma, esto es, los impares. Pero el dos y todos los números que tienen una parte más larga que otra, que se han apartado de la sustancia definida, se dice que son de sustancia variable e indefinida.

Luego todo número está formado por éstos que se han distanciado mucho y son contrarios, es decir, por los impares y los pares. Pues esta estabilidad en unos, es variación inestable en otros, en éstos, vigor de sustancia inmutable, en aquellos, cambio mudable, en éstos solidez definida, en aquellos, una acumulación indefinida de pluralidad. Como son contrarios, se mezclan en una especie de amistad y de parentesco, y por la constitución y régimen de aquella unidad, forman un solo cuerpo de número. En consecuencia, los que reflexionaban no de manera inútil ni vana sobre este mundo y sobre esta naturaleza común de las cosas, han hecho esta división primera de la sustancia del mundo entero. Y Platón ciertamente en el *Timeo* nombra todo lo que hay en el mundo bien de una misma naturaleza, bien de otra, y piensa que lo uno permanece en su naturaleza como individuo y en soledad, como principio de todas las cosas, y que lo otro es divisible y nunca permanece en el estado de su propio orden. Filolao dice que es necesario que todas las cosas que existen sean infinitas o finitas, queriendo demostrar que todo lo existente se forma de estos dos principios, o de la finitud o de la infinitud, a semejanza del número, sin duda. Pues éste se constituye a partir del uno y del dos, del impar y del par, que son claros ejemplos de igualdad y de desigualdad, de lo mismo y de lo otro, de la sustancia definida y de la indefinida. Evidentemente no se ha dicho sin razón que todo se ha formado de los contrarios, se unen y componen en cierta armonía.

De la naturaleza del número mismo y de la del número otro; los cuadrados y el número que tiene una parte más larga que otra; que todos se fundan en una relación de proporciones.

Capítulo XXXIII.

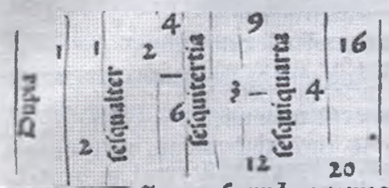
Dispónganse en orden no ya pares e impares, de los cuales se forman los cuadrados y los que tienen una parte más larga que otra, sino éstos mismos que se les han añadido y se les han sumado, y dan lugar a los cuadrados y a los que tienen una parte más larga. Pues así veremos que hay un acuerdo de ellos y amistad para crear otras partes del número, para que la naturaleza del número parezca que no sin motivo ha tomado esto en todas las cosas a partir de la especie del número.

Por tanto, sean dos líneas de tetrágonos, a partir de la unidad de todos y a partir del número dos de los que tienen una parte más larga que otra:

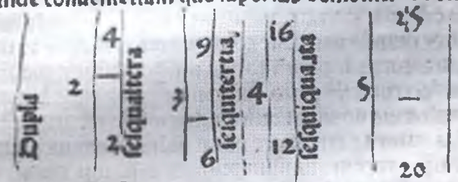
1	4	9	16	25	36	49
2	6	12	20	30	42	56

Si comparas al primero de éstos con el primero, se advierte una cantidad del doble, que es la primera especie del múltiplo; pero si comparas el segundo con el segundo, se obtiene una proporción hemiolia; si el tercero con el tercero, la proporción sesquitercia; si el cuarto con el cuarto, sesquicuarta; si el quinto con el quinto, la sesquiquinta, y avanzando desde ahí encontrarás la serie de los superparticulares íntegra y sin tropiezos, en el espacio tan largo como se quiera, de modo que en la primera proporción, la del doble, la diferencia sea de una unidad sola, pues dos siempre se diferencia de uno en una unidad sola.

ra vero duorum est differentia. in sesquitertia trium i sesquiquarta. 4. ⁊ deiceps secũdum superparticulares formas nũeroꝝ: quod ad differẽtia attinet. vno tantũ crescit adiecto nũerum explicans naturalem.



Sin vero secundum tetragonum prio parte altera lõgiori cõpares: ⁊ tertiũ secũdo: ⁊ quartũ tertio: ⁊ quintum qr to easdẽ rursus ꝓportiones effici pnotabis quas in supiore forma descripsimus. Sed hic differentie ab vnitate non schoãt: sȝ a binario nũero in infinitum per eosdẽ calculos ꝓgrediũtur. Eritqȝ secundus primi duplus. tertius scdi sesqualter. quartus tertij sesquitertius. ꝑm eandẽ conueniẽtiam que superius demonstrata est.



Rursus quadrati inuicem imparibus differũt parte altera longiores parib⁹.

Differentie impares.

13	5	7	9	11	13	
1	4	9	16	25	36	49

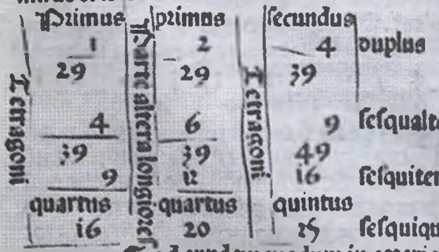
Quadrati.

Differentie pares.

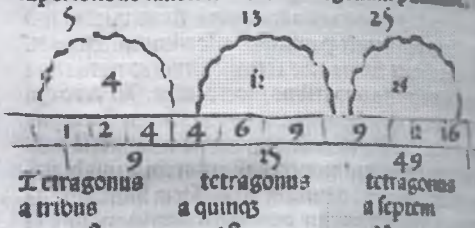
4	6	8	10	12	14	
2	6	12	20	30	42	56

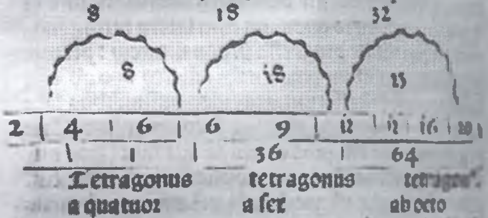
Parte altera longiores.

At vero si inter primum ⁊ secundũ tetragonũ primũ parte altera longiorem ponimus: ad vtrosqȝ eos vna proportione coniungit. In vtrisqȝ enĩ ꝓportiõibus dupli multiplicitas inuẽitur. Sin vero inter secundum tertiũqȝ tetragonũ secũdũ parte altera longiorem ponas sesqltere cõparationis ad vtrosqȝ forma cõponit. Et si inter tertium ⁊ quartum tetragonum tertia parte altera longiorẽ cõstituas: sesquitertia spẽs nascet ⁊ idẽ si in cũctis feceris: cunctas supparticulares spẽs inuenire miraberis.



Et ad eundem modum in ceteris conuenit intueri. Rursus si ponantur duo tetragoni ex superius descriptis: idest primus ⁊ secundus: ⁊ in vnum colligantur: ⁊ medius eorũ parte altera longior bis multiplicetur: tetragonus fit. Nãqȝ vnus ⁊. 4. si iungantur. 5. faciunt eorum binarius parte altera longior si bis ducatur quatuor faciunt. qui iuncti. 9. sine vlla dubitatione efficient qui est numerus quadratus. Et ad eundem modum in alijs hoc modo dispositis numeris quos supra descripsimus idem constat intelligi. Si vero conuertas ⁊ inter duos primum ⁊ secundũ parte altera longiores secundum tetragonum ponas: qui in ordine quidem secundus est: sed actu ⁊ ope prim⁹. ex duobus parte altera longioribus congregatis. ⁊ bis multiplicato medio tetragono: rursus tetragonus conficitur. Namqȝ inter. 6. ⁊ binarium numerũ qui sunt primus ⁊ secundus partes altera longiores si ponatur quaternarius ordine secundus: primus actu tetragon⁹: ⁊ coniungantur duo ⁊ sex faciunt. 8. Tum si bis ducantur medij quatuor faciunt rursus octonarium qui cũ superioribus iuncti sedecim tetragonum pandunt.





Illud quoqȝ non oportet minore admiratione suscipere: quod secundum proprias naturas: vbi altrinsecus duo tetragoni fiunt: ⁊ vnus parte altera longior in medio ponitur tetragonus qui nascitur ille semper ab impari procreatur. Nam ex superioribus vno. 4. ⁊ bis multiplicato binario: factus est nouenarius tetragonus. qui scȝ a tribus procreat. Ter enĩ tres. 9. faciũt qui ternarius impar est numerus. Et sequẽs q ex. 4. ⁊. 9. ⁊ bis multiplicato senario coniũct⁹ est. 25. tetragonus: ⁊ ipse ex impari quinario nascit continenti post ternarium. Quinquies enim quinqȝ. 25. procreant ⁊ quinarius post ternarium impar est numerus. Et in sequẽti quoqȝ eadẽ rõ est. Nã qui ex. 9. ⁊. 16. ⁊ bis ducto. 12. quadratus. 49. producitur: ille a septenario impari fit post quinarium continenti. Septies enim. 7. 49. creant. At vero vbi duo altrinsecus parte altera longiores vnum medium tetragonum claudunt ex his q fiunt tetragoni a paribus producuntur. Nã qui ex duobus. ⁊. 6. parte altera longioribus ⁊ mediano ternario bis multiplicato. 16. tetragonus factus est ille a quaternario numero idest pari producitur. Quater enim. 4. 16. sunt. Et in sequenti quoqȝ ordine sic ex senario ⁊ duodecim ⁊ bis in suã summas ducto nouenario. 36. fiunt. ex continenti pari senario complentur. Sex enim sexies. 36. restituunt. Nec minus eadem rõnẽ cadet. ex. 12. ⁊. 20. ⁊ bis. 16. fact⁹. 64. tetragon⁹. Hic enĩ ex octonario cõtinenti post senarium nascitur. Octies enĩ octo. 64. tetragonũ iungũt. Et in alijs quoqȝ secundum eundem modum si idẽ fiat rationis ordo non discrepat.

Con

/15v./

Pero en la proporción sesquiáltera, la diferencia es dos, en la sesquitercia es de tres, en la sesquicuarta, de cuatro, y así en adelante, según las formas superparticulares de los números, en relación a las diferencias, crece sólo en uno la suma, resultando el número natural.

(véase esquema en fol. 15 v.)

En cambio, si comparas el segundo tetrágono al primero de los que tienen una parte más larga que otra, y el tercero con el segundo y el cuarto con el tercero y el el quinto con el cuarto, advertirás que se forman de nuevo las proporciones que hemos descrito en el esquema anterior, pero aquí las diferencias no parten de la unidad, sino que avanzan del número dos hasta el infinito por los mismos cálculos, y será el segundo doble del primero, el tercero tendrá una proporción sesquiáltera con el segundo, el cuarto una proporción sesquitercia con el tercero, según la misma sucesión que se ha mostrado anteriormente.

(véase esquema en fol. 15 v.)

A su vez, los cuadrados difieren entre sí por los impares y los que tienen una parte más larga que otra, por los pares.

Diferencias impares

3	5	7	9	11	13

1	4	9	16	25	36	49

Cuadrados

Diferencias pares

4	6	8	10	12	14

2	6	12	20	30	42	56

Los que tienen una parte más larga que otra

Pero si entre el primero y el segundo tetrágono ponemos el primer número que tiene una parte más larga que otra, se relaciona con los otros dos en una proporción. Pues en las dos proporciones se encuentra la multiplicidad del doble.

Pero si pones entre el segundo y el tercer tetrágono el número segundo que tiene una parte más larga que otra, se relaciona con los otros en proporción sesquiáltera. Y si colocas entre el tercer y el cuarto tetrágono, el tercero que tiene una parte más larga que otra, nace la especie del sesquitercio. Y si haces lo mismo en todos, te sorprenderás de encontrar todas las especies superparticulares.

(véase esquema en fol. 15 v.)

Y del mismo modo se debe considerar en los restantes.

A su vez, si se toman dos tetrágonos de los descritos anteriormente, esto es, el primero y el segundo, y se suman, y el medio entre ellos que tiene una parte más larga que otra se multiplica por dos, resulta un tetrágono. Pues si se suman uno y cuatro, resultan cinco. Si el dos medio que tiene una parte más larga que otra se multiplica por dos, resultan cuatro, que sumados harán sin ninguna duda nueve, que es un número cuadrado. Y del mismo modo en los restantes, dispuestos de esta forma los números que hemos escrito antes, está claro que se entiende lo mismo.

Pero si intercalas entre un primero y un segundo que tienen una parte más larga que otra también el segundo tetrágono –el que en el orden es el segundo ciertamente, pero que es primero en realidad y en acto-, la suma de los dos que tienen una parte más larga que otra, y de multiplicar el tetrágono medio por dos, forma a su vez un tetrágono. Pues entre el seis y el número dos, que son el primero y el segundo que tienen una parte más larga que otra, si se coloca un cuatro que es segundo en su serie -pero que es el primer tetrágono en acto- y se suman el dos y el seis, resultan ocho; entonces, si se multiplica por dos el cuatro del medio, resultan de nuevo ocho, que sumados con los ocho anteriores forman un tetrágono de dieciséis:

(véase esquema en fol. 15 v.)

Tampoco se debe observar con menor admiración que, según las naturalezas propias, cuando dos tetrágonos se presentan por separado y se les coloca en medio uno que tiene una parte más larga que la otra, el tetrágono que surge siempre se genera del impar. Pues de los anteriores uno y cuatro, multiplicado el dos por dos, se crea un tetrágono de nueve, es decir, el que se genera del tres, ya que tres por tres hacen nueve y el tres es un número impar. Y el siguiente, que se forma a partir del cuatro y el nueve, y de la multiplicación de seis por dos, el tetrágono de veinticinco, nace del cinco impar, que es el que viene inmediatamente detrás del tres; pues el cinco por cinco da veinticinco y el cinco es el número impar detrás del tres. Al siguiente también se le aplica lo mismo. Pues el cuadrado de cuarenta y nueve, que se crea a partir del nueve y del dieciséis, multiplicado el doce por dos, se hace a partir del siete impar, y va inmediatamente detrás del cinco, ya que siete por siete dan cuarenta y nueve.

Pero cuando dos de los que tienen una parte más larga que la otra, por separado, encierran en medio un tetrágono, todos los tetrágonos que se han formado a partir de éstos, vienen de los pares. Pues el tetrágono de dieciséis, que se ha formado a partir de dos y seis, que tienen una parte más larga que la otra, y de un cuatro multiplicado por dos, se crea a partir del número cuatro, esto es, par; ya que cuatro por cuatro son dieciséis.

Y también en la serie que continúa, cuando a partir de seis y doce, y a su suma viene el nueve multiplicado por dos, se hacen treinta y seis, que se forma a partir del número par inmediatamente siguiente, el seis; pues seis por seis ascienden a treinta y seis. Y no menos le corresponde la misma aplicación al tetrágono de 64, formado a partir de 12 y veinte, y dos por dieciséis, pues nace del ocho que es el que sigue inmediatamente al seis, ya que ocho por ocho son sesenta y cuatro. Y si pruebas también según el mismo procedimiento en los demás, el orden de la aplicación no se altera.

¶Quod ex quadratis ⁊ parte altera longioribus oīs formarum ratio conſiſtat. Capl'm.xxxiiii.

TAlud vō qđ ex his duob' tota oīum formarum videꝛ orta prolatio: non minore ꝯſide ratione notandū eſt. Nāqꝫ trianguli q cunctas alias formas ſicut ſup' docuim' collecti producunt: his iūctꝭ velut ex qbuſdā elementis oꝛiunꝛ. Nāqꝫ ex vno p'io tetragono ⁊ bīario primo parte altera lōgiore ternari' triāgulus copulatur. Et ex binario vel q̄ternario. i. ex ſcđo tetragono ſenarius triāgul' ꝑcreaꝛ. Ex q̄ternario quoqꝫ ⁊ ſenario: denarius triangulus naſciꝛ. Et ad eundē ordinem cuncta triangulorꝫ ratio conſtabit. Diſponanꝛ enim alternatim inter ſe tetragoni ⁊ parte altera lōgiores qui vt melius pernotarenꝛ: pri' in duobus eos verſibus diſpoſuimus poſt autem eoſdem permiſcuimus: ⁊ qui exinde trianguli naſcerentur aſcripſimus.

Tetragoni.

1	4	9	16	25	36	46	49	81

parte altera longiores.

1	6	12	20	30	42	56	72	90

tetragoni ⁊ altera parte longiores alternati.

1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	

Trianguli.

¶Quemadmodum quadrati et parte altera lōgiorib' vel parte altera longiores ex quadratis fiant. Capitulum. xxxv.

OMnis vō tetragonus ſi ei propriū lat' addatur: vel eodē rurſus demaꝛ: ꝑte altera lōgior fit. Nāqꝫ. 4. tetragono ſi qs duo iūgat: vel duo detrahat. 6. addēdo ꝑficiet ⁊ duo detrahendo. at vterqꝫ figurā continet ꝑte altera longiorem que. ſ. magna eſt alteritatis vis. omnis enī infinita ⁊ indeterminata potētia: ab eq̄litatꝭ natura: ⁊ a ſuis ſe finibus cōtinēti ſuba diſcedens: aut in mai' exuberat. aut in minore decreſcit.

¶Quod principaliter eiuſdeꝫ qdē ſit ſubſtātie vnitas ſcđo vō loco impares numeri: tertio q̄drati. ⁊ qđ pricipaliter dualitas alterius ſit ſubſtantie: ſecūdo vō loco pares nūeri: tertio ꝑte altera lōgiores. Cap. xxxvi.

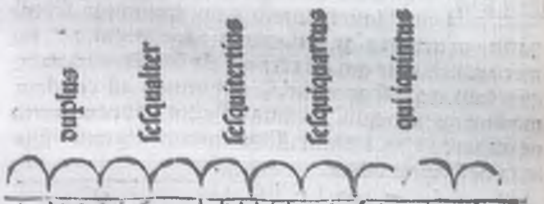
COnſtat igiꝛ primo quidē loco vnitatē ꝓpe īmutabiliſqꝫ: ſubſtātie eiuſdēqꝫ nāe: dualitatē vō primā alteritatis mutatiōiſqꝫ eſſe principiū. Scđo vō loco oēs īpares numeros ꝑꝑ vnitatis cognationē eiuſdē atqꝫ immutabilis ſubē eē participes: pares vō ob binarii nūeri cōſortiū alteritatib' eē ꝑmixtos. Tetragonos quoqꝫ ad eūdē modū cōſiderari manifeſtū eſt. Nā qđ eorum cōpoſitio ⁊ cōiūctio ex imparibus fit. īmutabilis eos nature pronunciabo coniunctuos. Qđ vō parte altera longiores ex copulatione pariū ꝑcreanꝛ: nūqꝫ ab alteritatis varietate ſeꝑantur.

¶Alternati poſitis quadratis ⁊ parte altera longioribus qui ſit eorꝫ cōſenſus in differentia ⁊ ī ꝓportione. Capitulum. xxxvij.

ILud igiꝛ perſpiciendū eſt: quod ſi idē tetragoni ⁊ parte altera lōgiores diſponāꝛ: ita vt alternati ſibi ꝑmixti ſint: tāta in his eſt cōiūctio vt alias ſibi in eiſdē proportionibus cōmunicent: diſcrepent. āt differentiis. alias. vō differentiis pares ſint. proportionibus diſtēt. Diſponantur enim in ordinem ideꝫ illi ſuperiores tetragoni: ⁊ parte altera longiores ab vno.

