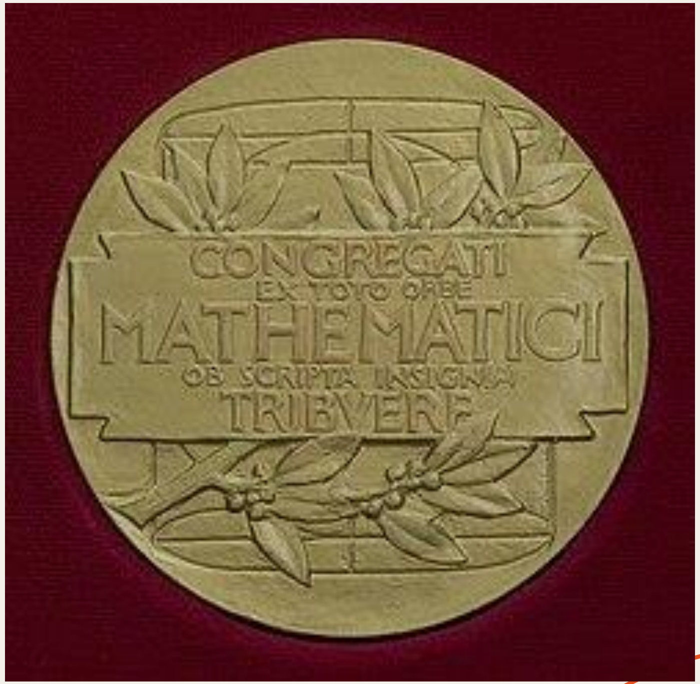
Ayudantía 14

Historia de las Matemáticas II,
Semestre 2026-2

Rewind de la clase pasada…

Hablábamos de premios:



