Colección Compendios Académicos

Física

José Mateo Torres
Victor Canchos López

Lumbreras
Editores

Índice

Magnitudes y análisis vectorial

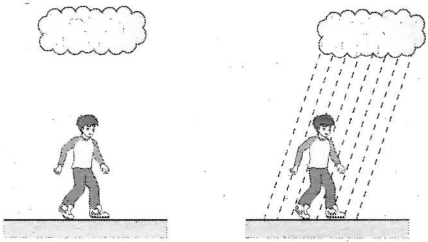
Capítulo I

OBJETIVOS
- Conocer e identificar a las magnitudes escalares y vectoriales.
- Representar geométricamente a una magnitud vectorial.
- Entender y aplicar las operaciones básicas que se realizan con vectores.

La física es una ciencia de la naturaleza que se encarga del estudio de los fenómenos físicos que ocurren en nuestro entorno.

FENÓMENO

Es todo cambio que ocurre a nuestro alrededor. Por ejemplo: Si nos encontramos en un día nublado y de pronto se inicia una llovizna, entonces se produce un cambio, es decir, un fenómeno.

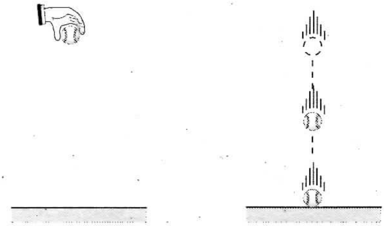


día nublado — se inicia la llovizna, se produce el fenómeno

FENÓMENO FÍSICO

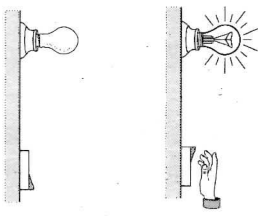
Es aquel cambio que se produce en nuestro entorno donde la sustancia que interviene no cambia su composición molecular. Son ejemplos de un fenómeno físico los siguientes casos:

- La caída de un cuerpo



se suelta el cuerpo — el cuerpo desciende

- El encendido de un foco



foco apagado — foco encendido

En ambos casos se produce un cambio pero los cuerpos que lo experimentan no varían su composición molecular.

NOTA

En nuestro entorno también se producen fenómenos en los que la sustancia que interviene cambia su composición molecular, a estos se les denomina fenómenos químicos.

Magnitud

Cuando se estudia un fenómeno, una de sus etapas fundamentales es la experimentación y dentro de esta es necesario realizar mediciones de las diversas características del fenómeno. Para realizar estas mediciones introducimos las magnitudes.

¿Qué es una magnitud?

Es todo aquello que puede ser medido, empleando para esto una unidad patrón.

Magnitud	Unidad patrón
masa	kilogramo
longitud	metro
tiempo	segundo

La unidad patrón se representa mediante un símbolo.

Unidad patrón	Símbolo
kilogramo	kg
metro	m
segundo	s

Clasificación de las magnitudes

Según su naturaleza, las magnitudes se clasifican en magnitudes escalares y magnitudes vectoriales.

Magnitudes escalares

Estas magnitudes quedan correctamente definidas mediante un valor numérico y una unidad de medida.

Dentro de las magnitudes escalares tenemos la masa, el tiempo, la energía, la intensidad de corriente, etc.

Ejemplos

- La masa de un ladrillo es 1,2 kg.

$$\underbrace{1{,}2}_{\text{valor numérico}}\ \underbrace{\text{kg}}_{\text{unidad de medida}}$$

- La temperatura en Ticlio es de −2 °C.

$$\underbrace{-2}_{\text{valor numérico}}\ \underbrace{^{\circ}\text{C}}_{\text{unidad de medida}}$$

Nota

El valor numérico de una magnitud vectorial puede ser negativo.

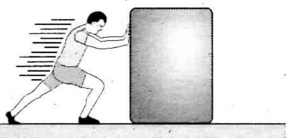
Magnitudes vectoriales

Estas magnitudes, además de poseer valor numérico y unidad de medida, tienen dirección. Dentro de las magnitudes vectoriales tenemos el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc.

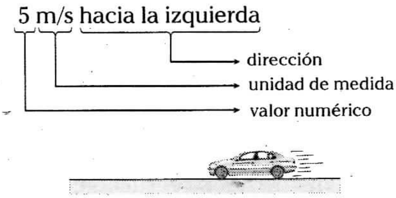
Ejemplos

- Una persona ejerce sobre un bloque una fuerza de 10 N hacia la derecha.

$$\underbrace{10}_{\text{valor numérico}}\ \underbrace{\text{N}}_{\text{unidad de medida}}\ \underbrace{\text{hacia la derecha}}_{\text{dirección}}$$



- El auto presenta una velocidad de 5 m/s hacia la izquierda.

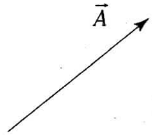


Vector

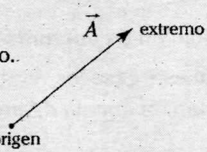
En el presente tema, nos centraremos en las magnitudes vectoriales, específicamente en su representación y en las operaciones básicas que se pueden realizar con ellas. Pasemos a ver estos puntos.

¿QUÉ ES UN VECTOR?

Es un ente matemático que se emplea para representar a las magnitudes vectoriales.
Geométricamente un vector se representa mediante un segmento de recta orientado.



$\vec{A}$: se lee vector A

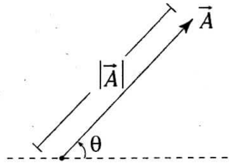
> **NOTA**
>
> Un vector tiene un origen y un extremo.
>
> 
>

ELEMENTOS DE UN VECTOR

Un vector tiene dos elementos: **módulo** y **dirección.**

- El **módulo** indica el valor de la magnitud vectorial, el cual está conformado por el valor numérico y la unidad de medida.

- La **dirección** es el ángulo que forma el vector con el eje horizontal positivo (+).
El ángulo se mide en sentido antihorario.



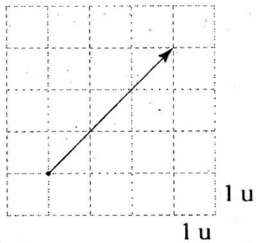
$|\vec{A}|$: se lee módulo del vector $\vec{A}$

θ: su medida nos indica la dirección del vector $\vec{A}$

> **NOTA**
>
> Si tenemos el vector $\vec{A}$, su módulo también se indica como A (sin la flecha en la parte superior).
>
> $$|\vec{A}| = A$$

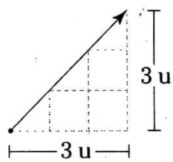
Ejemplo

Se tiene el siguiente vector, determine su módulo y dirección.



Resolución

En el gráfico se indica que el lado de cada cuadradito mide 1 u, además se observa que el vector coincide con la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo lado mide 3 u, tal como se indica en el siguiente gráfico.



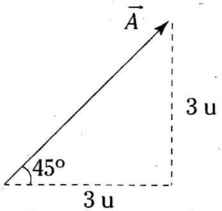
Su módulo se determina aplicando el teorema de Pitágoras.

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3^2+3^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{9+9}$$

$$\left|\vec{A}\right| = 3\sqrt{2}\text{ u}$$

Los lados del triángulo rectángulo son iguales, entonces se trata de un triángulo notable.



Su dirección es θ=45º.

OPERACIONES BÁSICAS CON VECTORES

Entre las operaciones básicas tenemos:

Adición de vectores

Consiste en reemplazar dos o más vectores por uno solo, al cual se le denomina **vector suma** o **vector resultante** $(\vec{R})$.

Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la adición de estos vectores es igual a lo siguiente:

$$\boxed{\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}}$$

NOTA

La adición de vectores no es una suma algebraica de cantidades, esto porque los vectores además de poseer módulo tienen dirección.

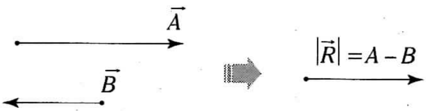
Cuando se realiza la adición de vectores se presentan dos casos.

a. Adición de vectores paralelos

En este caso los vectores pueden tener la misma dirección o direcciones opuestas.

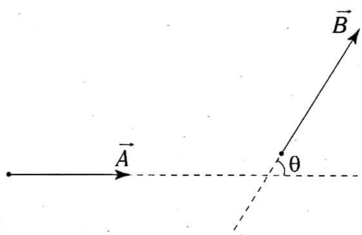
- Si tienen la misma dirección, el módulo del vector resultante es igual a la suma algebraica de los módulos de los vectores que se suman, y su dirección es igual a la dirección de cualquiera de ellos.

- Si tienen direcciones opuestas, el módulo del vector resultante es igual a la diferencia de los módulos de los vectores, y su dirección es igual a la dirección del vector que tiene mayor módulo.



b. Adición de vectores no paralelos

En este caso los vectores que se suman forman un ángulo diferente de cero.

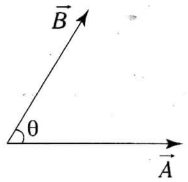


Para sumar vectores no paralelos podemos aplicar los siguientes métodos:

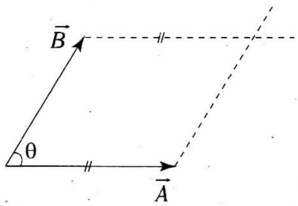
Método del paralelogramo

Se aplica para sumar dos vectores. El procedimiento que se sigue es el siguiente:

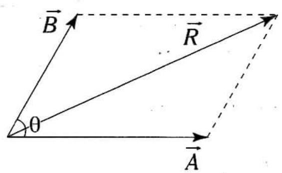
- Se hace coincidir el origen de los vectores manteniendo su dirección.



- Del extremo de los vectores se traza una recta paralela al otro vector.



- El vector resultante es aquel segmento de recta orientado cuyo origen es el común a los vectores que se suman, y su extremo coincide con la intersección de las paralelas.



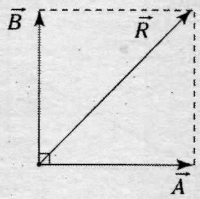
- El módulo del vector resultante se determina mediante la siguiente expresión.

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos\theta}$$

θ: ángulo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Observación

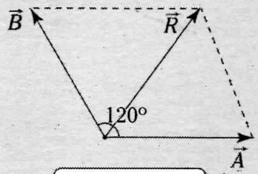
- Si los vectores forman un ángulo recto tenemos θ=90°, entonces cosθ=0. Gráficamente se tiene



El módulo del vector resultante se determina de la siguiente manera:

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

- Si los vectores tienen igual módulo y forman un ángulo de 120°, el módulo del vector resultante es igual al módulo de cualquiera de los vectores que se suman.

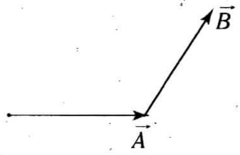


$$\left|\vec{R}\right| = A = B$$

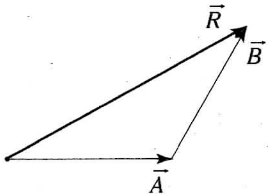
Método del polígono

El procedimiento a seguir en este caso es el siguiente:

- Se grafican los vectores uno a continuación del otro respetando sus direcciones. En este caso el extremo de un vector coincide con el origen de otro vector.



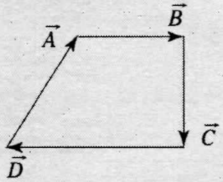
- El vector resultante es el segmento de recta orientado cuyo origen coincide con el del primer vector trazado y su extremo coincide con el del último vector trazado.



- El módulo del vector resultante se determina aplicando nuestros conocimientos básicos de geometría.

OBSERVACIÓN

Si al graficar los vectores estos forman una figura geométrica cerrada, el vector resultante es cero.



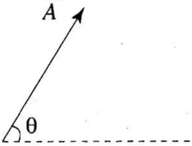
$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$$

$$\boxed{\vec{R}=\vec{O}}$$

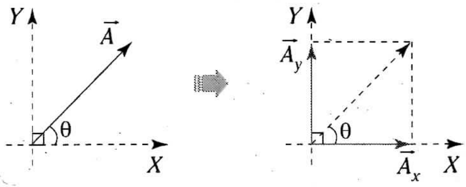
Descomposición de un vector

Consiste en reemplazar un vector por otros dos mutuamente perpendiculares, a los cuales se les denomina componentes.

Sea el vector $\vec{A}$.



Identificamos las direcciones perpendiculares donde se ubicarán los componentes y luego trazamos dichos componentes.



$\vec{A}_x$: componente horizontal del vector $\vec{A}$
$\vec{A}_y$: componente vertical del vector $\vec{A}$

Los módulos de los componentes son

$$\boxed{A_x=A\cos\theta} \quad \boxed{A_y=A\,\text{sen}\,\theta}$$

También

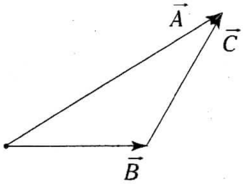
$$\boxed{\tan\theta=\frac{A_y}{A_x}}$$

El módulo del vector $\vec{A}$ se evalúa

$$\boxed{\left|\vec{A}\right|=\sqrt{A_x^2+A_y^2}}$$

Ejemplos

1. En el sistema de vectores mostrados, determine el módulo del vector resultante si $\left|\vec{A}\right|=5\text{ u}$.



Resolución

El vector resultante $\vec{R}$ se determina

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

Tomando el módulo tenemos

$$\left|\vec{R}\right| = \left|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right| \qquad \text{(I)}$$

En el gráfico, si aplicamos el método del polígono obtenemos

$$\vec{B}+\vec{C}=\vec{A}$$

Reemplazamos en (I)

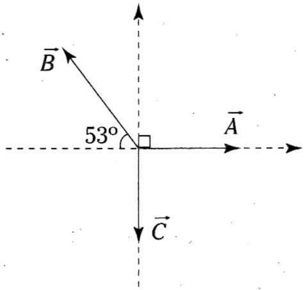
$$\left|\vec{R}\right| = \left|\vec{A}+\underbrace{\vec{B}+\vec{C}}_{\vec{A}}\right|$$

$$\left|\vec{R}\right| = \left|2\vec{A}\right| \rightarrow \left|\vec{R}\right| = 2\left|\vec{A}\right|$$

$$\left|\vec{R}\right| = 2\cdot(5\text{ u})$$

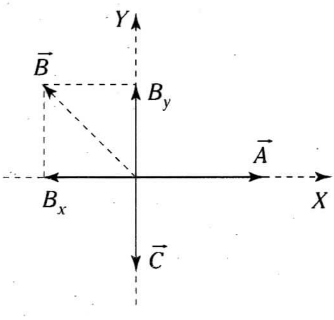
$$\therefore \quad \left|\vec{R}\right| = 10\text{ u}$$

2. La resultante del sistema de vectores mostrados es horizontal. Determine el módulo del vector $\vec{C}$ si $\left|\vec{A}\right|=4$ u y $\left|\vec{B}\right|=10$ u.



Resolución

En el sistema de vectores mostrados, realizamos la descomposición del vector $\vec{B}$.



Los módulos de los componentes son

- $B_x = B\cdot\cos 53^\circ$

$$B_x = 10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$B_x = 6\text{ u}$$

- $B_y = B\cdot\text{sen}53^\circ$

$$B_y = 10\cdot\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$B_y = 8\text{ u}$$

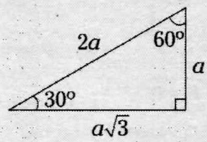
Como el vector resultante es horizontal, los vectores verticales del gráfico se compensan, es decir, ambos vectores verticales tienen el mismo módulo pero direcciones opuestas, entonces

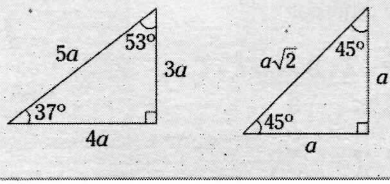
$$\left|\vec{C}\right| = B_y$$

$$\therefore \quad \left|\vec{C}\right| = 8\text{ u}$$

NOTA

Se sugiere al lector que revise los triángulos rectángulos notables, porque el conocimiento de sus ángulos y la proporción de sus catetos van a facilitar la descomposición de los vectores. Aquí algunos triángulos rectángulos que vamos a encontrar con frecuencia.

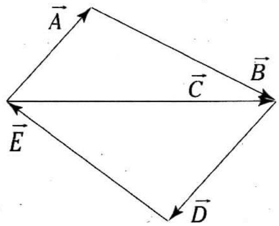




PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

Determine, en función de $\vec{C}$, la resultante del sistema mostrado.

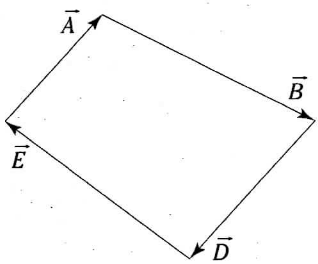


Resolución

El vector resultante $\vec{R}$ del sistema es

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} \qquad \text{(I)}$$

Si observamos detenidamente el gráfico, vamos a identificar lo siguiente



Entonces

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{D} + \vec{E} = \vec{0}$$

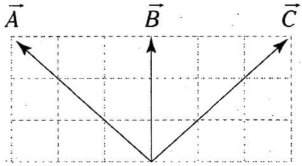
Reemplazamos en (I), pero reordenando previamente tenemos

$$\vec{R} = \underbrace{\vec{A} + \vec{B} + \vec{D} + \vec{E}}_{\vec{0}} + \vec{C}$$

$\therefore \quad \vec{R} = \vec{C}$

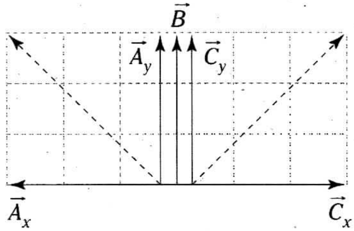
Problema N.º 2

Determine la resultante de los vectores mostrados.



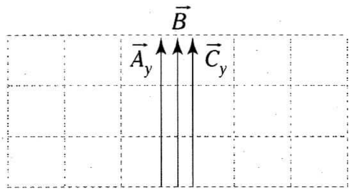
Resolución

Para facilitar la resolución, vamos a realizar la descomposición de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{C}$.



En el gráfico observamos que $\vec{A}_x$ y $\vec{C}_x$ tienen el mismo módulo y sus direcciones son opuestas, entonces $\vec{A}_x + \vec{C}_x = \vec{O}$.

Luego, en el gráfico quedaría



La resultante es

$$\vec{R} = \vec{A}_y + \vec{B} + \vec{C}_y \qquad \text{(I)}$$

También se observa que los vectores tienen el mismo valor y la misma dirección, entonces

$$\vec{A}_y = \vec{B} = \vec{C}_y = 3\,\text{u}$$

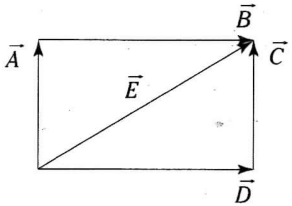
Reemplazamos en (I)

$$\vec{R} = 3\,\text{u} + 3\,\text{u} + 3\,\text{u}$$

$\therefore \quad \vec{R} = 9\,\text{u}$

Problema N.º 3

En el sistema de vectores mostrados, determine el vector resultante en función de $\vec{E}$.

