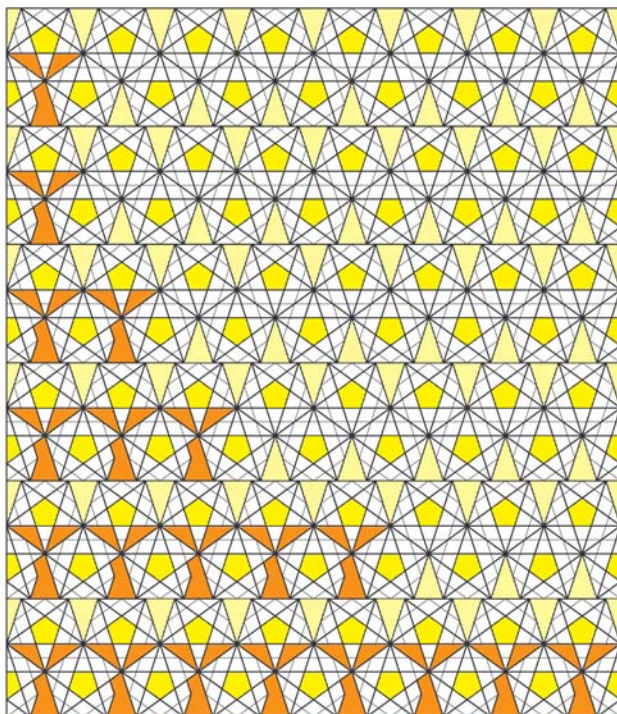


FIBONACCI

Y LOS PROBLEMAS DEL LIBER ABACI



Alberto Ugarte Fernández
Ilustraciones: Rosa Ugarte Fernández



FIBONACCI Y LOS PROBLEMAS DEL LIBER ABACI

© **Del texto, 2011 Alberto Ugarte Fernández**
© **De las ilustraciones, 2011 Rosa Ugarte Fernández**

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	Pág. 4
EL LIBER ABACI	Pág. 5
LOS PROBLEMAS DEL LIBER ABACI	Pág. 7
PROBLEMAS:	
1. Dos viajeros	Pág. 12
2. El león en el pozo	Pág. 14
3. Tres números que suman 10	Pág. 15
4. El león, el leopardo y el oso	Pág. 16
5. Dos barcos al encuentro	Pág. 17
6. Dos hombres con algunos denarios	Pág. 19
7. Dos hombres y un caballo en venta	Pág. 22
8. Un comerciante de Pisa	Pág. 24
9. Las manzanas del jardín	Pág. 26
10. La herencia	Pág. 29
11. Un múltiplo de 7	Pág. 30
12. Dos hombres que tienen 5 panes	Pág. 31
13. Las parejas de conejos	Pág. 32
14. Siete ancianos	Pág. 35
15. Dos pájaros volando hacia la fuente	Pág. 37

INTRODUCCIÓN

Hoy en día casi todo el mundo recuerda a Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, por la sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...

en la que cada término de la misma se halla sumando los dos precedentes. Esta sucesión aparece como solución de uno de los problemas que Fibonacci incluyó en su libro, el Liber Abaci:

Un hombre coloca una pareja de conejos de un mes de edad en un recinto cerrado para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y se supone que cada mes, a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva. ¿Cuántas parejas habrá al cabo de un año?

El Liber Abaci fue escrito por Fibonacci en 1202 en Pisa. Con este libro, Fibonacci pretendía mostrar a sus compatriotas las ventajas del sistema de numeración decimal indo-arábigo, que él había aprendido en sus viajes por el Este mediterráneo, con respecto a los números romanos que se usaban todavía en Europa.

El Liber Abaci contiene, además, una notable colección de problemas pertenecientes al ámbito de la matemática recreativa. La mayoría de ellos se encuentran en el capítulo 12, con más de 200 problemas.

En este libro se proponen una serie de problemas extraídos del Liber Abaci (principalmente de su capítulo 12) elegidos entre los que me han parecido más interesantes. En cada problema se presenta el enunciado con un lenguaje moderno (a veces se añaden a éste condiciones para encontrar una única solución; muchos problemas de Fibonacci son indeterminados). Después se presenta la solución redactada utilizando el lenguaje simbólico actual. En muchos problemas se incluye la solución dada por Fibonacci cuando su método de resolución resulta curioso e interesante.

Seguro que al lector muchos de los problemas le serán familiares ya que se han convertido en clásicos de la matemática recreativa.

EL LIBER ABACI

“Las nueve cifras hindúes son:

9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Con estas nueve cifras y con el 0 cualquier número puede ser escrito.”

Así comienza el Liber Abaci, la obra más conocida de Fibonacci cuya primera edición se publicó en 1202. En esta obra, Leonardo introduce las cifras indo-arábigas en Occidente y proporciona las reglas para realizar las operaciones elementales con ellas. En el prólogo del libro Leonardo declara que en sus viajes y estudios ha encontrado que el sistema de numeración hindú y sus métodos de cálculo son superiores a los que se emplean en Europa y que quiere divulgarlos entre sus compatriotas. Su intención era brindar a los comerciantes una herramienta de cálculo mucho más potente que el tradicional ábaco.

El Liber Abaci es una verdadera antología del saber matemático de la época, de notable importancia por la divulgación y la descripción que ofrece de la matemática y de la vida cotidiana. No es exagerado decir que las contribuciones de Fibonacci dieron un nuevo impulso a la matemática italiana y europea. Durante tres siglos aproximadamente sus trabajos sirvieron de modelo para los estudiosos de la época. Los posteriores desarrollos de la matemática en el siglo XVI hicieron que se olvidaran las obras de Leonardo. Con la publicación de las obras por parte de Boncompagni (1821-1894) sus obras revivieron de nuevo la admiración de los estudiosos.

El Liber Abaci se divide en quince capítulos:

- Capítulo 1: Lectura y escritura de los números en el sistema indo-arábigo.
- Capítulo 2: Multiplicación de números enteros.
- Capítulo 3: Suma de números enteros.
- Capítulo 4: Resta de números enteros.
- Capítulo 5: División de números enteros.
- Capítulo 6: Multiplicación de números enteros por fracciones.
- Capítulo 7: Fracciones.
- Capítulo 8: Precios de las mercancías.
- Capítulo 9: Trueque de mercancías y cosas similares.