1	2	4	6	9	12	16	20	25	30

ERgo in ſuperiore formula hoc mathe intuēdū eſt. Nāqꝫ inter vnū qui eſt tetragonus ⁊. 2. dupla proportio eſt. inter. 2. ⁊. 4. dupla. Hic ergo tetragonus cū parte altera longiore: atqꝫ hic cū ſequente tetragono. eadem ꝓportione iunguntur: differentiis vō nō iſdē. Nāqꝫ duorꝫ atqꝫ vnius ſola vnitas differentia eſt: ſꝫ idem duo a quaternario ſolo binario relinquunꝛ. rurſus ſi. 2. ad. 4. ſpeculeris dup'ā eſt proportio ſi quatuor ad ſex habitudinem ſeſqualteram recognoſces. Hic ergo ⁊ porportionibus diſcrepant in differentiis pares ſunt. Nāqꝫ ⁊ quatuor a duob' ⁊. 6. a q̄tuor eodem binario diſtāt. In ſequentibus etiaꝫ eodē modo ſicut in primis fuit: rō conſtant. Nam eadē ꝓportio eſt differentiis non eiſdem. Nam. 4. ad. 6. ⁊. ſex ad nouem ſeſqualtera proportiōe iungūtur. 6. autē quaternarium duob'. 9. vō ſenarium tribus preterenūt. In ſequētib' etiam eadem rō ſpeculabiꝛ. ⁊ ſemper alternatim nunc quidē eedem proportiōes. alie differentie ſunt. nūc aūt ordine permutato. hiſdē differētiis alie proportiones. Semperqꝫ in quib' differunt ſecūdum nālis numeri ordines tetragoni ⁊ parte altera longiores ſeſe ſuperabūt: tantū qđ geminatꝭ ſimulis naturalis numeri fit progreſſio. Quod mirū videri non debet. nos eniꝫ ipſas ſummas tetragonorꝫ ⁊ parte alterā longiorum geminam' ad primas ſecundaſqꝫ proportiones.



1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	

Differentie.

EEdem quoqꝫ differentie mirabilem in modum a toto ꝑ ſequētes ꝑteſ ⁊ ꝑ eaſdē vnitates qb' ſuperius excreuerūt progrediūtur. Nāqꝫ īter vnū ⁊ duo tm̄ vnitaſ īntercedit: q̄ vnitati cui eq̄lis ē totū ē binarii vō medietas. Eodē mō īter. 2. ⁊. 4. tm̄ duo ſunt. q binarij totū ſūt: quaternarii medietas. Inter q̄ternarium vero ⁊ ſenariū idē duo ſunt: ad quaternarium medietas: ad ſenariū ꝑs tertia. Tres vō q ſequūꝛ q inter. 6. ⁊. 9. conſtituti ſunt medij: ſunt quideꝫ ſenarii dimidiū ꝑs vō tertia nouēarii. Et rurſus ternari' q nouēarii tertia ꝑs eſt: duodenarij quarta ē. ⁊ ad eundē modū vſqꝫ in finē deſcriptionis geminatis hmōi partibus ſicut ipſa quoqꝫ ſummarꝫ comparatio geminata eſt: equas partium progreſſiones aſpicies.

¶Probatio quadratos eiuſdē eē nature. Cap. xxxviii.

ILud āt apertiſſimū ſignum ē oēs tetragonos imparibus eſſe cognatos. quod ī omni diſpoſitione ab vno vel in duplicib' vel ī triplicibus talis nature ordo conferiꝛ vt nūqꝫ niſi ſecundum imparem locum tetragonus inueniatur. Diſponam' enim in ordinē numeros ꝑmo quidē duplos: deinde triplo.

/16r./

Que el fundamento de las figuras se basa en los cuadrados y en todos los que tienen más larga una parte que la otra.

Capítulo XXXIIII.

Hay que advertir con importancia no menor que la serie íntegra de todas las figuras surge de estas dos. Pues los triángulos, que producen todas las formas según hemos mostrado más arriba, por juxtaposición, una vez reunidos éstos, surgen por así decir, de ciertos elementos. Ya que a partir de un tetrágono, el primero, y del dos, el primero que tiene más larga una parte que otra, se forma un triángulo de tres, y del de dos y del cuatro, esto es, del segundo tetrágono, se crea un triángulo de seis. También del cuatro y del seis nace el triángulo de diez y todo el fundamento de los triángulos se basará según esa misma norma.

Pues dispónganse unos frente a otros tetrágonos y números que tienen una parte más larga que otra, que hemos dispuesto en dos líneas para que se apreciaran mejor. Después los hemos mezclado y hemos escrito los triángulos que nacen de ahí:

Tetrágonos

1	4	9	16	25	36	49	64	81

Números que tienen una parte más larga que otra

2	6	12	20	30	42	56	72	90

(véase el esquema de los triángulos combinados con los tetrágonos y con los que tienen una parte más larga que otra en fol. 16 r.)

Cómo los cuadrados se hallan a partir de los números que tienen una parte más larga que otra y que los números que tienen una parte más larga que otra, a partir de los cuadrados.

Capítulo XXXV.

Todo cuadrado, si se le añade o se le resta su propio lado, resulta un número que tienen una parte más larga que otra. Pues el tetrágono de cuatro, si se le suma dos o se le resta dos, llega a seis si se aumenta y a dos si se reduce. Pero las dos figuras contienen un número que tiene una parte más larga que otra. Ésta es la gran fuerza de lo otro. En efecto, toda la potencia infinita e indeterminada, separándose de la naturaleza de la igualdad, que se contiene a sí misma en sus límites, o se desborda en más o se reduce a menos.

Que la unidad es principalmente indicativa de la sustancia de lo mismo, en segundo lugar, los números impares, y en tercero, los cuadrados y que principalmente es la dualidad reveladora de la sustancia de lo otro, en segundo lugar, los números pares, en tercer lugar, los números que tienen una parte más larga que otra.

Capítulo XXXVI.

En primer lugar, se ve claro que la unidad es de la sustancia propia de lo inmutable, y de la naturaleza de lo mismo, mientras que la dualidad es la primera de la alteración y principio de diferenciación. En segundo lugar, que todos los números impares por parentesco con la unidad, participan de la sustancia de lo mismo y de lo inmutable, en tanto que los pares, por afinidad con el número dos, tienen entremezclada la sustancia de lo otro. Queda patente que los tetrágonos también sc consideran del mismo modo. Pues porque su composición y formación se realiza a partir de los impares, diré que están unidos a la naturaleza inmutable. Porque los que tienen una parte más larga que otra se crean por unión entre los pares, nunca se separan del carácter variable de la alteridad.

Situados alternativamente los cuadrados y los que tienen una parte más larga que otra, cuál es la correspondencia entre ellos en sus diferencias y en sus proporciones.

Capítulo XXXVII.

Por tanto, hay que observar con atención que si los tetrágonos y los que tienen una parte más larga que otra se colocan de tal forma que se intercalen alternativamente, tanta afinidad hay en éstos, que por un lado se relacionan en las mismas proporciones, y se distinguen por diferencias, pero por otro lado tienen las mismas diferencias y se distancian en proporciones. En efecto, colóquense en serie aquellos tetrágonos anteriores, y los que tienen una parte más larga que otra desde el uno:

1	2	4	6	9	12	16	20	25	30

En el esquema superior hay que fijarse sobre todo en esto: que entre el uno, que es un tetrágono, y el dos, hay una proporción del doble; y entre el dos y el cuatro, una proporción del doble. Por eso este tetrágono y el número que tiene una parte más larga que la otra, así como éste último con el siguiente tetrágono se relacionan en la misma proporción, pero no con las mismas diferencias. Pues de uno a dos la diferencia es una sola unidad, pero entre el dos y el cuatro se llevan dos nada más. Por su parte, si se mira del dos al cuatro, hay una proporción del doble, si del cuatro al seis, se reconocerá la proporción habitual sesquiáltera. Luego si se diferencian en las proporciones, son iguales en las diferencias. Pues del dos al cuatro y del cuatro al seis hay la misma diferencia de dos. También en los siguientes de la misma manera se observa una proporción que hubo en los primeros. Pues hay la misma proporción, pero no tienen las mismas diferencias. El cuatro al seis y del seis al nueve se unen por una proporción sesquiáltera, el seis tiene una distancia de dos con el cuatro, el nueve con el seis, de tres. También en los siguientes se observará esa misma proporción y tanto hay siempre alternativamente las mismas proporciones, mientras que se dan otras diferencias, como a la inversa, con las mismas diferencias, otras proporciones y siempre en lo que se distinguen, según el orden del número natural los tetrágonos y los que tienen una parte más larga que la otra, la progresión se hace sólo con la duplicación de los valores del número natural. Esto no debe parecer sorprendente. Pues nosotros hemos reduplicado las cantidades de los tetrágonos y de los que tienen una parte más larga que la otra en primeras y segundas proporciones:

Proporciones

Doble sesquiáltera sesquitercia sesquicuarta

1	2	4	6	9	12	16	20

1 2 2 3 3 4

Diferencias

También esas mismas diferencias de manera admirable avanzan desde el todo a través de las partes siguientes y a través de las mismas unidades con las que han crecido antes. Pues entre el uno y el dos sólo se intercala la unidad, ésta es la totalidad de la unidad a la cual se iguala, pero la mitad del dos. Y de la misma manera, entre dos y cuatro sólo hay dos, que son la totalidad el dos, pero la mitad del cuatro. Entre el cuatro y el seis hay los mismos dos, la mitad respecto al cuatro, respecto al seis la tercera parte. Pero el tres el siguiente, que es la diferencia entre el 6 y el 9, es ciertamente la mitad del seis, pero la tercera parte del nueve. Y a su vez ese número tres, que es la tercera parte del nueve, es la cuarta del doce, y del mismo modo hasta el final del esquema se duplican las cantidades de este modo, según la misma cantidad relativa se duplica, observarás una progresión similar de las partes.

Prueba de que los cuadrados pertenecen a la naturaleza de lo mismo.
Capítulo XXXVIII.

La señal clarísima de que los tetrágonos están emparentados con los impares, es que en toda disposición desde el uno, sea en los dobles o en los triples se entabla una serie de tal naturaleza que nunca se encuentra un tetrágono más que en un lugar impar. Coloquemos los números en serie, en primer lugar los dobles, en segundo, los triples.

1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Igitur in vtrisq; versibus primos aspicias: singulos quos inuenis quoniam tetragoni sunt: in impare loco sunt constituti: quoniã primi sunt. Si vero tertium locum respexeris. 4. ⁊. 9. notabis: quorum hic a duobus pro ficiscitur: illam ternarius creat. qui sunt loco impari constituti. Quintum deinde si videas locũ 16. ⁊. 81. respicies. sed vnus a quaternario nascitur: alterũ nouenarius creat. Et si nonum locum rursus aspicias: tetragonos pernotabis. 256. 6561. quorũ superior fit a. 16. inferior vo ab. 81. Idẽ si in infinitum facere libeat indiscrepanter incurrit.

¶ Cubos eiusdem participare substantie quod ab ipa ribus nascantur. Capl'm. xxxix.

Ipsi vo cubi qui quãquã tribus interuallis sublati sint: tamen pp equalẽ multiplicationem participant immutabilis substãtie. eiusdemq; nature sunt socii: non aliorũ quã imparium coaceruatione produnt nũ quã vo parium: Nam si omnes ab vnitate impares disponantur: iuncti figuras cubicas explicabunt.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Nbis igitur qui primus est potestate: ⁊ virtute primum cubum faciet. Iuncti vo duo qui sequuntur ternarius scilicet ⁊ quinari⁹ secundum efficiunt cubum: qui est octonarius Iuncti autem. 3. qui sequuntur septenarius nouenariusq;. ⁊. 11. cubum faciunt: qui. 27. numero continetur qui est tertius. Et sequẽtes quatuor quartum. ⁊ qui sequuntur. 5. quintum ⁊ ad eundem modum quotus quisq; cubus efficitur: tot coniunctione impares apponuntur. Hoc autem diligenti⁹ subiecta descriptio docet.

1 · 3 · 5 · 7	9 · 11	13 · 15 · 17 · 19	
1	8	27	64
primus ab vno	secundus a bis duobus bis	tertius a ter tribus ter	quartus a quater quatuor quater

¶ De proportionalitatibus. Capl'm. xxx.

Et de his quidem sufficienter dictum est. nunc res admonet quedam de proportionibus disputantes que nobis vel ad musicas speculatiões: vel ad astronomicas subtilitates: vel ad geometrice cõsiderationis vim: vel etiam ad veterum lectionum intelligentiaz prodesse possint: arithmetica introductione commodissime terminare. Est igitur proportionalitas duarum vel trium: vel quotlibet proportionum assumptio ad vnum atq; collectio. Vt autem communiter definiamus: proportionalitas est duarum vel pluriuz proportionum similis habitudo: etiam si non eisdem quantitatibus ⁊ differentiis constitute sint. Differẽtia vo est inter numeros quantitas. Proportio est duoruz terminorum ad se inuicem quedam habitudo ⁊ quasi quodam modo continentia. Quorum compositio qđ efficit: proportionale est. Ex iunctis enim proportionibus proportionalitas fit. In tribus autẽ terminis minima proportionalitas inuenitur. Fit etiam in pluribus sed longior. vt binarius ad vnum quoniam duo sunt termini: duplam obtinet proportionem. Sin vero quatuor contra. 2. impares: ⁊ hic quoq; dupla proportio est. quos tres terminos si continue consideres ex duabus proportionibus fit proportionalitas: Et ẽ proportionalitas. vnum ad duo: ⁊ duo ad quatuor. Ẽ enim proportionalitas vt dictum est collectio proportionum in vnum que redactio. Fit etiam ⁊ in longioribus. Nam si quatuor illis octo velis adiungere: ⁊ bis 16. ⁊ bis. 32. ⁊ deinceps duplos qui sequuntur: fit in omnibus dupla proportionalitas ⁊ proportionibus duplis. Igitur quotiens vnus atq; idem termin⁹ ita duobus circum se terminis communicat: vt ad vnus dux sit ad alium comes: hec proportionalitas cõtinua vocatur: vt vnus duo quatuor. Est enim equalitas in his proportionis: ⁊ quemadmodum sunt. 4. ad. 2. sic sunt duo ad vnum. Et rursus quemadmodum vnus ad duo: sic duo ad quatuor. Et secundum quantitatez quoq; numeri eodem modo est. Quantum enĩ tres superant binarium: tantum binarius: vnitatẽ. ⁊ quãtum vnus a duobus minor est. tantum binarius a ternario superatur. Sin vo alius ad vnum refertur terminus: alius vero ad alium: necesse est habitudinem disiunctam vocari. Vt ad equalitatem quidem proportionis sunt. 1. 2. 4. 8. Sic eniz sunt quemadmoduz duo ad vnum. si octo ad quattuor: ⁊ conuersim quemadmodum vnus ad duo: sic quattuor ad octo. Et permutatim quemadmodum quattuor ad vnum sic octo ad binarium. Secundum quantitatem vero numeri: vt sunt. 1. 2. 3. 4. quantum enim vnus a duobus vincit: tantuz ternarius a quaternario superatur. Et quantum duo vnũ vincũt: tãto ternariũ quaternarius trãsit. Permixtĩ ẽt quãto vnus tribus minor est tãto binari⁹ quaternario: vel quãto ternarius vnitatẽ supat tãto binarium transgredit quaternarius.

¶ Que apud antiquos proportionalitas fuerit: quas posteri addiderint. Capitulum. xli.

Onfesse quidem ⁊ apud antiquiores note: queq; ad pythagore vel platõis vel aristotelis scientiam peruenerũt: he tres medietates sunt arithmetica: geometrica: armonica. Post quas proportionum habitudines tres alie sunt que sine nomine quidem feruntur. Vocantur autem quarta: quinta: vel sexta que superius dictis opposite sunt. at vo posteri propter denarii numeri perfectionem quod erat pythagore complacitus: medietates alias quatuor addiderũt: vt in his proportionalitatibus denarie quantitatis corpus efficerent. Secundum quem numerus ⁊ priores quinq; habitudĩes comparationesq; descripte sunt: vbi quinq; maioribus proportionibus quos vocauimus duces: minores aptauimus alios terminos quos comites diximus Inde etiam in aristotelica atq; archyte prius. 10. predicamentorum descriptione: pythagoricum denarium manifestum est inueniri. Quando quidez ⁊ plato studiosissimus pythagore secundum eam disputationem diuidit ⁊ archytas pythagoricus ante aristotelem licet quibusdam sit ambiguum decem hec predicamenta constituit. Inde etiam. 10. membrorum particule: inde alia permulta que omnia persequi non est necesse.

¶ Quod primum de ea que vocatur arithmetica proportionalitate dicendum est. capitu. 42.

Nunc vo de proportionalitatibus deq; medietatibus dicendum est. Et primum quidem de ea medietate tractabimus: que

/16v./

1	2	4	8	16	32	64	128	256
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Si observas en las dos líneas los primeros, cada uno de los que encuentras, porque son tetrágonos, están colocados en lugar impar, porque son los primeros. Pero si miras el lugar tercero, verás el cuatro y el nueve, de los cuales aquél proviene del dos y éste del tres y que están en lugar par. Después si miras el quinto lugar, verás el 16 y el 81, y mientras que el uno nace del cuatro, el nueve crea al otro. Y si vuelves a mirar el noveno lugar, verás los tetrágonos del 256 y del 6561, de los cuales el primero se obtiene del dieciséis y el segundo del ochenta y uno. Se presenta igual si se quiere hacerlo hasta el infinito sin diferencia.

Que los cubos participan de la sustancia de lo mismo, porque nacen de los impares.

Capítulo XXXVIIII.

Los cubos mismos que, aunque se extienden en tres dimensiones, participan por una multiplicación similar de la sustancia inmutable, y son socios de la misma naturaleza, no se obtienen de otra suma que de la de los impares, y nunca de los pares. Pues si se disponen todos los impares comenzando por la unidad, desplegarán todas las figuras cúbicas:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

En estos números, el primero dará un cubo en potencia y en virtualidad, pero sumados los dos que le siguen, es decir, el tres y el cinco, configurarán el segundo cubo, que es el de ocho.

Sumados los tres que siguen, el siete, el nueve y el once, darán un cubo que se contiene en el número veintisiete, que es el tercero. Y los siguientes cuatro darán el cuarto, y los cinco que siguen, el quinto y del mismo modo, cual es el lugar de un cubo, otros tantos impares se suman para producirlo. Esto muestra con claridad la descripción siguiente:

1	3 5	7 9 11	13 15 17 19	21 23 25 27 29
1	8	27	64	125

De las proporciones.

Capítulo XL.

Se ha explicado este tema suficientemente. Ahora resulta oportuno comentar algo acerca de las proporciones que pueden ser de provecho para los estudios de música y las sutilidades de la astronomía, o en virtud de la consideración geométrica y también para la comprensión de las lecturas de los antiguos, y terminar de la manera más adecuada con la introducción aritmética.