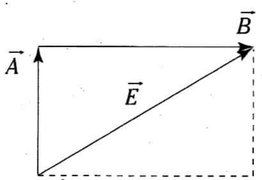


Resolución

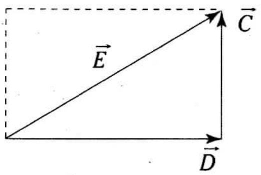
En el problema nos piden lo siguiente

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{E} \qquad \text{(I)}$$

Si observamos detenidamente el gráfico y recordamos la aplicación del método del polígono, tenemos



$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{E}$$



$$\vec{D}+\vec{C}=\vec{E}$$

Reemplazamos en (I)

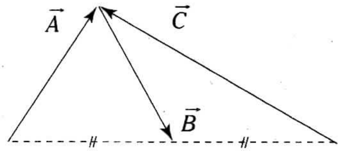
$$\vec{R}=\underbrace{\vec{A}+\vec{B}}_{\vec{E}}+\underbrace{\vec{C}+\vec{D}}_{\vec{E}}+\vec{E}$$

$$\vec{R}=\vec{E}+\vec{E}+\vec{E}$$

$$\therefore \quad \vec{R}=3\vec{E}$$

Problema N.º 4

La resultante del sistema de vectores mostrados es $\vec{R}=m\vec{B}$, determine m.

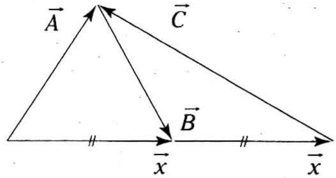


Resolución

La resultante del sistema de vectores es

$$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C} \qquad \text{(I)}$$

Notamos que la base del triángulo está dividida en dos partes iguales, aquí ubicamos convenientemente los vectores $\vec{x}$.



Del triángulo izquierdo se tiene

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{x} \qquad \text{(II)}$$

Del triángulo derecho tenemos

$$\vec{x}+\vec{C}+\vec{B}=\vec{O} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (II) en (III)

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}+\vec{B}=\vec{O}$$

Tomamos en cuenta (I)

$$\underbrace{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}_{\vec{R}}+\vec{B}=\vec{O} \ \rightarrow \ \vec{R}+\vec{B}=\vec{O}$$

$$\vec{R}=-\vec{B}$$

$$m\vec{B}=-\vec{B}$$

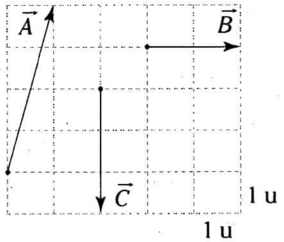
Comparando obtenemos

$$m=-1$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

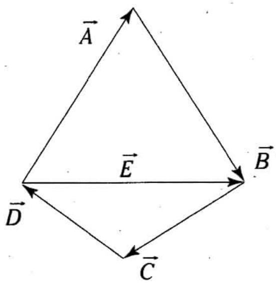
NIVEL BÁSICO

1. En el sistema de vectores mostrado, determine el módulo del vector resultante.



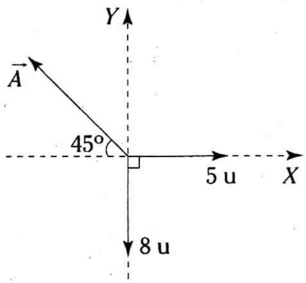
A) 5 u B) $2\sqrt{5}$ u C) $\sqrt{10}$ u
D) 10 u E) $\sqrt{30}$ u

2. Del sistema de vectores mostrados, determine su resultante.



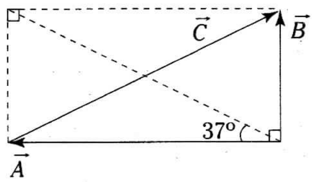
A) $2\vec{A}$
B) $\vec{B}$
C) $3\vec{B}$
D) $\vec{E}$
E) $2\vec{C}$

3. Si en el sistema de vectores mostrado su resultante es vertical, determine su módulo.



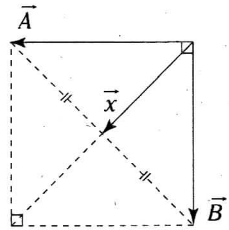
A) 3 u B) 4 u C) 5 u
D) 8 u E) 10 u

4. En el sistema que se muestra, determine el módulo del vector resultante si $|\vec{A}| = 8$ u.



A) 10 u B) 12 u C) 15 u
D) 16 u E) 20 u

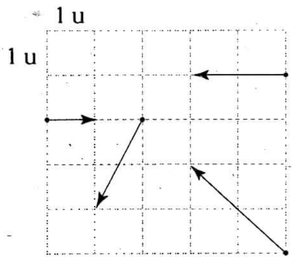
5. En el sistema de vectores se verifica que $\vec{x} = n\vec{A} + m\vec{B}$. Determine $m+n$.



A) 4 B) 2 C) 1
D) 3/2 E) 3/4

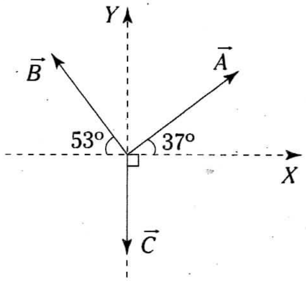
NIVEL INTERMEDIO

6. Determine el módulo del vector resultante en el sistema mostrado.



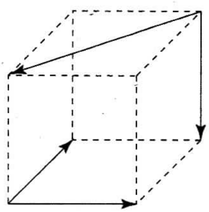
A) 1 u B) 2 u C) 3 u
D) 4 u E) 5 u

7. El módulo del vector resultante es cero. Determine el módulo de $\vec{A}$ si $|\vec{C}| = 35$ u.



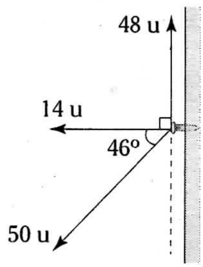
A) 14 u B) 16 u C) 20 u
D) 21 u E) 25 u

8. Si el lado del cubo es 4 u, determine el módulo del vector resultante.



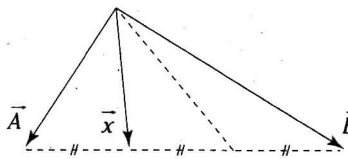
A) 4 u B) 8 u C) $4\sqrt{2}$ u
D) 12 u E) $8\sqrt{2}$ u

9. Para el sistema de vectores mostrado, determine el módulo de su resultante.



A) 20 u B) 25 u C) 36 u
D) 50 u E) 75 u

10. En el sistema de vectores mostrado se verifica que $\vec{x} = m\vec{A} + n\vec{B}$. Determine $m-n$.



A) 1 B) 1/3 C) 2/3
D) 2 E) 4/3

Cinemática y movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

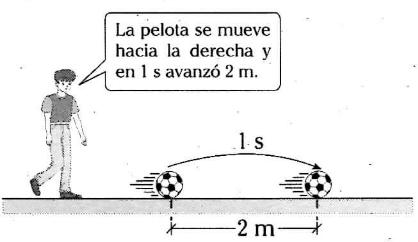
Capítulo II

OBJETIVOS

- Conocer los conceptos y elementos que nos permiten describir un movimiento mecánico.
- Entender las características del movimiento rectilíneo uniforme.

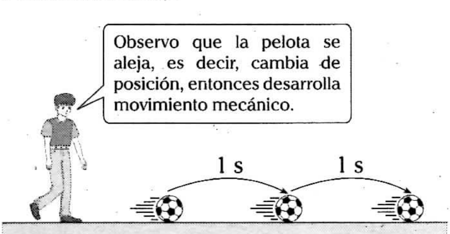
Cinemática

Parte de la física que **describe el movimiento mecánico** de los cuerpos sin preocuparse de las causas que originan o modifican este movimiento.



MOVIMIENTO MECÁNICO

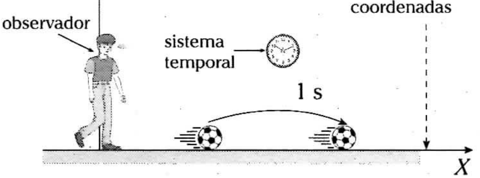
Un cuerpo experimenta movimiento mecánico si su posición, respecto a un observador, cambia continuamente.



NOTA

En lugar de un observador se puede usar un cuerpo de referencia cualquiera.

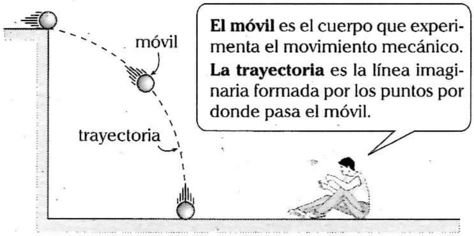
Para ubicar en un instante determinado la posición de un cuerpo, se requiere de un **sistema de referencia (S. R.)** el cual está conformado por un observador o cuerpo de referencia, un aparato para medir el paso del tiempo y un sistema de ejes coordenadas.

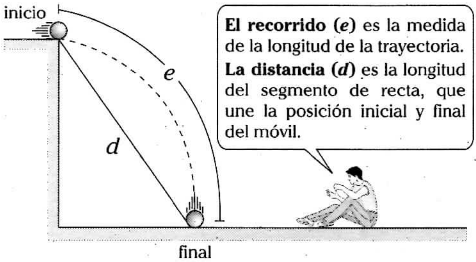


Elementos del movimiento mecánico

Para describir el movimiento mecánico debemos tener presente sus elementos, estos son: el móvil, la trayectoria, el recorrido, el desplazamiento $(\vec{d})$ y la distancia (d).

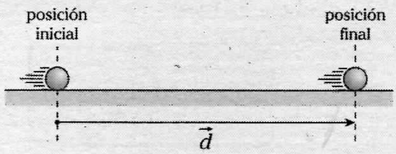
Veamos estos elementos para el caso en que un cuerpo es lanzado desde un acantilado.





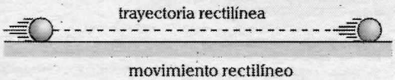
OBSERVACIÓN

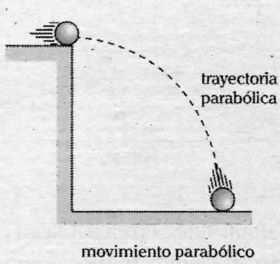
- El desplazamiento ($\vec{d}$) es una magnitud vectorial que expresa el cambio de posición que experimenta un cuerpo y se representa mediante un vector.



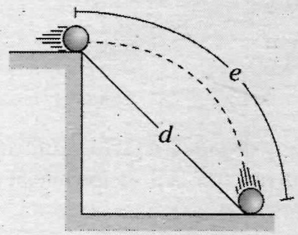
El vector desplazamiento está dirigido desde la posición inicial a la final.

- La forma de la trayectoria define en parte el nombre de un movimiento mecánico.



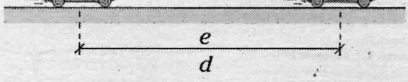


- Si la trayectoria es curvilínea, el recorrido (*e*) es mayor que la distancia (*d*).



$$e > d$$

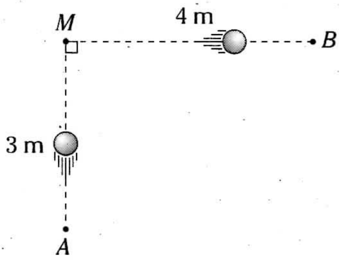
- Si la trayectoria es rectilínea y el movimiento se da solo en una dirección, el recorrido (*e*) y la distancia (*d*) son iguales.



$$e = d$$

Ejemplo

Se muestra la trayectoria seguida por un cuerpo cuando va desde A hasta B. Determine su recorrido y la distancia para este trayecto.



Resolución

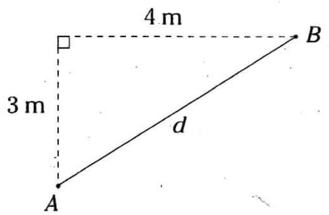
En este caso notamos que la trayectoria está conformada por dos tramos rectos, entonces el recorrido es

$e=e_{AM}+e_{MB}$

$e=3\text{ m}+4\text{ m}$

$e=7\text{ m}$

Como se sabe, la distancia es la longitud del segmento de recta que une la posición inicial y final del móvil. Gráficamente tenemos



Se ha formado un triángulo rectángulo donde la distancia es la medida de su hipotenusa.

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos

$d=\sqrt{3^2+4^2}$

$d=\sqrt{9+16}$

$\therefore\quad d=5\text{ m}$

RAPIDEZ Y VELOCIDAD

La rapidez es una magnitud escalar que mide qué tan a prisa se mueve un cuerpo.

La velocidad es una magnitud vectorial $(\vec{v})$ que además de medir qué tan a prisa se mueve un cuerpo, nos indica la dirección del movimiento. Estas magnitudes se calculan de la siguiente manera:

Rapidez media (v_m)

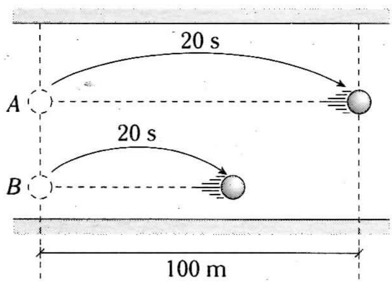
$$\boxed{v_m=\frac{\text{recorrido}}{\text{tiempo}}}$$

Su unidad en el sistema internacional es $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Velocidad media $(\vec{v}_m)$

$$\boxed{\vec{v}_m=\frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}}}$$

Veamos el caso de dos móviles que parten simultáneamente con el objetivo de recorrer un tramo de 100 m.



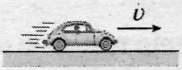
Podemos notar que el móvil A llega primero a la meta, es decir, emplea menos tiempo, entonces decimos que es más rápido.

Observación

1. La velocidad es una magnitud vectorial, entonces tiene módulo (valor) y dirección.

$$\text{Velocidad } (\vec{v}) \begin{cases} \text{módulo} \\ \text{dirección} \end{cases}$$

2. La velocidad la representamos mediante un vector cuya dirección nos indica el movimiento del cuerpo.



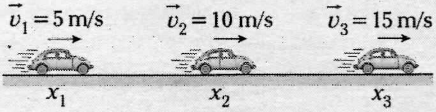
3. Dos partículas que se mueven en direcciones opuestas y con el mismo valor de velocidad, la expresión de sus velocidades se diferencia en el signo.

En este caso tenemos

$\vec{v}_A = +20$ m/s

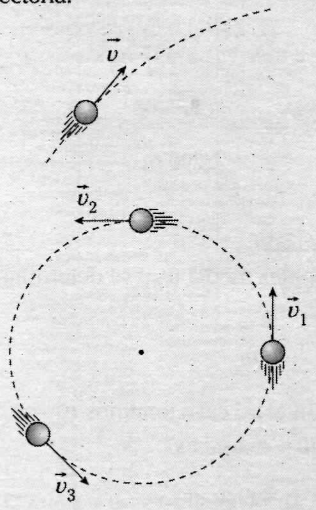
$\vec{v}_B = -20$ m/s

4. Se denomina **velocidad instantánea** a aquella velocidad en un instante específico o en una posición específica de la trayectoria.



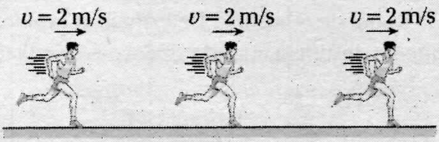
$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son velocidades instantáneas.

5. La velocidad es en todo instante tangente a la trayectoria.

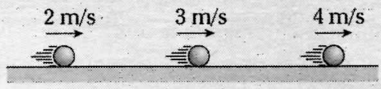


6. La velocidad de un cuerpo puede ser constante o variable.

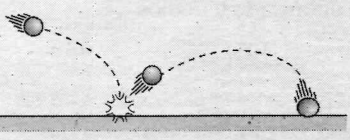
Es **constante** si su valor (módulo) y dirección se mantienen constantes.



Es **variable** si cambia su valor y/o dirección.



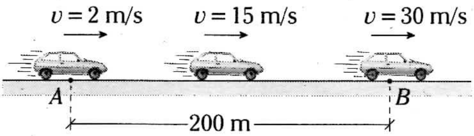
cambia su valor



cambia su valor y dirección

Ejemplos

1. El auto emplea 10 s en ir desde A hasta B, determine su rapidez media para este tramo.



Resolución

La rapidez media (v_m) se determina así

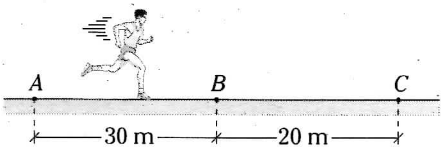
$$v_m = \frac{e_{AB}}{t_{AB}}$$

Para nuestro caso tenemos e_{AB}=200 m y t_{AB}=10 s, entonces

$$v_m = \frac{200\text{ m}}{10\text{ s}}$$

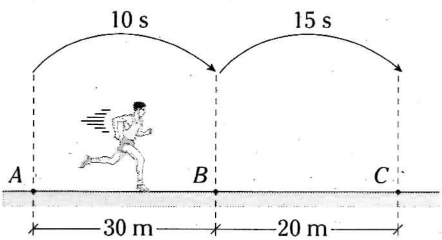
$\therefore\ v_m = 20$ m/s

2. El atleta emplea 10 s en ir desde A hasta B, y 15 s en ir de B hasta C. Determine la rapidez media del atleta cuando va desde A hasta C.



Resolución

Del enunciado tenemos



La rapidez media se determina de la siguiente manera

$$v_m = \frac{e_{AC}}{t_{AB} + t_{BC}}$$

$$v_m = \frac{30\text{ m} + 20\text{ m}}{10\text{ s} + 15\text{ s}} = \frac{50\text{ m}}{25\text{ s}}$$

$\therefore\ v_m = 2$ m/s

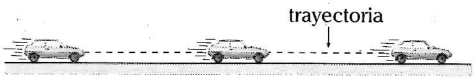
Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Es aquel movimiento mecánico que desarrolla un cuerpo con velocidad constante.

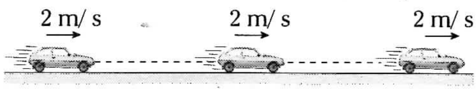
$$\boxed{\vec{v} = \text{constante}}$$

Características del MRU

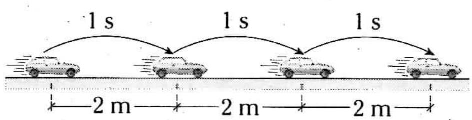
- La trayectoria es rectilínea.



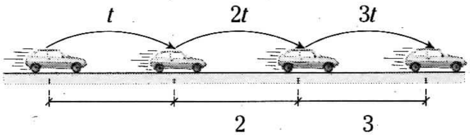
- El valor y dirección de la velocidad se mantienen constantes.



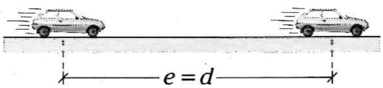
- En intervalos de tiempos iguales, los recorridos son iguales.



- Los recorridos son proporcionales al tiempo transcurrido.