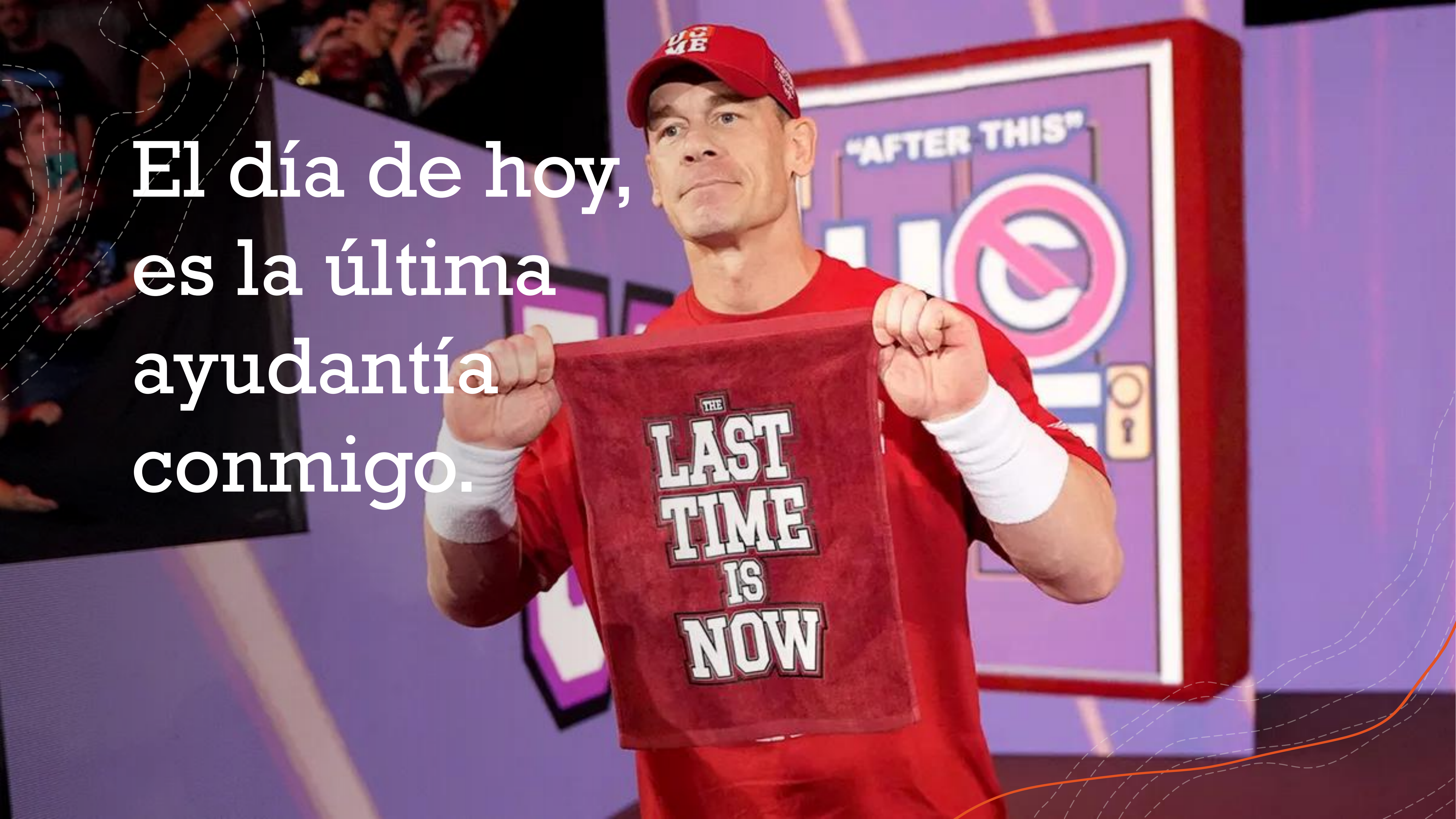
Niels Henrik Abel

Ecuaciones de grados n > 5

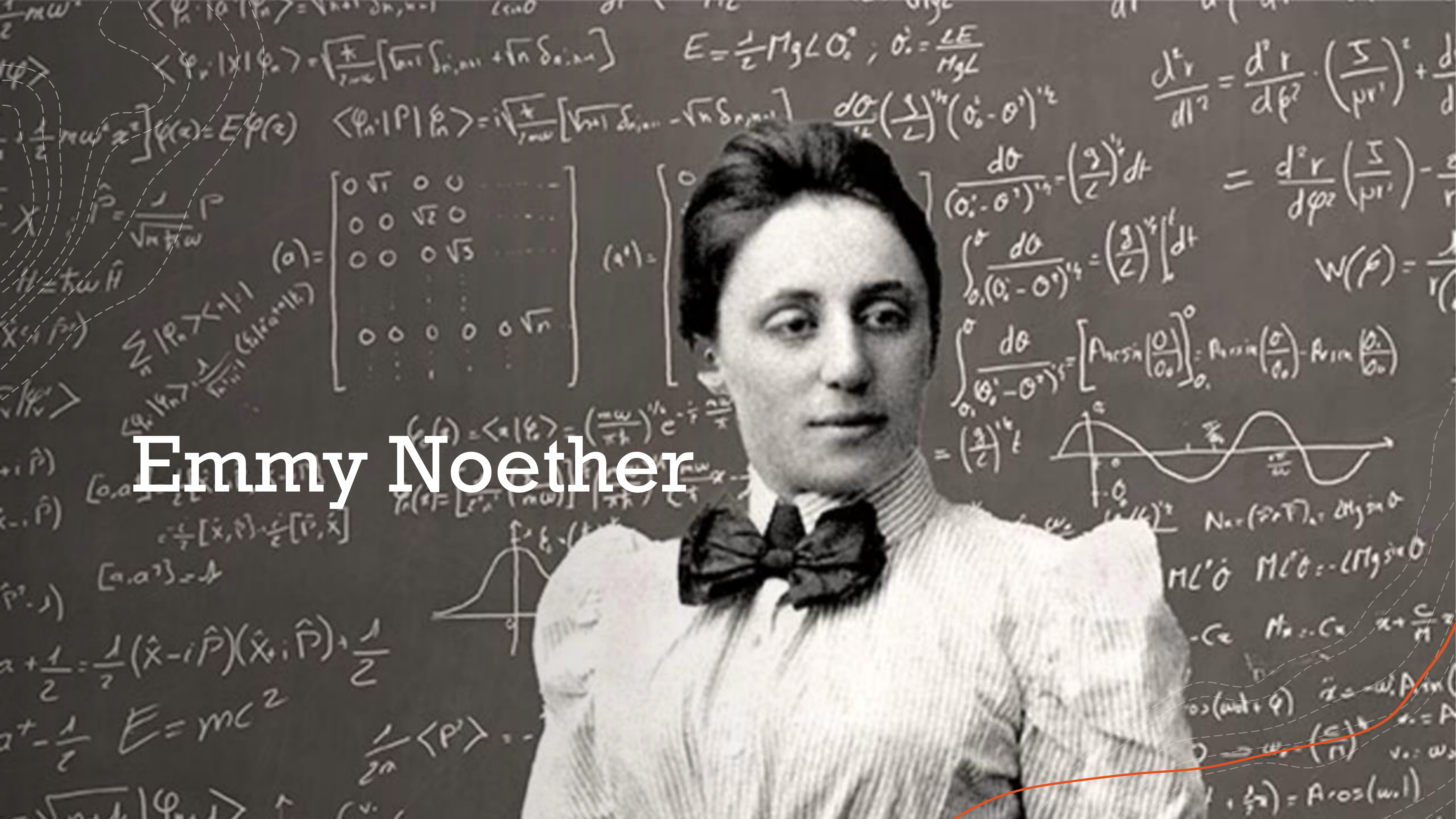
Formas diferenciales

Funciones e integraciones elípticas

El día de hoy, es la última ayudantía conmigo.



Emmy Noether



Emmy Noether

Erlangen, Baviera, 23 de marzo de 1882 - Bryn Mawr, Pensilvania, 14 de abril de 1935.

Amalie Emmy Noether: matemática alemana de ascendencia judía.

Hija del matemático Max Noether y con tres hermanos.

Emmy Noether

Descendiente de una familia de comerciantes.

Padecía miopía y hablaba con un leve sigmatismo (llamado coloquialmente «ceceo») durante su infancia.

Desde una edad temprana mostraba talento en las Matemáticas.

Tengamos en cuenta lo siguiente:

Lo anterior son generalidades de su vida.

Para ver otros detalles de su vida, hay que tener en cuenta que la época donde ella vivió es muy diferente a la que tenemos hoy en día.

No caigamos en anacronismos y juzgar las cosas fuera de su lugar temporal.

Emmy Noether

Aprendió a cocinar y limpiar (acostumbrada por su época) y recibió lecciones de piano.

No se apasionó mucho por ninguna de estas actividades.

Tenía gusto por el baile y acudía a las fiestas que organizaban los hijos de los colegas de su padre,

Eduación

Estudió el bachillerato en un colegio para chicas donde las Matemáticas no tenían gran relevancia.

Estaba capacitada para enseñar idiomas en escuelas femeninas.

En 1903…

Se permitió por primera vez que las mujeres estudiaran en las universidades de Baviera.