La proporcionalidad es una comparación y reunión de dos o de tres o del número que sea de proporciones en una sola. Para definirla de manera general, la proporcionalidad es una relación semejante de dos o de muchas proporciones, aunque no se hayan constituido con las mismas cantidades y diferencias (entendiendo por diferencia la cantidad que media entre los números).

La proporción es una relación y por así decir definición de dos términos entre sí, cuya reunión en cuanto que se establece, es algo proporcional. Porque es la reunión de los números lo que hace la proporción. En tres términos se encuentra una proporcionalidad mínima. También se hace en muchos, pero es más extensa. Así como del dos al uno, tienen una proporción del doble, porque son dos términos. Y si comparas cuatro frente a dos, esto también es una proporción doble. Si consideras seguidamente estos tres términos, la proporcionalidad se consigue a partir de dos proporciones y es proporción de uno a dos y de dos a cuatro. Pues la proporcionalidad es la reunión de proporciones y su reducción a una.

Se hace también en proporciones más amplias. Pues si quieres sumar a estos cuatro números el ocho, y a éstos, dieciséis, y a éstos treinta y dos, y así en adelante los dobles que siguen, se encuentra en todos la proporcionalidad doble a partir de proporciones dobles.

Por tanto, cada vez que uno y el mismo término de tal manera se relaciona con dos términos de su entorno, que respecto de uno es antecedente y respecto del otro, consecuente, esta proporcionalidad se llama continua, por ejemplo, uno,dos,cuatro. Hay también igualdad en estas proporciones y como son cuatro respecto a dos, así son dos respecto a uno y a su vez, como son uno respecto a dos, así dos en relación con cuatro. Y así según la cantidad del número, también es de esa manera.

Pues en la misma cantidad en que el tres supera a dos, en esa misma supera dos a la unidad, y en la medida en que uno es menor respecto de dos, en esa el dos es superado por el tres. Pero si se relaciona un término con otro, y ese otro con otro más, es necesario que se llame relación disjunta, como son los que se relacionan según la cualidad de la proporción (uno, dos, cuatro y ocho). Así son el dos con el uno, así el ocho con el cuatro y viceversa, según el cuatro con el uno, así el ocho con el dos. Según la cantidad del número, como son uno, dos, tres y cuatro.

Pues en la medida en que uno es superado por el dos, en esa es superado el tres por el cuatro, y en tanto sobrepasa el dos al uno, como el cuatro excede del tres. También al revés, uno es menor que tres en la medida en que dos es inferior a cuatro, o en tanto es mayor tres que uno, como el cuatro excede del dos.

Qué han entendido los antiguos por proporción y cuáles se le han añadido.

Capítulo XLI.

Entre los antiguos se admitían y conocían todas aquellas de las que tuvieron conocimiento Pitágoras, Platón o Aristóteles; éstas son las tres medias: aritmética, geométrica y armónica. Después de estas relaciones proporcionales, hay otras tres que no se conocen con un nombre determinado, pero que se designan como cuarta, quinta y sexta, y son opuestas a las que hemos citado antes.

Pero los que vinieron después, por la perfección del número diez, que era el que más le complacía a Pitágoras, añadieron otras cuatro medias, para que formaran un corpus en estas proporcionalidades de la decena. Según este número las cinco relaciones anteriores y las comparaciónes han sido descritas, de modo que respecto a las cinco proporciones mayores, que llamamos antecedentes, les confrontamos otros términos menores, que llamamos consecuentes.

De ahí también que en la descripción aristotélica de las diez categorías y antes en la de Arquitas, se encuentra claramente la decena pitagórica, puesto que Platón, muy respetuoso con Pitágoras, hace sus divisiones según este cómputo, y el pitagórico Arquitas antes de Aristóteles, aunque sea ambiguo en ciertas cuestiones, establece estas diez categorías. También de ahí las diez partes de los miembros, de ahí otras muchas influencias que no es necesario detallar una por una.

Que hay que hablar en primer lugar de la que se llama proporción aritmética.

Capítulo XLII.

Ahora hay que hablar de las proporcionalidades y de las medias, y ciertamente en primer lugar trataremos de esa media que

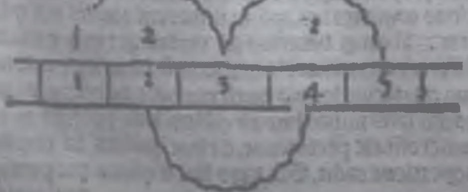
scdm quātitatis equalitatem neglecta proportiōis pa
rilitate constitutorꝫ terminorum habitudines seruat
In his aūt quātitatibus medietas ista versat᷑: inqꝫ
his speculanda est: in quib⁹ a seipsis termini differūt
Quid autem esset differentia terminorꝫ superi⁹ diffi
nitum est. Hanc autē esse arithmeticā medietatē nu
merorum ipa rō declarabit: quoniā eius proportio ī
numeri quantitate consistit. Que igi᷑ cā est hmōi
terminorum habitudinem idest arithmeticam cūctis
aliis proportionalitatibus anteponere: primum qꝺ
hanc nobis in principio ipsa numerorum natura ⁊ vis
naturalis quantitatis opponit. Huiusmodi enim pro
portiones queqꝫ ad terminorum differentias perti-
nent: vt paulo post demonstrabitur: in naturalis pri-
mum numeri dispositione cognoscimus. Deinde qꝺ
supiore libro disputātib⁹ nobis apparuit arithmeticā
vim geometrica atqꝫ musica esse antiquiorem: ⁊ qꝺ
illata has simul inferre: sublata vero perimeret. qua
re ordine disputatio progredie᷑: si ab ea prius incho-
andū sit medietate que in nūeri differētia nō in ꝓpor
tionis speculatione versatur.

De arithmetica medietate eiusqꝫ proprietatibus.
Capitulum. xxxiii.

Arithmeticaꝫ medietatē vocam⁹: quotiēs vel trib⁹ vel quotlibet terminis positꝫ: eq lis atqꝫ eadē differentia inter oēs disposi-tos terminos inueni᷑. In qua neglecta pro portionis equalitate terminorꝫ tantū differentiaꝫ qꝫ speculatio custoditur. vt. 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10

In hac enī nālis numeri dispositione: si qs. continuatim differentias terminorum cu-ret aspicere: secundum arithmeticam me-dietatem equa terminorum inter se discre pantia est. Equales enim sunt differentie: sed eadem proportio atqꝫ habitudo non est. Si igi᷑ in tribus terminis consideratio sit: continua propor-tiōalitas dicitur. Sin vō hic alius dux ⁊ alius comes illic vero vtriqꝫ sint alii: vocabitur disiūcta medietas Si igitur in tribus tantum terminis secundam con tinuam medietatem consperceris: vel in quatuor: vel in quotlibet aliis secundum disiunctam: easdem sem per differentias terminorum videbis: tantuꝫ solis ꝓ portionibus permutatis. Id si in vno quis nouerit re liqua cū ratio nō latebit. Sit continua medietas. 1. 2. 3. Hic vnus a duob⁹ ⁊. 2. a tribus solis tantum sin-gulis distant. ⁊ sunt eedem differentie proportiones vero alie: Namqꝫ duo ad vnū duplus est. tres ad duo sesqualter: ⁊ in ceteris idem videbis. Sin autem per miscens ⁊ aliquos preteriens eligas: ⁊ in his aliquam speculationē ponas: idē poterit euenire. Nā si equa-les terminos intermittas: ⁊ sese in priore dispositiōe ꝓtereant. si singulos intermittas: soli⁹ binarii notabi᷑ differentia. sin vō duo ꝓtereas: ternarii. si tres: quaterna rii. ⁊ ad eundē modū vno plus quā intermiseris: erit illa quā querimus differētia terminorꝫ. Nāqꝫ si ī trib⁹ terminis singuli relinquan᷑: binarius semper intererit

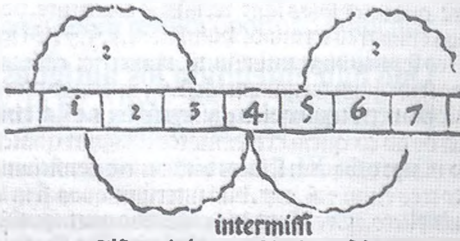
Differentie



intermissi

Vides ne vt cū supius in naturalis nūeri di spositione se termini singulis preterirent pretermissis duobus ⁊. 4. vnus ad tres: ⁊. 3. ad quinarium comparati binarium so-lum in differentia retinuerint. Nec nō etiā in disiuncta eadem versabitur obseruatio.

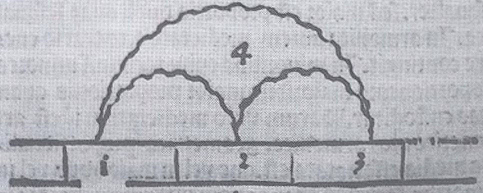
Differentie



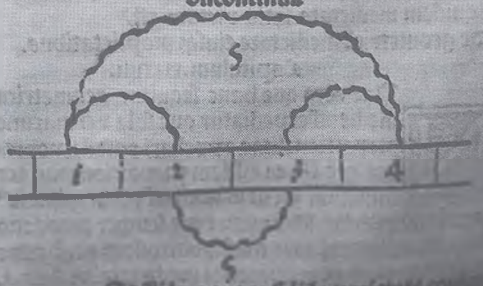
intermissi

Talibus igitur vestigiis insistentem nullus ab eadeꝫ similitudine error abducet. Nam qꝫ si duos intermittas: ternarius differen-tiam continebit. si tres: quaternarius. si q̄ tuor quinarius: eque in continuis propor-tionibus atqꝫ disiunctis. Qualitas autem proportio-nis eadem non erit quāuis sint equis termini diffe-rentiis distributi. Quod si conuersim: ponantur: vt non eisdem differentiis eadem qualitas proportio-nis eueniat: geometrica talis proportionalitas non arithmetica nominatur. Est autem proprium huius medietatis quod si in trib⁹ terminis speculatio sit: cō positis extremitatibus illa summa que inter extremi tates est: non loco tantum: verum etiam sit quantita te medietas. Ut si ponātur. 1. 2. 3. vn⁹ ⁊ tres q̄tuor red dūt. Duo vō qui medius inter vtrosqꝫ est: q̄ternarii medietas inuenitur. Quod si bis medietatem ducas equ⁹ erit extremitatibus Bis enī duo quatuor creāt Sin vero disiūcta sit: quod sit ex vtrisqꝫ extremitati bus compositis. hoc ex duabus medietatibus reddi-tur. Si enim sunt. 1. 2. 3. 4. vnus ⁊ quatuor quinariꝫ creant: duo ⁊ tres medii in eundem rursus quina-rium surgunt.

continua



bis duo
4
discontinua



Et illi hoc quoqꝫ solida ꝓprietate con... ctum: quod quemadmodum sunt ... termini huiusmodi dispositiōis ad ...

/17r./

sin tener en cuenta la igualdad de la proporción, según la igualdad de la cantidad, conserva las relaciones de los términos considerados. En estas cantidades tiene vigencia esa media y ha de observarse en éstas en las cuales los términos difieren de sí mismos. Se ha definido antes qué es la diferencia de los términos. Pero la argumentación misma ha dejado claro que ésta es la media aritmética de los números, porque la proporción de ella reside en la cantidad del número.

Por tanto, ¿qué razón hay para anteponer la relación de los términos de esta clase, esto es, la aritmética, a todas las demás proporcionalidades? En primer lugar, se nos presenta la misma naturaleza de los números y el valor de la cantidad natural. Pues reconocemos todas las proporciones de esta clase que son pertinentes a las diferencias de los términos, como se demostrará un poco más abajo.

En segundo lugar, lo que nos ha aparecido en la explicación del libro anterior: que la ciencia aritmética es anterior a la geometría y a la música y que no implica a estas ciencias, pero que sin ella, se pierden las otras. Por eso nuestra explicación avanzará por orden si se ha de comenzar por esa media que consiste en la diferencia del número, no en un análisis de la proporción.

De la media aritmética y sus propiedades.

Capítulo XLIII.

Llamamos media aritmética a la media, cada vez que considerados tres términos cualesquiera, se halla una misma e igual diferencia entre todos los términos establecidos. En ella, descuidando la igualdad de la proporción, se observa la consideración sólo de los términos y de sus diferencias, como uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. En esta serie del número natural, si alguien se preocupa de ver seguidamente las diferencias de los términos, según la media aritmética, la distancia de los términos entre sí es igual, pues iguales son también sus diferencias, pero no es la misma proporción ni relación.

Así, si se trata de tres términos, se llama proporcionalidad continua, pero si uno es antecedente y otro consecuente, allí donde los dos son distintos, se llamará media disjunta. Por tanto, si examinas según la media continua sólo en tres términos, o cuatro o en cualquiera otros en media disjunta, verás siempre esas mismas diferencias de términos, alteradas solamente las proporciones.

Si alguien lo comprende en un ejemplo, no se le pasará inadvertida el resto de la relación. Sea la media continua uno, dos, tres. Este uno se diferencia del dos y dos del tres sólo en una unidad, y son las mismas diferencias, pero distintas proporciones. En efecto, dos respecto a uno es el doble, tres respecto a dos es proporción sesquiáltera. Y verás lo mismo en los restantes. Pero si eliges, mezclando y dejando a un lado algunos, y analizas éstos, puede ocurrir lo mismo. Pues si saltas términos iguales y que se pasan de uno en uno en la primera disposición, si introduces algunos, se advertirá la diferencia del dos solo, pero si pasas dos, de tres, si pasas tres, de cuatro, si pasas cuatro, de cinco. Y habrá aquella diferencia de términos que buscamos en uno más de los términos saltados, pasando del mismo modo. Pues si en tres términos se salta cada vez un término, la diferencia será siempre de dos:

2	2

1	2	3	4	5

Diferencias

¿Ves que como más arriba los términos se pasan en la serie del número natural, y pasando dos y cuatro, uno comparado con tres y tres comparado con cinco, tienen en diferencia el dos solo? También es válida esa observación en la disjunta.

2		2
1 2 3	4	5 6 7

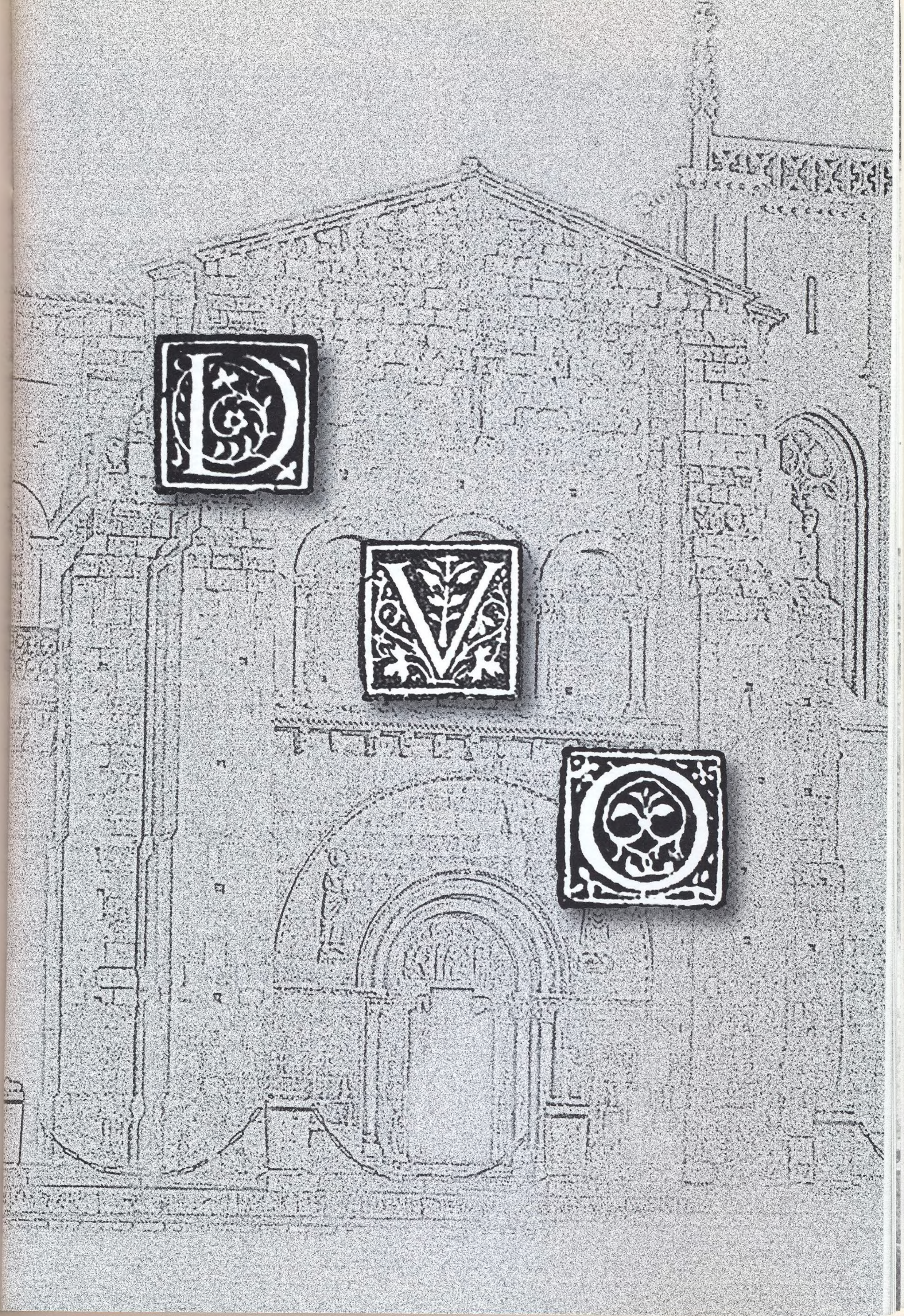
Diferencias

Con tales indicios ningún error nos puede despistar de esa semejanza. Pues si saltas dos, la diferencia contenida será de tres, si tres, de cuatro, si cuatro, de cinco igualmente en proporciones continuas y disjuntas. La cualidad de la proporción no será la misma, aunque los términos se hayan distribuido en diferencias iguales. Y si inversamente se disponen para que la cualidad de la proporción resulte la misma, pero no con las mismas diferencias, tal proporcionalidad se llama geométrica, no aritmética.

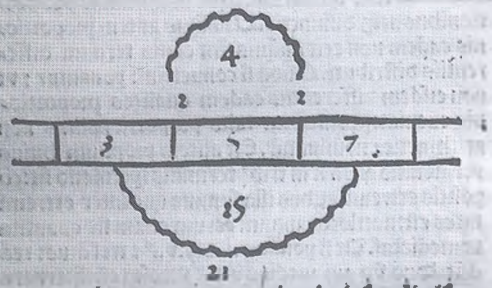
Sin embargo, lo propio de esta media es que si el estudio se hace en tres términos, si se le suman los extremos, el término que se encuentra entre los extremos, será la media no por el lugar, sino por la cantidad. Por ejemplo, si se consideran uno, dos y tres, el uno y el tres dan cuatro, pero dos que está en medio entre los otros dos números, es la mitad de cuatro. Y si son 1,2,3 y 4, uno y cuatro suman cinco, dos y tres están en medio y suman a su vez cinco:

(véase esquema en fol. 17 r.)