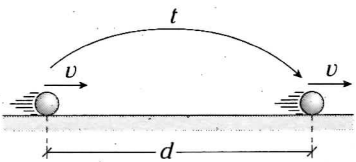


- En el MRU, el recorrido (e) y la distancia (d) son iguales.



Ecuación del MRU

Considere un cuerpo que experimenta un movimiento rectilíneo uniforme.



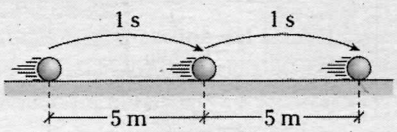
Se verifica $\boxed{d = v \cdot t}$

donde

- d: distancia
- v: valor de la velocidad
- t: tiempo transcurrido

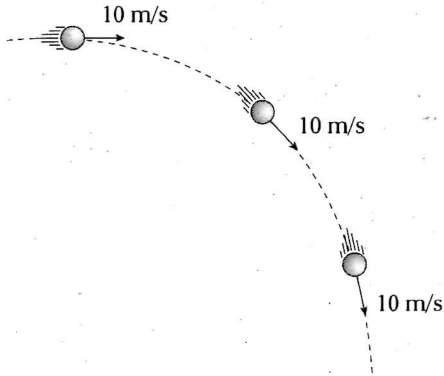
Observación

Si un cuerpo desarrolla un MRU con una rapidez de 5 m/s, ¿qué nos indica este valor?
Nos indica que en cada segundo el cuerpo recorre 5 m.



Ejemplos

1. Para el movimiento mecánico que se muestra, determine si las proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).



I. El cuerpo desarrolla un MRU.
II. La velocidad es constante.
III. La dirección del movimiento es variable.

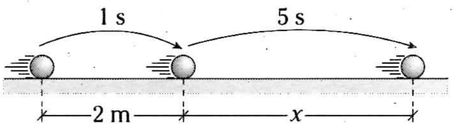
Resolución

I. **Falso**
En un MRU la trayectoria es rectilínea; en nuestro caso la trayectoria es curvilínea.

II. **Falso**
Se sabe que la velocidad es constante si su valor y dirección son constantes; en nuestro caso solo el valor de la velocidad es constante, su dirección está cambiando.

III. **Verdadero**
La dirección de la velocidad nos indica la dirección del movimiento. En nuestro caso la dirección de la velocidad cambia constantemente, entonces la dirección del movimiento también cambia constantemente.

2. El cuerpo que se muestra desarrolla un MRU. Determine su rapidez y la distancia x.

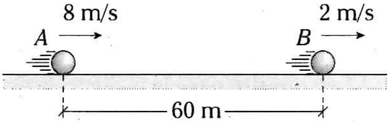


Resolución

- En la figura se observa que en 1 s el cuerpo recorre 2 m, entonces su rapidez es v=2 m/s.

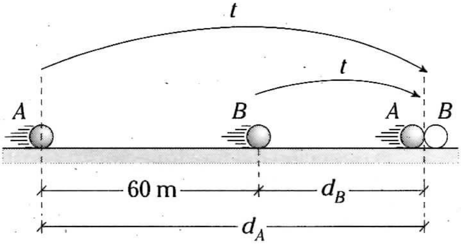
- En un MRU, los recorridos son proporcionales al tiempo; si en un 1 s el cuerpo recorre 2 m, entonces en 5 s su recorrido es x=10 m.

3. Los móviles experimentan MRU. Determine cuántos metros recorre el móvil A hasta que da alcance al móvil B.



Resolución

De acuerdo al enunciado tenemos



El recorrido o distancia que avanza el móvil A hasta que da alcance a B es

$$d_A=v_A\cdot t \rightarrow d_A=8\cdot t \qquad \text{(I)}$$

Nos falta determinar el tiempo t.
En el gráfico notamos que el tiempo transcurrido para ambos móviles es el mismo; además se verifica

$$d_A=60+d_B$$

$$v_A\cdot t=60+v_B\cdot t \rightarrow v_A\cdot t-v_B\cdot t=60$$

$$t=\frac{60}{v_A-v_B}$$

Reemplazando valores tenemos

$$t=\frac{60}{8-2} \rightarrow t=10 \text{ s}$$

Finalmente, reemplazamos en (I)

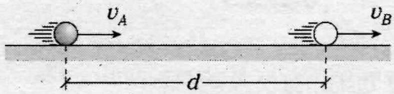
$$d_A=8(10)$$

$$\therefore\ d_A=80 \text{ m}$$

NOTA

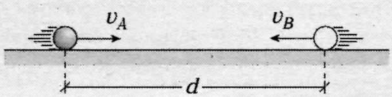
En un MRU se verifica

- Tiempo de alcance (t_a)



$$\boxed{t_a=\frac{d}{v_A-v_B}} \quad \text{si } v_A > v_B$$

- Tiempo de encuentro (t_e)



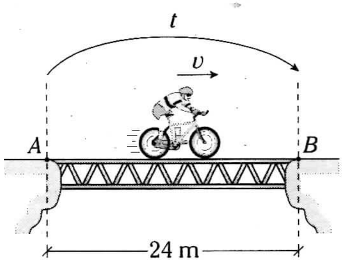
$$\boxed{t_e=\frac{d}{v_A+v_B}}$$

Problema N.º 1

Un ciclista que desarrolla un MRU en cada segundo recorre 3 m. Determine cuánto tiempo emplea en cruzar un puente de 24 m de longitud.

Resolución

Traducimos a un gráfico el enunciado del problema.



Nos piden determinar t.

En el MRU se tiene

$$d_{AB}=v\cdot t$$

$$t=\frac{d_{AB}}{v}$$

$$t=\frac{24}{v} \qquad \text{(I)}$$

Como en cada segundo el ciclista recorre 3 m, su rapidez es 3 m/s; entonces reemplazando en (I) tenemos

$$t=\frac{24}{3}$$

$$\therefore \quad t=8\text{ s}$$

Otra forma

En un MRU, el recorrido del cuerpo es proporcional al tiempo transcurrido. Si el ciclista recorre 3 m en 1 s, entonces va a recorrer 24 en 8 s.

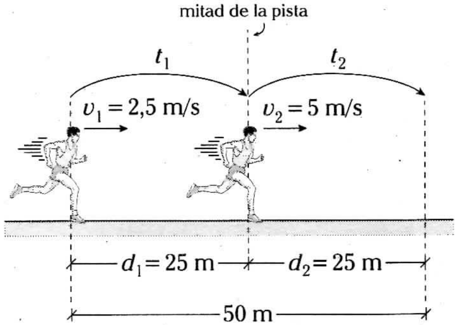
$$t=8\text{ s}$$

Problema N.º 2

Un joven que se mueve con velocidad constante inicia el recorrido de una pista de 50 m con una rapidez de 2,5 m/s. Si cuando se encuentra a la mitad de la pista duplica su rapidez, determine el tiempo que emplea en recorrer toda la pista.

Resolución

Llevamos a un gráfico el enunciado del problema.



El tiempo que emplea el joven en recorrer la pista es

$$t=t_1+t_2 \qquad \text{(I)}$$

Como desarrolla un MRU, tenemos

$$t_1=\frac{d_1}{v_1}; \qquad t_2=\frac{d_2}{v_2}$$

Reemplazamos en (I)

$$t=\frac{d_1}{v_1}+\frac{d_2}{v_2}$$

$$t=\frac{25}{2,5}+\frac{25}{5}$$

$$t=10+5$$

$$\therefore \quad t=15\text{ s}$$

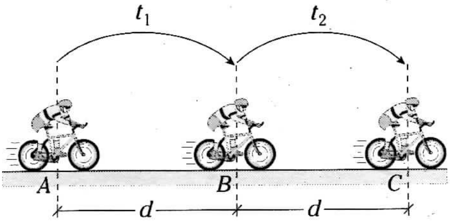
Problema N.º 3

Un ciclista recorre la primera mitad de su trayectoria a una velocidad de 20 km/h y la segunda mitad a 5 km/h. ¿Cuál es la rapidez media correspondiente a toda la trayectoria?

UNMSM 2010-I

Resolución

Del enunciado tenemos



Nos piden la rapidez media (v_m) para el trayecto *AC*.

$$v_m = \frac{\text{recorrido}}{\text{tiempo}}$$

$$v_m = \frac{2d}{t_1+t_2} \qquad \text{(I)}$$

Consideramos que desarrolla un MRU en cada tramo de su recorrido.

- Tramo *AB*

$$d=v_1 \cdot t_1$$

$$t_1 = \frac{d}{v_1} \qquad \text{(II)}$$

- Tramo *BC*

$$d=v_2 \cdot t_2$$

$$t_2 = \frac{d}{v_2} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (II) y (III) en (I)

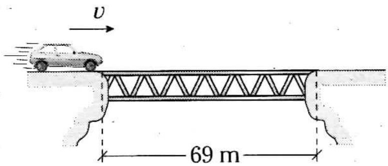
$$v_m = \frac{2d}{\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$$

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{5}} = \frac{2}{\left(\frac{5+20}{20\times 5}\right)} = \frac{2(100)}{25}$$

$\therefore \quad v_m=8$ km/h

Problema N.º 4

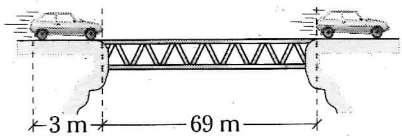
Un auto de 3 m de longitud que experimenta un MRU demora 6 s en pasar completamente por el puente. Determine su rapidez.



Resolución

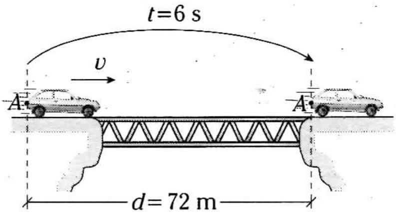
Se debe tener presente que cuando el auto empieza a cruzar el puente su parte delantera coincide con el inicio del puente, y cuando termina de cruzarlo su parte posterior coincide con el final del puente.

Si llevamos a un gráfico lo planteado tenemos



Como nos dan la longitud del auto, vamos a trabajar solo con un punto que pertenece a este.

Por conveniencia trabajaremos con un punto de su parte posterior, en nuestro caso será el punto A; por otro lado, la rapidez del auto y del punto A es la misma en todo instante, y emplean 6 s en cruzar el puente.



Como el auto desarrolla MRU, se tiene

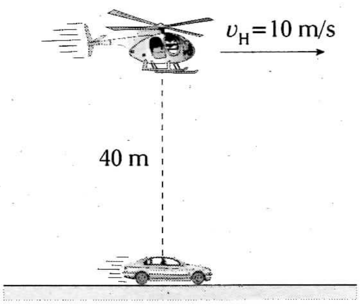
$$d=v\cdot t$$

$$v=\frac{d}{t}=\frac{72}{6}$$

$\therefore \quad v=12$ m/s

Problema N.º 5

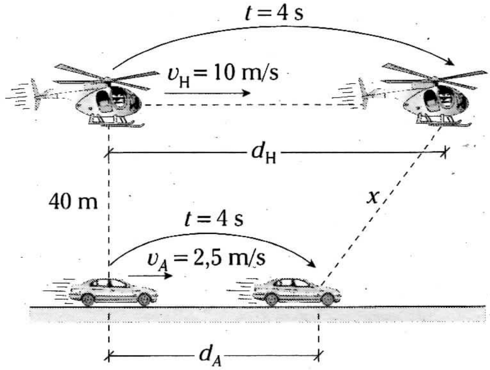
Se muestra la posición inicial de un helicóptero y un auto que se mueven con velocidad constante. Si el auto tiene una rapidez de 2,5 m/s, determine la separación entre ambos vehículos luego de 4 s.



Resolución

Como las velocidades son constantes, las trayectorias son rectilíneas y en nuestro caso horizontales.

El valor de la velocidad del helicóptero es mayor que la del auto, entonces en 4 s su recorrido también será mayor, esto lo vemos en el siguiente gráfico.

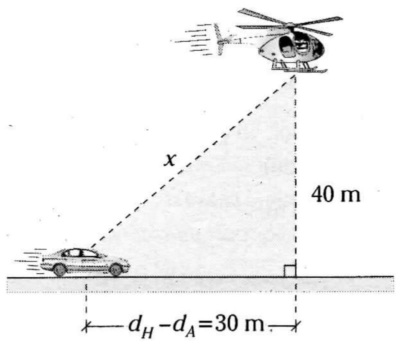


Nos piden determinar x.
Debido a que los vehículos desarrollan MRU, se tiene

$$d_H=v_H\cdot t=10(4)=40 \text{ m}$$

$$d_A=v_A\cdot t=2,5(4)=10 \text{ m}$$

Aprovechando los resultados anteriores y los conocimientos de geometría, en la posición final tenemos



Finalmente

$$x=\sqrt{30^2+40^2}$$

$\therefore \quad x=50$ m

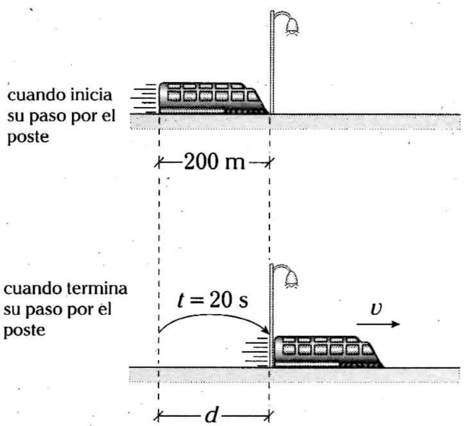
Problema N.° 6

Un tren de 200 m pasa por el costado de un poste durante 20 s. Si el tren realiza MRU, determine cuánto tiempo estuvo completamente dentro de un túnel de 700 m.

Resolución

En este problema se presentan dos situaciones que debemos diferenciar claramente.

- En la primera situación, el tren emplea 20 s en pasar por el costado de un poste, esto nos ayudará a determinar la rapidez del tren. Gráficamente tenemos



Luego

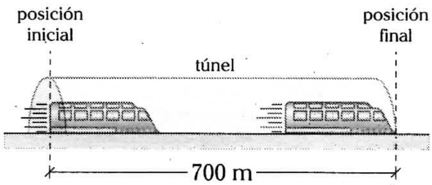
$$d=vt$$

$$200=v(20)$$

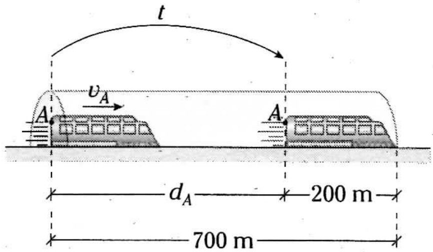
$$v=10\text{ m/s}$$

- En la segunda situación, el tren está dentro del túnel.

  Graficamos la posición inicial y final en que el tren está completamente dentro del túnel.



Como el tren tiene una longitud de 200 m vamos a trabajar con el punto A de su parte posterior. La rapidez del punto A es igual a la rapidez del tren $v_A=v=10$ m/s.



Del gráfico notamos que durante el tiempo que el tren estuvo completamente dentro del túnel, el punto A realiza un recorrido d_A, luego

$$d_A=v_A\cdot t$$

$$500=10\cdot t$$

$$\therefore\ t=50\text{ s}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. En las proposiciones siguientes, marque la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F).

I. Por lo general, en un movimiento mecánico el recorrido es mayor que la distancia.

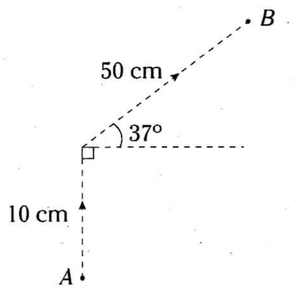
II. El movimiento mecánico es independiente del cuerpo de referencia.

III. Si la rapidez de un móvil es constante, se puede asegurar que es un MRU.

IV. Si la velocidad de un móvil es constante, se puede asegurar que es un MRU.

A) VVVV B) VFFV C) FVVF
D) VFVV E) VFVF

2. Se muestra la trayectoria seguida por un cuerpo que se mueve desde *A* hasta *B*. Calcule el recorrido y la distancia.



A) 60 cm y 80 cm
B) 30 cm y 40 cm
C) 60 cm y $40\sqrt{2}$ cm
D) 80 cm y $40\sqrt{2}$ cm
E) 40 cm y $30\sqrt{2}$ cm

3. Un tren que realiza un MRU demora 5 h en ir desde la ciudad *A* hasta la ciudad *B*, viajando con v km/h, tardaría solo 4 h si aumentara su rapidez en 6 km/h. Determine v y la distancia entre las ciudades.

A) 24 km/h y 120 km
B) 30 km/h y 120 km
C) 12 km/h y 240 km
D) 34 km/h y 200 km
E) 24 km/h y 300 km

4. Un autobús que realiza un MRU demora 0,6 s en pasar al costado de un poste de luz. Determine el tiempo que demora en recorrer 1 km si la longitud del autobús es 12 m.

A) 20 s B) 30 s C) 40 s
D) 50 s E) 60 s

5. Un auto que realiza un MRU parte de un punto *A* con 20 m/s, luego de 6 s cambia su rapidez y la mantiene constante hasta llegar a un punto *B*. Determine la rapidez con que llega a *B* si la distancia entre *A* y *B* es 400 m y el tiempo total es 26 s.

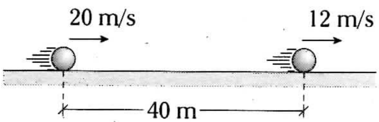
A) 6 m/s
B) 8 m/s
C) 10 m/s
D) 12 m/s
E) 14 m/s

NIVEL INTERMEDIO

6. Un autobús de 10 m de longitud demora 42 s en cruzar completamente un puente y 40 s más en cruzar otro puente del doble de longitud. Determine la rapidez del autobús que realiza un MRU.

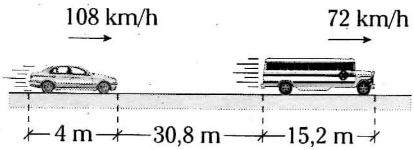
A) 5 m/s
B) 10 m/s
C) 15 m/s
D) 20 m/s
E) 25 m/s

7. Dos partículas se mueven con velocidad constante como se muestra. Determine luego de cuánto tiempo la separación entre las partículas se triplica.



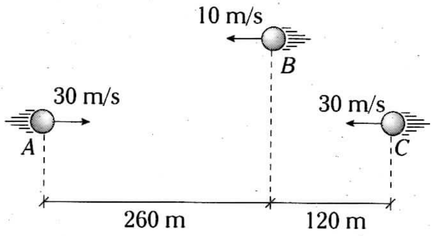
A) 5 s B) 10 s C) 15 s
D) 20 s E) 25 s

8. Los móviles mostrados realizan MRU. Determine cuánto tiempo transcurre, en s, desde el instante mostrado, hasta que el auto termina de cruzar al bus.



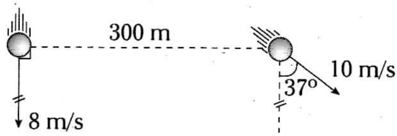
A) 2 B) 5 C) 10
D) 12 E) 20

9. Las partículas mostradas realizan MRU. Determine cuánto tiempo transcurre desde el instante mostrado, hasta que la partícula C equidista de A y B.