- Capítulo 10: Compañías y sus miembros.
- Capítulo 11: Aleaciones de monedas.
- Capítulo 12: Problemas y soluciones.
- Capítulo 13: El método de la doble falsa posición.
- Capítulo 14: Raíces cuadradas y raíces cúbicas.
- Capítulo 15: Reglas geométricas y problemas de álgebra.

En el capítulo 1 Fibonacci explica el sistema decimal. En los siguientes capítulos describe con detalle los métodos para realizar las cuatro operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división). Después Fibonacci propone y resuelve problemas de diversa índole. En el capítulo 8 enseña a calcular, usando la proporción, el valor de diversas mercancías en diferentes ciudades que podían ser destino de viajes para comerciantes. También encontramos en este capítulo los nombres de unidades de medida de peso, capacidad y longitud y de las monedas en uso en las diferentes ciudades.

Fibonacci explica también como resolver este tipo de problemas usando la regla de tres (él lo llama método de la negociación). En el capítulo 9 haciendo también uso de la regla de tres propone diferentes problemas basados en el trueque de otros artículos. El décimo capítulo trata de las inversiones hechas por los miembros de ciertas compañías y los beneficios obtenidos por éstos.

El capítulo 11 contiene problemas sobre aleaciones de monedas de plata y cobre. Posteriormente en el mismo capítulo Fibonacci incluye otros problemas que se resuelven de manera análoga a los primeros. Hay a menudo soluciones múltiples ya que los problemas incluyen sistemas de ecuaciones lineales indeterminados.

El capítulo 12 propone problemas de diverso tipo pertenecientes al ámbito de la matemática recreativa. En el capítulo 13 Fibonacci resuelve problemas usando el método de la doble falsa posición.

En el capítulo 14 se encuentran problemas con raíces y en el 15 se proponen una serie de ejercicios geométricos.

LOS PROBLEMAS DEL LIBER ABACI

Todo el Liber Abaci está lleno de problemas de naturaleza dispar. El capítulo 12 ocupa aproximadamente una extensión de un tercio de todo el Liber Abaci y es el que contiene mayor número de problemas, entre los cuales se encuentra el problema de las parejas de conejos, por el cual Fibonacci es famoso.

La mayoría eran ya conocidos con anterioridad a Fibonacci; el sólo los copió de obras de otros autores.

Como muestra, otros ejemplos que nos sonarán familiares:

- *Un león se come una oveja en 4 horas, un leopardo en 5 y un oso tarda 6 horas. ¿Cuántas horas tardarán en devorarla los tres juntos?*
- *Siete ancianos van a Roma. Cada uno tiene 7 mulas, cada mula tiene 7 sacos, en cada saco hay 7 panes, en cada pan hay 7 cuchillos y cada cuchillo tiene 7 dientes. ¿Cuál es la suma de todo lo anteriormente nombrado?*

El capítulo 12 está dividido en 9 partes:

Parte 1: Suma de series de números, y otros problemas similares.

Parte 2: Sobre proporciones numéricas por la regla de las cuatro proporciones.

Parte 3: Problemas de árboles, y otros problemas similares que tienen solución.

Parte 4: Descubriendo bolsas.

Parte 5: Compra de caballos entre miembros de una sociedad, de acuerdo con proporciones dadas.

Parte 6: Sobre viajeros, y otros problemas parecidos a éstos.

Parte 7: Método de la falsa posición y variaciones de éste.

Parte 8: Algunos problemas de adivinación.

Parte 9: Duplicando cuadrados y otros problemas.

Los problemas del Liber Abaci están ligados a la vida cotidiana de la época y ofrecen información sobre las unidades de medida, de peso y monetarias que se usaban en la época así como de las prácticas de negocio y de comercio que se seguían en la época.

Los problemas de matemática recreativa Leonardo los resuelve por métodos ya conocidos en la época, tales como la regla de tres, la regla de tres compuesta y el método de la falsa posición.

Este método era una de las técnicas favoritas de Leonardo, que tomó prestada de los árabes. En dicho método se parte de una suposición falsa y se resuelve el problema con esta falsa suposición, corrigiendo posteriormente la solución haciendo uso de la proporción. Usó la falsa posición en todo tipo de problemas: cisternas que se llenan y se vacían con grifos y desagües a diferentes velocidades, hormigas y barcos que van al encuentro o se persiguen, problemas de árboles, de dinero o de edades.

Algunos problemas son resueltos también por el método directo de los árabes, es decir, usando ecuaciones. Los ejercicios no contienen símbolos matemáticos y Fibonacci llama a la magnitud desconocida “cosa” y describe el proceso paso a paso.

Otro método que tomó prestado de los árabes era resolver un problema de atrás hacia delante. Por ejemplo en el problema “*las manzanas del jardín*”:

- *Un hombre entra al jardín del placer a través de 7 puertas y coge allí un cierto número de manzanas. Para salir debe pagar a los guardianes de cada puerta. Al primer guardián le da la mitad de las manzanas que lleva más una. Al segundo guardián le da la mitad de las manzanas que le quedan más una. Hace lo mismo con los guardianes de cada una de las cinco puertas que le faltan. Cuando sale le queda una manzana. ¿Cuántas manzanas había tomado en un principio?*

Aquí Leonardo empieza calculando las manzanas que tiene antes de cruzar cada puerta pero empezando por la última hasta llegar a la primera.

Leonardo a menudo ofrece distintas variantes de un mismo problema y en otros problemas, ofrece diferentes métodos para solucionarlos. Por ejemplo, en el problema “*Dos pájaros volando hacia la fuente*” Leonardo lo resuelve, en el capítulo 13, por el método de la doble falsa posición, y por semejanza de triángulos en el capítulo 15.