También está unido por una propiedad sólida el hecho de que, según son todos los términos de la disposición de este modo respecto de sí mismos,


D
V
O

sita sunt differentie ad differentias constitute. Namqꝫ omnis terminus sibiipsi equalis est ꝛ differētie differentiis sunt equales. Illud quoqꝫ subtilius qđ multi huius discipline periti nisi nicomachus nūqꝫ antea perspexerunt: quod in omni dispositione vel continua vel disiuncta: quod cotinetur sub duabus extremitatibus minus est eo numero qui ex medietate conficit tantum quantum possunt due sub se differentie continere que inter ipsos sunt terminos constitute. ponamus enim tres terminos. huiusmodi. 3. 5. 7. Si igitur tres septies augeantur: in. 21. numerum cadunt. Quod si medium terminum idest. 5. in semetipsum multiplicaueris: quinquies quinqꝫ faciunt. 25. Et hic numerus ab eo quem extremitates colligunt quaternario maior est: quem scilicet differentie conficiunt. Inter tres enim ꝛ. 5. ꝛ. 7. bini intersunt. quos si in se se multiplices. 4. reddunt. bis enim duo quatuor fiūt. Recte igitur dictum est: in hac huiusmodi dispositione quod continetur sub extremitatibus minus esse illo numero qui fit ex medietate tantum quantum differentie in se multiplicate restituunt.

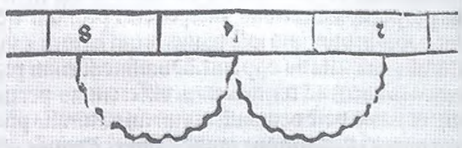


Qartum vero proprium huiusmodi dispositionis notatur: quod antiquiores quoqꝫ habuere notissimum: quod in hac proportionalitate vel medietate in minoribus terminis maiores proportiones in maioribus minores cōparationes necesse est inueniri. Namqꝫ in dispositione hac. 1. 2. 3. minores sunt termini. 1. ꝛ. 2. maiores. 2. ꝛ. 3. ꝛ. 2. ad vnū duplus est. 3. vo ad duos sesqualter: sed maior est proportio dupli quaꝫ sesqualtera. In armonica autem medietate econtrario euenire contingit. In minoribus enim terminis minores proportiones: ꝛ maioribus maior proportionis quantitas custoditur. Harum vero medietatum idest arithmetice atqꝫ armonice. geometrica proportionalitas media esse notata est. que vel in maioribus vel in minoribus terminis equas numerorum qualitatēs in proportionalitate custodit. Inter maius vero ꝛ minꝰ equalitas loco ponitur medietatis. Et de arithmetica quidem medietate satis dictum est.

De geometrica medietate eiusqꝫ proprietatibus.
Capitulum. xxxiiii.

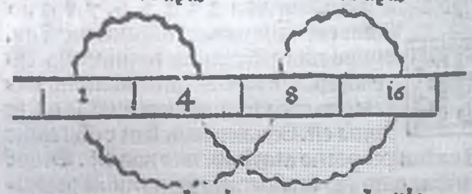
Nunc vero que hanc sequitur geometrica medietas expediatur que sola vel maxime proportionalitas appellari potest: propterea quod in ea eisdem proportionibus terminorum vel in maioribus vel in minoribꝰ speculatio ponitur. Hic enim equa semper proportio custoditur: numeri quantitas multitudoqꝫ negligitur contrarie quam in arithmetica medietate. vt sunt. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Vel in tripla proportiōe. 1. 3. 9. 27. 81. Vel si quadrupla vel si quincupla vel si in quamlibet multiplicitatem numerorū sit constituta dispersio. In his enim quotlibet terminos sumpseris: explebunt geometricam medietatem. quemadmodum. n. prior ad sequentem ita sequens ad alium. Et rursus: si permixte facias idem erit. Si eniꝫ ponātur tres termini. 2. 4. ꝛ. 8. quemadmodum sunt. 8. ad. 4. ita. 4. ad. 2. Atqꝫ hoc si conuertas: quemadmodū sunt. 2. ad. 4. ita erunt. 4. ad. 8.

Dupla Dupla



Vel si in quatuor terminis vt sunt. 2. ꝛ. 4. 8. ꝛ. 16. quemadmodum est primus ad tertiū i. 2. ad. 8. sic erit secundus ad quartuꝫ: idest 4. ad. 16. Vtraqꝫ enim proportio quadrupla est. Et conuersim quemadmodū quartus est ad scđm: ita tertius notatur ad primum. Hoc vero etiam disiuncte licet. Nam quemadmodum est primus ad secunduꝫ: idest. 2. ad quatuor: sic tertius ad quartum. idest. 8. ad. 16. ꝛ conuersim quemadmoduꝫ secundus ad primum: idest. 4. ad duos: ita quartꝰ ad tertium: idest. 16. ad. 8. idqꝫ in omnibus rata cōsideratione perspicies.

Dupla Dupla



quadrupla quadrupla

Habet autem propriū huiusmodi medietas quod in omni dispositione secundum hanc proportionalitatem terminorum differētie in eadem proportione contra se sunt q̄ fuerint ipsi termini quorum sunt ipse differentie. Siue eniꝫ dupli contra se sint termini: duple erūt etiam differentie: siue tripli: triple. siue secunduꝫ quālibet multiplicitatem: eadem in differentijs multiplicitas erit: quam prima consideratio inuenit in terminis vt. subiecta descriptio monet.

Differentie duple

	1	2	4	8	16	32	64	128
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Termini dupli.

Nulli igitur dubium esse potest qđ cū oēs termini dupli sint: ita differentie quoqꝫ eorum terminorum duple esse videantur: vt vno minus termino in differētiis: omnes pene dispositos subter terminos quorū sūt ipse differentie: superior ordo reddiderit. Est etiam aliud proprium quod omnis ad minorem maior terminus comparatus. ipsum minorem retinet differētiam. Namqꝫ binarius ad vnitatem: ipsa vnitate differt. ꝛ quaternariꝰ binario: ipso binario. ꝛ octonarius quaternario ipso quaternario. ꝛ deinceps maiores alii ipsis minoribus ab eisdem ipsis differūt quos numerositate pretereunt. Et hoc quidem in duplici proportione cadit. Sin vero sint triplices proportiones: maior

/17v./

así son las diferencias establecidas respecto de sus diferencias. Efectivamente, todo término es igual a sí mismo y las diferencias son iguales a las diferencias. Más sutil es lo que muchos entendidos en estas disciplinas salvo Nicómaco no habían visto nunca antes: que en toda disposición, continua o disjunta, el producto de los dos extremos es menor que el producto de las dos diferencias que se encuentran entre los términos en sí. Pues consideremos tres términos de esta manera: tres, cinco, siete. Si se multiplican tres por siete, salen veintiuno. Si multiplicas el término medio, esto es, el cinco, por sí mismo, cinco por cinco hacen veinticinco. Y este número es mayor en cuatro respecto de aquél que resulta del producto de los extremos, es decir, cuatro es el número determinado por las diferencias. Pues entre tres y cinco, cinco y siete, hay dos; si multiplicas éstos entre sí, dan cuatro. Dos por dos son cuatro. Por tanto, se ha dicho bien que en esta disposición de esta manera, el producto de los extremos es menor que el número que resulta de las medias en tanto en cuanto las diferencias multiplicadas entre sí lo restablecen.

(véase esquema en fol. 17 v.)

La cuarta propiedad de las series de esta clase se observa en relación con lo que los antiguos consideraron lo más importante: que en esta proporcionalidad o media es necesario que las proporciones sean mayores en los términos menores, y menores en los mayores.

En efecto, en esta disposición uno, dos, tres, son términos menores el uno y el dos, y mayores el dos y el tres. Y dos respecto a uno es el doble, pero tres en relación con dos, tiene una proporción sesquiáltera. Pero es mayor la proporción del doble que la sesquiáltera.

Sin embargo, en una media armónica, sucede al contrario, pues en los términos menores se mantienen proporciones menores y en los mayores la cantidad de la proporción es mayor. Pero de estas medias, esto es, de la aritmética y de la armónica, se ha advertido que la proporcionalidad geométrica es la media que mantiene la igualdad numérica de las proporciones en los términos mayores como en los menores. Pero entre el mayor y el menor la igualdad se pone en el lugar de la media. Y ya se ha tratado suficiente la media aritmética.

De la media geométrica y sus propiedades.

Capítulo XLIIII.

Expliquemos ahora la media geométrica, que sigue a ésta, y que es la única que se puede llamar proporcionalidad más que ninguna, porque se observa en esas mismas proporciones de los términos, tanto en los mayores como en los menores. Pues se mantiene siempre una proporción igual, la cantidad del número y su magnitud no se tienen en cuenta, al contrario que en la media aritmética. Así como son uno, dos, cuatro, ocho, dieciséis, treinta y dos, sesenta y cuatro o en proporción del triple, uno, tres, ocho, veintisiete, ochenta y uno, o si cuádruple o quíntuple o sea cualquier múltiplo. Pues en éstos tomas términos cualesquiera, cumplirán la media geométrica, ya sea el primero frente al siguiente, como el siguiente frente a otro y a su vez, si se realiza alternativamente, ocurrirá lo mismo.

Si se ponen tres términos, dos, cuatro y ocho, como son ocho respecto al cuatro, así cuatro respecto a dos. Y viceversa, como son dos en relación con cuatro, así serán cuatro en relación con ocho.

Doble		Doble
2	4	8

O si en cuatro términos, como son dos, cuatro, ocho, dieciséis, en la relación en que están el primero con el tercero, esto es, el dos y el ocho, así estarán el segundo y el cuarto, esto es, cuatro respecto de dieciséis. Pues las dos proporciones son el cuádruple. Y a la inversa, según está el cuarto respecto del segundo, así se ve el tercero respecto al primero.

Pero también esto se puede observar separando los términos. Pues según es el primero respecto al segundo, esto es, el dos respecto del cuatro, así el tercero respecto del cuarto, esto es, el ocho en relación con el dieciséis. Y a la inversa, como el segundo en relación con el primero, esto es, el cuatro respecto al dos, así el cuarto en relación con el tercero, esto es, dieciséis respecto de ocho. Y observarás eso en todos, tras calcular la relación.

Doble		Doble	
2	4	8	16
	cuádruple	cuádruple	

Sin embargo, la media de esta clase tiene la propiedad de que en toda serie dispuesta según esta proporcionalidad de términos, las diferencias entre ellos están en la misma proporción en que han estado los términos a los que corresponden esas diferencias.

Pues si son términos dobles entre sí, las diferencias serán también dobles, si son triples, triples, o según el múltiplo que sea, habrá una misma multiplicidad en las diferencias que encontrará una primera observación en los términos, como muestra el esquema siguiente:

Diferencias dobles

1	2	4	8	16	32	64	128

1	2	4	8	16	32	64	128	256

Términos dobles

Nadie puede dudar de que cuando todos los términos son dobles, también las diferencias de esos términos parecen ser dobles; la serie superior corresponderá en un término menos, por así decir, que en las diferencias casi todos los términos colocados debajo, a los que corresponden esas diferencias.

Hay también otra propiedad: que todo término mayor comparado con el menor, lo contendrá como diferencia. En efecto, el dos se diferencia de la unidad por la unidad misma, y el cuatro con el dos en esos mismos dos, el ocho con el cuatro en esos mismos cuatro y en adelante otros mayores se diferencias de los mismos menores por esa misma cantidad por la que los superan.

Y esto corresponde ciertamente a la proporción del doble, pero si son proporciones triples, nes: maior terminus a minore termino duplicato minore termino differt. Ut si sint. 1. 3. 9. tres ab uno: binario differunt: in quem unitas idest minor terminus duplicatus excrescit. 3. 9 a tribus senario differunt: quem ternarius duplicatus educit. Et in aliis cunctis eiusmodi ratio reperietur. Sin vero quadruplices sint: triplicato minore termino maior terminus a minore distabit. Et si quinquupli: quadruplicato. et si sexcupli: quinquuplicato: et una minus multiplicatione quam est ipsa minorum ad maiores comparatio terminorum minorem numerus maior exuperat.

Differentie duple.

1	2	4	8	16	32	64	128	
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Termini dupli

Differentie triple

2	6	18	54	162	489	1458	
1	3	9	27	81	243	729	2187

Termini tripli

Differentie quadruple

3	12	48	192	768	3072	12288	
1	4	16	64	256	1024	4096	16384

Termini quadrupli.

Hec autem proportionalitas et in aliis omnibus vel superparticularib⁹ vel superpartientibus invenitur huiusmodi proprietate in omnibus conservata; ut in continua proportione: quod fit sub extremitatib⁹ si tres fuerint termini: hoc a medietate multiplicata consurgat. Si enim sint. 2. 4. 8. quod fit ex bis. 8. idem fit ex quater. 4. Vel si sit in quatuor terminis disiuncta proportio quod fit sub utrisque extremitatibus id duarum medietatum multiplicatione concrescat: Ut si sint. 2. 4. 8. 16. quod fit ex bis. 16. idest quater. 8. reddatur. Exemplar autem nobis maximum certissimumque sit illud: ubi ex equalitate diximus omnes inequalitatis species fundi. Illic enim in omnibus vel multiplicibus vel superpartientibus vel superparticularibus vel in ceteris coniunctis geometrica proportionalitas custoditur has omnes proprietates quas supradiximus continens. Quarta vero est proprietas huiusce medietatis: quod vel in maioribus vel minorib⁹ terminis et quales sunt per proportiones sunt. Namque si ponantur. 2. 4. 8. 16. 32. 64. inter hos omnes dupla proportio est. Apparet etiam hec proportionalitas in binis proportionibus ab unitate alternatim parte altera longiorib⁹ quadratisque dispositis a prima multiplicitatis habitudine idest a duplici per cunctas superparticularis habitudines proportionesque discurrens quod subiecta descriptione signatum est.

Tetragonus	1	
parte al. lon.	2	dupla
Tetragonus	4	dupla
parte al. lon:	6	sesqualtera
Tetragonus	9	sesqualtera
parte al. lon.	12	sesquitertia
Tetragonus	16	sesquitertia
parte al. lon.	20	sesquiquarta
Tetragonus	25	sesquiquarta
parte al. lon.	30	sesquiquinta
Tetragonus	36	sesquiquinta
parte al. lon.	42	sesquisexta
Tetragonus	49	sesquisexta

¶ Que medietates quibus rerum publicarum statibus comparentur.

Capitulum. xxxxv.

At quod ideo arithmetica quidem ei reipublice comparatur que paucis regitur: iccirco quod in minoribus eius terminis maior proportio sit. Musicam vero medietatem optimatum dicunt esse rem publicam: ideo quod in maioribus terminis maior proportionalitas invenitur. Geometrica medietas popularis quodammodo et ex equalitate civitatis est. Namque vel in maioribus vel in minoribus equali omnium proportionalitate componitur: et est inter omnes paritas quedam medietatis equum ius in proportionibus conservantis.

¶ Quod superficies una tantum in proportionalitatibus medietate iungatur: solidi vero numeri duab⁹ medietatibus in medio collocantur.

Capitulum. xxxxvi.

Post hec igitur tempus est: ut expediam⁹ nunc quidam nimis utile in platonica quadam disputatione: que in timei cosmopeia haud facili cuiquam vel penetrabili ratione versatur. Omnes enim plane figure que nulla altitudine crescunt una tantum medietate geometrica continuantur: alia que iungat non potest inveniri. Unde duo tantum in his intervalla sunt constituta: a primo scilicet ad medium: et a medio ad tertium. Si vero fuerint cubi. duas tantum habebunt medietates ubi tertia inveniri non poterit: secundum geometricam. s. proportionem. Unde forme solide tria intervalla dicuntur habere. Est enim unum intervallum a primo ad secundum et a secundo ad tertium: et a tertio ad quartum: que est. s. postrema distantia. Recte igitur et plane figure duobus intervallis: et solide tribus contineri dicuntur. Sint enim duo tetragoni 4. scilicet. et. 9. horum igitur unus tantum medius in eadem proportione constitui potest. Namque senarius ad. 4. sesqualter est: et. 9. ad senarium eodem modo sesqualter. Hoc autem iccirco evenit quod singula latera singulorum tetragonorum efficiunt senarium medietatem. Namque quaternarii tetragoni latus binarius est. novenarii ternarius. hi ergo multiplicati senarium perfecerunt. Bis. enim tres senarius est. Et quotienscunque datis duobus tetragonis eorum medietatem volumus invenire: latera eorum multiplicanda sunt: et qui ex his procreabuntur medietas est. Si autem cubi sint. ut. 8. et. 27. due tantum inter hos eadem proportione medietates constitui queunt. 12. scilicet et. 18. namque. 12. ad. 8. et. 18. ad. 27. sesqualtera tantum proportione iunguntur. In his quoque eadem laterum ratio est. Namque ex uno cubo quod propinquior est: una medietas duo latera colligit: ex alternatim vero posito unum. In alia quoque medietate idem est. Ponantur enim duo cubi et in medio eorum due medietates quas superius diximus. 8. duodeci. 18. 27. Octonarii igitur latus est binarius: bis enim bini bis octonarium fecerunt. Ternarius vero. 27. cubi latus est. Ter enim tres ter. 27. restituunt. Medietas igitur que iuxta octonarium est idest. 12. mutuatur duo latera ex propinquo sibi octonario et aliud unum latus ex alteri

/18r./

el término mayor se diferencia del menor en el término menor multiplicado por dos; por ejemplo, si son 1, 3, 9. El tres se diferencia del uno en dos, en el cual la unidad, esto es, el término menor, está multiplicado por dos; y el nueve con el tres se diferencian en seis, que resulta de tres multiplicado por dos. Y en todos los demás se encontrará una relación de esta clase. Pero si son cuádruples, multiplicado el término menor por tres, dará la distancia del término menor al mayor; y si son quíntuples, se multiplica el término menor por cuatro, si son séxtuples, se multiplica por cinco, y se multiplica por uno menos de lo que es la proporción de los menores a los mayores, en la que el número mayor supera al menor.

Diferencias menores

1	2	4	8	16	32	64	128

1	2	4	8	16	32	64	128	256

Términos dobles

Diferencias dobles menores

2	6	18	54	162	486	1458

1	3	9	27	81	243	729	2187

Términos triples

Diferencias triples menores

3	12	48	192	768	3072	12288

1	4	16	64	256	1024	4096	16384

Esta proporcionalidad se encuentra en todas las demás, en los superparticulares o en los superpartientes conservando en todos una propiedad de esta clase: que en la proporción continua, el producto de los extremos, si se dan tres términos, resulta de la multiplicación de la media. Pues si hay dos, cuatro, ocho, lo que resulta de multiplicar ocho por dos, es lo mismo que de cuatro por cuatro, o si es una proporción disjunta en cuatro términos, lo que resulta de los dos extremos, se consigue de la multiplicación de las dos medias. Sean por ejemplo dos, cuatro, ocho, dieciséis; lo que resulta de dieciséis por dos es lo que da ocho por cuatro.