A) 2 s B) 4,5 s C) 6,25 s
D) 8,75 s E) 10 s

10. Se muestran dos partículas que se mueven con velocidad constante. Determine luego de cuánto tiempo la separación entre las partículas se duplica.



A) 10 s B) 20 s C) 30 s
D) 40 s E) 50 s

Aceleración y movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Capítulo III

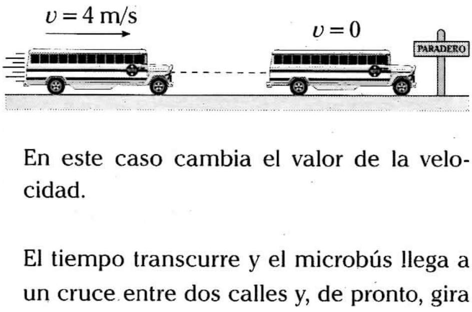
Objetivos

- Entender qué es la aceleración.
- Conocer las características del movimiento rectilíneo uniformemente variado y su aplicación en la resolución de ejercicios.

Aceleración

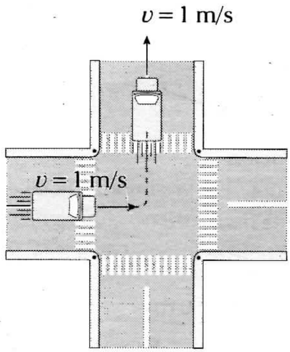
Cuando observamos a un cuerpo en movimiento, como un microbús, lo común es que su velocidad cambie en valor y dirección.

- Si el microbús tiene que detenerse en el siguiente paradero, el conductor debe aplicar los frenos para que este se detenga.



En este caso cambia el valor de la velocidad.

- El tiempo transcurre y el microbús llega a un cruce entre dos calles y, de pronto, gira a su izquierda.



En este caso solo cambia la dirección de la velocidad.

Frente a los casos señalados, si se quiere medir los cambios de velocidad que experimenta el microbús al transcurrir el tiempo, empleamos una magnitud vectorial denominada **aceleración** $(\vec{a})$.

El valor de la aceleración se determina mediane la siguiente expresión:

$$a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

Aceleración media
Su unidad: m/s^2

donde

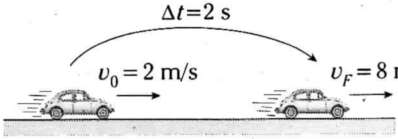
- $|\Delta\vec{v}|$: valor del cambio de velocidad (m/s)

  $\Delta\vec{v} = \vec{v_F} - \vec{v_0}$

- Δt: intervalo de tiempo o tiempo transcurrido

Ejemplos

1. Determine el valor de la aceleración que experimenta el cuerpo.



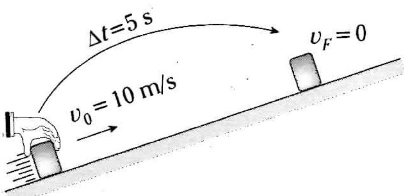
Resolución

Notamos que la rapidez inicial es 2 m/s y la rapidez final es 8 m/s, entonces el valor del cambio de velocidad es 6 m/s, luego

$$a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{6\text{ m/s}}{2\text{ s}}$$

$\therefore\ a$=3 m/s^2

2. El cuerpo se lanza sobre el plano inclinado como se muestra. Determine el valor de la aceleración que experimenta.



Resolución

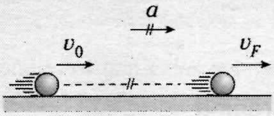
En este caso el valor de la velocidad disminuye. La rapidez inicial es 10 m/s y la rapidez final es cero, por lo que el valor del cambio de velocidad es 10 m/s, luego

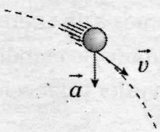
$$a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{10\text{ m/s}}{5\text{ s}}$$

$\therefore\ a$=2m/s^2

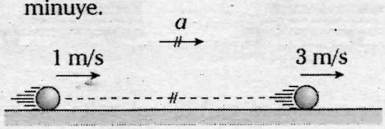
OBSERVACIÓN

- En un movimiento rectilíneo la velocidad y la aceleración son paralelas, mientras que en un movimiento curvilíneo no lo son.

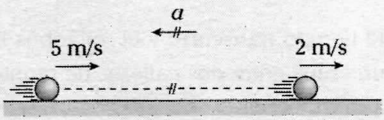




- Si en un movimiento rectilíneo la aceleración y la velocidad tienen la misma dirección, el valor de la velocidad aumenta; pero si tienen direcciones opuestas, el valor de la velocidad disminuye.



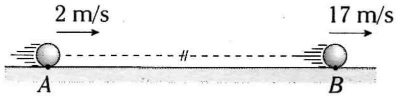
rapidez aumenta



rapidez disminuye

- La aceleración es constante si su valor y dirección se mantienen constantes.

3. El cuerpo que se muestra va desde A hasta B experimentando una aceleración de módulo 5 m/s^2. Determine el tiempo que transcurre en este trayecto.



Resolución

En el trayecto $\overline{AB}$ la rapidez aumenta desde 2 m/s hasta 17 m/s, es decir, el valor de la velocidad cambia en 15 m/s, luego

$$a=\frac{|\Delta\vec{v}|}{t_{AB}} \rightarrow 5=\frac{15}{t_{AB}}$$

$\therefore\ t_{AB}=3$ s

Movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)

Es aquel movimiento mecánico que desarrolla un cuerpo describiendo una trayectoria rectilínea y experimentando una aceleración constante.

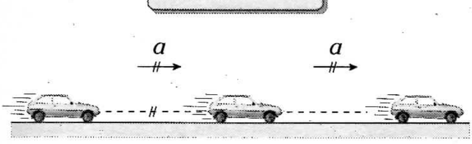
Características del MRUV

De acuerdo a la definición del MRUV, se presentan las siguientes características:

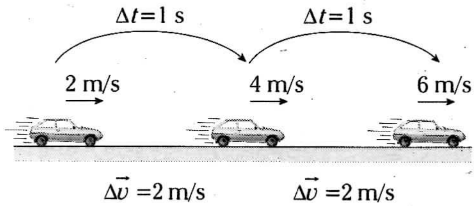
- La trayectoria es rectilínea.

- La aceleración es constante en valor y dirección.

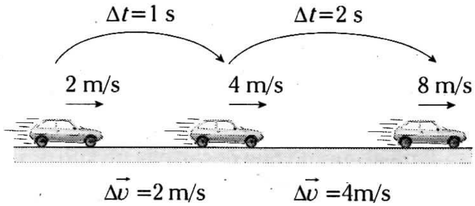
$$\boxed{\vec{a}=\text{constante}}$$



- En intervalos de tiempos iguales (Δt) los cambios de velocidad $(\Delta\vec{v})$ son iguales.



- Los cambios de velocidad son proporcionales al tiempo transcurrido.



Nota

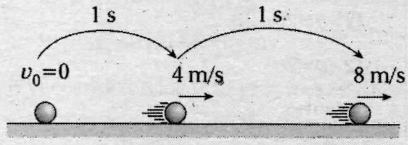
Se sugiere al lector tener presente las características del MRUV porque nos ayudarán mucho en la resolución de los ejercicios.

Observación

Si un cuerpo experimenta un MRUV con una aceleración de módulo 4 m/s^2, ¿qué nos indica este valor?

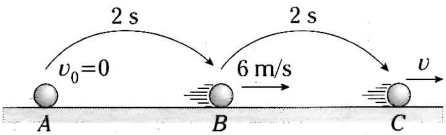
Nos indica que en cada segundo el valor de la velocidad varía en 4 m/s.

Gráficamente tenemos



Ejemplos

1. Si el cuerpo mostrado desarrolla un MRUV, determine el valor de v.



Resolución

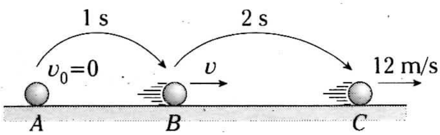
Se sabe que en intervalos de tiempos iguales los cambios en el valor de la velocidad son iguales, entonces

$$\left|\Delta\vec{v}_{AB}\right|=\left|\Delta\vec{v}_{BC}\right|$$

$$6-0=v-6$$

$$\therefore\ v=12 \text{ m/s}$$

2. Para el cuerpo que desarrolla un MRUV, determine la rapidez v.



Resolución

Observamos que el tiempo transcurrido en el tramo $\overline{BC}$ es dos veces el tiempo transcurrido en el tramo $\overline{AB}$, entonces los cambios en el valor de la velocidad están en la misma proporción.

Luego

$$\left|\Delta\vec{v}_{BC}\right|=2\left|\Delta\vec{v}_{AB}\right|$$

$$12-v=2(v-0)$$

$$12-v=2v$$

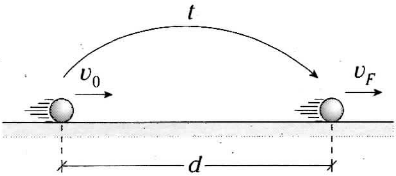
$$\therefore\ v=4 \text{ m/s}$$

Otra forma

Si en 3 s el valor de la velocidad cambia en 12 m/s (tramo $\overline{AC}$), entonces en 1 s el valor de la velocidad debe cambiar en 4 m/s (tramo $\overline{AB}$). Como la velocidad inicial es cero, entonces $v=4$ m/s.

Ecuaciones que se usan en el MRUV

Se tiene un cuerpo que experimenta un MRUV.



donde

- v_0: rapidez inicial (m/s)
- v_F: rapidez final (m/s)
- t: tiempo transcurrido (s)
- d: distancia (m)

Las ecuaciones son las siguientes:

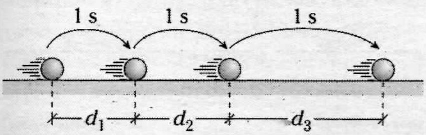
$$\left.\begin{array}{l} v_F=v_0\pm at \\ v_F^2=v_0^2\pm 2ad \\ d=v_0\cdot t\pm\dfrac{at^2}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} +\text{: cuando la rapidez aumenta} \\ -\text{: cuando la rapidez disminuye} \end{array}$$

$$d=\left(\frac{v_0+v_F}{2}\right)\cdot t$$

En las primeras tres ecuaciones se emplea el signo + o –; mientras que en la cuarta ecuación solo se tiene signo positivo y se usa independientemente si la rapidez aumenta o disminuye.

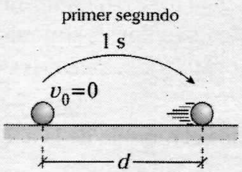
OBSERVACIÓN

- En un MRUV las distancias recorridas son diferentes en cada segundo de movimiento.



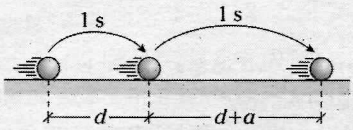
$$\boxed{d_1 \neq d_2 \neq d_3}$$

- Si un cuerpo inicia un MRUV desde el reposo, en el primer segundo de su movimiento su recorrido es numéricamente igual a la mitad del valor de la aceleración (a).

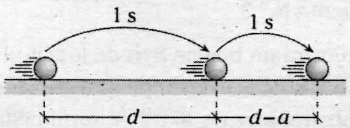


$$\boxed{d = a/2}$$

- La diferencia de los recorridos de dos segundos consecutivos es igual al valor de la aceleración.



cuando la rapidez aumenta



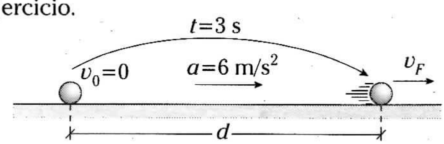
cuando la rapidez disminuye

Ejemplo

Un cuerpo inicia un MRUV desde el reposo con una aceleración de 6 m/s^2. Determine su rapidez al finalizar el tercer segundo y el recorrido realizado hasta ese instante.

Resolución

Interpretamos gráficamente el enunciado del ejercicio.



Nos piden determinar v_F y d.

Aplicamos las ecuaciones del MRUV

- $v_F = v_0 + at$

  $v_F = 0+6(3) \rightarrow v_F = 18$ m/s

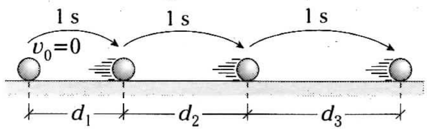
- $d = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

  $d = 0(3) + \dfrac{6(3)^2}{2} \rightarrow d = 27$ m

Otra forma

Aplicamos las características y observaciones del MRUV.

- Como la aceleración tiene un valor de 6 m/s^2, esto indica que el valor de la velocidad aumenta en 6 m/s en cada segundo, entonces al finalizar el tercer segundo su rapidez es $v_F=18$ m/s.
- El cuerpo inicia el MRUV desde el reposo, entonces en el primer segundo su recorrido es igual a la mitad del valor de la aceleración y en los siguientes segundos aumenta en 6 m en cada segundo.



$d_1 = \dfrac{a}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ m

$d_2 = d_1 + a = 3+6 = 9$ m

$d_3 = d_2 + a = 9+6 = 15$ m

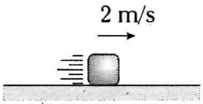
El recorrido en los primeros tres segundos es

$d = d_1 + d_2 + d_3 \rightarrow d = 3\text{ m} + 9\text{ m} + 15\text{ m}$

$d = 27$ m

Problema N.º 1

Un cuerpo aumenta su rapidez uniformemente en 10 m/s cada 2 s. A partir del instante mostrado, determine su recorrido en los primeros 4 s.

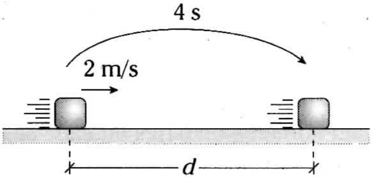


Resolución

Como aumenta uniformemente su rapidez y su trayectoria es rectilínea, el móvil desarrolla un MRUV.

Si cada 2 s su rapidez aumenta en 10 m/s, entonces en 1 s su rapidez aumenta en 5 m/s, por lo tanto, el valor de su aceleración (a) es a=5 m/s^2.

Gráficamente tenemos



El recorrido (d) se determina así

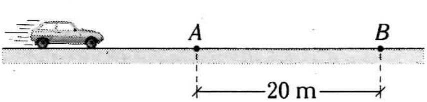
$$d = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$d = 2(4) + \frac{5(4)^2}{2}$$

$$\therefore \quad d = 48 \text{ m}$$

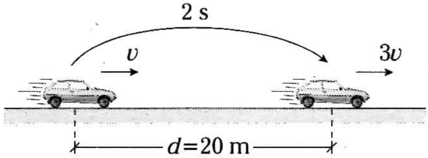
Problema N.º 2

En el gráfico, el auto desarrolla un MRUV y pasa por A y B con una rapidez v y $3v$, respectivamente. Si desde A hasta B demora 2 s, determine v y el valor de la aceleración del auto.



Resolución

De acuerdo al enunciado tenemos



- Determinamos v aplicando la siguiente ecuación

$$d = \left(\frac{v_0 + v_F}{2}\right) \cdot t$$

$$20 = \left(\frac{v + 3v}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{2}$$

$$20 = 4v$$

$$\therefore \quad v = 5 \text{ m/s}$$

- Determinamos el módulo de la aceleración

$$a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

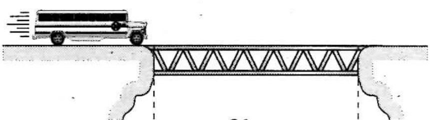
$$a = \frac{3v - v}{2} = \frac{2v}{2}$$

$$a = v$$

$$\therefore \quad a = 5 \text{ m/s}^2$$

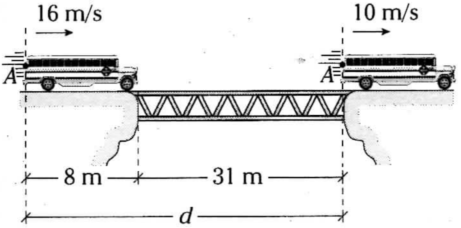
Problema N.º 3

Se muestra un bus de 8 m de longitud que realiza un MRUV. Si este empieza a cruzar el puente con una rapidez de 16 m/s y termina de hacerlo con una rapidez de 10 m/s, determine el módulo de la aceleración del bus.



Resolución

Como el bus desarrolla un MRUV y nos dan su longitud, trabajaremos con un punto que pertenece al bus y que se ubica en su parte posterior, a este punto lo denominaremos A; entonces de acuerdo al enunciado del problema tenemos



La rapidez del bus y del punto A es el mismo en todo instante; por otro lado, notamos que la rapidez del bus disminuye, entonces su movimiento es desacelerado. Luego

$$v_F^2=v_0^2-2ad$$

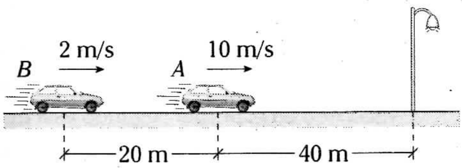
$$(10)^2=(16)^2-2a(39)$$

$$100=256-78a$$

$$\therefore \quad a=2 \text{ m/s}^2$$

Problema N.° 4

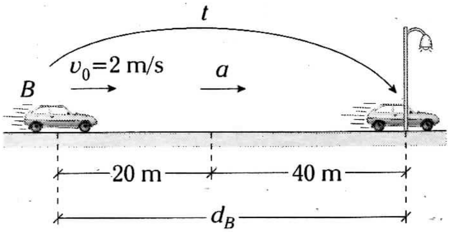
Se muestran dos autos, A y B, que desarrollan MRU y MRUV, respectivamente. Si el auto B pasa por el poste dos segundos antes que A, ¿cuál es el módulo de su aceleración?



Resolución

Decir que el auto B pasa por el poste dos segundos antes que el auto A, equivale a plantear que si el auto B emplea en llegar al poste un tiempo t, el auto A empleará un tiempo t+2.