Varios problemas del Liber Abaci los dedica a la suma de series tanto aritméticas como geométricas:

- *Dos hombres tienen la intención de hacer un largo viaje. Uno de ellos caminará 20 millas diarias. El otro hará 1 milla el primer día, 2 el segundo, 3 el tercero y así sucesivamente añadiendo siempre una milla a lo recorrido el día anterior. ¿Cuántos días tardará el segundo viajero en alcanzar al primero?*
- *¿Cuánto vale la suma de la sucesión de potencias de dos (desde 2^0 hasta 2^{63}) escritas en un tablero de ajedrez?*

Otro tipo de problemas, inventados por los chinos y adoptados posteriormente por hindúes y árabes, eran los problemas del resto:

- *¿Cuál es el número más pequeño que dividido entre 2, 3, 4, 5 ó 6 da de resto 1 y es exactamente divisible por 7?*

La contribución de Leonardo a las matemáticas, más allá de la introducción del sistema numérico indo-arábigo, fue en el área de la teoría de números. Los logros más importantes de Leonardo en la teoría de números fueron en el análisis diofántico. El álgebra diofántica trata sistemas de ecuaciones indeterminados con dos o más incógnitas, para los cuales se requieren soluciones enteras. Muchos problemas de Fibonacci son indeterminados. En ellos Fibonacci suele proponer la solución entera más pequeña aunque en el enunciado no venga especificada explícitamente dicha condición.

Finalmente es oportuno añadir algunas observaciones sobre la escritura de fracciones por parte de Fibonacci:

El autor no usa fracciones decimales (sino ocasionalmente).

Las fracciones son siempre menores que la unidad (nuestras fracciones propias).

La mayor parte de las fracciones incluidas en los enunciados de las fracciones son fracciones unitarias (fracciones con numerador uno) mientras que las fracciones incluidas en las soluciones no tienen esta limitación.

En la época de Fibonacci no se habían inventado los signos y la sucesión de dos fracciones indicaba su suma (por ejemplo $1/4$ $1/3$ equivale a lo que hoy indicamos como $1/4 + 1/3$). Cabe recordar

que el primer libro donde se utilizan los símbolos + y – se publica al inicio del siglo XVI.

Más compleja es otra notación usada por Fibonacci $\frac{6}{7} \frac{1}{11} 31$ indica $31 + \frac{1}{11} + \frac{6}{7 \cdot 11}$, es decir, $31 + \frac{1}{11} + \frac{6}{77}$. Es posible que este método de escritura de las fracciones de izquierda a derecha Fibonacci lo haya heredado de los árabes.

PROBLEMAS

1. DOS VIAJEROS

Dos hombres tienen la intención de hacer un largo viaje. Uno de ellos caminará 20 millas diarias. El otro hará una milla el primer día, 2 el segundo, 3 el tercero y así sucesivamente añadiendo siempre una milla a lo recorrido el día anterior. ¿Cuántos días tardará el segundo viajero en alcanzar al primero?

Solución:

Si llamamos x al número de días que tarda en alcanzar un viajero al otro, entonces el primer viajero recorrerá $20x$ millas, mientras que el segundo recorrerá $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x$ millas.

Calculemos ahora el valor de esta suma.

Llamamos S a la suma anterior, es decir; $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x$. Escribimos ahora la suma con los sumandos a la inversa, es decir, de mayor a menor; $S = x + x-1 + x-2 + \dots + 3 + 2 + 1$. Sumando ambas expresiones, término a término, obtenemos:

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + \dots + x-2 + x-1 + x \\ S = x + x-1 + x-2 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$2S = x+1 + x+1 + x+1 + \dots + x+1 + x+1 =$$

$$2S = x \cdot (x+1)$$

$$\text{Por tanto } S = \frac{x \cdot (x+1)}{2}$$

Igualando ahora las distancias recorridas por ambos viajeros, obtenemos la ecuación:

$$20x = \frac{x \cdot (x+1)}{2},$$

cuyas soluciones son $x = 0$ (que corresponde al momento inicial de partida) y $x = 39$ (que es la solución de nuestro problema).



2. EL LEÓN EN EL POZO

Un león se encuentra en un pozo de 50 palmos de profundidad. Diariamente asciende $\frac{1}{7}$ de palmo y desciende $\frac{1}{9}$. ¿Cuántos días tarda en salir del pozo?

Solución:

Según Fibonacci el león asciende $\frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{63}$ de palmo. Así, en 63 días ascenderá 2 palmos. Por tanto, en 1575 días ($63 \cdot 25 = 1575$) ascenderá 50 palmos ($25 \cdot 2$).

En realidad la solución propuesta por Fibonacci no es correcta si tenemos en cuenta que el león primero asciende diariamente $\frac{1}{7}$

de palmo y luego cae $\frac{1}{9}$. Analicemos lo que ocurre unos días antes del día 1575:

El día 1571 el león se encuentra a una altura de $\frac{2}{63} \cdot 1571 = 49,873$ palmos.

Al día siguiente el león asciende $\frac{1}{7}$, es decir algo más de 0,142 palmos, con lo cual supera ya los 50 palmos de altura del pozo. Es decir, el león tarda en salir del pozo 1572 días.

3. TRES NÚMEROS QUE SUMAN 10

Halla tres números que sumen 10 de manera que el producto del mayor por el menor número sea igual al producto del otro número por sí mismo.

Solución:

Con los datos del problema podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x \cdot z = y^2 \end{cases}$$

El problema es indeterminado, es decir, admite infinitas soluciones. Hallemos una siguiendo el método usado por Fibonacci. Supongamos que el número menor sea 1 y el intermedio 2. Entonces el mayor sería 4 ya que $1 \times 4 = 2 \times 2$. Pero la suma de estos tres números es 7 y no 10 como se pedía. Obtendremos una solución válida si multiplicamos estos tres números por 10 y los dividimos entre 7. Es decir:

$$\text{Primer número: } 1 \cdot \frac{10}{7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$$

$$\text{Segundo número: } 2 \cdot \frac{10}{7} = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$$

$$\text{Tercer número: } 4 \cdot \frac{10}{7} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$$

Podemos comprobar que:

$$\begin{cases} \frac{10}{7} + \frac{20}{7} + \frac{40}{7} = \frac{70}{7} = 10 \\ \frac{10}{7} \cdot \frac{40}{7} = \left(\frac{20}{7}\right)^2 \end{cases}$$

4. EL LEÓN, EL LEOPARDO Y EL OSO

Un león se come una oveja en 4 horas, un leopardo en 5 y un oso tarda 6 horas. ¿Cuántas horas tardarán en devorarla los tres juntos?