El ejemplo más notable y cierto para nosotros es aquel donde decimos que desde la igualdad se confunden todas las especies de desigualdad. Pues allí en todos los múltiplos, en los superparticulares y en todos los afines, se mantiene la proporcionalidad geométrica, que contiene todas estas propriedades que hemos citado antes.

Hay una cuarta propiedad de esta media que siempre hay la misma proporción en los términos mayores y en los menores. En efecto, si se disponen dos, cuatro, ocho, dieciséis, treinta y dos, sesenta y cuatro, la proporción entre todos estos es del doble. Aparece también esta proporcionalidad en dos proporciones, en los números que tienen una parte más larga que la otra desde la unidad, y en los cuadrados dispuestos desde la primera relación de múltiplo, esto es, desde el doble, pasando por todas las relaciones y proporciones del superparticular, como se ha descrito en el esquema siguiente:

Tetrágono	1	
Número con una parte más larga que otra	2	Doble
Tetrágono	4	Doble
Número con una parte más larga que otra	6	Sesquiáltera
Tetrágono	9	Sesquiáltera
Número con una parte más larga que otra	12	Sesquitercia
Tetrágono	16	Sesquitercia
Número con una parte más larga que otra	20	Sesquicuarta
Tetrágono	25	Sesquicuarta
Número con una parte más larga que otra	30	Sesquiquinta
Tetrágono	36	Sesquiquinta
Número con una parte más larga que otra	42	Sesquisexta
Tetrágono	49	Sesquisexta

Estas medias con qué formas de organización política se comparan.

Capítulo XLV.

Y por eso se compara la aritmética al estado que es regido por una oligarquía, porque en los términos menores la proporción es mayor. Dicen que la media música es el estado de los aristócratas porque en los términos mayores se encuentra mayor proporción. La media geométrica es imagen en cierto modo del estado democrático en el que todos los ciudadanos son iguales. Pues está constituida por una proporcionalidad igual en los mayores que en los menores y hay una cierta igualdad de la media entre todos que preserva el derecho igualitario en las relaciones.

Que las superficies se relacionan por una sola media proporcional, mientras que entre los números sólidos hay dos, colocadas en medio.
Capítulo XLVI.

Después de esto, es tiempo ya de que expliquemos ahora cierta noción muy útil en cierto estudio de Platón que trata en la cosmogonía del *Timeo* con un sistema nada fácil o accesible para cualquiera. Pues todas las figuras planas que no crecen en altitud, se relacionan sólo por una media geométrica; no se puede encontrar otra que los relacione. Por eso, en éstos se han constituido dos intervalos solamente, a saber, del primero al medio y del medio al tercero. Si hay cubos, tendrán sólo dos medias proporcionales, puesto que no se puede encontrar una tercera según la proporción geométrica. De ahí que se dice que las formas sólidas tienen tres intervalos. Pues hay un intervalo del primero al segundo y del segundo al tercero, y del tercero al cuarto, que es evidentemente la última distancia.

En consecuencia, se dice que las figuras planas se definen por dos intervalos y las sólidas por tres. Pues sean dos tetrágonos, cuatro y nueve. De éstos, uno sólo puede establecerse como medio en la misma proporción. Pues el seis en relación al cuatro está en la proporción sesquiáltera, y el nueve respecto al seis de la misma manera en la sesquiáltera. Por eso sucede que los lados de los tetrágonos dan la media de seis. Pues el lado del tetrágono de cuatro es dos y el lado del de nueve, tres. Luego multiplicados dan un seis. Y siempre que, dados dos tetrágonos, queremos hallar la media de ellos, hay que multiplicar sus lados y el número que resulta es la media.

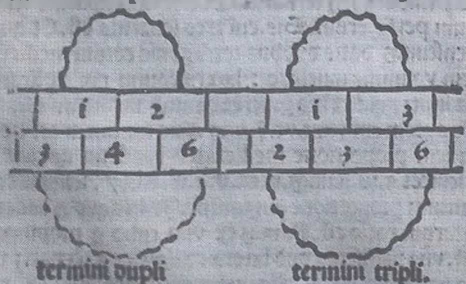
Si son cubos, como el ocho y el veintisiete, se pueden establecer solamente dos medias entre éstos de la misma proporción, doce y dieciocho. Pues doce respecto a ocho y dieciocho respecto a doce, y veintisiete respecto a dieciocho se relacionan en la proporción sesquiáltera. En éstos también hay la misma relación entre los lados. En efecto, una media une dos lados de uno de los cubos, el que está más próximo a ella, y un lado del que está situado al otro lado. En la otra media también sucede lo mismo. Pues dispónganse dos cubos, y en medio de ellos, las dos medias que hemos citado antes, ocho, doce, dieciocho, veintisiete. El lado del de ocho es dos, pues dos, por dos, por dos da ocho; el del de veintisiete es tres, porque tres, por tres, por tres llegan a veintisiete. Por tanto, la media que está junto al ocho, esto es, el doce, recibe dos lados del de ocho, cercano a él y otro un lado del cubo situado al otro lado, secus posito.27.cubo. Bis enim bini ter.12.pādunt. Et.18.eadē ratione duo latera a propinquo sibi.27. cubo colligit: et vnū ab altrinsecus posito octonario. Tres enim ter bis.18.concludunt. Hoc autē vniuersaliter speculandum est: si tetragonus tetragonum multiplicet: sine dubio tetragonus prouenit. Sin vero parte altera longior tetragonū multiplicet vel tetragonus parte altera longiorem: nunquā tetragonus sed semper ante longior crescit. Rursus si cubus cubū multiplicauerit: cubi forma conficitur. Si vero parte altera longior cubum: vel cubus parte altera longiorem: nunquam cubus procreabitur. hoc.s. secundū similitudinem paris atq3 imparis. Par enim parem si multiplicet: semper par nascitur. et impar imparem si multiplicet. impar cōtinuo procreatur. Si vero impar parem: vel si par imparem multiplicet: par semper exoritur. Hoc autē facilius cognoscitur ex lectione platōis in libris de republica: eo loco qui nuptialis dicitur: quem ex persona musarum philosophus introducit. Sed nunc ad tertiā medietatē redeundū ē.

¶ De armonica medietate eiusq3 proprietatibus.

Capitulum.xxxvii.

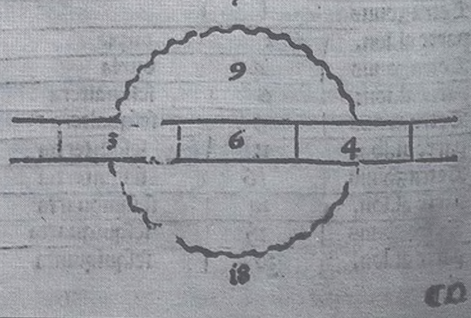
Armonica autem medietas est: que neq3 eisdem differentiis nec equis proportionib9 constituitur: sed illa in qua quemadmodū maximus terminus ad paruissimum terminum ponitur: sic differentia maximi et medii contra differentiam medii atq3 paruissimi comparatur. Ut si sint.3.4.6. vel si.2.3.6. Senarius enim quaternarium sua tertia parte superat: idest duobus quaternarius vero ternariū sua quarta parte superuenit: idest vno. Et senarius ternarium sua medietate idest tribus. ternarius vero binarium sua pte tertia idest vnitate transcendit. Quare in his neq3 eadē proportio terminorum est: neq3 sunt eedem differentie. est autem quemadmodum maximus terminus ad paruissimum terminū: sic differentia maximi et medii ad differentiam medii atq3 postremi. Namq3 in hac proportione que est.3.4.6. maior terminus idest senarius ad paruissimum terminum ternariū dupl9 est et differentia maximi et medii idest senarii et quaternarii duo scilicet: ad differentiam medii et vltimi idest quaternarii atq3 ternarii que est vnitas dupla perspicitur. Sed hoc quoq3 subiecta descriptione mōstratur.

differentie duple — differentie triple.



termini dupli — termini tripli.

Habet autem proprietatem quemadmodū dictum est cōtrariā arithmetice medietati. In illa enim in minoribus terminis maior erat proportio: in maioribus minor in hac vero i maioribus quidem terminis maior est proportio: in minoribus vero minor. Namq3 in hac dispositione.3.4.6. tres ad quatuor comparati sesquitertiā habitudinem: sex vero ad quatuor sesqualteram reddunt: sed maior est proportio sesqualtera a sesquitertia tantum quantum pars tertia medietate transcenditur. Iuste igitur medietas quedā geometrica proprieq3 eē proportionalitas iudicatur.s. inter eas vbi in maioribus terminis minor est proportio et minoribus maior: et inter eam vbi in maiorib9 maior est minoribus minor. Illa est.n. vere proportiōalitas que medietatis quodāmodo locum obtinēs: et in maioribus et in minoribus: equalibus proportionum cōparationibus continetur. Hoc quoq3 signum est duarum extremitatum mediam esse quodāmodo geometricā proportionem. Namq3 in arithmetica proportione medius terminus eadē suā parte et minorē precedit et a maiore precedit sed alia pte minoris alia vero parte maioris. Sit enim arithmetica dispositio.2.3.4. Ternari9 igitur numerus binarium tertia sua pte precedit idest vno: et a quaternario tertia sua pte preceditur idest vno. At vero ternarius nō eadē pte minoris minorē vincit: vel maioris a maiore supat. Namq3 minorē idest binariū vno superat: idest ipsi9 medietate binarii. a quaternario vero vno relinquit: que ps quaternarii qrta est. Recte igitur dictum est mediū terminū in hmōi medietate: eadē sui pte et minorem vincere et maiore supari: sed non eisdem ptibus vel minoris minorē transgredi: vel maioris a maiore transcendi. Contrarie armonica medietas pportiōes hz. Nāq3 non eadē pte sua medius terminus in hac pportiōne vel minorē vincit vel a maiore supatur. sed eadem pte minoris minorē supat: qua pte maioris a maiore supat. In hac enī dispositione armonica q̄ ē.2.3.6. ternari9 binariū tertia sui pte vīcit: idē ternarius a senario a tota sui quātitate superat. i. tribus: Neq3 ipse ternarius medietate minoris vincit minorē .i. vnō. et medietate maioris a maiore termino vīcit idest trib9. Senarij enim medietas ternari9 est. In geometrica vero medietate neq3 eisdē suis partib9 medius vel vincit minorē vel a maiore vincitur. neq3 eadem parte vel minoris minorē superat: vel maioris a maiore relinqtur. sed qua pte sua medi9 termin9 minorem superat: eadem pte sua maior termin9 mediū vincit. Quod est vt medietas atq3 extremitas eālib9 medietatē et extremitatē reliquam suis partibus superuadant. In hac enī dispositione que est.4.6.9. tertia sui pte medius senarius quaternarium superat. idest duobus: et tertia sui pte rursus nouenarius senarium vincit: idest tribus. Habet autē aliam proprietatē armōica medietas. vt cū duas extremitates in vnū redactas medietas multiplicauerit dupla quātitas colligitur quā si se multiplicēt due extremitates Sint enī hi termini.3.4.6. si igit ternariū et senariū iūgas nouenariū facies: q p quaternariū ductus.36 efficit. qd si se ipse extremitates multiplicent: et fiant tres sexies.18. cōficiūt: qd est prioris sūme dimidiū.



/18v./

el de veintisiete. Pues dos por dos por tres dan doce. Y dieciocho por la misma razón reúne dos lados del cercano a él, el cubo de veintisiete y uno del cubo situado al otro lado, el de ocho. Ya que tres por tres por dos dan dieciocho. Esto ha de ser observado en todos los casos.

Si un tetrágono se multiplica por otro, sale un tetrágono sin duda; pero si un número de una parte más larga que otra se multiplica por un tetrágono o un tetrágono por un número que tiene una parte más larga que otra, nunca resulta un tetrágono, siempre se aumenta el número que tiene una parte más larga que otra. A su vez, si un cubo se multiplica por un cubo, se determina la forma de un cubo.

Pero si un número que tiene una parte más larga que otra se multiplica por un cubo o un cubo por un número que tiene una parte más larga que otra, nunca se creará un cubo.

Esto sucede por la semejanza del par y del impar. Pues si se multiplica un par por un par, siempre resulta un par, pero si multiplicas un impar por un impar resulta siempre un impar. Si un impar se multiplica por un impar o un impar por un par, siempre resulta un par. Esto se deduce fácilmente de la lectura de Platón en los libros *De republica* en el pasaje que se llama nupcial, que el filósofo introduce por medio de la máscara de las Musas. Pero ahora hay que volver a la tercera media.

De la media armónica y de sus propiedades.

Capítulo XLVII.

La media armónica es la que no se establece ni con las mismas diferencias ni con proporciones iguales, sino aquella en la que según un término mayor se opone al menor, así se relaciona la diferencia del mayor y del medio frente a la diferencia del medio y del menor.

Si son por ejemplo tres, cuatro, seis, o dos, tres, seis. Pues el seis supera al cuatro en su tercera parte, esto es, en dos, el cuatro al tres en su cuarta parte esto es, en uno, y el seis al tres en su mitad, que es tres, mientras que el tres sobrepasa al dos en su tercera parte, esto es, en la unidad. Por eso en éstos ni hay la misma proporción de los términos, ni las mismas diferencias.

Sin embargo, según se relacionan el término mayor y el menor, así la diferencia del mayor y del medio respecto de la diferencia del medio al último. En efecto, en esta proporción que es tres, cuatro, seis, el término mayor, esto es, el seis, en relación con el menor, el tres, es el doble, y la diferencia del mayor y del medio, esto es, el seis y el cuatro, es decir, dos, respecto a la diferencia del medio y del último, esto es, del cuatro y del tres, que es la unidad, se ve que es el doble. Pero esto también se muestra en el esquema siguiente:

Diferencias dobles

1	2

3	4	6

Términos dobles

Diferencias triples

1	3

2	3	6

Términos triples

Sin embargo, tiene una propiedad, según se ha dicho, contraria a la media aritmética. Pues en ella la proporción era mayor en los términos menores, y menor en los mayores. Pero en esta media, en los términos mayores es mayor la proporción y menor en los menores. Efectivamente, en la serie 3, 4, 6, comparados el tres con el cuatro dan una relación sesquitercia, pero la de seis con cuatro es sesquiáltera. La proporción sesquiáltera es mayor respecto de la sesquitercia, en la medida en que la mitad es superior a la tercera parte.

En consecuencia con razón una media geométrica se considera que es propiamente una proporción, a saber, porque es intermedia entre aquélla donde entre los términos mayores hay una proporción menor y en los menores, mayor, y aquélla otra en que en los mayores es mayor y en los menores, menor. Pues es vardederamente proporcionalidad la que teniendo en cierto modo el lugar de una media se define por una relación igual de proporciones tanto en los términos mayores como en los menores.

Esto es también el signo de que la media es en cierto modo la proporción geométrica. En la proporción aritmética, el término medio supera al menor y es superado por el mayor en la misma parte de sí, pero en una parte del menor y en otra distinta del mayor. Pues sea la serie aritmética dos,tres,cuatro. El número tres supera al dos en la tercera parte de sí, esto es, en uno, y es superado por el cuatro en la tercera parte de sí, esto es, en uno. Pero el tres supera al menor en una parte de sí que no es la misma que aquella en la que es superado por el mayor, pues supera al menor, esto es, el dos, en uno, es decir, la mitad del dos mismo, y el cuatro lo deja atrás en uno, y ésta es la cuarta parte del cuatro.

Por tanto, se dice con razón que el término medio en la media de este género supera al menor y es superado por el mayor en la misma parte de sí mismo, pero que sobrepasa al menor y es superado por el mayor en una parte del menor que no es la misma que la del mayor.

Por contrario, la media armónica tiene proporciones opuestas. En efecto, en esta proporción el término medio no supera al menor o es superado por el mayor en la misma parte de él, sino que supera al menor en la misma parte del menor que la parte del mayor en que éste le supera. En esta serie armónica que es 2,3,6, el tres es mayor que el dos en la tercera parte de sí y el tres es superado por el seis en toda la cantidad de sí mismo, esto es, en tres, y los mismo el tres supera al menor en la mitad del menor, es decir, en uno, y es superado por el término mayor en la mitad del mayor, esto es, en tres.

Sin embargo, la media armónica tienen otra propiedad: que cuando la media se multiplica por la suma de los dos extremos, reúne una cantidad doble a la que resulta si se multiplican los extremos. Pues sean estos términos tres, cuatro, seis. Si sumas el tres y el seis, conseguirás nueve, que multiplicado por cuatro, hace treinta y seis; si se multiplican los extremos mismos, tres por seis, hacen dieciocho, que es la mitad de la suma anterior.

(véase esquema en fol. 18 v.)

¶ Quare dicta sit armōica medietas ea que digesta ē
Capitulum . xxxviii

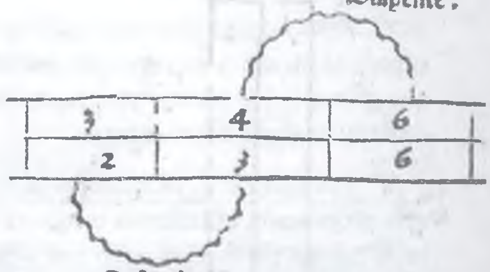
Considerandum forsitan videatur: cur hāc armonicam medietatem vocemus. Cuius hec ratio est: quoniam arithmetica dispositio equas tantum per differētias diuidit quantitates: geometrica vero terminos equa proportione cōiungit. At vero armonica ad aliquid quodammodo relata consideratione: neqꝫ soluꝫ in terminis speculationem proportionis habet: neqꝫ soluꝫ in differentiis: sed in vtrisqꝫ communiter. Que rit enim vt quemadmodum sunt ad se extremi termini: sic maioris ad medium differentia: contra differētiam medietatis ad vltimum. Ad aliquid autem considerationem armonie proprie esse in primi libri rex omnium diuisione monstrauimus. Ipsarum quoqꝫ musicarum consonantiarum quas symphonicas nominant proportiones in hac pene sola medietate frequenter inuenias. Namqꝫ symphonia diatessaron: que princeps est ⁊ quodammodo vim obtinēs elemēti: constituitur scilicet in epitrita proportione: vt est quaternarius ad ternarium: in eiusdē armonicis medietatibus inuenitur. Sint enim eiusmodi armonice medietatis temini quoruꝫ extimi dupli sint ⁊ rursus alia huiusmodi dispositio quorum extimi tripli.

3	4	6	2	3	9

Senarius igitur ad ternarium duplus est. idem autem in alia dispositione senarius ad binarium triplus. Horum igitur si differentias colligamus ⁊ ad se inuicem comparemus: epitrita proportio colligitur vnde diatessarō symphonia resonabit. Inter tres enī ⁊ .6. ternarius est: ⁊ inter binarium ⁊ senarium quaternarius: qui sibimet comparati sesquitertiam efficient proportionē.