Dos años antes, el senado académico de la universidad había declarado que la coeducación podría *subvertir todo el orden académico.*

Universidad

Durante el invierno 1903-1904 estudió en la Universidad de Gotinga, asistiendo como oyente, ya que no la aceptaron como estudiante por ser mujer.

Asistió a clases impartidas por el astrónomo Karl Schwarzschild y los matemáticos Hermann Minkowski, Otto Blumenthal, Felix Klein y David Hilbert.

Emmy Noether no quería irse a estudiar a otro país, ya que en esa época Alemania estaba liderando el desarrollo en las matemáticas.

Universidad

Dos años más tarde y al aprobar un examen final, se matriculó en la Universidad de Erlangen, donde impartía clases su padre.

En 1907, bajo la supervisión de Paul Gordan, escribió su tesis *Sobre la construcción del sistema formal de la forma ternaria bicuadrática.*

Se había convertido en la segunda mujer alemana que obtenía el doctorado en matemáticas en una universidad alemana.

Después de la Universidad…

En 1908 se asoció al *Circolo Matematico di Palermo* y al año siguiente se afilió *Asociación Alemana de Matemáticos.*

Fue la primera mujer en presentar sus investigaciones en la Conferencia Anual.

Cuando su profesor Paul Gordon se jubiló, ocupó su plaza Ernest Fisher; que fue el que le dio el impulso para estudiar álgebra abstracta.

Como profesora:

Durante los años 1908-1915 impartió clases en el Instituto matemático de la Universidad de Erlangen sin percibir sueldo.

1908–1915

1910 y 1911

En 1910 y 1911 publicó una ampliación de su tesis doctoral generalizando el caso de 3 variables a n variables.