Solución:

En una hora el león se come $\frac{1}{4}$ de la oveja, el leopardo $\frac{1}{5}$ y el oso $\frac{1}{6}$. Por tanto, los tres juntos se comerán $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}$ de la oveja en una hora, y así, en comerse la oveja entera los tres juntos tardarán $\frac{60}{37}$ horas, es decir, 1 h 37' 18" aproximando a segundos.

Fibonacci resuelve este problema calculando el mínimo común múltiplo de 4, 5 y 6 que es 60 y considerando que si un león se come una oveja en 4 horas, en 60 horas se come 15. Asimismo, en esas 60 horas un leopardo se come 12 y un oso 10 ovejas. Por tanto, entre los tres se comerían $15 + 12 + 10 = 37$ ovejas en 60 horas. Como queremos saber el tiempo que tardan en devorar una única oveja dividimos 60 entre 37.

Solución: $\frac{60}{37}$ horas ($1\frac{23}{37}$ horas)

5. DOS BARCOS AL ENCUENTRO

Dos barcos se encuentran en diferentes puertos. Uno de ellos recorre la distancia que separa ambos puertos en 5 días y el otro, siguiendo el mismo trayecto, en 7. Si salen a la vez, ¿cuántos días tardarán en cruzarse?

Solución:

Si el primer barco tarda en realizar el trayecto entero 5 días, entonces en un día recorre $\frac{1}{5}$ del trayecto. Y por tanto, el segundo barco recorre $\frac{1}{7}$. Entre los dos barcos recorren $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$ del total del trayecto. Así, tardarán en cruzarse $\frac{35}{12}$ de día, es decir, 2 días y 22 horas.

Fibonacci resuelve este problema de la siguiente manera:

Si un barco tarda 5 días y el otro 7, en 35 días (mínimo común múltiplo de 5 y 7), un barco realiza 7 trayectos y el otro 5. Es decir, entre los dos barcos realizan 12 trayectos en 35 días. Por tanto, en realizar un trayecto tardarán $\frac{35}{12}$ de día. Además, si quieres saber donde se encuentran, el primer barco habrá recorrido $\frac{7}{12}$ del trayecto y el segundo, el más lento, $\frac{5}{12}$.



6. DOS HOMBRES CON ALGUNOS DENARIOS

Dos hombres tienen algunos denarios, y uno le dice al otro: "Si me dieras 7 denarios entonces tendría cinco veces más denarios que tú". El otro responde: "Si me dieras 5 de los tuyos yo tendría siete veces los tuyos". ¿Cuántos denarios tienen cada uno?

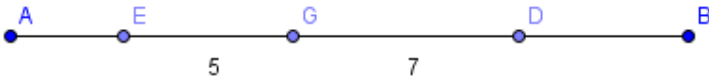
Solución:

Sean x los denarios del primer hombre e y los del segundo.
Entonces:

$$\begin{cases} x + 7 = 5(y - 7) \\ y + 5 = 7(x - 5) \end{cases}$$

siendo la solución;
$$\begin{cases} x = 7\frac{2}{17} \\ y = 9\frac{14}{17} \end{cases}$$

Fibonacci resuelve el problema con lo que él llama segundo método del árbol. Hace una representación gráfica donde cada cantidad de denarios viene representada por un segmento:



Así:

AG: es la cantidad de denarios del primer hombre.

GB: es la cantidad de denarios del segundo hombre.

GD: 7 denarios.

EG: 5 denarios.

AB: cantidad total (o árbol).

Una vez hecho el planteamiento gráfico Fibonacci razona de la siguiente manera:

Como de acuerdo al enunciado $AD = 5DB$, entonces $DB = \frac{1}{6} AB$.

De la misma manera $EB = 7AE$ entonces $AE = \frac{1}{8} AB$.

Sumando ambas cantidades obtenemos:

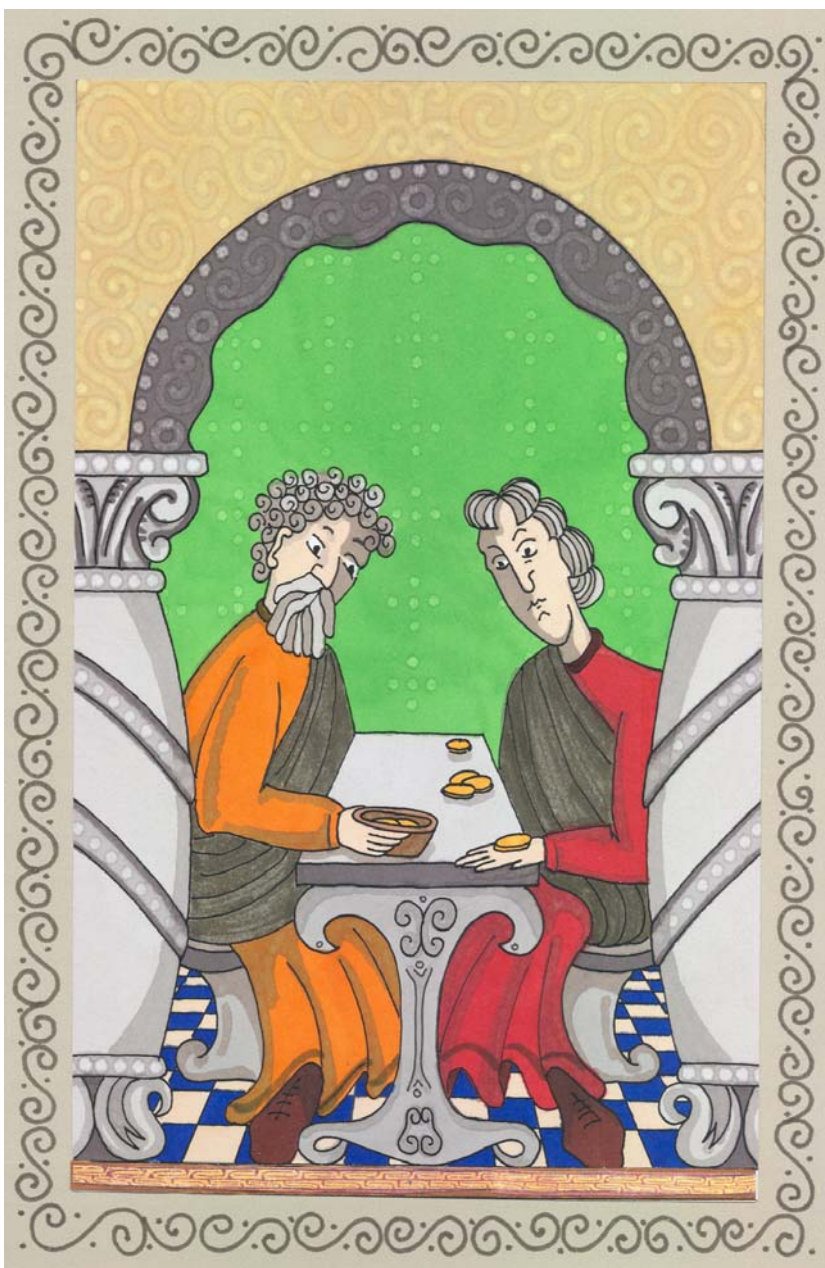
$$DB + AE = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) AB = \frac{7}{24} AB.$$