In eadem quoqꝫ medietate ⁊ diapente symphonia componitur: quaꝫ sesqualtera habitudo restituit. Nam in vtrisqꝫ dispositiōibus his que subiecte sunt in duplici senarius ad quaternarium sesqualter est: in triplici ternarius ad binarium: ex quibus vtrisqꝫ diapente symphonia coniungitur.

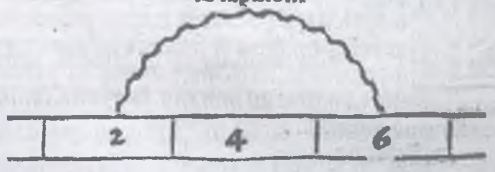
Sesqualtera.
Diapente.



Sesqualtera.
Diapente.

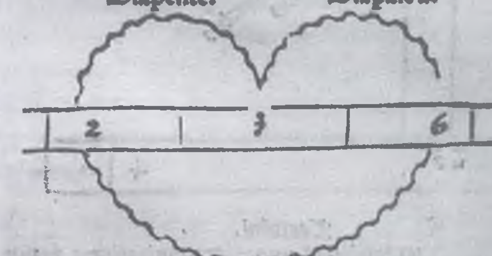
p Est hanc autem diapason consonātia que fit ex duplici. vt est subiecta formula.

Duplex
Diapason.



i In triplici quoqꝫ dispositione simul diapente ⁊ diapason symphonia componitur: seruans sesqualteram ⁊ duplicem rationem. quod subiecta descriptio docet.

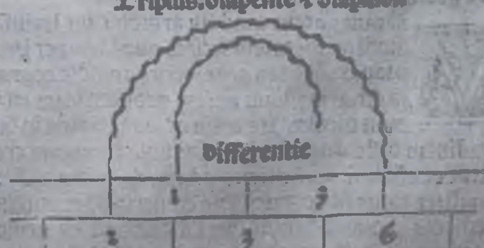
Sesqualtera. Duplex
Diapente. Diapason.



Triplex.
Diapente ⁊ diapason.

Et quoniam triplus duas continet consonantias diapente scilicet ⁊ diapason: in huius triplicis positione in differentiis eādē rursus triplum reperiemus secundum subter descriptum modum.

Triplus. diapente ⁊ diapason



Termini.

In dupla vero dispositione maior termin⁹ ad mediū terminū contra se differentiam triplus est. ⁊ rursus minor termin⁹ ad medii contra minorem terminum comparati differentiam triplus est.

/19r./

Por qué se ha llamado a la que hemos deducido, media armónica.
Capítulo XLVIII.

Quizá parezca que hay que considerar por qué llamamos armónica a esta media. El motivo de ello es que la serie aritmética divide las cantidades solamente por diferencias iguales, mientras que la geométrica relaciona términos en una proporción equivalente. En tanto que la armónica, de manera relativa por así decir, analiza la proporción no sólo en los términos ni sólo en las diferencias, sino en los dos a la vez. Pues busca tal como los términos extremos son en sí, del mismo modo, la diferencia del mayor al mediano frente a la diferencia del mediano al último.

Hemos demostrado propiamente en la división general del primer libro que la perspectiva armónica es relativa. También encontrarás frecuentemente en esta media y casi en ella sola las proporciones de las consonancias musicales que llaman sinfonías. Pues el acorde de cuarta, que es el principal y en cierto modo adquiere el valor de principio elemental -se establece en proporción epitrita, como es la de cuatro respecto de tres- se encuentra en las medias armónicas de esta clase. Pues sean términos de este género de media armónica, cuyos extremos son dobles, y por otra parte, otra serie cuyos extremos son triples.

3	4	6		2	3	6

El seis es el doble respecto de tres, y lo mismo en la otra serie el seis respecto del dos es el triple. Si hallamos las diferencias y las comparamos unas con otras, resulta una proporción epitrita, en la que resuena un acorde de cuarta. Porque entre el tres y el seis está el tres y entre el dos y el seis, el cuatro, que comparados entre sí dan una proporción sesquitercia.

(véase esquema en fol. 19 r.)

También en esa media se establece un acorde de quinta, que restaura la serie de proporción sesquiáltera. Pues en estas dos series que se han colocado debajo, el seis está en relación sesquiáltera con el cuatro y en el triple, el tres tienen esa relación con el dos. De ello se infiere un acorde de quinta.

(véase esquema en fol. 19 r.)

Después de la quinta, la octava, que resulta del doble, que se muestra en el esquema siguiente:

3	4	6

Doble, octava

En la serie del triple, también se establecen al mismo tiempo un acorde de quinta y otro de octava, guardándose las proporciones sesquiáltera y del doble:

2	3	6

Triple, quinta y octava

Y porque el triple contiene dos acordes, a saber, la de quinta y la de octava, en la serie de este triple, en las diferencias, encontraremos de nuevo el mismo triple, según el esquema siguiente:

Triple

diferencias

1	3

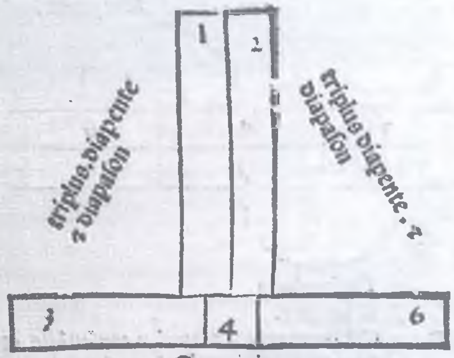
2	3	6

Quinta octava

Pero en la serie del doble, el término mayor es el triple respecto de la diferencia del término medio respecto de él, y a su vez, el término menor es el triple respecto de la diferencia del medio comparado con el término menor:


SE
CVN
DVS

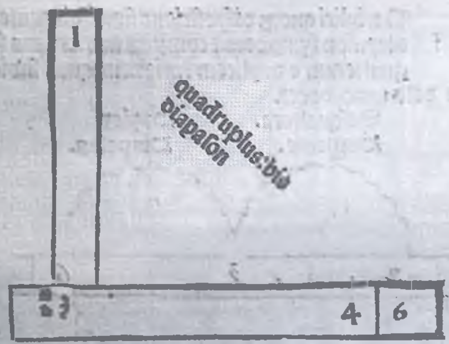
Differētie



Termini.

Illa autem maxima symphonia que vocat̄ bis diapason: velut bis duplum: quoniam diapason symphonia ex duplici proportione colligitur: huic se iuncture armonice medietatis interserit. Nam in duplici proportione medius terminus ad minoris suiq̧ differentiā quadruplus inuenitur.

Differentia.



Termini.

In triplicib⁹ quoq̧ extremitatibus maior differentia ad minorem differētiā quadrupla est. ⁊ diapason bis symphoniā emittit. nāq̧ ī dispositiōe.2.3.6.extremoꝝ differētia est: idest senarii ⁊ binarii.4. minor vero differentia idest ternarii ⁊ binarii vnus .4.autē vno quadrupla maior est relatione. que comparatio bis diapason consonantiam tenet.

De geometrica armonia. Capitulum. xlix

Vocant autem quidam armonicam huiusmodi medietatem iccirco quod semper hec proportiōalitas geometrice armōie cognata est. armoniam autem geometricam cubum dicunt. Ita enim ex longitudine in latitudinem distentus est ⁊ in altitudinis cumulum crescit: ex equalibus proficiscens ad equalia perueniēs: equaliter totus sibi conueniens creuerit. Hec autem medietas in omnib⁹ cubis que est geometrica armonia perspicitur. Omnis enim cubus habēt latera.12. angulos octo superficies sex. Hic autem ordo ⁊ dispositio armonica est. Disponuntur enim.6.8.12. hic ergo quemadmodū est maior terminus ad paruissimum ita differentia maioris ⁊ medii ad paruissimam comparatur. Perpensi namq̧.12.ad sex dupli sunt. differentia vo.12.⁊ octonarii quaternarius est. octonarii vo ⁊ senarii duo. dupla autem rōne distabunt duobus quatuor comparati. Rursus octonarius qui medietas est alia sua parte minorem precedit: ⁊ alia sua parte a maiore preceditur. eadem autem parte minoris minorem superat. qua parte maioris a maiore superatur. Rursus si extremitates in vnū redigantur ⁊ a medietate octonario multiplicentur: duplus erit ab eo numero quem sole extremitates multiplicate ꝑfecerint. Omnes autem in hac dispositione symphonias musicas inuenimus. Diatessaron quidem ē octo ad sex quoniā proportio sesquitertia est. At diapente.12.ad.8. quoniam ea que sesqualtera comparatio dicitur in ea diapente consonātia reperitur. Diapason vero que ex duplici nascitur ex.12.ad sex compositione producitur. Diapason vero ⁊ diapente que triplicis optinent rationem: fit ab extremitatum differentia ad differentiam minorem. Namq̧ duodenarii ⁊ senarii sex differentia est. minor vero est differentia octonarii ⁊ senarii: idest.2. dui senarius ad binarium triplus est: ⁊ diapason simul ⁊ diapente consonantiā sonant. Illa vero maior consonantia que est bis diapason: que ex quadruplo fit in medii termini idest octonarii: ⁊ eius differentie comparatione perspicit̄ que inter octonarium senariumq̧ reperitur. Quare proprie atq̧ conuenienter huiusmodi proportionalitas armonica medietas appellatur.

Quemadmodum constitutis altrinsecus duob⁹ terminis: arithmetica ⁊ geometrica armōica inter eos medietas alternetur atq̧ de coꝝ generationibus. Capitulum.l.

Nos autem prestare debem⁹ quatenus quēadmodum dato calamo extremis foraminib⁹ manentibus musicis mos est: vt medium foramē permutātes: atq̧ aliud aperientes aliud digitis occludentes diuersos emittant sonos. Vel cum duabus altrinsecus protensis cordis medii nerui sonum musicis vel astringendo tenuat vel remittendo grauat: ita quoq̧ dat̄ duobus numeris nunc quidem arithmeticam: nunc vero geometricam: nunc autem armonicam medietatem experiamur inserere. vt rectuꝫ propināq̧ medietatis nomen sit: quod manētibus extremitatibus huc atq̧ illuc ferri permutariq̧ videatur. Poterimus autem hanc in duobus altrinsecus positis terminis vel paribus vel imparibus permutare: ita vt cum arithmeticam ponimus meditatem differentiarum tātum ratio equalitasq̧ seruetur. Cum vo geometricam: rata se proportium iunctura custodiat. Sin autem armonica fiat differentiarum comparatio ab terminorum proportione non discrepet. Et sint quideꝫ primo pares posite quedā extremitates: inter quas has oēs medietates oporteat internectere. io.⁊.40. Prius igitur arithmetica medietas aptet̄. Inter hos ergo si.25. posuero erit mihi arithmetica proportio differentiarum quantitate īmutabiliter custodita. ī huiusmodi scilicet dispositōe.io.25.40. Vides.n. vt quidene sese summule quantitate trāscendāt. Oēsq̧ proprietates quas supra dixim⁹ ī medietate arithmetica conuenire: ab hac huiōi dispositione non repies alienas. Nāq̧ quēadmodum vnusquisq̧ eorum termin⁹ ad seipsuꝫ est: quoniā sibi equalis est: ita sunt ad se inuicē differētie: q̄ sibi sunt equales. ⁊ quanto maior termin⁹ mediū trāscēt: tāto medi⁹ vincit minorē. Et extremitatū aggregatio duplex est medietate. ⁊ minor terminorum proportio maior ē illa comparatiōe q̄ inter maiores

/19v./

(véase esquema en fol. 19 v.)

En cuanto al acorde mayor, que se conoce como de octava doble o dos veces doble, porque el acorde de octava resulta de una proporción doble, estará en posición medial respecto a esta relación de media armónica. Pues en la proporción doble, el término medio se encuentra en relación del cuádruple respecto de la diferencia entre el menor y él:

(véase esquema en fol. 19 v.)

En los extremos triples, la diferencia mayor es el cuádruple respecto a la diferencia menor y resulta un acorde de octava doble. Pues en la serie 2,4,6, la diferencia de los extremos, esto es, del seis y del dos, es el cuatro; pero la diferencia menor, esto es, la del tres y el dos, es el uno. La relación de cuatro a uno es del cuádruple, que tiene afinidad con el acorde de octava doble.

De la armonía geométrica.

Capítulo XLIX.

Algunos llaman armónica a esta clase de media porque siempre esta proporcionalidad es afín a una armonía geométrica. Dicen que la armonía geométrica es el cubo. Pues se extiende en longitud y anchura, y crece por aumento en altura, progresando en distancias iguales, llegando a medidas iguales, ha crecido a partes iguales y la totalidad de la figura muestra una correspondencia de igualdad. Esta media se observa en todos los cubos, que es la armonía geométrica. Pues todo cubo tiene doce lados, ocho ángulos y seis caras. Este orden y disposición es armónico.

Pues dispónganse 6,8,12. Aquí según la relación del término mayor al más pequeño, así es la diferencia del mayor y del medio respecto de la del medio y el menor. Pues se ve que doce respecto de seis es el doble, mientras que la diferencia del doce con el ocho es cuatro, y la del ocho con el seis es de dos. Cuatro comparado con dos está en relación del doble. A su vez, el ocho, que es la media, aventaja al menor en una parte de sí, en tanto que es superado por el mayor en otra parte de sí. Pero supera al menor en la misma parte del menor aquella del mayor en que le supera el mayor. A su vez, si se suman los extremos y se multiplican por el término medio 8, resultará el doble del número que sale de la multiplicación de los extremos entre sí.

Encontramos en esta serie todos los acordes musicales. El de cuarta, entre ocho y seis, es de proporción sesquitercia; el de quinta, entre doce y ocho, tiene la relación llamada sesquiáltera. En cambio, la octava, que nace del doble, resulta en la comparación del doce y el seis. El de octava y el de quinta, que tienen una relación del triple, resulta de la diferencia de los extremos respecto de la diferencia menor. En efecto, hay una diferencia del doce con el seis, pero la diferencia menor es la del ocho con el seis, esto es, el dos; el seis respecto del dos es el triple, y hacen resonar el acorde de octava al mismo tiempo que el de quinta. Pero la mayor consonancia, que es la del acorde de octava doble, que resulta del cuádruple, se observa en la comparación del término medio, esto es, el ocho y de la diferencia que se encuentra entre el ocho y el seis.

Por eso se da el nombre de media armónica a esta clase de proporción que le es propia y adecuada.

Cómo situados dos términos uno frente al otro, se intercalan las medias aritmética, geométrica y armónica. La generación de estas medias.

Capítulo L.

Debemos mostrar seguidamente cómo en una flauta en la que los agujeros de los extremos permanecen abiertos, cuando los músicos abren distintos agujeros medios y tapan otros con los dedos, emite distintos sonidos; o cómo tensando dos cuerdas a los lados con otra en medio, el músico modera el sonido de la medial en sentido ascendente o descendente; del mismo modo, dados dos números, vamos a probar a insertar una media aritmética, una media geométrica y una media armónica, que recibe correcta y propiamente el nombre de media, porque parece desplazarse y cambiar, manteniendo los extremos. Podemos cambiar esta media en dos términos situados uno frente a otro, sean pares o impares, de modo que cuando ponemos una media artimética, se conserve la proporción y la igualdad de las diferencias solamente, cuando aplicamos la geométrica, mantiene una relación entre las proporciones, mientras que si se aplica la armónica, no se quiebre la comparación de las diferencias respecto de la proporción de los términos.

Y sean en primer lugar dos extremos pares, entre los que se deben intercalar todas estas medias: 10 y 40. Se aplica antes la media aritmética. Luego, si coloco veinticinco entre estos números, la proporción aritmética será mantenida inmutablemente, en la serie de esta clase 10,25,40. Ves que los números se superan en la cantidad de quince, y que todas las propiedades que hemos indicado más arriba que coincidían en la media aritmética no las encontrarás anuladas en esta serie. Pues las diferencias, que son iguales a sí mismas, según cada uno de los términos es a sí mismo, porque es igual a sí mismo; y en la medida en que el término mayor supera al medio, en esa el medio supera al menor; la suma de los extremos es el doble de la media y la proporción de los términos menores es mayor que aquella relación que se mantiene ter maiores terminos continetur. Et tanto minor ē numerus qui fit ex multiplicatis extremitatibus ab eo qui fit ex multiplicata medietate: quantum eorum differentie multiplicate restituunt. Illud quoq; quod medietas eadem sui parte & a maiore vincitur & minorem ipsam superuenit. non eadem autē parte minoris minorem transit: vel maioris a maiore relinquitur. que omnes scilicet proprietates non alterius nisi arithmetice medietatis sūt. Quod si superius dicta meminerit lector: ita esse indubitanter intelliget. rursus si inter eosdem. 10. & 40. viginti constituam: statim geometrica medietas cum suis proprietatib' cūctis exoritur: arithmetica medietate pereūte. In hac enim dispositione. 10. 20. 40. quemadmoduʒ est maior ad medium: sic medius ad extremum. Et quod cōtinetur ab extremitatibus equum est ei quod a multiplici medietate completur. Differentie quoq; eorum in eadem sunt proportione qua termini. Crementum vero & imminutio proportionum secunduʒ terminos nulla est: sed maiorum terminorum proportio a minorum terminorum proportione non discrepat. Si vero armonicam medietatem coniungere velim. 16. mihi numerus inter extremitates vtrasq; ponendus est vt sit hoc modo. 10. 16. 40. Nunc igitur licet in huiusmodi dispositione omnes armonicas proprietates agnoscere. qua enim maximus ad paruissimum terminus proportione coniugitur: eadem proportione differentie ad seinuicē cōparātur. Et quib' partibus maioris a maiore medius vincitur: eisdē partibus minoris preterit minorē. Suis vero non eisdē vel a maiore vincitur. vel transit minorem. Et in maioribus terminis maior est proportio: in minoribus minor. Et si in vnum extremitates redigantur: & medietatis quantitate concrescant: duplus inde conficitur numerus ab eo qui ex solis multiplicatis extremitatibus procreatur. Atq; hoc quidem in terminis paribus constitutum est. At vero si impares proponantur vt sunt 5. & 45. aptatus medius. 25. arithmeticā proportionē medietatemq; constituit. Nam si sint. 5. 25. 45. eadē sese numerorum quantitate termini transgredient: & omnis superius dicta proprietas arithmetice medietatis in his terminis custoditur Sed si. 15. numerum medium ponam vt sint. 5. 15. 45. in geometricam medietatem termini relabuntur: equalibus terminorum ad se inuicem proportionibus custoditis.