Universidad de Gotinga

Universidad de Gotinga

En, Noether fue invitada a regresar a la Universidad de Gotinga, que en ese momento era un centro de investigación matemática reconocido por David Hilbert y Felix Klein.

Los esfuerzos por reclutarla fueron bloqueados por los filólogos e historiadores de la Facultad de Filosofía.

"¿Qué pensarán nuestros soldados cuando vuelvan a la universidad y encuentren que se les pide que aprendan poniéndose a los pies de una mujer?"

Universidad de Gotinga

Durante los primeros años como profesora en Gotinga no tuvo una plaza oficial ni percibía retribución.

Su familia le pagaba el alojamiento y manutención.

Sus clases se anunciaban con el nombre de Hilbert y tenía la consideración de *ayudante*.

Universidad de Gotinga

Hilbert y Klein escribieron a Albert Einstein, quien había pedido ayuda a la Universidad para abordar el marco matemático que explicara el principio de *La Conservación de la Energía*.

Le pidieron a Noether que colaborara, ya que consideraban que su conocimiento y experiencia podía ser de gran ayuda.

Mostró su capacidad probando el teorema que hoy en día lleva su nombre.

Revolución

Derechos de las Mujeres

Al finalizar la Primera Guerra Mundial, la Revolución de Noviembre trajo un cambio significativo en los usos sociales.

Lo anterior trajo más derechos para las mujeres.

En 1919 la Universidad de Gotinga permitió a Noether capacidad de ejercer como profesora.

Pero hubo algunas trabas:

Este cargo era un profesorado *extraordinario* sin paga.

Aunque se reconocía la importancia de su trabajo, el puesto aún no implicaba la percepción de un salario.

No fue retribuida por sus clases hasta que fue designada para su puesto especial de Lehrauftrag für Algebra (catedrática de álgebra) un año después.

Últimos años…

Últimos años…

Continuó siendo uno de los miembros más importantes del departamento de matemáticas de Gotinga hasta 1933.

En los siguientes años, el gobierno de Alemania expulsó a los profesores judíos de las universidades, y Noether tuvo que emigrar a Estados Unidos en 1933.

Últimos años…

Le ofrecieron un puesto en el Bryn Mawr College de Pensilvania, donde impartió clases durante dos años.

En 1935 sufrió una operación de quiste ovárico y, a pesar de los signos de recuperación, falleció cuatro días después, a la edad de 53 años.

Sobre su vida en general:

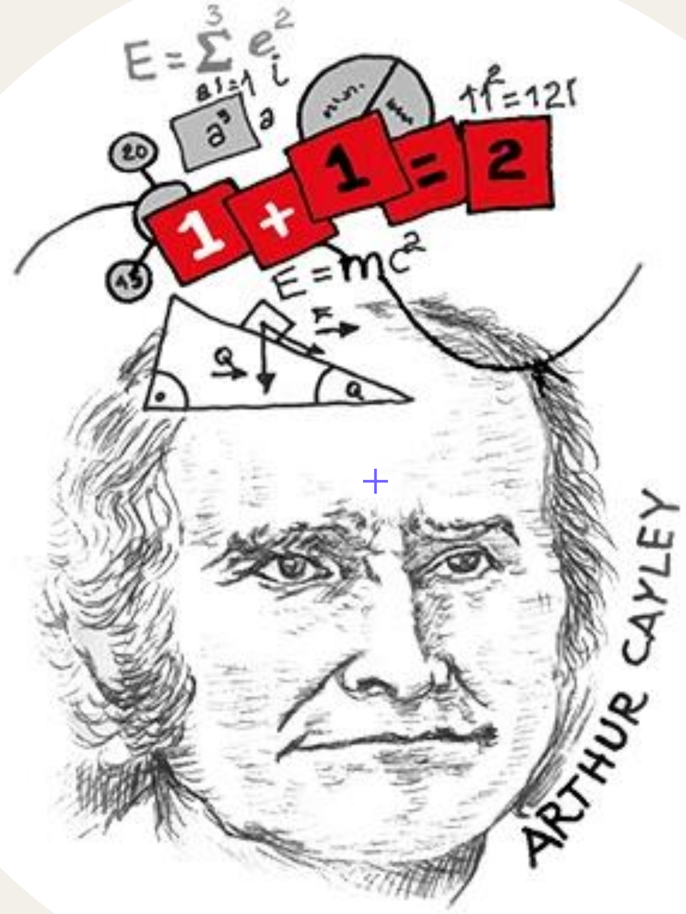
A pesar de vivir en una época difícil para las mujeres, mostró resiliencia y trabajo arduo hasta lograr ser reconocida y remunerada por su trabajo.