Supongamos ahora que AB sea 24. Entonces, $DB = 4$ y $AE = 3$ y, por tanto, $ED = 24 - 3 - 4 = 17$. Pero como $ED = 12$ multiplicamos la solución anterior por 12 y la dividimos entre 17.

$$\text{Así } AB = \frac{24 \cdot 12}{17}, \quad DB = \frac{24 \cdot 12}{17 \cdot 6} = \frac{48}{17} \text{ y } AE = \frac{24 \cdot 12}{17 \cdot 8} = \frac{36}{17}.$$

Sumando 5 a $\frac{36}{17}$ obtenemos que el primer hombre tiene $7\frac{1}{17}$.

Sumando 7 a $\frac{48}{17}$ obtenemos que el otro hombre tiene $9\frac{14}{17}$.



7. DOS HOMBRES Y UN CABALLO EN VENTA

Dos hombres desean comprar un caballo pero ninguno de ellos posee suficiente dinero para hacerlo. El primero dice al segundo: "Si me das $\frac{1}{3}$ de tus besantes entonces puedo comprar el caballo". El segundo responde: "Si me das $\frac{1}{4}$ de tus besantes yo también tendré besantes suficientes para comprar el caballo". ¿Cuál es el precio del caballo y cuántos besantes posee cada uno de los dos hombres?

Solución:

Sean x los besantes del primer hombre, y los del segundo y C el precio del caballo. Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = C \\ y + \frac{1}{4}x = C \end{cases}$$

Despejando $\begin{cases} x = \frac{8}{11}C \\ y = \frac{9}{11}C \end{cases}$, cuya solución entera más pequeña es $x =$

8, $y = 9$, $C = 11$ (que es la dada por Fibonacci).



8. UN COMERCIANTE DE PISA

Un hombre llegado a Lucca por negocios consiguió el doble del dinero traído y allí gastó 12 denarios. De Lucca se dirigió a Florencia donde dobló de nuevo el dinero traído y gastó 12 denarios. De Florencia regresó a Pisa donde nuevamente consiguió doblar el dinero que traía y gastó 12 denarios, no quedándole nada de dinero después. ¿Cuánto denarios tenía el hombre al inicio de este viaje?

Solución:

Sea x el número de denarios que poseía el hombre a su llegada a Lucca.

Cuando sale de Lucca tiene $2x-12$.

A su salida de Florencia tiene $2(2x-12)-12 = 4x-36$.

En Pisa tiene:

$$2(4x-36)-12 = 0 \Rightarrow 8x-84 = 0 \Rightarrow x = \frac{84}{8} = 10,5.$$

Por tanto la solución es 10,5 denarios.

Otro método es calcular cuántos denarios tenía antes de llegar a cada ciudad empezando por el final.

Antes de llegar a Pisa tenía 6 ($(2 \cdot 6 - 12 = 0)$).

Antes de llegar a Florencia tenía 9 ($(2 \cdot 9 - 12 = 6)$)

Antes de llegar a Lucca tenía 10,5 ($(2 \cdot 10,5 - 12 = 9)$)

Fibonacci resuelve este problema en el capítulo 13 del Liber Abaci usando el método de la doble falsa posición:

Supongamos que el hombre llega a Lucca con 12 denarios.

Cuando sale de Lucca tiene $2 \cdot 12 - 12 = 12$ denarios. Cuando sale

de Florencia tiene $2 \cdot 12 - 12 = 12$ denarios y en Pisa tiene 12.

Fibonacci hace ahora una segunda hipótesis:

Supongamos que el hombre llega a Lucca con 11 denarios.

Cuando sale de Lucca tiene $2 \cdot 11 - 12 = 10$ denarios. Cuando sale

de Florencia tiene $2 \cdot 10 - 12 = 8$ denarios y en Pisa tiene

$2 \cdot 8 - 12 = 4$ denarios. Y razona:

Si disminuyendo un denario la cantidad inicial que posee el hombre la cantidad final ha disminuido 8 denarios, para que la cantidad final disminuya 4 denarios más, la cantidad inicial debe

disminuir $\frac{1}{2}$ denario. Con lo cual $11 - \frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$ denarios.



9. LAS MANZANAS DEL JARDÍN

Un hombre entra al jardín del placer a través de 7 puertas y coge allí un cierto número de manzanas. Para salir debe pagar a los guardianes de cada puerta. Al primer guardián le da la mitad de las manzanas que lleva más una. Al segundo guardián le da la mitad de las manzanas que le quedan más una. Hace lo mismo con los guardianes de cada una de las cinco puertas que le faltan. Cuando sale le queda una manzana. ¿Cuántas manzanas había tomado en un principio?

Solución:

Averigüemos cuántas manzanas tenía el hombre antes de cruzar cada puerta, pero empezando desde la última puerta hasta llegar a la primera:

Al final tiene 1 manzana.

Antes de la última puerta tiene $(1 + 1) \cdot 2 = 4$ manzanas.

Antes de la sexta puerta tiene $(4 + 1) \cdot 2 = 10$ manzanas.

Antes de la quinta puerta tiene $(10 + 1) \cdot 2 = 22$ manzanas.

Antes de la cuarta puerta tiene $(22 + 1) \cdot 2 = 46$ manzanas.

Antes de la tercera puerta tiene $(46 + 1) \cdot 2 = 94$ manzanas.