- Para el auto B que desarrolla un MRUV tenemos



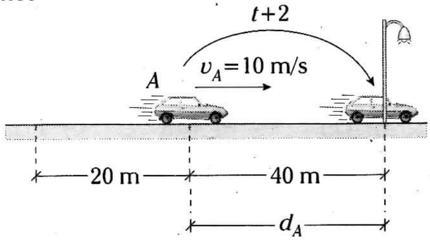
Su recorrido se determina así

$$d_B=V_0\cdot t+\frac{at^2}{2}$$

$$20+40=2\cdot t+\frac{at^2}{2}$$

$$60=2t+\frac{at^2}{2} \qquad \text{(I)}$$

- Para el auto A que desarrolla un MRU tenemos



Su recorrido se determina así

$$d_A=v_A\cdot t_A$$

$$40=10\cdot(t+2)$$

$$4=t+2$$

$$t=2 \text{ s}$$

Finalmente, reemplazamos en (I)

$$60=2(2)+\frac{a(2)^2}{2}$$

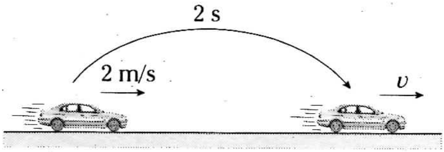
$$60=4+2a$$

$$\therefore \quad a=28 \text{ m/s}^2$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

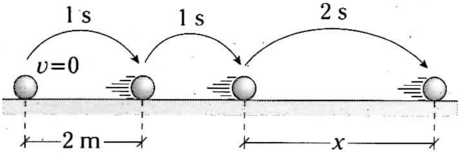
NIVEL BÁSICO

1. El automóvil desarrolla un MRUV con una aceleración de 5 m/s^2. Determine v si su rapidez aumenta.



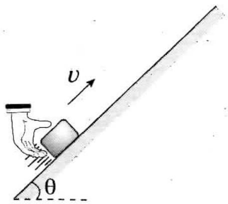
A) 4 m/s B) 7 m/s C) 12 m/s
D) 14 m/s E) 15 m/s

2. El cuerpo se mueve con aceleración constante. Determine x.



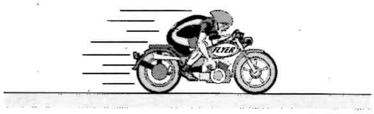
A) 4 m B) 6 m C) 10 m
D) 16 m E) 24 m

3. El bloque se lanza como se muestra y luego de 3 s se detiene. Si en el último segundo de su movimiento recorre 2 m, determine la rapidez con la cual fue lanzado.



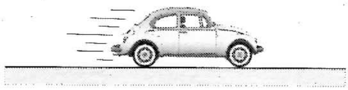
A) 6 m/s B) 9 m/s C) 12 m/s
D) 15 m/s E) 4 m/s

4. Un motociclista inicia un MRUV desde el reposo. Si en los primeros 2 s recorre 20 m, determine cuánto recorre en los siguientes 2 s.



A) 25 m B) 30 m C) 40 m
D) 60 m E) 80 m

5. Un automóvil inicia un MRUV desde el reposo. Si luego de 4 s su rapidez es 8 m/s y en los siguientes 2 s su recorrido es d, determine d.



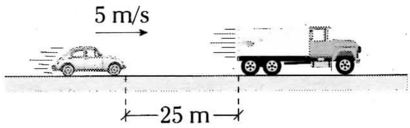
A) 10 m B) 16 m C) 20 m
D) 24 m E) 28 m

NIVEL INTERMEDIO

6. Indique la secuencia correcta de veracidad (V) o falsedad (F) respecto de las siguientes proposiciones.
   I. Si un cuerpo presenta una aceleración constante, podemos garantizar que desarrolla un MRUV.
   II. Si un cuerpo inicia un MRUV desde el reposo con una aceleración de 6 m/s^2, su recorrido en el primer segundo es 3 m.
   III. Si un cuerpo desarrolla un MRUV y su rapidez disminuye a razón de 4 m/s en cada segundo, su recorrido en el último segundo de su movimiento es 2 m.

A) VVV B) FVV C) FFV
D) FVF E) VFV

7. El auto de 2 m de longitud presenta una aceleración constante de 4 m/s^2, mientras que el camión de 5 m de longitud se mueve con una velocidad constante de 10 m/s. Determine luego de cuánto tiempo el auto pasa completamente al camión.



A) 2 s B) 4 s C) 5 s
D) 8 s E) 10 s

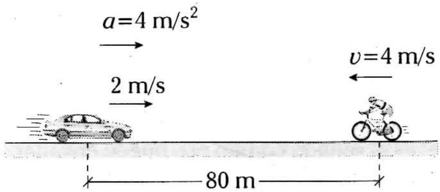
8. Un automóvil se mueve con una rapidez de 36 km/h. El conductor se percata que a 50 m se ubica un bache y aplica los frenos disminuyendo su rapidez a razón de 2 m/s en cada segundo. Determine a qué distancia del bache se detiene si su tiempo de reacción es de 2 s.

A) 1 m B) 2 m C) 4 m
D) 5 m E) 8 m

9. Un tren de 30 m de longitud empieza a ingresar a un túnel con una rapidez de 10 m/s y su parte posterior lo hace con 20 m/s. Si el tren sale completamente del túnel luego de 6 s de haber iniciado su ingreso, determine la longitud del túnel.

A) 120 m B) 100 m C) 90 m
D) 60 m E) 50 m

10. El ciclista mostrado desarrolla un MRU. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir a partir del instante mostrado para que los móviles estén separados 60 m por segunda vez?



A) 3 s B) 5 s C) 7 s
D) 9 s E) 12 s

Caída libre y movimiento vertical de caída libre (MVCL)

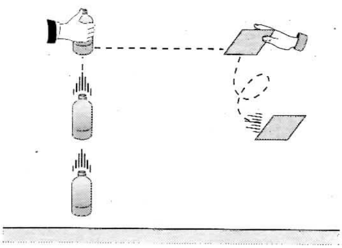
Capítulo IV

Objetivos
- Entender qué es un movimiento de caída libre.
- Conocer y aplicar las características del movimiento vertical de caída libre.

Al soltar de una misma altura y en forma simultánea una botella de vidrio y una hoja de papel, se verifica que la botella llega primero al piso ¿por qué? Si tu respuesta es porque la botella de vidrio tiene mayor masa, este tema nos hará ver que a veces el sentido común nos puede engañar.

Caída libre

Soltamos de una misma altura y en forma simultánea una botella de vidrio y una hoja de papel.



La experiencia nos muestra que la botella desciende describiendo una trayectoria rectilínea y llega primero al piso; mientras que la hoja de papel también desciende pero describiendo una trayectoria curvilínea y empleando mayor tiempo en llegar al piso.

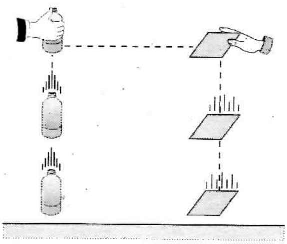
¿Por qué ocurren estas diferencias?

Se deben a la presencia del aire. El aire ofrece una resistencia (oposición) sobre el papel en movimiento y el efecto es el retardo del movimiento y la descripción de una trayectoria curvilínea.
La resistencia del aire también actúa sobre la botella en movimiento pero su efecto es menor.

¿Qué sucede si despreciamos la resistencia del aire?

Sería como quitar el aire de la región donde se mueven los cuerpos, entonces estaríamos asumiendo que los cuerpos se mueven en el vacío. Al existir un vacío, el movimiento que experimentan los cuerpos se debe solo a la atracción terrestre, entonces decimos que los cuerpos experimentan un **movimiento de caída libre**.

En caída libre, la botella de vidrio y la hoja de papel que estamos analizando describen una trayectoria rectilínea y, además, llegan al piso simultáneamente.

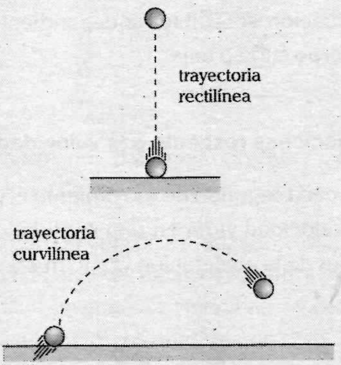


Conclusión

Un cuerpo está en caída libre si su movimiento se debe solo a la atracción terrestre.

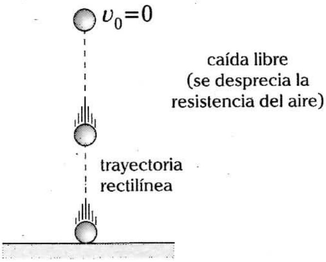
> **NOTA**
>
> No se puede evitar la resistencia del aire, pero para monedas, canicas, piedras, etc., en movimiento la resistencia del aire es despreciable; entonces, al lanzar o soltar estos objetos se les puede considerar en caída libre.

> **OBSERVACIÓN**
>
> Un cuerpo en caída libre puede describir una trayectoria rectilínea o curvilínea.



Movimiento vertical de caída libre (MVCL)

Es aquel movimiento mecánico donde el cuerpo que lo experimenta está en caída libre y describe una trayectoria rectilínea y vertical.



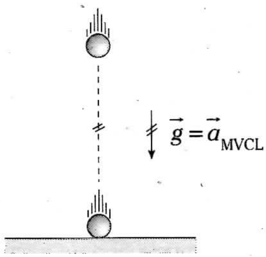
CARACTERÍSTICAS DEL MVCL

- En un movimiento de caída libre cerca de la superficie terrestre, el cuerpo experimenta una aceleración constante a la cual denominamos aceleración de la gravedad $(\vec{g})$.

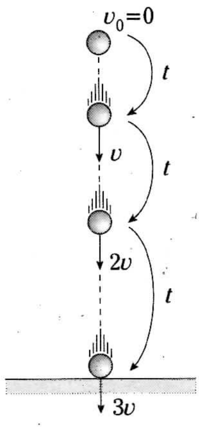
$$\boxed{\vec{a}_{\text{MVCL}} = \vec{g} = \text{constante}}$$

- La dirección de la aceleración de la gravedad $(\vec{g})$ es vertical hacia abajo y su valor es aproximadamente 9,8 m/s^2.

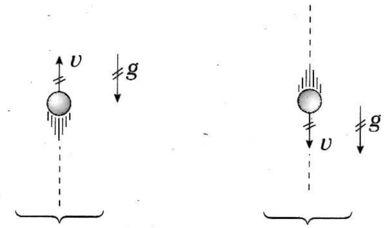
  Para fines prácticos generalmente vamos a considerar: $\vec{g} = 10$ m/s^2.



- En intervalos de tiempos iguales los cambios de velocidad son iguales.



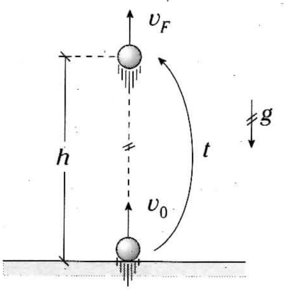
- Si un cuerpo asciende (sube) el valor de su velocidad disminuye, si desciende (baja) el valor de su velocidad aumenta.



ECUACIONES DEL MVCL

En un movimiento vertical de caída libre la trayectoria es rectilínea y la aceleración es constante, entonces estamos frente a un movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV) y las ecuaciones son similares.

Para un cuerpo que desarrolla un MVCL tenemos



donde

- v_0: rapidez inicial
- v_F: rapidez final
- g: aceleración de la gravedad
- t: tiempo
- h: altura

Se verifica las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &v_F=v_0\pm gt \\ &v_F^2=v_0^2\pm 2gh \\ &h=v_0t\pm g\cdot\frac{t^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

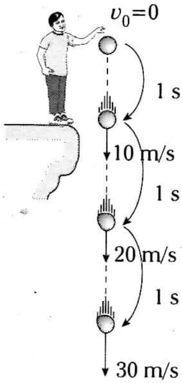
Se emplea el signo
+: si la rapidez aumenta (el cuerpo baja)
–: si la rapidez disminuye (el cuerpo sube)

$$h=\left(\frac{v_0+v_F}{2}\right)\cdot t$$

En la cuarta ecuación solo se tiene el signo (+), esta ecuación se emplea independientemente si el cuerpo sube o baja.

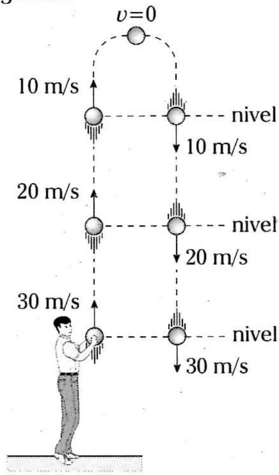
Observaciones respecto a la velocidad

- En cada segundo de movimiento el valor de la velocidad varía en una cantidad igual al valor de la aceleración ($g=10$ m/s^2).



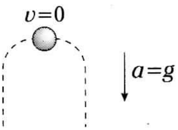
En este caso el valor de la velocidad aumenta en 10 m/s en cada segundo.

- Para un mismo nivel horizontal, la rapidez de ascenso (subida) y descenso (bajada) son iguales.



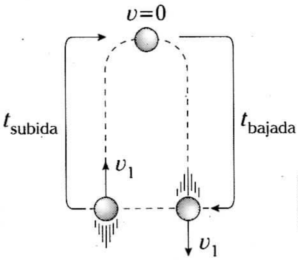
Notamos que para cada nivel la rapidez de subida y de bajada son iguales.

- Cuando un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba y alcanza su altura máxima, en este instante su velocidad es cero pero su aceleración es diferente de cero.



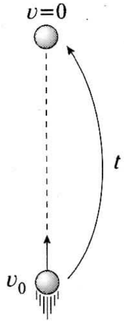
Observaciones respecto al tiempo

- En un MVCL el tiempo de subida y de bajada son iguales.



$$\boxed{t_{subida}=t_{bajada}}$$

- Si un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad cuyo valor es v_0, el tiempo que transcurre hasta que su velocidad se haga cero o alcance su altura máxima se determina de la siguiente manera:

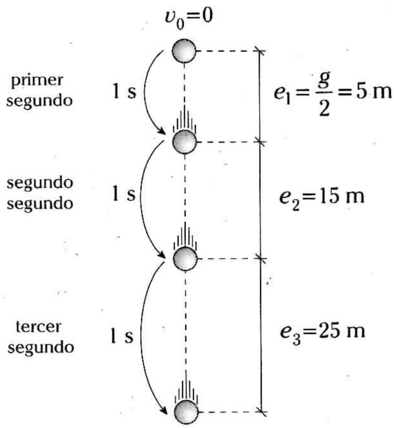


$$\boxed{t=\frac{v_0}{g}}$$

Observaciones respecto al recorrido

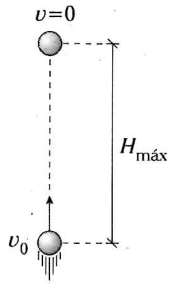
- Si un cuerpo se suelta desde cierta altura, en el primer segundo su recorrido es igual a la mitad del valor de la aceleración. En los siguientes segundos el recorrido aumenta en el valor de la aceleración.

  Si $g=10$ m/s^2, tenemos



- Si un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba su recorrido en cada segundo disminuye en el valor de la aceleración, y en el último segundo de su ascenso su recorrido es igual a la mitad del valor de la aceleración.

- Si un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de módulo v_0, la altura máxima ($H_{máx}$) que alcanza se determina con la siguiente expresión:



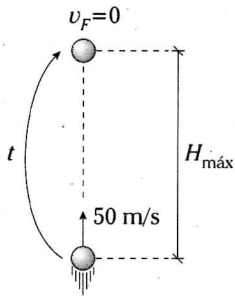
$$\boxed{H_{máx}=\frac{v_0^{\,2}}{2g}}$$

Ejemplos

1. Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez de 50 m/s. Determine en cuánto tiempo alcanza su altura máxima y cuál es el valor de esta altura. $(g=10\text{ m/s}^2)$

Resolución

Graficamos lo planteado en el enunciado.



Luego

- $t=\dfrac{v_0}{g}=\dfrac{50}{10} \rightarrow t=5\text{ s}$

- $H_{máx}=\dfrac{v_0^{\,2}}{2g}=\dfrac{(50)^2}{2(10)} \rightarrow H_{máx}=125\text{ m}$

2. Un cuerpo es lanzado desde el piso con una rapidez de 20 m/s en forma vertical. Determine luego de cuánto tiempo retorna al piso. $(g=10\text{ m/s}^2)$.

Resolución

Como se lanza con 20 m/s emplea en alcanzar su altura máxima 2 s, recuerde que en cada segundo la rapidez disminuye en 10 m/s.

Se sabe, por otro lado, que los tiempos de subida y de bajada son iguales, por lo tanto, emplea 2 s en descender.

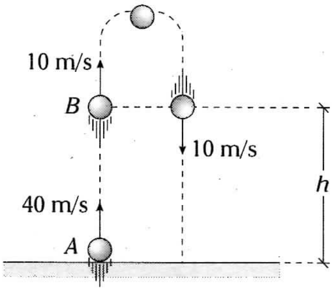
Finalmente, el tiempo que emplea en retornar al piso desde que fue lanzado es

$$t_{total}=4\text{ s}$$

3. Un cuerpo se lanza hacia arriba con 40 m/s. ¿A qué altura se encuentra cuando su rapidez es 10 m/s por segunda vez? $(g=10\text{ m/s}^2)$.

Resolución

El cuerpo alcanza una rapidez de 10 m/s por primera vez cuando está ascendiendo y por segunda vez cuando desciende. Gráficamente tenemos



Recuerde que para un mismo nivel horizontal la rapidez de subida y bajada es igual.

Nos piden determinar h.

Para el tramo AB en el ascenso tenemos

$$v_F^2=v_0^2-2gh$$

$$v_B^2=v_A^2-2gh$$

$$10^2=40^2-2(10)h$$

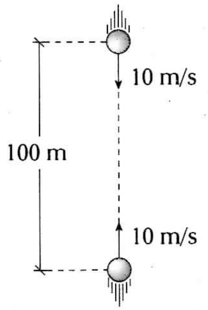
$$100=1600-20h$$

$$20h=1600-100$$

$$20h=1500$$

$$\therefore\ h=75\text{ m}$$

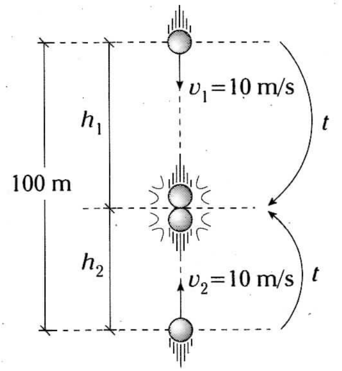
4. Dos cuerpos son lanzados en la misma vertical tal como se muestra en la gráfica. Determine luego de cuánto tiempo los cuerpos chocan. $(g=10\text{ m/s}^2)$.



Resolución

Desde el instante mostrado hasta que impactan, para ambos cuerpos transcurre el mismo tiempo t. Asimismo el cuerpo que desciende recorre h_1 y el que asciende recorre h_2.

Graficamos



Nos piden determinar t.

Del gráfico tenemos

$$h_1+h_2=100$$

$$\left(v_1t+\cancel{g}\frac{\cancel{t^2}}{\cancel{2}}\right)+\left(v_2t-\cancel{g}\frac{\cancel{t^2}}{\cancel{2}}\right)=100$$

$$v_1t+v_2t=100$$

$$10t+10t=100$$

$$20t=100$$

$$\therefore\ t=5\text{ s}$$

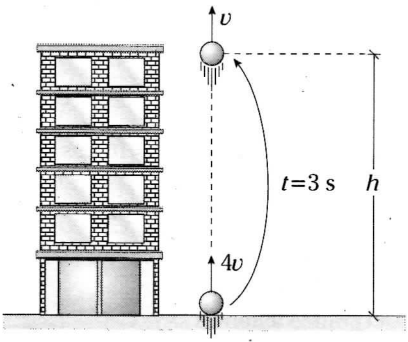
Problemas Resueltos

Problema N.º 1

Desde la base de un edificio se lanza verticalmente hacia arriba una moneda, cuando la moneda está a la altura de la azotea su rapidez es la cuarta parte de su rapidez de lanzamiento. Determine la altura del edificio si la moneda demora 3 s en ir de la base a la azotea del edificio. $(g=10 \text{ m/s}^2)$

Resolución

Graficando el enunciado tenemos



Nos piden determinar h.