Se codeó con los mejores matemáticos de la época, quienes necesitaron su ayuda.

Como diría un viejo lobo de mar:

Ahora sí, aportaciones.

Álgebra Ábstracta



Álgebra Abstracta

Conocida como una de las madres del Álgebra Moderna.

Transformó el estudio de esta disciplina enfocándose en conceptos y estructuras abstractas.

Realizó aportaciones revolucionarias en las teorías de anillos, cuerpos y módulos.

Álgebra Abstracta

Teoría de anillos e ideales: Reformuló de manera completamente abstracta las estructuras algebraicas, separándolas de los cálculos numéricos tradicionales.

Anillos noetherianos: Introdujo la condición de cadena ascendente para ideales, lo que simplificó la resolución de problemas geométricos complejos. Un anillo matemático que cumple con esta propiedad de finitud lleva hoy su nombre en su honor.

¿Pero qué es un ideal?

Un ideal es una subestructura algebraica definida en la teoría de anillos.

Los ideales generalizan el estudio de la divisibilidad entre los números enteros hacia otros objetos matemáticos.

Subconjunto especial de un anillo que cumple con ser cerrado bajo la suma y que "absorbe" la multiplicación.

Noether y la Teoría de Galois.

- Noether propuso un método ingenioso para intentar resolver el Problema de Galois Inverso
- Busca determinar si cualquier grupo finito puede ser el grupo de Galois de alguna extensión sobre los números racionales Q.
- Posteriormente matemáticos como Richard Swan demostraron que el problema de Noether no siempre se cumple para todos los grupos.
- Su planteamiento inauguró toda una línea de investigación en la Geometría Algebraica y la Teoría de Cuerpos.

Teoría de Galois No Conmutativa

Noether expandió los límites de la teoría tradicional al introducir una teoría de Galois para anillos no conmutativos e hipercomplejos.

En lugar de limitarse a extensiones de cuerpos conmutativos, analizó los automorfismos de álgebras simples centrales.

Sentó los fundamentos teóricos del Teorema de Skolem-Noether, el cual establece que todos los automorfismos de un álgebra simple central son internos.