Antes de la segunda puerta tiene $(94 + 1) \cdot 2 = 190$ manzanas.

Antes de la primera puerta tiene $(190 + 1) \cdot 2 = 382$ manzanas.

Por tanto el hombre había tomado 382 manzanas en el jardín.

El problema también se puede resolver mediante el uso de ecuaciones pero el proceso resulta más largo y complicado. Llamamos x al número de manzanas que coge el hombre y vamos calculando cuántas manzanas tiene el hombre antes de cruzar cada puerta.

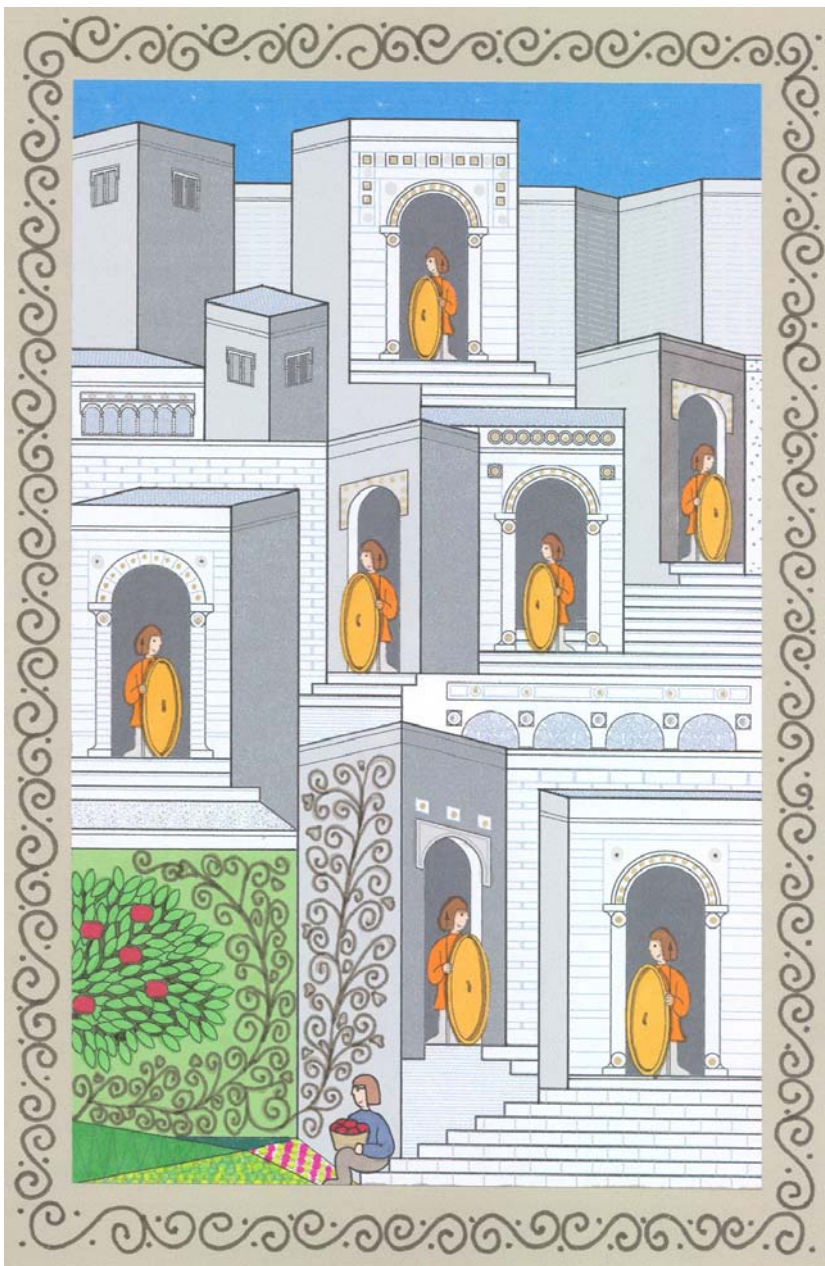
	Número de manzanas antes de cruzar la puerta	Número de manzanas que da al portero
Puerta 1	x	$\frac{x}{2} + 1$
Puerta 2	$x - \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{x-2}{2}$	$\frac{x-2}{4} + 1$
Puerta 3	$\frac{x-2}{2} - \left(\frac{x-2}{4} + 1\right) = \frac{x-6}{4}$	$\frac{x-6}{8} + 1$
Puerta 4	$\frac{x-6}{4} - \left(\frac{x-6}{8} + 1\right) = \frac{x-14}{8}$	$\frac{x-14}{16} + 1$
Puerta 5	$\frac{x-14}{8} - \left(\frac{x-6}{16} + 1\right) = \frac{x-30}{16}$	$\frac{x-30}{32} + 1$
Puerta 6	$\frac{x-30}{16} - \left(\frac{x-30}{32} + 1\right) = \frac{x-62}{32}$	$\frac{x-62}{64} + 1$
Puerta 7	$\frac{x-62}{32} - \left(\frac{x-62}{64} + 1\right) = \frac{x-126}{64}$	$\frac{x-126}{128} + 1$

Así después de cruzar la última puerta el hombre tendrá:

$$\frac{x-126}{64} - \left(\frac{x-126}{128} + 1\right) = \frac{x-254}{128} \text{ manzanas}$$

Como solo le queda una manzana:

$$\frac{x-254}{128} = 1, \text{ de donde } x = 382 \text{ manzanas.}$$



10. LA HERENCIA

Un hombre, aproximándose al final de su vida, llamó a su hijo mayor y le dijo: "Mis bienes serán repartidos del siguiente modo: tú obtendrás un besante y $\frac{1}{7}$ de los restantes besantes". Al segundo hijo le dijo: "A ti te corresponden 2 besantes y $\frac{1}{7}$ de los restantes". Al tercer hijo le dijo que le correspondían 3 besantes y $\frac{1}{7}$ de los restantes. Así les dijo a todos sus hijos en orden decreciente de edad, dando a cada uno un besante más que al anterior y $\frac{1}{7}$ de los que quedaban. Al último hijo le tocó lo que quedaba después del reparto. Al finalizar el reparto, los hijos se dieron cuenta que todos habían recibido los mismos besantes. ¿Cuántos hijos tenía dicho hombre y cuántos besantes recibió cada uno?