Se sabe

$$h=\left(\frac{v_0+v_F}{2}\right)\cdot t \rightarrow h=\left(\frac{4v+v}{2}\right)\cdot 3$$

$$h=\frac{15}{2}v \qquad \text{(I)}$$

Además, en el ascenso

$$v_F=v_0-gt \rightarrow v=4v-10(3)$$

$$v=4v-30$$

$$v=10 \text{ m/s}$$

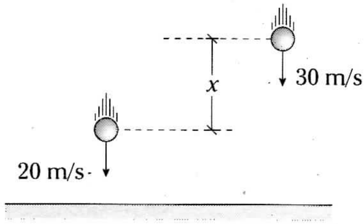
Finalmente, reemplazamos en (I)

$$h=\frac{15}{2}\cdot(10)$$

$\therefore \quad h=75$ m

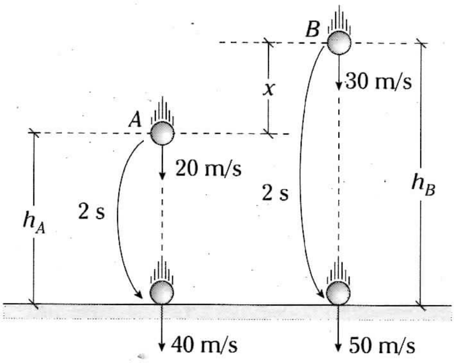
Problema N.º 2

A partir del instante mostrado las esferas llegan al piso simultáneamente luego de 2 s. Determine el valor de x. $(g=10 \text{ m/s}^2)$.



Resolución

En este caso, la rapidez de los cuerpos aumenta en 10 m/s en cada segundo, entonces, luego de 2 s la esfera de la izquierda tendrá una rapidez de 40 m/s y la de la derecha 50 m/s.



Del gráfico tenemos

$$h_B=x+h_A$$

$$\left(\frac{30+50}{2}\right)\cdot 2=x+\left(\frac{20+40}{2}\right)\cdot 2$$

$$80=x+60$$

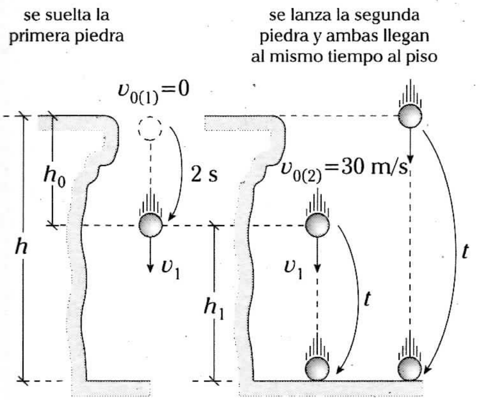
$\therefore \quad x=20$ m

Problema N.º 3

Una piedra cae a partir del reposo desde la cumbre de un elevado despeñadero. Una segunda es lanzada hacia abajo desde la misma altura 2 s después con una velocidad inicial de 30 m/s. Si ambas piedras golpean el suelo simultáneamente, ¿cuál es la altura del despeñadero? $(g=10\ \text{m/s}^2)$

Resolución

Interpretamos gráficamente el enunciado.



Luego de 2 s de soltar la primera piedra su rapidez es 20 m/s y su recorrido es 20 m (en el primer segundo recorre 5 m y en el siguiente recorre 15 m), entonces

$h_0=20$ m

$v_1=20$ m/s

Nos piden determinar la altura h del despeñadero.

- Para la segunda piedra tenemos

$$d=v_{0(2)}\cdot t+g\cdot\frac{t^2}{2}$$

$$h=30t+5t^2 \qquad \text{(I)}$$

Nos falta conocer el tiempo t.

- Del gráfico tenemos

$$h=h_0+h_1 \rightarrow h=20+\left(v_1\cdot t+g\cdot\frac{t^2}{2}\right)$$

$$30t+\cancel{5t^2}=20+\left(20t+\cancel{5t^2}\right)$$

$$10t=20 \rightarrow t=2\ \text{s}$$

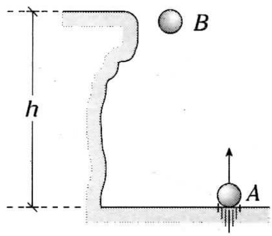
Reemplazamos en (I)

$$h=30(2)+5(2)^2$$

$$\therefore\ h=80\ \text{m}$$

Problema N.º 4

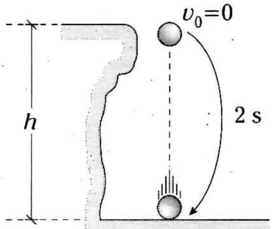
En el momento que la esfera A se lanza con 10 m/s, se suelta la esfera B. Si ambas llegan simultáneamente al piso, determine h. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Como el cuerpo A se lanza con 10 m/s hacia arriba, emplea 1 s en alcanzar su altura máxima y 1 s adicional para retornar al piso. Si ambos cuerpos llegan simultáneamente al piso, entonces el cuerpo B llega al piso en 2 s.

Gráficamente tenemos



La altura h se determina

$$h=v_0t+\frac{gt^2}{2} \rightarrow h=0\cancel{(t)}+\frac{10(2)^2}{2}$$

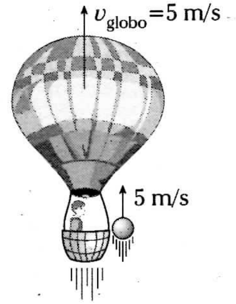
$$\therefore\ h=20\ \text{m}$$

Problema N.º 5

De un globo aerostático que se está elevando con velocidad constante de 5 m/s, se lanza una bolita hacia arriba con una velocidad de 15 m/s respecto al globo. Determine la distancia vertical que separa a la bolita del globo luego de 5 s del lanzamiento. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

Resolución

- Antes de lanzar la bolita su rapidez y la del globo es la misma e igual a 5 m/s.



Antes de lanzar la bolita

$$v_{\text{globo}}=v_{\text{bolita}}=5\ \text{m/s}$$

- Al lanzar la bolita se le imprime una velocidad de 15 m/s respecto al globo, esta es una velocidad adicional a la que tenía antes de ser lanzada, entonces la rapidez de lanzamiento de la bolita vista desde tierra será

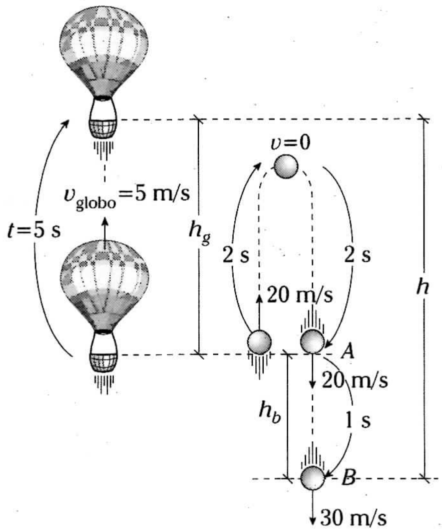
$$v_{\text{lanzamiento}}=v_{\substack{\text{antes de}\\ \text{lanzarlo}}}+v_{\substack{\text{respecto}\\ \text{al globo}}}$$

$$v_{\text{lanzamiento}}=5+15$$

$$v_{\text{lanzamiento}}=20\ \text{m/s}$$

La bolita, luego de 2 s de ser lanzada alcanza su altura máxima e inicia su descenso ubicándose en 2 s adicionales a su posición de lanzamiento pero descendiendo (punto A). Finalmente, transcurrido 1 s adicional se encontrará por debajo de su punto de lanzamiento (posición B).

Gráficamente tenemos



Nos piden la separación vertical de la esferita y el globo luego de 5 s, es decir, nos piden h.

Del gráfico tenemos

$$h=h_b+h_g$$

$$h=\left(\frac{v_A+v_B}{2}\right)t_{AB}+v_{\text{globo}}\cdot t$$

$$h=\left(\frac{20+30}{2}\right)\cdot 1+5(5)$$

$$h=25\ \text{m}+25\ \text{m}$$

$$\therefore\ \ h=50\ \text{m}$$

NIVEL BÁSICO

1. A 100 m del piso se suelta una canica. Determine su rapidez y a qué altura del piso se encontrará al cabo de 2,5 s. $(g=10\ m/s^2)$.

A) 25 m/s; 32,5 m
B) 2,5 m/s; 67,5 m
C) 25 m/s; 68,75 m
D) 5 m/s; 75 m
E) 25 m/s; 31,25 m

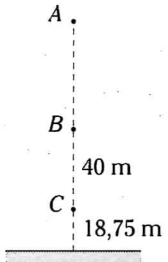
2. Una pulga logra dar un salto realizando un MVCL. Si alcanza una altura máxima de 45 cm, determine su rapidez en el momento que se desprende del piso. $(g=10\ m/s^2)$.

A) 1 m/s B) 2 m/s C) 3 m/s
D) 4 m/s E) 5 m/s

3. Desde el borde de la azotea de un edificio se lanza, verticalmente hacia arriba, una pequeña esfera metálica, al cabo de 7 s llega al punto medio del edificio. Si la esfera fue lanzada con 25 m/s, determine la altura del edificio. $(g=10\ m/s^2)$.

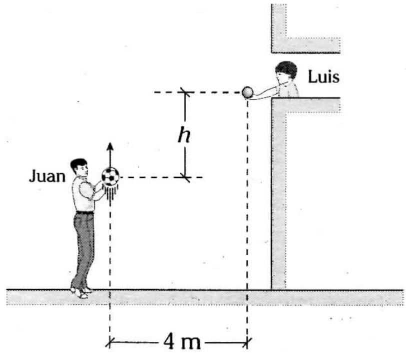
A) 90 m B) 100 m C) 120 m
D) 130 m E) 140 m

4. En el punto A se suelta una canica, esta demora 1 s en ir desde B hasta C. Determine a qué altura del piso se encuentra el punto A. $(g=10\ m/s^2)$



A) 100,25 m B) 90 m C) 140 m
D) 120 m E) 150 m

5. En el instante mostrado Juan lanza una pequeña pelota verticalmente hacia arriba con 20 m/s, luego de 2 s Luis lanza una billa verticalmente hacia arriba con 10 m/s. Si 1 s después que Luis lanza una billa los móviles están separados 5 m (la billa está debajo de la pelota), determine la altura h. $(g=10\ m/s^2)$.



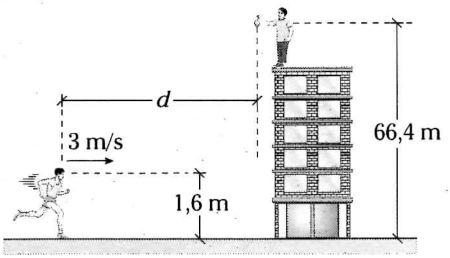
A) 7 m B) 7,5 m C) 8 m
D) 10 m E) 2 m

NIVEL INTERMEDIO

6. Desde el borde de la ventana de un edificio, se cae una esfera de vidrio, esta demora 0,2 s en pasar frente a la ventana de abajo que tiene una altura de 1,6 m. Determine a qué distancia del punto del cual cayó la esfera se encuentra el borde superior de la ventana de abajo. $(g=10\ m/s^2)$.

A) 2 m B) 2,35 m C) 2,45 m
D) 2,6 m E) 2,75 m

7. En el instante mostrado un estudiante suelta un huevo el cual impacta en su compañero que realiza MRU. Halle la distancia d. $(g=10 \text{ m/s}^2)$



A) 5,2 m B) 10,8 m C) 6,4 m
D) 6,3 m E) 9 m

8. Un joven se encuentra ubicado en una plataforma que se eleva con rapidez constante de 10 m/s. En cierto instante el joven lanza una moneda verticalmente hacia arriba con 20 m/s, respecto de la plataforma. Determine luego de cuánto tiempo la moneda regresa a sus manos. $(g=10 \text{ m/s}^2)$.

A) 5 s B) 4 s C) 3 s
D) 2 s E) 1 s

9. En cierto instante se lanza desde una altura h una canica verticalmente hacia arriba con 20 m/s, transcurridos 3 segundos se suelta otra canica en el punto desde el cual se lanzó la primera. Halle h de manera que las canicas impacten simultáneamente en el piso. $(g=10 \text{ m/s}^2)$

A) 3,25 m
B) 7,25 m
C) 11,25 m
D) 7,5 m
E) 22,5 m

10. Una moneda se suelta a una altura h del piso. En el último segundo de su caída libre recorre una distancia de $h/4$. Calcule la altura h. Considere $\sqrt{3}=1{,}7$ y $g=10 \text{ m/s}^2$.

A) 226 m B) 246 m C) 276 m
D) 296 m E) 316 m

Movimiento parabólico de caída libre (MPCL)

Capítulo V

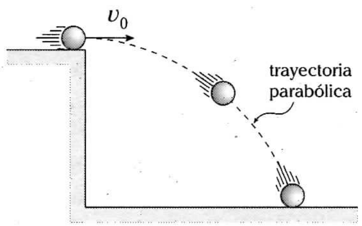
Objetivo

- Entender y describir el movimiento parabólico de caída libre.

Definición

El movimiento parabólico de caída libre (MPCL) es aquel movimiento mecánico que desarrolla un cuerpo experimentando caída libre y describiendo una trayectoria parabólica.

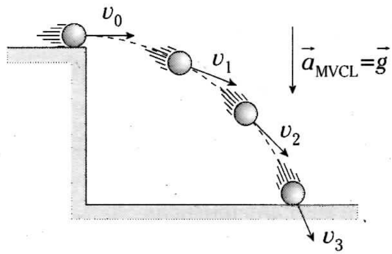
Para el caso de un cuerpo que se lanza horizontalmente se tiene



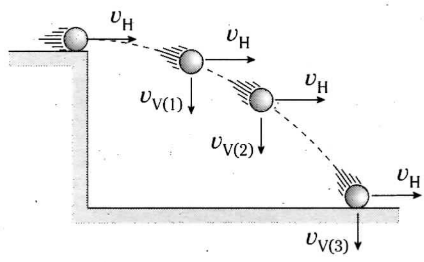
En este caso se desprecia la resistencia del aire y el cuerpo experimenta una aceleración constante, debido a estas condiciones el cuerpo describe una trayectoria parabólica.

Antes de pasar a describir el MPCL, señalaremos dos aspectos que se deben tomar en cuenta

- Se conoce que en todo movimiento la velocidad del cuerpo es tangente a la trayectoria; por otro lado, si el movimiento es de caída libre la aceleración que experimenta el cuerpo es la aceleración de la gravedad $(\vec{g})$.



- Describir el movimiento del cuerpo a lo largo de su trayectoria parabólica no es tan sencillo, entonces para facilitar su descripción se sugiere descomponer la velocidad del cuerpo en dos componentes, un componente horizontal (v_H) y otro vertical (v_V).



Luego se verifica lo siguiente:

- El componente horizontal de la velocidad (v_H) se mantiene constante.
- El componente vertical de la velocidad (v_V) cambia su valor al transcurrir el tiempo debido a que la aceleración de la gravedad $(\vec{g})$ que experimenta el cuerpo es vertical.

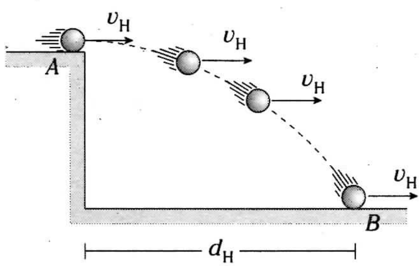
Proyección del movimiento parabólico de caída libre

La descomposición de la velocidad nos permite analizar el movimiento parabólico del cuerpo en dos direcciones, para ello realizamos la proyección de este movimiento en la horizontal y vertical.

Proyección horizontal

Como el componente horizontal de la velocidad (v_H) se mantiene constante, entonces la proyección horizontal del movimiento parabólico es un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y se verifican sus características.

- El valor del desplazamiento horizontal del cuerpo (d_H) es proporcional al tiempo transcurrido.



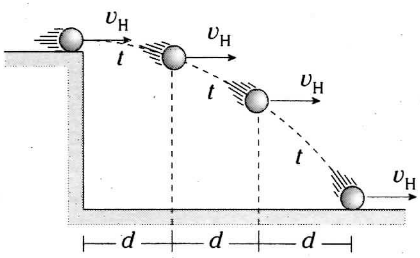
$$\boxed{d_H = v_H \cdot t_{AB}}$$

donde

- d_H: valor del desplazamiento horizontal
- v_H: componente horizontal de la velocidad
- t_{AB}: tiempo transcurrido

- En intervalos de tiempos iguales el valor de los desplazamientos horizontales es el mismo.

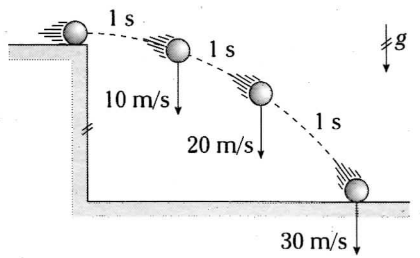
Gráficamente se tiene



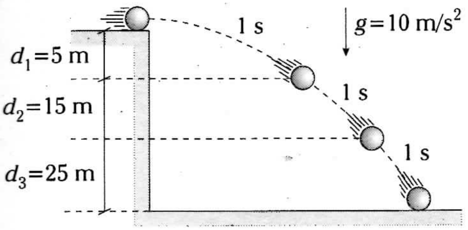
Proyección vertical

Debido a que el cuerpo experimenta una aceleración constante, que es la aceleración de la gravedad $(\vec{g})$, la proyección vertical de este movimiento es un movimiento vertical de caída libre (MVCL) y se verifican sus características.

- En cada segundo de movimiento el valor del componente vertical de la velocidad (v_V) varía en una cantidad igual al valor de la aceleración de la gravedad. Para nuestro caso consideremos $g=10$ m/s^2.



- El valor de los desplazamientos verticales varía de forma similar al del movimiento vertical de caída libre. Para $g=10$ m/s^2 tenemos



Donde

$$d_1 = \frac{g}{2} = 5 \text{ m}$$

$$d_2=d_1+g=15 \text{ m}$$

$$d_3=d_2+g=25 \text{ m}$$

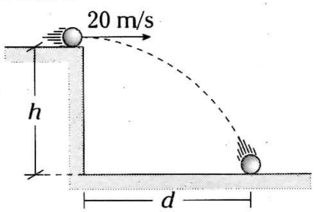
Notamos que inicialmente el valor del componente vertical de la velocidad es cero porque el cuerpo se lanza horizontalmente, entonces en el primer segundo el valor de su desplazamiento vertical es igual a la mitad del valor de su aceleración, es decir, 5 m.

Conclusión

Para facilitar el estudio de un MPCL se realiza la descomposición de la velocidad del cuerpo en dos componentes (horizontal y vertical) y luego se proyecta el movimiento en la horizontal y vertical; la proyección horizontal es un MRU y la proyección vertical es un MVCL.