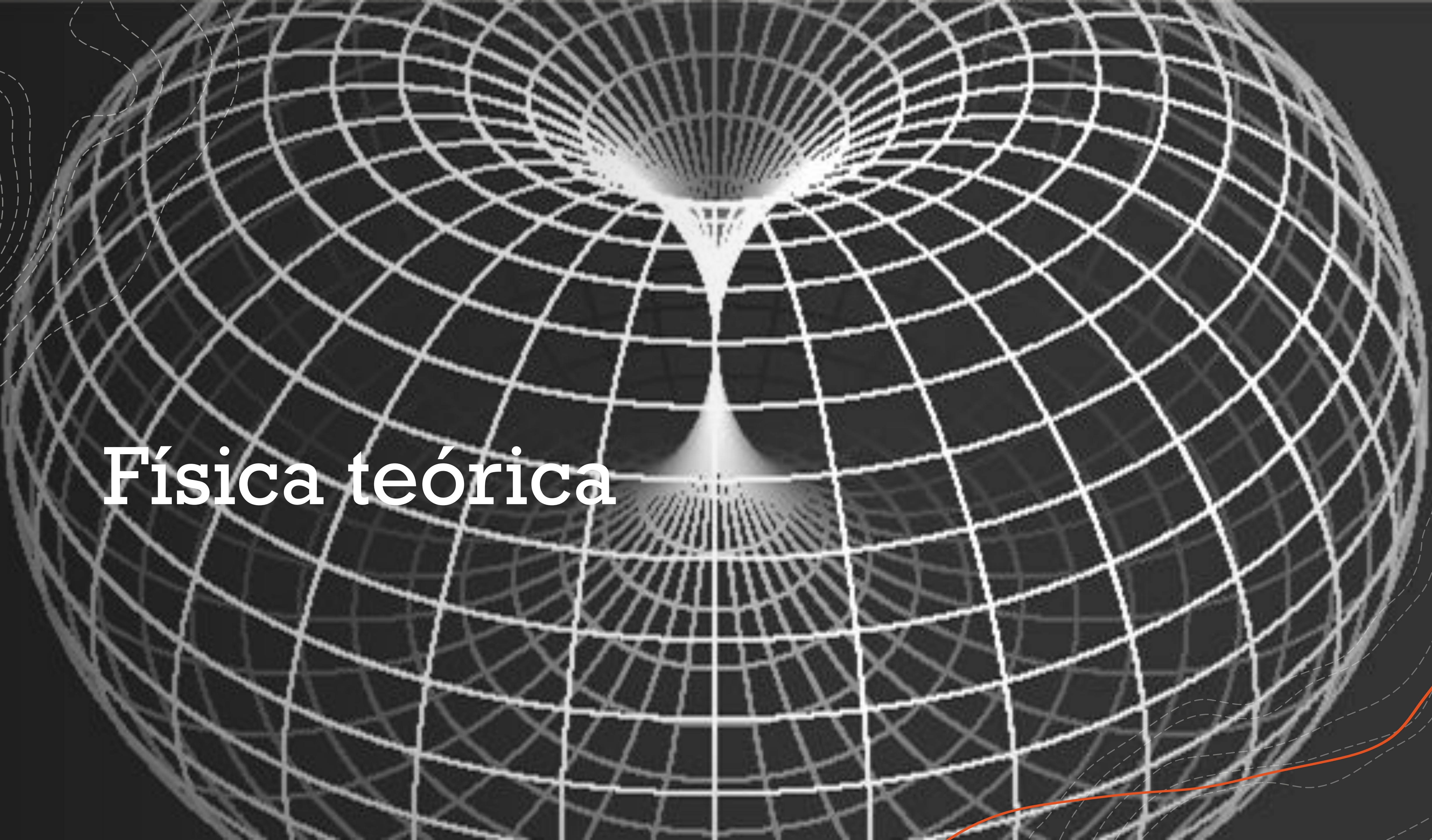
Redefinición Estructural de la Teoría de Galois

Antes de Noether, la teoría de Galois se explicaba mediante laboriosos cálculos algorítmicos aplicados a ecuaciones polinómicas.

Noether eliminó la necesidad de depender de un "elemento primitivo" o de variables explícitas, reformulando la teoría de manera axiomática y elegante.

Sustituyó el estudio de polinomios por el estudio directo de extensiones de cuerpos y sus grupos de automorfismos.

Física teórica



Física relativista

En 1915, Albert Einstein y David Hilbert se enfrentaban a una paradoja matemática en la recién nacida Teoría de la Relatividad General.

En campos gravitatorios intensos, la energía local parecía "desaparecer" o no conservarse de la forma tradicional.