Nouem vero si inter vtrosq; terminos ponaʒ: vt sint 5. 9. 45. fit armonica medietas: vt qua summa maximus numerus paruissimum precedit: eadē maior differentia minorem differentiam vincat. Qua vero disciplina huiusmodi medietates reperire possimus expediendum est. Datis duobus terminis: si arithmeticam medietatem constituere oportebit: vtraq; est extremitas coniungenda quodq; ex ea copulatione colligitur diuidendum. isq; numerus qui ex diuisione redactus est arithmeticam medietatem inter extremitates locatus efficiet. vt. 10. & 40. si iūxero: efficiūt 50. quos si diuidam. 25. redduntur. Hic erit medius terminus secundum arithmeticam proportionem. [illegible] numerum quo maior minorem superat [illegible] minori superpon[illegible]: quodq; inde concrescit medium ponas arithmetica medietas informabitur. Nam. 40. denarium tricenario superat. quos [illegible] 15. sūt. hunc si minori idest denario superponas. 25. nascentur. quem si medium cōstituas arithmetice medietatis ordo formatur. Geometricā

vero si ratione vestiges: eius numeri qui sub vtrisq; extremitatibus continetur tetragonicum latus inquire: & hunc medium pone. Nam sub. 40: & denario numero. 400. continentur. Si enim denarium in. 40. multiplices: hic numerus crescit Horum igitur quadringentorum require tetragonicum latus. hi sunt. 20. Vicies enim. 20. 400. efficiuntur. Repertum ergo latus quadratum medium constitues. Vel si eam proportionem quam inter se dati termini custodiunt diuidas: & id quod relinquetur medium terminum ponas. Namq;. 40. ad denarium quadruplus ē. Igitur quadruplum si diuidas duplum facies: qui est scilicet. 20. Nam. 20. ad denarium duplus est. hūc si medium constituas: medietatem geometricam perferet Armonicā vero medietateʒ tali mō reperies. differētiam terminorum in minorem terminum multiplica & post iunge terminos. & iuxta eum qui inde confect' est cōmitte illum numerum qui ex differentiis & termino minore productus est. Cuius cum latitudinem inueneris: addas eā minori termino: & quod inde colligitur medium terminum pones. 10. eniʒ. & 40. fiūt 50. Differentia autem inter. 10. & 40. 30. sunt. quem si multiplicas in denarium: idest in minorem: decies. 30. oportet. 300. efficies. Quos. 300. iuxta euʒ cōmitte qui ex iunctis vtrisq; cōfectus est: idest iuxta. 50. facient. enim quīquagies senos & inuenitur latitudo senarius. Hunc igitur si minori termino addes faciēt 16. & hic numerus medius constitutus īter. 10. & 40. armonicā proportionē medietatemq; seruabit.

De tribus medietatibus que armonice & geometrice contrarie sunt.

Capitulum. li.

HE quidem sunt apud antiquiores inuēte probateq; medietates. quas iccirco lōgius enodatiusq; tractauimus: quod he maxime in antiquorum lectionibus inueniuntur: & ad omnem pene vim cognitionis eorum versatur vtilitas. Ceteras autem pretereundo transcurrimus: iccirco quod non multum nobis in lectionibus prosunt. sed tantum ad implendam denarii numeri quantitatem. Que ne lateant ne ve sint aliquib' ignorate depromimus. Videntur enim he supradictis medietatibus esse contrarie ex quibus originem trahūt Ex his enim etiam iste sunt constitute. Et autem quarta medietas que opposita videtur armonice: in quā tribus terminis positis: quemadmodū est maximus terminus ad paruissimū: sic differentia minoruʒ ad differentiaʒ maximorū. Vt sunt. 3. 5. 6. sex ad ternariū duplus. Et sunt minores. 5. & 3. maximi vero huius dispositionis. 6. & 5. Differentia vero minoruʒ quinarii scilicet & ternarii. 2. sunt maiorū quinarii & senarii. 1. qui 2. ad vnum comparati duplum faciunt. Ergo quemadmodum est maximus terminus ad paruissimū sic minorū terminorū differentia est ad differentiā maximorū. Liquet autē oppositā & quodāmodo contrariam esse hanc medietatem armonice medietati: iccirco: quod in illa quemadmodum est maximus terminus ad paruissimum sic maiorum terminorū differentia ad differentiam minorū. Hic autem contrario. Est autem proprium huius medietatis: quoniam quod continetur sub maximo termino & medio: duplum est eo quod continetur [illegible] atq; paruissimo. Sexies enim quinq; 30. sunt: quinquies vero tres 15. Hae vero alie medietates [illegible] geometrice medietati contrarie sunt: & [illegible]

/20r./

entre los términos mayores; y tanto menor es el número que resulta de la multiplicación de los extremos respecto de aquél que resulta de la multiplicación del medio en la medida en que las diferencias de ellos multiplicadas lo igualan; también en la misma parte de sí en que la media supera al menor, y es superado por el mayor, la media sobrepasa al menor, pero no supera al menor en esa misma parte del menor, o en aquella del mayor en que éste le aventaja. Todas estas propiedades no son características de otro género de media que no sea la aritmética, que si el lector recuerda lo dicho anteriormente, comprenderá sin duda que es así.

A su vez, si entre 10 y 40 se interpone el 20, inmediatamente surge la media geométrica con todas sus propiedades, desapareciendo la media aritmética. En esta serie, 10,20,40, según el mayor respecto al medio, así el medio respecto al extremo, y lo que resulta de la multiplicación de los extremos es igual a aquél que sale de la multiplicación de la media. También las diferencias de los términos están en la misma proporción en que están los términos. El incremento o disminución de las proporciones según los términos es nulo, pero la proporción de los términos mayores no es distinto de la proporción de los términos menores.

Si quiero aplicar la media armónica, debo poner el número 16 entre los extremos, para que quede de esta manera: 10,16,40. Ahora, se puede reconocer todas las propiedades armónicas en la serie de esta clase. Pues en cuanto que se relaciona el término mayor con el menor, en esa misma proporción las diferencias se relacionan entre sí. Y en las partes del mayor en que el medio es superado por el mayor, en esas mismas partes del menor supera al menor; pero no es superado por el mayor ni supera al menor en partes de la media; y en los términos mayores hay una proporción mayor, en los menores, menor; y si se suman los extremos y se les suma la cantidad de la media, el número que resulta es el doble respecto de aquél que sale de la multiplicación de los extremos entre sí.

Y esto ciertamente se ha probado en los términos pares. Pero si se proponen impares, como son el 5 y el 45, y se le sitúa el 25 en medio, se establece la media aritmética. Pues si son el 5, el 25 y el 45, los términos se superan en la misma cantidad. Y se mantienen en estos términos todas las propiedades de la media aritmética señaladas más arriba. Si colocado el número quince en medio, para que sean 5,15,45, los términos caen en la media geométrica, manteniendo la igualdad de las proporciones de los términos entre sí. Pero si pongo el nueve entre los dos términos, para que sean 5,9 y 45, resulta la media armónica, de modo que en la suma el número mayor precede al menor, en esa diferencia el mayor supera a la diferencia menor.

Debemos exponer con qué método podemos encontrar medias de esta clase. Dados dos términos, si se debe establecer una media aritmética, hay que unir los dos extremos y hay que dividir el resultado de la suma, y el número que sale de la división, colocado entre los extremos, dará la media aritmética. Si sumo diez y cuarenta, hacen cincuenta, que si lo divido, da veinticinco. Éste será el término medio según la proporción aritmética. Si divides al número en que el mayor supera al menor y lo comparas con el menor y lo que de ahí exceda lo colocas como medio, se forma la media aritmética. Pues el 40 supera al 10 en 30, que si lo divides, resulta 15. Si sumas éste con el menor, esto es, el 10, sale el veinticinco, que si lo colocas en medio, se forma la serie de la media aritmética.

Pero si se busca la proporción geométrica, mira el lado al cuadrado de ese número que es el producto de los dos extremos y sitúalo a éste en el medio. Pues el cuarenta y el diez tienen como producto el 400; si se multiplica diez por cuarenta, resulta este número. Busca el lado cuadrado de estos cuatrocientos; es 20, porque 20 por 20 son cuatrocientos. El lado cuadrado que has encontrado lo colocas en el medio. Divide esa proporción que mantienen entre sí los términos dados y lo que resta lo colocas en el término medio. Cuarenta es el cuádruple de diez. Si divides el cuádruple, resulta el doble, que es veinte. Pues veinte es el doble de diez. Si lo colocas en medio, dará la media geométrica.

Encontrarás la media armónica de este modo. Multiplica la diferencia de los términos por el término menor y suma después los téminos; a continuación, divide por el número obtenido el producto de las diferencias por el término menor, y cuando se halla el cociente, sumárselo al término menor. Lo que resulta, se establece como término medio. Diez y cuarenta hacen cincuenta. La diferencia entre diez y cuarenta son treinta, que si multiplicas por diez, esto es, por el menor; diez por treinta son trescientos. Ahora hay que dividir trescientos por el número que resulta de la adición de los dos términos, esto es, por cincuenta. En efecto, dividido por cincuenta da seis y se obtiene un cociente de seis. Si sumas éste al término menor, se llega a dieciséis, y éste, colocado como término medio entre diez y cuarenta servirá a la proporción o media armónica.

De las tres medias que son contrarias a la media armónica y a la geométrica.

Capítulo LI.

Estas son las medias descubiertas y reconocidas por los antiguos, que por eso hemos explicado más larga y detalladamente, porque sobre todo éstas se encontraban al leer a los antiguos y son útiles para casi toda clase de estudio de estos autores. Pasamos rápido, dejando las demás medias en un segundo plano, porque no nos son de gran provecho en nuestra lectura, sino sólo para completar la cantidad del número diez. Pero para que no queden sin mención y para que no haya quien no las conozca, vamos a explicarlas.

Parece que éstas son contrarias a las medias citadas arriba, de las que toman su origen. Pues también ellas se han establecido a partir de las anteriores. Hay una cuarta media que parece opuesta a la media armónica. En ella, propuestos tres términos, según la diferencia del mayor con el menor, así la diferencia de los términos menores con respecto a los mayores, como son el tres, el cinco y el seis. El seis respecto al tres es el doble y los términos menores son el cinco y el tres, mientras que los mayores son el cinco y el seis. La diferencia de los menores, es decir, del cinco y del tres, son dos, mientras que la de los mayores, el cinco y el seis, es uno. El dos comparado con el uno es el doble. Luego tal como es la diferencia entre el término mayor y el menor, así es la diferencia de los términos menores respecto a la diferencia de los mayores.

Está claro que esta media es opuesta y en cierto modo contraria a la media armónica porque en ella según es la diferencia entre el término mayor y el menor, así es la diferencia de los términos mayores respecto de la difrencia de los menores, mientras que en la otra es al contrario.

Es propiedad de esta media que el producto del témino mayor respecto del medio es el doble que aquél que resulta del menor por el medio. En efecto, seis por cinco son treinta, y tres por cinco son quince.

Las otras medias, esto es, la quinta y la sexta, son contrarias a la media geométrica tur opposite. Est autem quinta medietas: quotiens in tribus terminis quemadmodum est medius terminus ad minorem: terminum: ita eorum differētia ad differentiam medii atqꝫ maioris. Nam in hac dispositione. 2.4.5. quaternarius ad binarium duplus ē. sed inter quaternarium ⁊ binarium duo sunt: inter quaternarium vero ⁊ maiorem terminum idest quinqꝫ. 1. ⁊ duo ad vnum dupli sunt. Contrarium autem geometrice medietati in hac proportione est: quod in illa quemadmodum maior terminus ad minorem esset: sic maiorum differentia ad differentiam minorum. hec vero contraria quemadmodum minores ad se termini sunt: sic minorum differentia terminorum ad maiorum differentiam comparatur. Est autem ꝓprium in hac quoqꝫ dispositione quod illud quod continetur sub maiore termino ⁊ medietate duplum est eo quod sub vtrisqꝫ extremitatibus continetur. Nam quinquies quattuor sunt. 20. quinquies vero. 2. sunt. 10. ⁊. 20. denari duplus est. Sexta vero medietas est quando tribus terminis constitutis quemadmodum est maior terminus ad medium: sic minorū terminorum differētia maximorū. In dispositione enim que est. 1.4.6. maximus terminus ad medium sesqualter est. differentia vero minorum idest vnius ⁊. 4. ternarius est: maiorum vero idest quaternarii ⁊ senarii binarius. Ternari⁹ autē binario comparatus sesqualteram habitudinem proportionis efficiet. Eodem autem modo hec quoqꝫ medietas geometrice contraria est quemadmodum ⁊ quinta: propter proportionē differentiarum a minoribus ad maiores terminos conuersam.

¶De quatuor medietatibus quas posteri ad implēdū denarium limitem adiecerunt.

¶Capitulum. lii.

ET he quidem sunt sex medietates quarum tres a pythagora vsqꝫ ad platonē aristotelemqꝫ manserunt. Post vero qui insecuti sunt has tres alias de quibus supra disseruimus suis commentariis addidere. Sequens autem etas quemadmodum diximus ad implendam denariam quātitatē alias quatuor medietates apposuit. quas non adeo quis in veterum libris inueniat. Has igitur nos quam possumus breuissime disponamus. Prima enim que est earū in ordine vero septima medietas hoc modo coniungitur: cum in tribus terminis quemadmodum est maximus termin⁹ ad vltimum: sic maximi ⁊ paruissimi termini differētia ad minorum differentiam terminorum. vt in hac dispositione. 6.8.9. Nouenarius igitur ad senarium sesqualter est. quorum est differentia ternarius. Minorum vero terminorum: idest octonarij ⁊ senarij binarius differentia est qui ad superiorem ternariū comparatus facit sesqualteram proportionem. Secunda vero inter quatuor: sed octaua in ordine proportionalitas est: quotiens in tribus terminis quemadmodū sunt extremitates ad se inuicem comparate: sic eorū differentia ad maiorum terminorum differentiam. vt sunt. 6.7. Nouem igitur ad. 6. sesqualter est. ⁊ eorum differentia ternarius est qui comparatus contra maiorum differentiam: idest septenarij ⁊ nouēarij q binarius est: reddit sesqualteram proportionem. Tertia vero inter has sequentes quatuor. nona autem in ordine proportio est: quando tribus terminis positis quam proportionem medius termin⁹ ad paruissimū custodit: eā retinet extremorum differentia ad minorum differentiam comparata. vt. 4.6.7. Etenim. 6. ad. 4. sesqualter est. quorum est differentia binarius. septenarij vero ⁊ quaternarij ternarius differentia ē quem si ad superiorem binarium comparemus sesqualtera proportione coniungitur. Quarta vero que in ordine decima est consideratur in tribus terminis: cū tali proportione medius termin⁹ ad paruissimum cōparatur: quali extremorum differentia contra maiorum terminorum differentiam proportione coniungitur. vt sunt tres quinqꝫ octo. Quinarius enim medi⁹ terminus ad ternarium superbipartiēs est. Extremorum vero differentia octonarii scilicet ⁊ ternarii quinarius. qui comparatus contra maiorum terminorū differentiam scilicet quinarii ⁊ octonarii q est ternarius: ⁊ ipse quoqꝫ superbipartiens inuenitur.

¶Dispositio decem medietatū. Capitulū. liii.

DIsponamus igitur cunctas medietates in ordinē: vt cuiusmodi omnes sint facillime possint intelligi.

Arithmetica	Prima	1	2	3
Geometrica	Secunda	1	2	4
Armonica	Tertia	3	4	6
contraria armonice	Quarta	3	5	6
contraria geome.	Quinta	2	4	5
contraria geome.	Sexta	1	4	6
inter. 4. prima	Septima	6	8	9
inter. 4. secunda	Octaua	6	7	9
inter. 4. tertia	Nona	4	6	7
inter. 4. quarta	Decima	3	5	8

¶De maxima ⁊ perfecta symphonia que tribus distēditur interuallis. Capitulum. liiii.

REstat ergo de maxima ꝑfectaqꝫ armonia disserere. que tribus interuallis constituta magnam viꝫ obtinet in musici modulaminis temperamentis: ⁊ in speculatione naturalium questionum. Etenim perfectius huiusmodi medietate nihil poterit inueniri: que trib⁹ interuallis producta perfectissimi corporis naturā substantiamqꝫ sortita est. Hoc enim mō cubū quoqꝫ trina dimēsione crassatum: plenam armoniā esse monstrauimus: Hec autem hmōi inuenietur: si duobus terminis cōstitutis: qui ipsi trib⁹ creuerit interuallis longitudine: latitudie: ⁊ profunditate: duo hmōi termini medii fuerit constituti: ⁊ ipsi trib⁹ interuallis notati. qui vel ab equalibus per eq̄les equaliter sint producti: vel ab inequalibus ad inequalia eq̄liter: vel ab inequalibus ad eq̄lia eq̄liter vel quolibet alio mō atqꝫ ita cū armonicam ꝓportionē custodiant: alio tn̄ modo cōparati faciant arithmeticā medietatē: hisqꝫ geometrica medietas que inter vtrasqꝫ versat̄ deesse non possit. In quatuor enim terminis si fuerit quē admodū prim⁹ ad tertiū. sic secūdus ad quartuꝫ: proportionuꝫ ratione. s. custodita: geometrica medietas explicatur. Et qđ continet̄ sub extremitatib⁹ equum erit ei qđ sub vtraqꝫ medietate ad seinuicē multiplicata conficitur. Rursus si maximus quatuor terminorū numerus ad eum q sibi propinquus ē talē habeat differentiā qualē idē ipse maximo propinquus ad paruissimū huiusmodi proportio in arithmetica consideratione proponitur. Et extremorū coniunctio duplex erit propria medietate. Si vero inter quatuor q est tertius terminus equa parte quarti quartū terminuꝫ superet: ⁊ equa primi a primo superet: armonica huiusmodi ꝓportio medietas ꝑspicitur: Et quod continetur

/20v./

y parecen opuestas a ella. La quinta media se reconoce cuando dados tres términos, según la diferencia del término medio con el menor, así es la diferencia de ellos respecto de la diferencia del medio con el mayor. Pues en esta disposición 2,4,5, el cuatro es el doble en relación con el dos. Pero entre el cuatro y el dos hay dos, mientras que entre el cuatro y el término mayor, esto es, el cinco, hay uno. Y el dos respecto del uno es el doble. Es contrario a la media geométrica en esta proporción el hecho de que en ella, según es el término mayor respecto del menor, así es la diferencia de los términos mayores en relación con los menores; mientras que la otra, de manera contraria, según son los términos menores entre ellos, así es la diferencia de los términos menores en relación con la diferencia de los términos mayores.

Es una propiedad de esta proporción que el producto del término mayor y la media es el doble del producto de los dos extremos. Efectivamente, cinco por cuatro son veinte, y cinco por dos son diez, el veinte es el doble del diez.

La sexta media se reconoce cuando dados tres términos, según es la relación entre el término mayor y el medio, así es la diferencia de los términos menores con la diferencia de los mayores. En esta serie que es 1,4,6, el término mayor respecto del medio es sesquiáltero, mientras que la diferencia de los menores, esto es, del uno y del cuatro, es el tres, en tanto que la de los menores, es decir, el cuatro y el seis, es dos. El tres en relación con el dos hará la proporción sesquiáltera. Del mismo modo, esta media es contraria a la geométrica, como también la quinta, por la inversión de la proporción de las diferencias entre los términos menores y los mayores.

De las cuatro medias añadidas por los autores posteriores para completar el número de diez.

Capítulo LII.