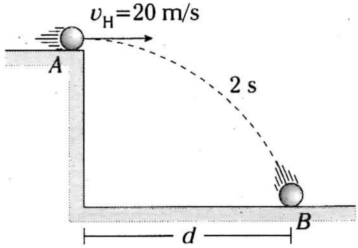
Ejemplo

Un cuerpo se lanza como se muestra e impacta en el plano horizontal luego de 2 s. Determine d y h. $(g=10$ m/s$^2)$.



Resolución

- Como la proyección horizontal del MPCL es un MRU, se tiene

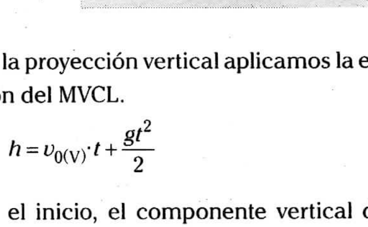


$$d=v_H \cdot t_{AB}$$

$$d=20(2)$$

$$\therefore \; d=40 \text{ m}$$

- Además, la proyección vertical del movimiento parabólico de caída libre es un MVCL, luego se tiene



En la proyección vertical aplicamos la ecuación del MVCL.

$$h = v_{0(V)} \cdot t + \frac{gt^2}{2}$$

En el inicio, el componente vertical de la velocidad $(v_{0(V)})$ es cero, y el tiempo de movimiento del cuerpo es 2 s.

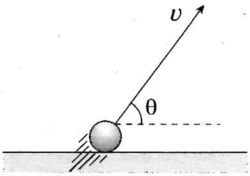
Reemplazando tenemos

$$h = 0(2) + \frac{10(2)^2}{2}$$

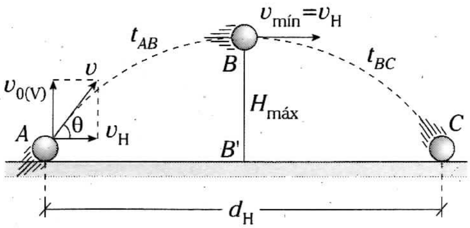
$$\therefore \; h = 20 \text{ m}$$

Descripción de un caso general

Se presenta cuando un cuerpo es lanzado con una velocidad que forma un ángulo agudo con la horizontal tal como se muestra.



La trayectoria parabólica que describe el cuerpo es la siguiente



En este movimiento se verifica lo siguiente:

- Los tiempos de subida y de bajada son iguales.

$$t_{subida}=t_{bajada}$$

$$t_{AB}=t_{BC}$$

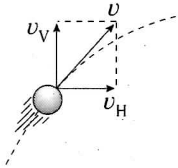
- Existe simetría del movimiento respecto a la línea *BB'*.

- El tiempo de vuelo (t_{vuelo}) es aquel en que el cuerpo se mantiene en movimiento.

$$t_{vuelo}=t_{AB}+t_{BC}$$

$$t_{vuelo}=t_{AC}$$

- Podemos descomponer la velocidad del cuerpo para cualquier instante de su movimiento.



- Para el caso que estamos describiendo, el cuerpo alcanza su rapidez mínima en la posición más alta de su trayectoria (posición *B*). Esta rapidez mínima es igual al valor de la componente horizontal de la velocidad.

$$v_{mín}=v_H$$

- El alcance horizontal del cuerpo (d_H) se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{d_H=v_H\cdot t_{vuelo}}$$

donde

- d_H: alcance horizontal
- v_H: valor del componente horizontal de la velocidad
- t_{vuelo}: tiempo de vuelo

- La altura máxima ($H_{máx}$) que alcanza el cuerpo se evalúa con la siguiente expresión:

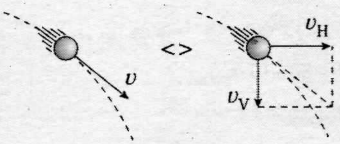
$$\boxed{H_{máx}=\frac{v_{0(V)}^{\ 2}}{2g}}$$

donde

- $H_{máx}$: altura máxima
- $v_{0(V)}$: valor inicial del componente vertical de la velocidad
- g: aceleración de la gravedad

NOTA

No debemos olvidar que la velocidad del cuerpo $(\vec{v})$ es en todo instante tangente a la trayectoria y su valor se determina aplicando la siguiente expresión.



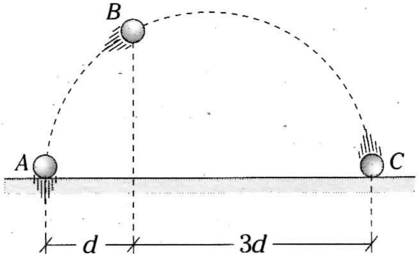
$$\boxed{v=\sqrt{{v_H}^2+{v_V}^2}}$$

donde

- v: valor de la velocidad del cuerpo
- v_H: valor del componente horizontal de la velocidad
- v_V: valor de la componente vertical de la velocidad

Ejemplos

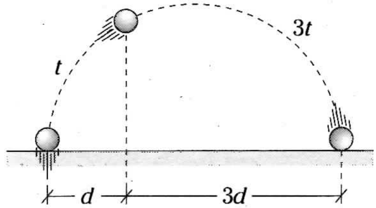
1. El cuerpo describe un MPCL y emplea 2 s para ir desde A hasta B. Determine el tiempo de vuelo. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

En la proyección horizontal, los desplazamientos son proporcionales al tiempo transcurrido. Para nuestro caso la relación de desplazamientos horizontales es de 1 a 3, entonces el tiempo transcurrido está en la misma proporción.

Gráficamente tenemos



En este caso el tiempo de vuelo (t_{vuelo}) es

$$t_{\text{vuelo}}=t_{AB}+t_{BC}$$

$$t_{\text{vuelo}}=t+3t$$

$$t_{\text{vuelo}}=4t \qquad \text{(I)}$$

Por dato del ejercicio, tenemos

$$t_{AB}=2\ \text{s}$$

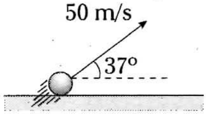
$$t=2\ \text{s}$$

Reemplazamos en (I)

$$t_{\text{vuelo}}=4(2)$$

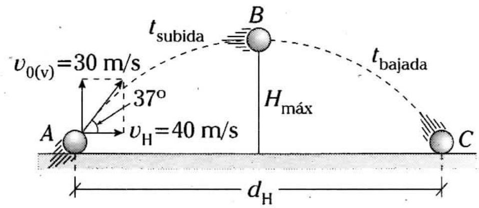
$$\therefore\ t_{\text{vuelo}}=8\ \text{s}$$

2. Un cuerpo es lanzado como se indica y describe un MPCL. Determine su altura máxima y su alcance horizontal máximo. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



Resolución

Bosquejamos la trayectoria que describiría el cuerpo y realizamos la descomposición de su velocidad de lanzamiento.



- Determinamos la altura máxima ($H_{máx}$)

$$H_{máx}=\frac{v_{0(V)}^{2}}{2g}$$

$$H_{máx}=\frac{(30)^2}{2(10)}=\frac{900}{20}$$

$\therefore\ H_{máx}=45$ m

- Determinamos el alcance horizontal (d_H)

$$d_H=v_H\cdot t_{vuelo} \qquad \text{(I)}$$

En el gráfico vemos que el componente horizontal de la velocidad es $v_H=40$ m/s.

Para determinar el tiempo de vuelo, evaluamos previamente el tiempo de subida y para ello vamos a trabajar solo con la proyección vertical del movimiento. Como al inicio el componente vertical de la velocidad $(v_{0(V)})$ es 30 m/s, para el trayecto $\overset{\frown}{AB}$ tenemos

$$v_{F(V)}=v_{0(V)}-g\cdot t_{subida}$$

$$0=30-10\cdot t_{subida}$$

$$t_{subida}=3\text{ s}$$

Luego

$$t_{vuelo}=t_{subida}+t_{bajada}$$

Como los tiempos de subida y de bajada son iguales, se tiene

$$t_{vuelo}=2t_{subida}$$

$$t_{vuelo}=2(3)$$

$$t_{vuelo}=6\text{ s}$$

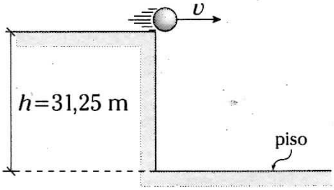
Finalmente, reemplazamos en (I)

$$d_H=40(6)$$

$\therefore\ d_H=240$ m

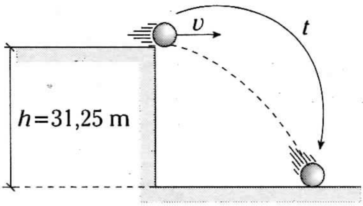
Problema N.º 1

Una esferita se lanza como se muestra. Determine luego de cuánto tiempo llega al piso. (g=10 m/s^2)



Resolución

Graficamos la trayectoria del móvil.



Nos piden t: tiempo.

Para la proyección vertical del MPCL

$$d_V = \upsilon_{0(V)}t + \frac{gt^2}{2} \qquad \text{(I)}$$

Como la velocidad inicial es horizontal: $\upsilon_{0(V)}=0$

Reemplazamos en (I)

$$31,25 = 0 \cdot t + \frac{10t^2}{2}$$

$$31,25 = \frac{10t^2}{2}$$

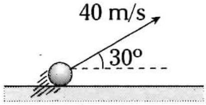
$$\frac{(31,25)\cdot(2)}{10} = t^2$$

$$6,25 = t^2$$

$$\therefore \quad t = 2,5 \text{ s}$$

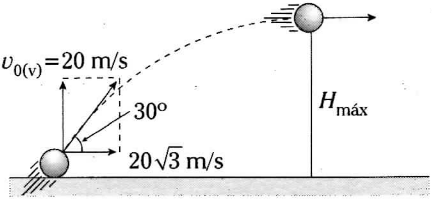
Problema N.º 2

Un cuerpo es lanzado como se muestra. Determine luego de cuánto tiempo alcanza su altura máxima y el valor de esta altura. (g=10 m/s^2).



Resolución

Realizamos la descomposición de la velocidad de lanzamiento.



- Como la componente vertical de la velocidad durante el lanzamiento tiene un valor de 20 m/s, entonces el cuerpo alcanza su altura máxima en un tiempo

  t=2 s

- Determinamos su altura máxima

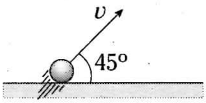
$$H_{máx} = \frac{\upsilon_{0(V)}^2}{2g}$$

$$H_{máx} = \frac{(20)^2}{2(10)}$$

$$\therefore \quad H_{máx}=20 \text{ m}$$

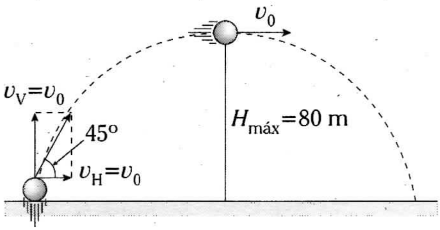
Problema N.º 3

El cuerpo es lanzado como se indica y describe un MPCL. Si alcanza una altura máxima de 80 m, determine su rapidez de lanzamiento. (g=10 m/s^2)



Resolución

Llevamos a un gráfico el enunciado del problema y realizamos la descomposición de la velocidad de lanzamiento.



- Como el ángulo de lanzamiento es 45°, en este instante los componentes de la velocidad tienen el mismo valor.

  $v_H=v_V=v_0$

- Determinamos la rapidez de lanzamiento

  $$v=\sqrt{{v_H}^2+{v_V}^2}$$

  $$v=\sqrt{{v_0}^2+{v_0}^2}$$

  $$v=v_0\sqrt{2} \qquad \text{(I)}$$

- Determinamos la altura máxima ($H_{máx}$)

  $$H_{máx}=\frac{{v_V}^2}{2g}$$

  $$80=\frac{{v_0}^2}{2(10)}$$

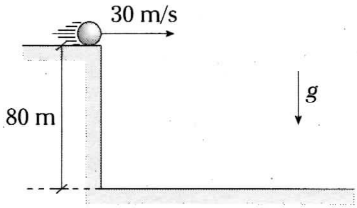
  $$v_0=40 \text{ m/s}$$

  Reemplazamos en (I)

  $$\therefore \quad v=40\sqrt{2} \text{ m/s}$$

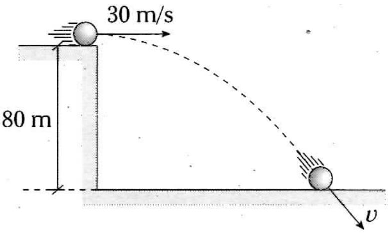
Problema N.º 4

El cuerpo es lanzado como se muestra. Determine con qué rapidez impacta en el piso si experimenta un MPCL. (g=10 m/s^2).

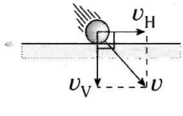


Resolución

Graficamos al cuerpo un instante antes de su impacto.



Nos piden determinar v.
Realizamos la descomposición de la velocidad con la cual el cuerpo llega al piso.



Donde

$$v=\sqrt{{v_H}^2+{v_V}^2} \qquad \text{(I)}$$

- En un MPCL la componente horizontal de la velocidad se mantiene constante, luego

  v_H=30 m/s

- En la proyección vertical del movimiento se verifica

$$v_{F(V)}^2 = v_{0(V)}^2 + 2gH$$

Como el cuerpo fue lanzado horizontalmente, la componente vertical inicial de la velocidad $(v_{0(V)})$ es cero, entonces

$$v_V{}^2 = 0 + 2(10)(80)$$

$$v_V = 40 \text{ m/s}$$

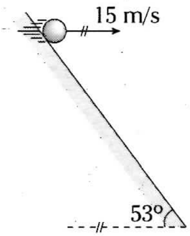
Finalmente, reemplazamos en (I)

$$v = \sqrt{30^2 + 40^2}$$

$$\therefore \quad v = 50 \text{ m/s}$$

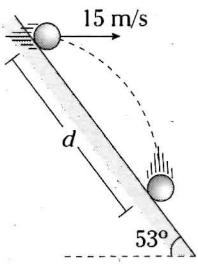
Problema N.º 5

El cuerpo es lanzado horizontalmente. Determine a qué distancia de su punto de lanzamiento impacta. $(g = 10 \text{ m/s}^2)$.



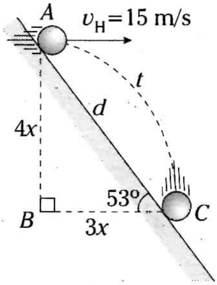
Resolución

El cuerpo describe la trayectoria que se muestra.



Nos piden determinar d.

Aprovechamos el ángulo de 53° y trazamos líneas discontinuas formando el triángulo rectángulo ABC.



De acuerdo a la proporción de los catetos del triángulo se tiene

$$d = 5x \qquad \text{(I)}$$

- En la proyección horizontal

$$d_H = v_H \cdot t \rightarrow 3x = 15 \cdot t$$

$$x = 5t \qquad \text{(II)}$$

- En la proyección vertical

$$d_V = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \rightarrow 4x = 0 + \frac{10t^2}{2}$$

$$4x = 5t^2 \qquad \text{(III)}$$

Dividimos (II) entre (III)

$$\frac{x}{4x} = \frac{5t}{5t^2} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{t}$$

$$t = 4 \text{ s}$$

Reemplazamos en (II)

$$x = 5(4)$$

$$x = 20 \text{ m}$$

Finalmente en (I)

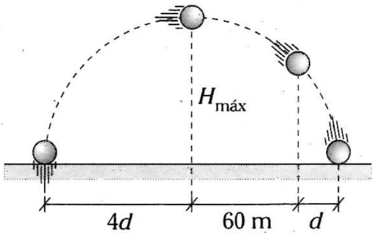
$$d = 5(20)$$

$$\therefore \quad d = 100 \text{ m}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

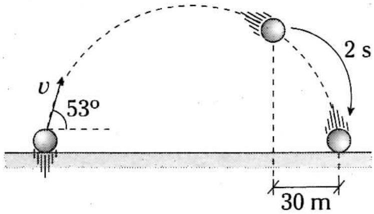
NIVEL BÁSICO

1. El cuerpo mostrado desarrolla un MPCL. Determine su alcance horizontal.



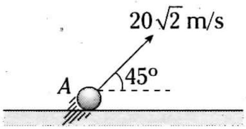
A) 120 m B) 140 m C) 160 m
D) 180 m E) 200 m

2. El cuerpo es lanzado como se muestra y experimenta un MPCL. Determine su rapidez de lanzamiento v. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) 15 m/s B) 25 m/s C) 45 m/s
D) 50 m/s E) 60 m/s

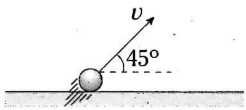
3. Si el cuerpo es lanzado en A y experimenta un MPCL, determine su velocidad luego de 3,5 s. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



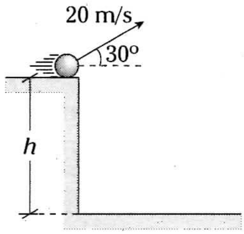
A) 20 m/s B) 25 m/s C) 30 m/s
D) 40 m/s E) 50 m/s

4. El cuerpo es lanzado como se muestra y luego de 1 s se encuentra a 25 m de altura. Determine su altura máxima y el alcance horizontal. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) 45 m; 180 m
B) 30 m; 120 m
C) 25 m; 90 m
D) 50 m; 150 m
E) 60 m; 210 m



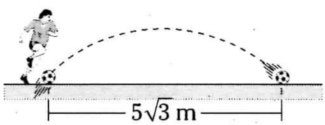
5. A partir del instante mostrado transcurren 4 s para que el cuerpo impacte en el plano horizontal. Determine H si el cuerpo experimenta un movimiento de caída libre. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) 15 m B) 25 m C) 30 m
D) 40 m E) 50 m

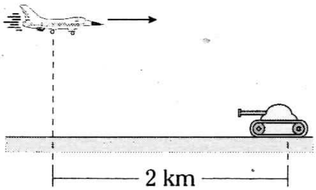
NIVEL INTERMEDIO

6. Se muestra la trayectoria parabólica de un balón luego de ser lanzado. Si la rapidez de impacto es el doble de su rapidez en la parte más alta de su trayectoria, ¿con qué rapidez fue lanzado el balón? $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



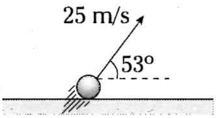
A) 5 m/s B) 10 m/s C) 15 m/s
D) 20 m/s E) 25 m/s

7. Un tanque de guerra se encuentra en reposo sobre el desierto. Si en el instante mostrado desde el avión que se mueve con 200 m/s se suelta un proyectil e impacta en el tanque, determine a qué altura se desplaza el avión. ($g=10$ m/s^2)



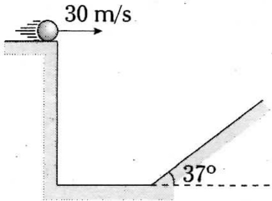
A) 250 m B) 500 m C) 750 m
D) 1000 m E) 1200 m

8. Si el cuerpo experimenta un MPCL, determine la relación entre su altura máxima y su alcance horizontal. ($g=10$ m/s^2).