Teoría de Relatividad General

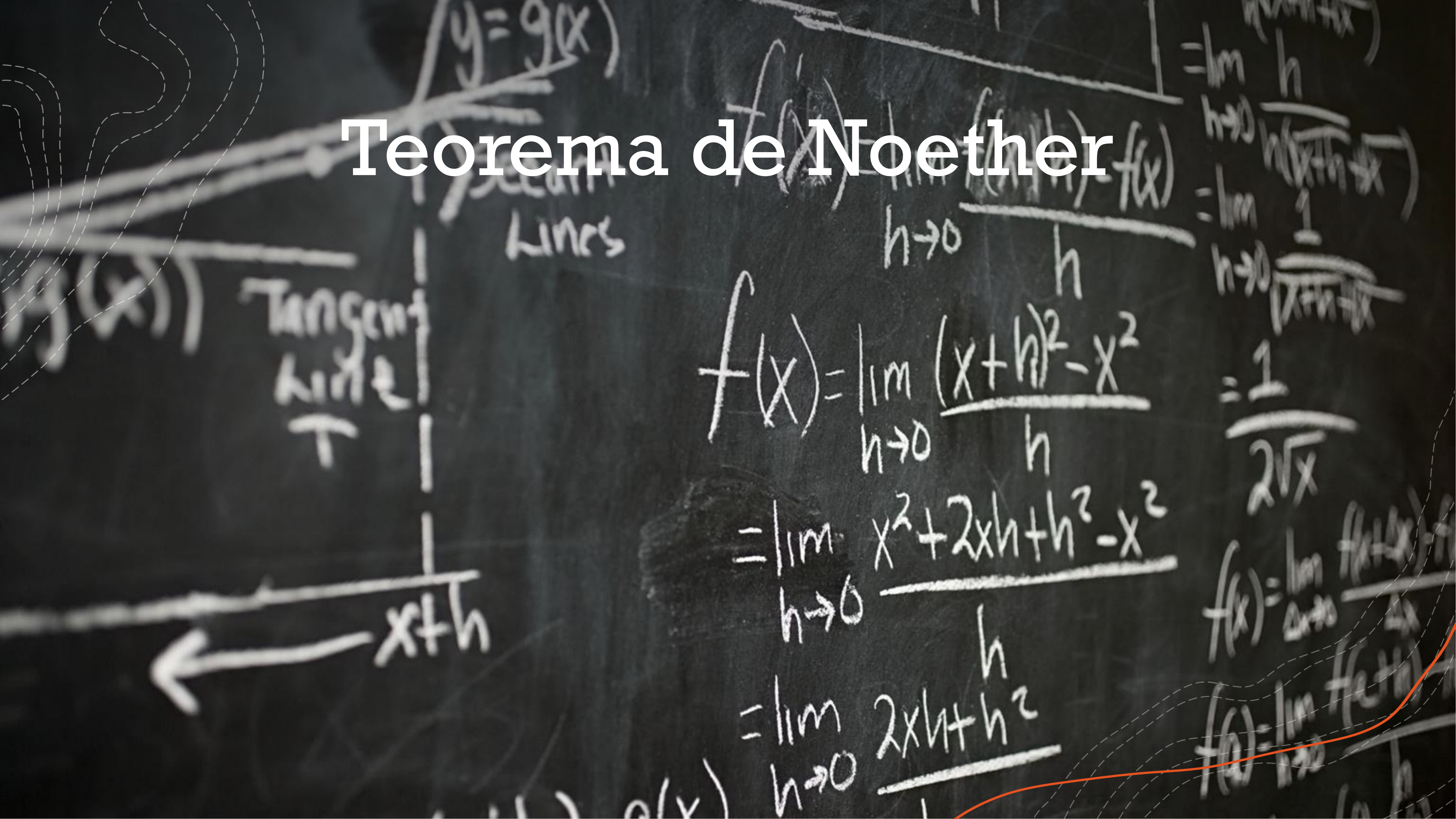
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Emmy Noether y la Relatividad

Hilbert invitó a Noether a Gotinga para resolver el problema. Ella demostró que en la relatividad general la energía se conserva de forma global, pero la conservación local toma una forma matemática diferente (un tensor cuya divergencia es cero) debido a que el espacio-tiempo es dinámico y curvo.

Tras ver la resolución matemática de Noether, Einstein escribió a Hilbert admirado por el "pensamiento matemático penetrante" de la científica.

Teorema de Noether



Teorema de Noether (1916)

Expresa que cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, tiene su correspondiente ley de conservación.

Relaciona un par de ideas básicas de la física: la invariancia de la forma que una ley física toma con respecto a cualquier transformación (generalizada) que preserve el sistema de coordenadas (aspectos espaciales y temporales tomados en consideración), y la ley de conservación de una magnitud física.

Esbozo de la prueba:

Para un sistema con un número finito de grados de libertad y usando la representación en coordenadas supóngase que se tiene un grupo uniparamétrico G que transforma las coordenadas o variables dinámicas, dejando el lagrangiano invariante, en ese caso:

$$\phi_g(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_\alpha(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Donde el grupo se ha parametrizado con el parámetro real $G=\{g_\alpha | \alpha \in A \subset \mathbb{R}\}$ entonces:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \alpha} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right)$$

Empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange, el primer término puede reescribirse:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Por tanto, la última cantidad en forma de sumatorio es una constante del movimiento ya que su derivada temporal es cero. Los otros casos del teorema de Noether en esencia repiten los mismos pasos, expresando la derivada de la acción del grupo y construyendo una función que involucra a los momentos conjugados y elementos de un espacio vectorial isomorfo al álgebra de Lie del grupo de simetría.