Solución:

Sea x el número total de besantes a repartir.

Al primer hijo le tocan $1 + \frac{1}{7}(x - 1) = \frac{x + 6}{7}$.

Ahora quedan para repartir $x - \frac{x + 6}{7} = \frac{6(x - 1)}{7}$

Al segundo hijo le tocan $2 + \frac{1}{7}\left(\frac{6(x - 1)}{7} - 2\right) = \frac{6x + 78}{49}$

Como a cada hijo les toca lo mismo, entonces:

$\frac{x + 6}{7} = \frac{6x + 78}{49}$, cuya solución es $x = 36$.

Sustituyendo x en la primera expresión: $\frac{36 + 6}{7} = 6$. A cada hijo le corresponden 6 besantes y por tanto, hay 6 hijos ($\frac{36}{6} = 6$).

11. UN MÚLTIPLO DE 7

¿Cuál es el número más pequeño que dividido entre 2, 3, 4, 5 ó 6 da de resto 1 y es exactamente divisible por 7?

Solución:

Calculamos el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6 que es 60. Si le sumamos 1 obtenemos 61 que dividido por 2, 3, 4, 5 y 6 da de resto 1. Pero 61 no es exactamente divisible por 7. Así que sumamos 1 a los sucesivos múltiplos de 60 (121, 181, 241, 301...) hasta obtener un número que sea múltiplo de 7. Dicho número es el 301.

12. DOS HOMBRES QUE TIENEN 5 PANES

Dos hombres van de paseo hasta una fuente. Allí se disponen a almorzar. Uno de los hombres tiene 3 panes y el otro 2. Ven a un soldado y le invitan a unirse a ellos. Todos comen el mismo pan y el soldado, al marchar, les entrega 5 besantes por el pan recibido. ¿Cómo deben repartirse los besantes los dos hombres?

Solución:

Como tienen 5 panes a repartir entre 3 personas cada uno come $\frac{5}{3}$ de pan.

El primer hombre tiene 3 panes, por tanto da al soldado:

$3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ de pan, es decir un pan y $\frac{1}{3}$ de otro.

El otro hombre, que tiene 2 panes, da al soldado:

$2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ de pan.

Como el primer hombre da al soldado el cuádruple de pan que el segundo, debe recibir el cuádruple de besantes. Así, el primer hombre debe recibir 4 besantes y el segundo 1.

13. LAS PAREJAS DE CONEJOS

Un hombre coloca una pareja de conejos de un mes de edad en un recinto cerrado para ver cuántos descendientes producen en el curso de un año, y se supone que cada mes, a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva. ¿Cuántas parejas habrá al cabo de un año?

Solución:

Como la primera pareja se reproduce en el primer mes, al cabo de un mes hay 2 parejas. Una de éstas, la primera, se reproduce en el segundo mes, y así al cabo de dos meses hay 3 parejas. De éstas, dos parejas se reproducen ese mes y así, al cabo de tres meses hay 5 parejas (3+2). De estas cinco parejas, en el siguiente mes se reproducen 3, por tanto al cabo de cuatro meses hay 8 parejas (5+3). Siguiendo este razonamiento Fibonacci concluye que para hallar las parejas de conejos que hay al final de cada mes basta sumar las parejas de conejos de los dos meses precedentes.

Es fácil seguir el planteamiento utilizado por Fibonacci para resolver el problema si usamos una tabla:

Mes	Parejas fértiles	Parejas no fértiles	Total
0	1	0	1
1	1	1	2
2	2	1	3
3	3	2	5
4	5	3	8
5	8	5	13
6	13	8	21
7	21	13	34
8	34	21	55
9	55	34	89
10	89	55	144
11	144	89	233
12	233	144	377

Por lo que el número de parejas de conejos que habrá al cabo de un año serán 377.

NOTA:

Hoy en día se recuerda sobre todo a Fibonacci por la sucesión:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... en la que cada término de la misma se halla sumando los dos precedentes. La sucesión aparece en muy distintas áreas de la ciencia. Sin embargo, no hay constancia de que Fibonacci estudiara posteriormente esta sucesión. Además, en la resolución del problema, Fibonacci omite el primer término de la sucesión.



14. SIETE ANCIANOS

Siete ancianos van a Roma. Cada uno tiene 7 mulas, cada mula tiene 7 sacos, en cada saco hay 7 panes, en cada pan hay 7 cuchillos y cada cuchillo tiene 7 dientes. ¿Cuál es la suma de todo lo anteriormente nombrado?

NOTA:

Este es uno de los problemas más antiguos de matemática recreativa. La primera versión del problema se encuentra en el Papiro Rhind del antiguo Egipto (año 1650 a.C. aproximadamente). También es famoso el acertijo “As I was going to St. Ives” basado en este problema y escrito en rima en inglés.

Solución:

Hay que calcular la suma de las potencias de 7 desde 7^1 hasta 7^6 . Fibonacci presenta la solución de la siguiente manera:

137256

7

49

343

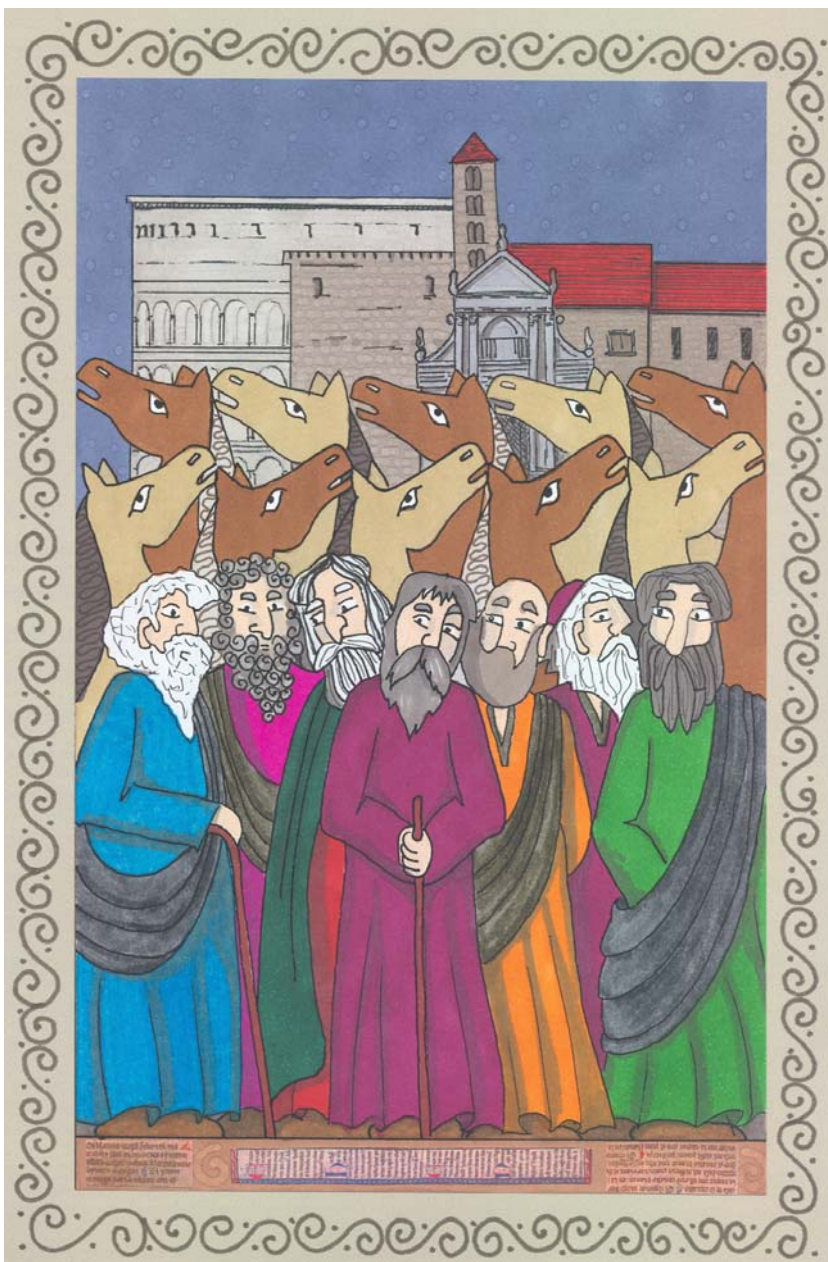
2401

16807

117649

suma

137256

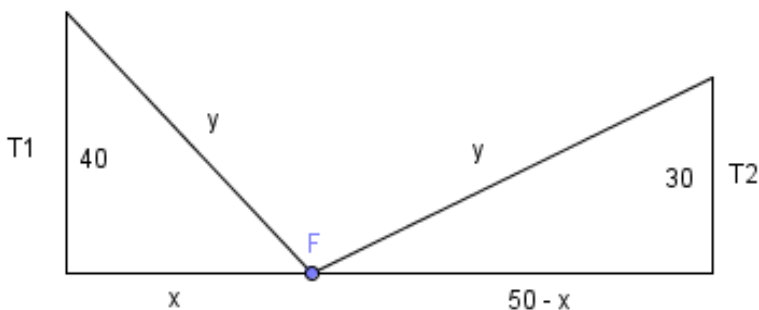


15. DOS PÁJAROS VOLANDO HACIA LA FUENTE

Dos torres, una de 30 pasos y otra de 40 pasos están separadas 50 pasos. Entre las dos torres se encuentra una fuente hacia la que descienden dos pájaros que están en las almenas de las torres. Yendo a igual velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de las torres se encuentra la fuente?

Solución:

Dibujamos el gráfico del enunciado:



Los dos pájaros van a la misma velocidad y llegan al mismo tiempo, eso quiere decir que recorren la misma distancia (y). Llamando x a la distancia de la torre más alta a la fuente y aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos:

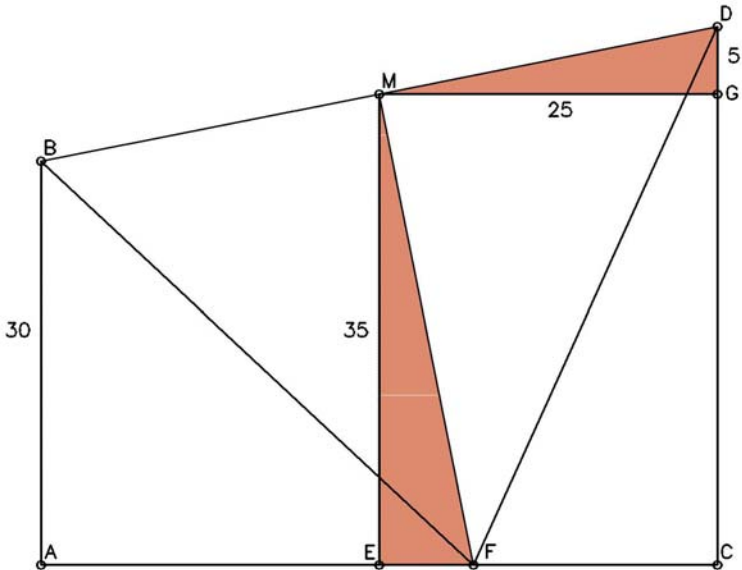
$$\begin{cases} y^2 = 40^2 + x^2 \\ y^2 = 30^2 + (50 - x)^2 \end{cases}$$

Igualando ambas expresiones obtenemos la ecuación:

$$40^2 + x^2 = 30^2 + (50 - x)^2, \text{ cuya solución es } x = 18.$$

Por tanto, la fuente se encuentra a 18 pasos de la torre más alta y a 32 de la otra.

Fibonacci, en cambio, para resolver este problema emplea un interesante método geométrico:



Si los dos pájaros van a la misma velocidad y llegan al mismo tiempo, eso quiere decir que recorren la misma distancia y que, por lo tanto, los segmentos BF y DF son iguales. Entonces, el triángulo BFD es isósceles y el punto M está a igual distancia de B que de D, lo que quiere decir también que el segmento EM mide 35 pies y los segmentos AE y MG miden 25. Como EM mide 35 pies GD mide 5.

Ahora podemos aplicar semejanza a los triángulos EFM y MGD y así calculamos el segmento EF:

$$\frac{35}{EF} = \frac{25}{5}$$

Por tanto $EF = 7$, la distancia de la fuente a la torre más baja es $25 + 7 = 32$ pasos y la distancia a la otra torre es 18 pasos.