Estas son las seis medias, de las cuales tres se mantuvieron en la tradición desde Pitágoras a Platón y Aristóteles. Los que vinieron después, añadieron a sus comentarios las que hemos explicado antes. Pero en un época posterior, según hemos dicho, se añadieron otras cuatro para completar el número de diez, que no se encuentran en los libros de los antiguos. Expliquémoslas lo más brevemente posible.

La primera de ellas es en el orden la séptima media. Se establece de este modo: dados tres términos, según la relación entre el término mayor y el último, la diferencia del término mayor y el menor respecto de la diferencia de los términos menores, como en esta serie: 6,8,9. El nueve respecto al seis tienen una proporción sesquiáltera y su diferencia es tres, en tanto que la diferencia entre los términos menores, esto es, el ocho y el seis es dos; esto comparado con el tres anterior da una proporción sesquiáltera.

La segunda proporcionalidad de las cuatro, la octava en el orden general, se reconoce cuando dados tres términos, la diferencia de los extremos es a la diferencia de los términos mayores como son los extremos comparados entre sí. De este modo se relacionan 6,7,9. La proporción entre el nueve y el seis es sesquiáltera. La diferencia entre ellos es de tres, que comparado con la diferencia de los mayores, esto es, del siete y del nueve, que es dos, da una proporción sesquiáltera.

La tercera entre estas cuatro, la novena proporción en el orden general, se produce cuando dados tres términos, la proporción que mantiene el término medio con el menor es la misma que tienen la diferencia de los extremos con respecto a la diferencia de los menores. Así es la serie 4,6,7. En efecto, seis respecto de cuatro es una proporción sesquiáltera, y su diferencia es dos. La diferencia entre el siete y el cuatro es tres, que comparada con el dos anterior forma una proporción sesquiáltera.

La cuarta, que es la décima en el orden general, se considera en tres términos, cuando en la serie el término medio se compara con el menor en la proporción de la diferencia de los extremos respecto de la diferencia de los términos mayores. Así se cumple en la serie 3,5,8. El cinco es el término medio, que es superbipartiente del tres. La diferencia de los extremos, esto es, del ocho y del tres, es el cinco, que comparado con la diferencia de los términos mayores, esto es, el cinco y el ocho, que es tres, también resulta un superbipartiente.

Cuadro representativo de las diez medias.

Capítulo LIII.

Dispongamos de todas las media en orden, de manera que se pueda ver muy fácilmente de qué clase es cada una.

Aritmética	Primera	1,2,3
Geométrica	Segunda	1,2,4
Armónica	Tercera	3,4,6
Contraria a la armónica	Cuarta	3,5,6
Contraria a la geométrica	Quinta	2,4,5
Contraria a la geométrica	Sexta	1,4,6
Primera de las cuatro	Séptima	6,8,9
Segunda de las cuatro	Octava	6,7,9
Tercera de las cuatro	Novena	4,6,7
Cuarta de las cuatro	Décima	3,5,8

De la armonía máxima y perfecta que se extiende en las tres dimensiones.

Capítulo LIIII.

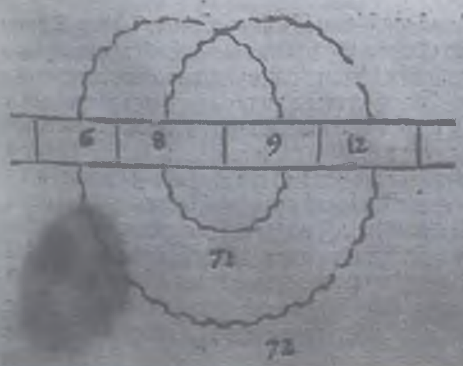
Nos resta comentar la armonía máxima y perfecta que, extiéndose en tres dimensiones, tiene una gran importancia en las combinaciones de la armonía musical y en la observación de la naturaleza. No se puede encontrar nada más perfecto que la media de esta clase, que extendida en las tres dimensiones, recibe la naturaleza y la sustancia del cuerpo más perfecto. De este modo hemos demostrado que el cubo, sólido en las tres dimensiones, es la plenitud de la armonía.

Se hallará esta armonía si dados dos términos que se extienden en las tres dimensiones, longitud, anchura y profundidad, colocados como medios dos términos como éstos, que también tengan tres dimensiones, que sean el producto de un igual por un igual un número igual de veces, o de un diferente por un diferente, o de un diferente por un igual un número igual de veces, etc., presentando la proporción armónica, pueden sin embargo, si se encuentran en otra proporción, dar la media aritmética y no les puede faltar la media geométrica que se encuentra entre esas dos medias.

Dados cuatro términos, si la relación del primero con el tercero, es como la del segundo con el cuarto, mantenidas las proporciones, se realiza la media geométrica, y el producto de los extremos será igual al que se obtiene de las dos medias multiplicadas entre sí. A su vez, si el mayor de los cuatro términos, respecto del que está próximo a él, tiene tal diferencia como la que tienen el próximo al mayor con el menor, la proporción de este tipo se inscribe en la aritmética, y la suma de los extremos será el doble que su propia media. Si el tercer término de los cuatro supera al cuarto término en una misma parte del cuarto que aquella parte del primero en que es superado por el primero, la proporción armónica de esta clase y la media se observan tinetur sub extremorum aggregatione ⁊ multiplicatione medietatis duplex est eo quod sub vtraqꝫ extremitate conficitur. Sit autem quoddam huius dispositionis exemplar hoc modo. 6. 8. 9. 12. Has igitur omnes solidas quãtitates esse non dubium est. Sex enim nascuntur ex vno bis ter. 12. autem ex bis duo ter. Horum autem medietates: octonarius fit semel duo quater. Nouenarius vero semel tres ter. omnes igitur termini cognati sibi: ⁊ tribus interuallorum dimensionibus notati sunt. In his igitur geometrica proportionalitas inuenitur: si. 12. ad. 8. vel. 9. ad senarium comparemus. Vtraqꝫ eniꝫ comparatio sesqualtera proportio est. ⁊ quod continetur sub extremitatibus idem est ei quod fit ex medijs. Namqꝫ quod fit ex duodecies sex: equum est ei quod fit ex octies. 9. Geometrica ergo proportio huiusmodi est. Arithmetica autem est si duodenarius ad nouenarium: ⁊ nouenarius ad senarium cõparetur. In vtrisqꝫ enĩ ternarius differentia est ⁊ iuncte extremitates medietate duple sunt. Si enim iunxeris senarium ⁊ duodeciꝫ facies: 18. qui est nouenario medio termino duplus. In his ergo geometricaꝫ arithmeticam medietateꝫ perspeximus. Hic quoqꝫ armonica medietas inueniẽ si. 12. ad. 8. ⁊ rursus. 8. ad senarium comparem⁹. qua enim parte senarij octonarius senariũ superat: idest parte tertia: eadem duodenarij parte octonarius superatur. Quatuor enim quib⁹ octonarius a duodenario vincitur: duodenarij tertia pars est. Et si extremitates iungas. 6. scilicet. ⁊. 12. easqꝫ per octonariuꝫ medium multiplices. 144. sunt. Quod si se extremitates multiplicent: sex scilicet ⁊. 12. faciẽt. 72. quo numero. 144. duplus est. Inueniemus hic quoqꝫ oẽs musicas consonantias. Nãqꝫ. 8. ad. 6. ⁊. 9. ad. 12. comparati sesquitertiam proportionem reddunt: ⁊ simul diatessaron consonantiam. Sex vero: ad. 9. vel. 8. ad 12. cõparati reddũt sesqualterã ꝓportionẽ. sed diapẽte symphoniam. Duodecim vero ad senarium considerati duplicem proportionem: sed diapason symphoniam canunt. Octo vero. ⁊. 9. ipsi contra se medij considerati epocdoum iungunt. qui in musico modulamine tonus vocatur. q̃ oĩum musicoꝝ sonoꝝ mẽsura cõmunis ẽ. Oĩum. n. ẽ sonus iste paruissimus. Vnde notũ est quod diatessaron ⁊ diapẽte cõsonantiaꝝ tonus differentia est. sicut inter sesquitertiam ⁊ sesqualterã proportionẽ sola est epocdous differentia. Eius auteꝫ descriptionis subter exemplar adiecimus.

Proportionalitas geometrica.

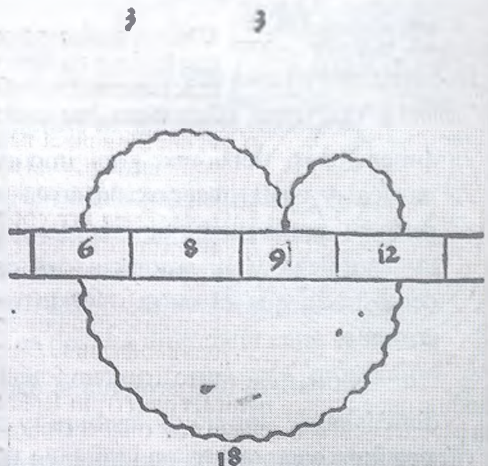
Sesqualtere proportiones.



Extremorum mediorumqꝫ multiplicationes

Proportionalitas arithmetica.

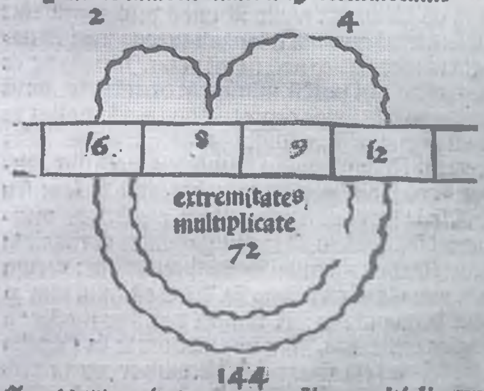
Differentie.



Extremitates iuncte ad nouenariuꝫ mediũ duple sũt

Proportionalitas armonica.

Partes minoris maiorisqꝫ terminorum.



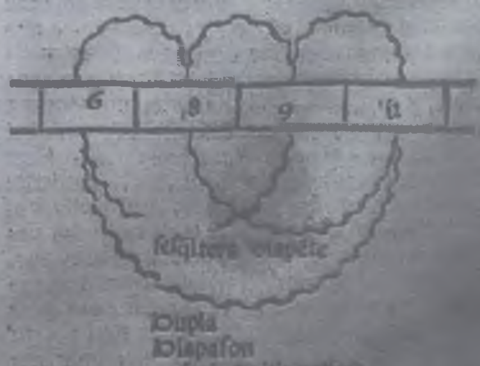
Iuncte extremitates ⁊ per medium multiplicate

Consonantie musice

Sesquitertia Sesquitertia

Epocdous

Diatessaron Diatessaron



Finis Arithmetice

/21r./

y el producto del medio y de la suma de los extremos es el doble del producto de los extremos. Sea un ejemplo de una serie de este tipo así: 6,8,9,12. Sin duda son todas cantidades de números sólidos. Pues seis surge del producto de uno por dos por tres, doce de dos por dos por tres; el producto de las medias, esto es, de uno por dos por cuatro, es ocho, el de uno por tres por tres es nueve. Todos los términos están emparentados entre ellos y se han definido en las tres dimensiones. En éstas se encuentra la proporcionalidad geométrica, si comparamos 12 respecto de 8 o nueve respecto de seis. Pues la relación es una proporción sesquiáltera, y el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Pues el que resulta de doce por seis es igual al de ocho por nueve. Luego la proporción geométrica es de esta manera. La aritmética aparece si se compara el doce con el nueve y el nueve con el seis. Pues en los dos casos la diferencia es tres y la suma de los extremos es el doble de la media. Pues si sumas seis y doce, da dieciocho, que es el doble del nueve, el término medio. En éstos hemos observado la media geométrica y aritmética.

También se halla la media armónica, si comparamos el doce respecto del ocho y de nuevo el ocho con el seis. Pues en la parte del seis en que el ocho supera al seis, esto es, en la tercera parte, en esa parte el ocho es superado por el doce, es la tercera parte del doce. Y si sumas los extremos, es decir, el seis y el doce y los multiplicas por el término medio, el ocho, dan ciento cuarenta y cuatro. Si se multiplican los extremos, es decir, el seis con el doce, hacen setenta y dos, número del cual es el doble el ciento cuarenta y cuatro.

Encontramos aquí también todos los acordes musicales. En efecto, el ocho comparado con el seis y el nueve con el doce, dan una proporción sesquitercia, y al mismo tiempo un acorde de cuarta; el seis respecto al nueve o el ocho respecto al doce dan una proporción sesquiáltera, y dan un acorde de quinta; el doce considerado respecto del seis, dan una proporción doble, pero hacen resonar un acorde de octava. Pero el ocho y el nueve, términos medios, comparados entre sí, dan una proporción de sesquioctava, que en la armonía musical se llama tono, y es la medida común de todos los sonidos en la música. Porque este sonido es el menor de todos. Por eso es conocido que el tono es la diferencia entre los acordes de cuarta y de quinta, al igual que entre las proporciones sesquitercia y sesquiáltera, la diferencia es la sesquioctava.

Ofrecemos un ejemplo de esta descripción seguidamente: (véase esquemas en fol. 21 r.)

GLOSARIO

Glosario

Epitrita: Nombre específico de la proporción sesquitercia en música.

Epogdon: Nombre griego de la octava musical.

Hemiolia: Relación equivalente a la sesquiáltera, usada sobre todo en textos de temática musical.

Heteromique: Número que corresponde a una figura que tiene una parte más larga que otra. Tiene cuatro lados y cuatro ángulos, pero no todos sus lados son iguales, sino que una parte tiene una unidad menos.

Impar paritariamente: El número impar paritariamente, es un número par que admite una partición en partes iguales, pero éstas permanecerán, indivisibles e inseparables.

Longuiláteros: Número formado por la multiplicación de los números que superan el uno.

Media armónica: La media armónica es la que no se establece ni con las mismas diferencias ni con proporciones iguales, sino aquélla en la que según un término mayor se opone al menor; así se relaciona la diferencia del mayor y del medio, frente a la diferencia del medio y del menor.

Media geométrica: La media geométrica es, según Boecio, la única que se puede llamar proporcionalidad más que ninguna, porque se observa en esas mismas proporciones de los términos, tanto en los mayores como en los menores.

Múltiplo superparticular: El múltiplo superparticular es un número que comparado con otro lo contiene más de una vez y una parte de él, esto es, tiene el doble, el triple, el cuádruple o las veces que sea, y alguna parte, bien la mitad, o la tercera parte, la cuarta o cualquiera otra multiplicidad de partes.

Múltiplo superpartiente: es un número que comparado con otro, lo contiene en sí entero más de una vez, y dos, o tres o cuantas sean las partes de ese número, un número de partes según la clase del número superpartiente.

Múltiplo: Número que comparado con otro contiene a ese otro más de una vez.

Número abundante: Número abundante es el que comparado con sus partes, resultado de las divisiones exactas posibles, ha recibido mayor suma de las partes que su cuerpo en total.

Número deficiente: Número deficiente es el que presente una suma de sus partes, resultado de las divisiones exactas posibles, que es superada por cantidad total.

Número oblongo: Llamado promeca en la terminología griega. Tiene una diferencia con el número que tiene una parte más larga que otra, que crece al añadir una unidad al lado. El número oblongo se contiene en dos números, correspondientes a figuras, cuyos lados no tienen la diferencia de la unidad, sino de otros números cualesquiera, como cinco por tres, o seis por tres, o siete por cuatro.

Número perfecto: Número perfecto es aquél cuya cantidad es igual a la suma de sus partes, esto es, de los resultados de sus divisiones exactas posibles.

Número primo no compuesto: El número primo y no compuesto es aquél que no tiene otra división que la que recibe la denominación de la cantidad del número, y esa parte es la unidad; es decir, es divisible por sí mismo y por la unidad.

Número que es secundario y compuesto, pero que respecto a otro es primo: Se denomina así un número que ciertamente es compuesto y secundario, recibiendo la medida de otro número y por eso admitiendo otra parte de distinta denominación (esto es, una cantidad fraccionaria que no lleve el nombre de ese número). Pero cuando se compara con otro número del mismo género, éste no se une con ninguna medida (es decir, un divisor) común con él, y no tendrá partes del mismo nombre.

Número que tiene una parte más larga que otra: v. heteromique.

Número secundario compuesto: Se trata, según Boecio, de un número impar, pero no conserva en sí ninguna sustancia principal, y está compuesto de otros números. Tiene partes que se llaman según su nombre y con otra denominación ajena, pero en éstos siempre encontrarás la unidad como la parte sola que se llama con un nombre derivado del suyo, en cambio, derivados del nombre de otro número, una o cuantas se quiera, según los números que fueran, es decir los números con los cuales compuestos se crea aquél.

Número superparticular: El número superparticular es un número que comparado con otro, contiene al menor en sí un número de veces y alguna parte de él.

Números cíclicos o esféricos: Tales números son las multiplicaciones que parten del cinco o del seis. Prolongados los lados de los cubos, de la longitud que fuesen, todos los números multiplicados de tal modo que su extremidad en altura se termine por el mismo número en que comenzara su cantidad cúbica, aquel número se llama cíclico o esférico.

Par imparitariamente: Par imparitariamente es el número que se divide en partes iguales, y una parte de él se puede dividir en otras equivalentes; algunas veces se dividen las partes de las partes, pero aquella distinción equivalente avanza hasta la unidad.

Par paritariamente: Un número par paritariamente es el que puede dividirse en dos pares, y una parte de él en dos pares y una parte de esa parte, en otros dos pares. Potencia de dos.

Proporción aritmética: Se trata de una proporción en que el término medio supera al menor y es superado por el mayor en la misma parte de sí, pero en una parte del menor y en otra distinta del mayor.

Proporción sesquiáltera: Conservamos en castellano el término latino que expresa la proporción entre dos términos, de los que uno contiene al otro una vez y media.

Proporción sesquicuarta: Proporción de una vez y un cuarto.

Proporción sesquiquinta: Proporción de una vez y un quinto.

Proporción sesquiquinta: Proporción de una vez y un quinto.

Proporción sesquisexta: Proporción de una vez y un sexto.

Proporción sesquitercia: Proporción entre dos términos de los que uno contiene al otro una vez y un tercio.

Proporcionalidad: La proporcionalidad es una comparación y reunión de dos o de tres o del número que sea de proporciones en una sola.

Quadrivium: las cuatro vías del conocimiento científico durante la Edad Media. Designa a la matemática, geometría, astronomía y música, que aquí se presentan en dependencia jerárquica.

Submúltiplo: Aquél que, en comparación con otro, numera la suma del mayor por medio de su propia cantidad.

Superpartiente: Hay una relación superpartiente cuando un número comparado con otro contiene en sí mismo ese número entero, y además, partes de ese número, dos, tres, cuatro o todas las que haya en la relación considerada.

Viga: Llaman vigas a figuras sólidas, cuya característica es que se forman a partir de un número igual multiplicado por un número igual y por un número mayor. Pues si la anchura es igual a la longitud y la altura se hace mayor, resultan las figuras conocidas en latín por el nombre de *asseres* (vigas), que los griegos llaman *dokídes*.