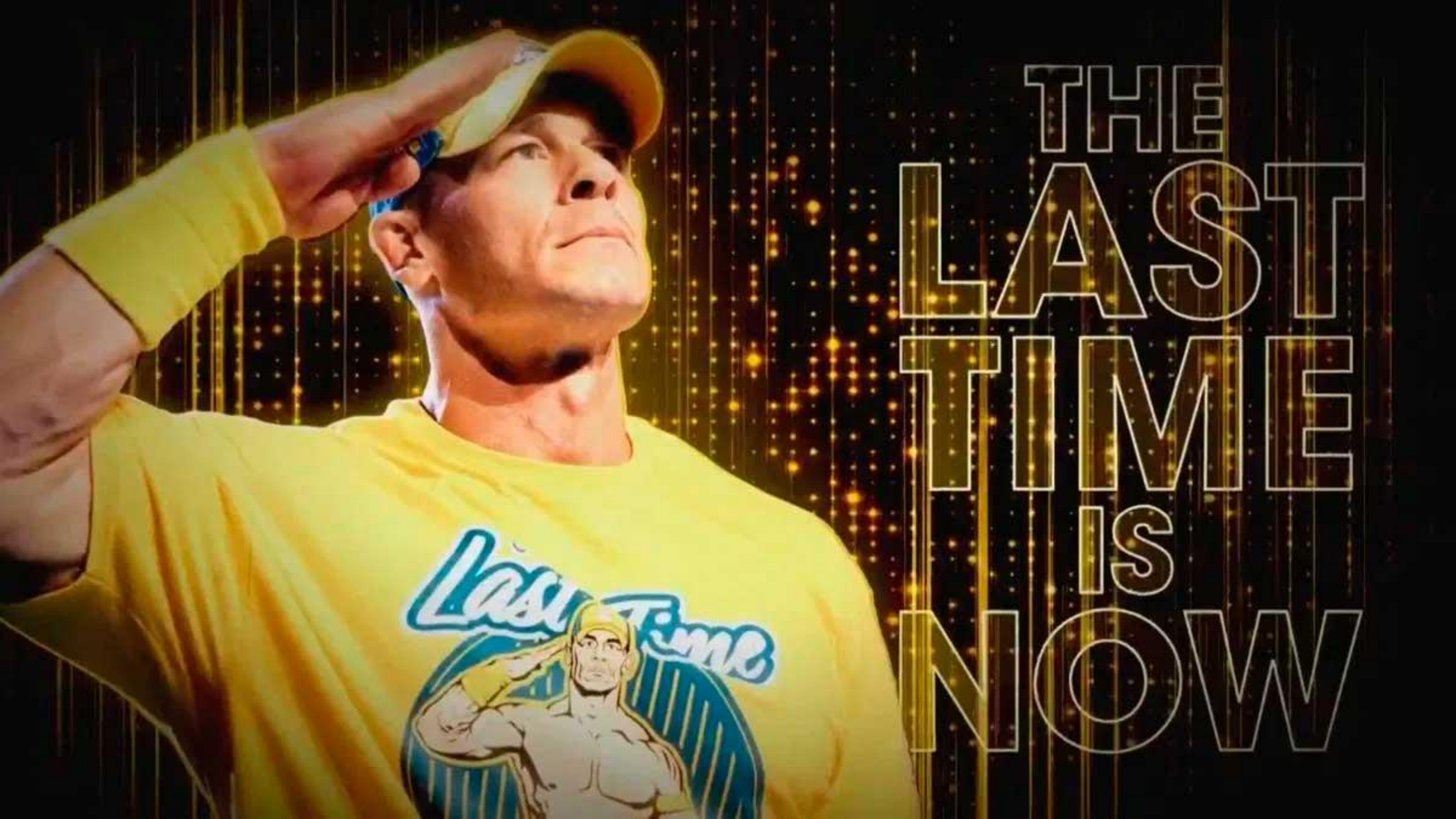
Teorema de Noether

El enunciado formal del teorema deriva una expresión para la magnitud física que se conserva (y, por lo tanto, también la define) de la condición de invariancia solamente. Por ejemplo:

La invariancia con respecto a la (dirección del eje de) rotación da la ley de conservación del **momento angular**.

La invariancia de sistemas físicos con respecto a la traslación (dicho simplemente, las leyes de la física no varían con la localización en el espacio) da la ley de conservación del **momento lineal**.

La invariancia con respecto a (la traslación en) el tiempo da la ley de **conservación de la energía**.


THE LAST TIME IS NOW
Last Time

Tengan un bonito cierre de semestre.