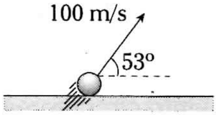
A) 1/6 B) 1/4 C) 1/2
D) 1/5 E) 1/3

9. El cuerpo lanzado desde el acantilado impacta en forma perpendicular en el plano inclinado. Determine el tiempo que transcurre desde que el cuerpo abandona el acantilado hasta que impacta. ($g=10$ m/s^2).



A) 2 s B) 3 s C) 2,5 s
D) 4 s E) 6 s

10. Luego de ser lanzado el cuerpo experimenta un MPCL. Determine cuánto tiempo debe transcurrir a partir del instante mostrado hasta que su velocidad y aceleración formen un ángulo de 53°. ($g=10$ m/s^2).



A) 5 s B) 8 s C) 10 s
D) 12,5 s E) 17,5 s

Movimiento curvilíneo: movimiento circunferencial uniforme (MCU)

Capítulo VI

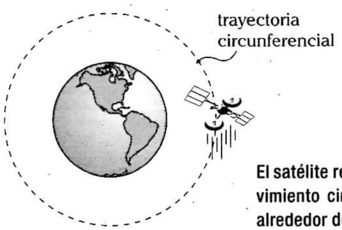
OBJETIVOS

- Entender qué es un movimiento circunferencial.
- Conocer las características del movimiento circunferencial uniforme.

A nuestro alrededor es común observar cuerpos en movimiento cuyas trayectorias no son rectas sino curvas, en estos casos decimos que los cuerpos experimentan movimientos curvilíneos. En este capítulo veremos un caso particular y relevante del movimiento curvilíneo, que es el movimiento circunferencial.

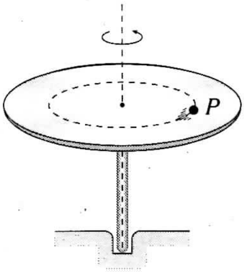
Movimiento circunferencial

El movimiento circunferencial recibe este nombre porque el cuerpo que lo experimenta describe una trayectoria circunferencial. Este tipo de movimiento podemos encontrarlo en mecanismos como engranajes, poleas, en el movimiento de satélites alrededor de la Tierra, entre otros.

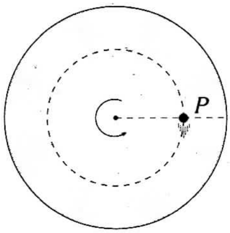


El satélite realiza un movimiento circunferencial alrededor de la Tierra.

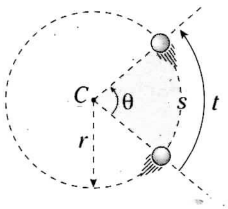
Veamos el caso de un disco que se mueve dando vueltas alrededor de un eje que pasa por su centro, tal como se muestra a continuación.

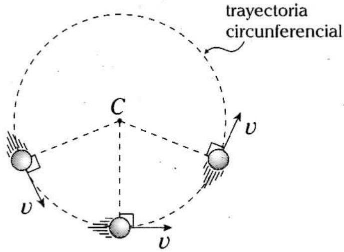


Si una persona visualiza el movimiento del disco desde la parte superior, observará que el punto P del disco (que podría ser una tachuela clavada) describe una trayectoria circunferencial.



En un movimiento circunferencial tenemos





donde

- *C*: centro de la trayectoria circunferencial
- *r*: radio de la trayectoria circunferencial
- *t*: tiempo transcurrido
- θ: ángulo barrido por la partícula en el tiempo transcurrido (ángulo central)
- *s*: recorrido de la partícula (longitud de arco de la trayectoria circunferencial)

Se verifica lo siguiente:

$$\boxed{s=\theta\cdot r}$$

θ: en radianes (rad)

En general, podemos encontrar distintos tipos de movimientos circunferenciales según sea su rapidez constante o variable.

Vamos a empezar estudiando el más simple, el movimiento circunferencial uniforme.

Movimiento circunferencial uniforme (MCU)

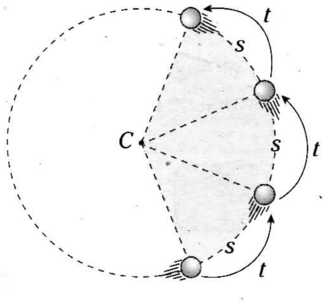
Es aquel movimiento mecánico que experimenta un cuerpo en el que se cumple lo siguiente:

- La trayectoria que describe es circunferencial.
- El valor de su velocidad es constante.

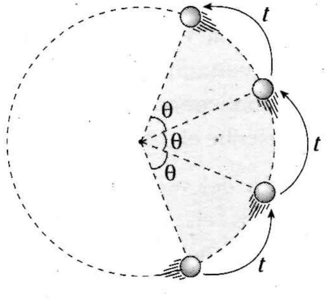
Como la velocidad lineal es tangente a la trayectoria, en todo instante es perpendicular al radio de la trayectoria.

Si el valor de la velocidad es constante, se verifica lo siguiente:

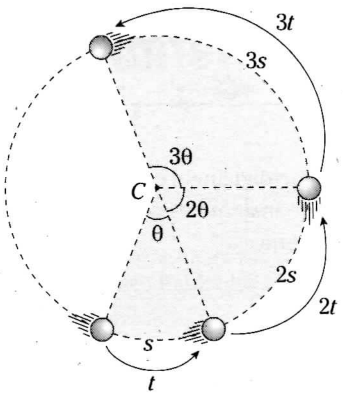
- En intervalos de tiempos iguales, los recorridos (s) son iguales.



- En intervalos de tiempos iguales, los ángulos barridos son iguales.



- Los recorridos y ángulos barridos son directamente proporcionales al tiempo transcurrido.



RAPIDEZ ANGULAR (ω)

Nos expresa el ángulo barrido por unidad de tiempo. Se evalúa de la siguiente manera:

$$\boxed{\omega = \frac{\theta}{t}}$$ Su unidad: rad/s

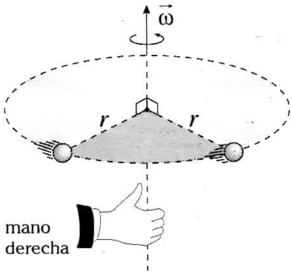
donde

- θ: ángulo barrido, en radianes (rad)
- t: tiempo, en segundos (s)

La rapidez angular es el módulo de la **velocidad angular** $(\vec{\omega})$. La velocidad angular se representa mediante un vector perpendicular al plano que contiene a la trayectoria circunferencial que describe el móvil.

La dirección del vector velocidad angular la determinamos en forma práctica aplicando la regla de la mano derecha.

La regla establece que si hacemos girar los cuatro dedos de la mano derecha (excepto el pulgar) en el sentido de movimiento del cuerpo, el pulgar extendido apuntará en la dirección del vector velocidad angular $(\vec{\omega})$.

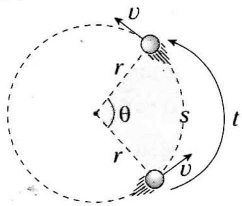


Importante

En el movimiento circunferencial uniforme (MCU), la velocidad angular $(\vec{\omega})$ se mantiene constante.

RELACIÓN ENTRE LA RAPIDEZ ANGULAR Y LA RAPIDEZ LINEAL

Considere el siguiente movimiento circunferencial uniforme.



Como la rapidez lineal (v) es constante, se verifica

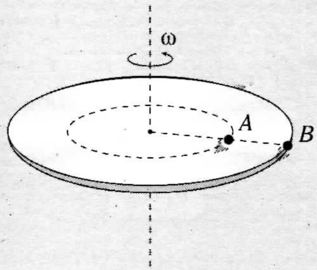
$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{\theta \cdot r}{t} = \left(\frac{\theta}{t}\right) \cdot r$$

$$\boxed{v = \omega \cdot r}$$

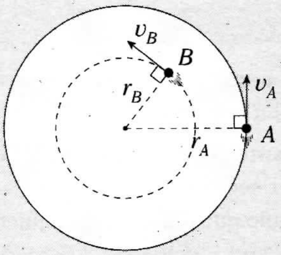
Observación

- En un disco que experimenta un movimiento de rotación, todos sus puntos tienen la misma rapidez angular.



$$\boxed{\omega_A=\omega_B=\omega}$$

- En un disco que experimenta un movimiento de rotación, la rapidez tangencial o lineal de sus puntos es directamente proporcional al radio de la trayectoria circunferencial que describen. Veamos.



Como

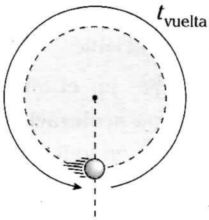
$$\omega_A=\omega_B$$

$$\frac{v_A}{r_A}=\frac{v_B}{r_B}$$

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{r_A}{r_B}$$

Periodo (*T*)

Es el tiempo que emplea una partícula que experimenta un MCU en dar una vuelta completa.



t_{vuelta}: periodo

$$\boxed{t_{vuelta}=T}$$

Su unidad: segundo (s)

El periodo también se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{T=\frac{\text{Tiempo empleado en dar } N \text{ vueltas}}{N}}$$

Frecuencia (*f*)

Nos expresa el número de vueltas que realiza el móvil en la unidad de tiempo (en cada segundo).

$$\boxed{f=\frac{\text{Número de vueltas}}{\text{Tiempo empleado en dar las vueltas}}}$$

Su unidad: hertz (Hz)

De la definición de la frecuencia, se tiene lo siguiente:

$$\boxed{f=\frac{1}{T}}$$

entonces

$$1\,\text{Hz}=\frac{1}{\text{s}}$$

Importante

En una vuelta completa la partícula barre un ángulo central igual a 2π rad, entonces tenemos

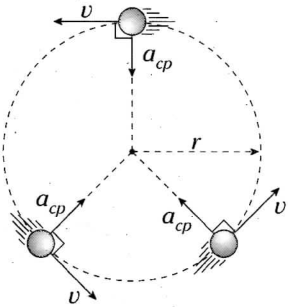
$$\omega=\frac{\theta}{t}$$

$$\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\cdot f}$$

ACELERACIÓN CENTRÍPETA $(\vec{a}_{cp})$

En el movimiento circunferencial uniforme (MCU) la velocidad tangencial tiene módulo constante pero su dirección es variable, por lo tanto, la velocidad tangencial es variable.

Por lo señalado se concluye que en el MCU hay aceleración y se le denomina **aceleración centrípeta** $(\vec{a}_{cp})$. Esta aceleración en todo momento apunta hacia el centro de la trayectoria circunferencial.



La aceleración centrípeta mide la rapidez con la cual varía la dirección de la velocidad tangencial y su módulo se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{a_{cp}=\frac{v^2}{r}}$$

Su unidad: m/s^2

Como $v=\omega\cdot r$, también tenemos

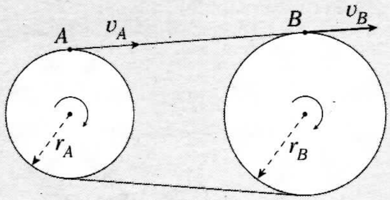
$$\boxed{a_{cp}=\omega^2\cdot r}$$

NOTA

En el MCU la aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$ es variable, pero su valor (módulo) es constante.

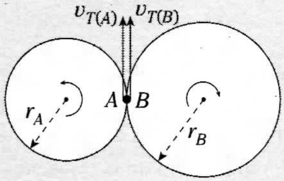
OBSERVACIÓN

- Para dos discos que rotan unidos por una faja, se verifica



$$\boxed{v_A=v_B}$$

- Para dos discos que son tangentes como se indica, se verifica



$$\boxed{v_{T(A)}=v_{T(B)}}$$

Ejemplos

1. Una partícula desarrolla un MCU. Si en el primer segundo recorre π rad, ¿cuánto es el ángulo que barre en los siguientes 4 s?

   Resolución

   Si la partícula desarrolla un MCU, los ángulos barridos son proporcionales al tiempo transcurrido.

   Si en 1 s barre un ángulo de π rad, entonces en 4 s barre un ángulo

   $\theta=4\pi$ rad

Otra forma

Si en 1 s la partícula barre un ángulo de π rad, entonces su rapidez angular es $\omega=\pi$ rad/s.

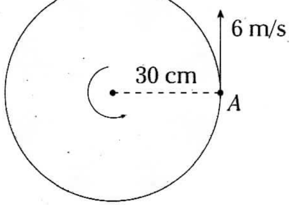
Aplicamos la ecuación del MCU para los siguientes 4 s.

$$\theta=\omega\cdot t$$

$$\theta=\pi(4)$$

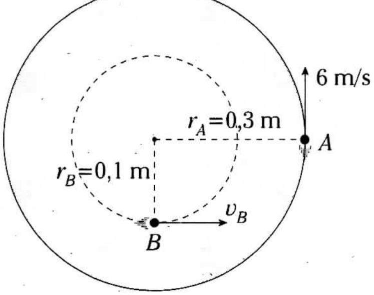
$$\therefore\ \theta=4\pi \text{ rad}$$

2. El disco mostrado rota con una velocidad angular constante. Determine la rapidez lineal de un punto que se ubica a 10 cm de su eje de rotación.



Resolución

Sea B el punto que se ubica a 10 cm del centro de rotación del disco. Gráficamente tenemos



Nos piden determinar v_B.

Como los puntos A y B pertenecen al mismo disco, la rapidez angular para ambos puntos es la misma.

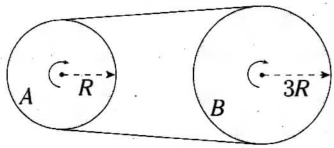
$$\omega_A=\omega_B$$

$$\frac{v_A}{r_A}=\frac{v_B}{r_B}$$

$$\frac{6\text{ m/s}}{0,3}=\frac{v_B}{0,1}$$

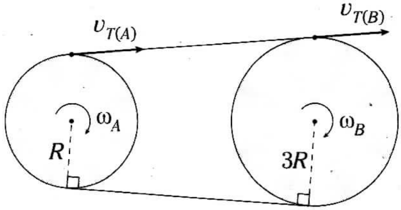
$$\therefore\ v_B=2\text{ m/s}$$

3. En el sistema mostrado, el disco A tiene una rapidez angular de 12 rad/s. Determine la rapidez angular del disco B.



Resolución

Gráficamente tenemos



Nos piden determinar ω_B.

Se verifica

$$v_{T(A)}=v_{T(B)}$$

$$\omega_A\cdot r_A=\omega_B\cdot r_B$$

$$\boxed{\frac{\omega_A}{\omega_B}=\frac{r_B}{r_A}}$$

La rapidez angular es inversamente proporcional al radio de giro.

Reemplazamos valores

$$\frac{12\text{ rad/s}}{\omega_B}=\frac{3\cancel{R}}{\cancel{R}}$$

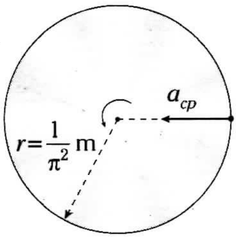
$$\therefore\ \omega_B=4\text{ rad/s}$$

4. El disco rota uniformemente respecto a un eje que pasa por su centro con 180 RPM. Determine el valor de la aceleración de un punto ubicado a $1/\pi^2$ m de su centro.

Resolución

Como el disco rota uniformemente desarrolla un MCU. En este tipo de movimiento la única aceleración que experimenta cualquier punto del disco es aceleración centrípeta (a_{cp}).

Considerando que se tiene un disco de radio $1/\pi^2$ m, nos piden determinar el valor de la aceleración centrípeta de un punto de su periferia.



Luego

$$a_{cp}=\omega^2 \cdot r \qquad \text{(I)}$$

Tenemos como dato la frecuencia de rotación del disco que es de 180 RPM, esto indica que el disco da 180 vueltas en un minuto, luego

$$f = 180\text{ RPM} = \frac{180\text{ vueltas}}{1\text{ minuto}}$$

$$f = \frac{180}{60\text{ s}}$$

$$f=3\text{ Hz}$$

Pero

$$\omega=2\pi f$$

$$\omega=2\pi(3)$$

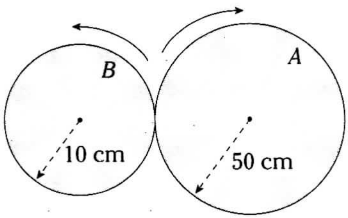
$$\omega=6\pi\text{ rad/s}$$

Reemplazamos en (I)

$$a_{cp} = (6\pi)^2 \cdot \frac{1}{\pi^2}$$

$$\therefore\ a_{cp}=36\text{ m/s}^2$$

5. Un punto de la periferia del disco *A* que rota uniformemente presenta una aceleración de 2 m/s^2. Determine la rapidez angular del disco *B*.



Resolución

Para un punto de la periferia del disco *A* tenemos

$$a_{cp} = \frac{{v_{T(A)}}^2}{R} \qquad \text{(I)}$$

Como los discos desarrollan MCU se tiene

$$a=a_{cp}=2\text{ m/s}^2$$

Reemplazando valores en (I), tenemos

$$2 = \frac{{v_{T(A)}}^2}{0,5}$$

$$v_{T(A)}=1\text{ m/s}$$

Como los discos están en contacto, en este punto se tiene

$$v_{T(B)}=v_{T(A)}$$

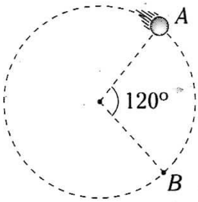
$$\omega_B \cdot r_B=1$$

$$\omega_B(0,1)=1$$

$$\therefore\ \omega_B=10\text{ rad/s}$$

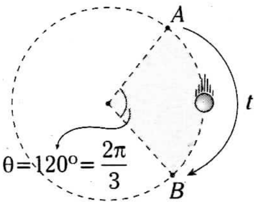
Problema N.º 1

La partícula describe un MCU con una rapidez angular de $\frac{2\pi}{9}$ rad/s. Determine el tiempo que emplea en ir desde A hasta B.



Resolución

Sea t el tiempo que emplea en ir desde A hasta B.



Como la partícula desarrolla un MCU, se verifica

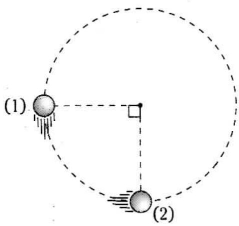
$$\theta=\omega\cdot t$$

$$\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{9}\cdot t$$

$$\therefore \quad t=3\text{ s}$$

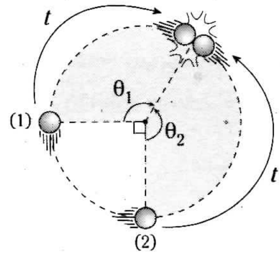
Problema N.º 2

Se muestran dos esferas que se mueven por la misma circunferencia con velocidad angular constante de módulos $\omega_1=4\pi$ rad/s y $\omega_2=8\pi$ rad/s. Determine luego de cuánto tiempo a partir del instante mostrado las esferas chocan.



Resolución

Interpretando gráficamente el enunciado tenemos



Nos piden determinar t.

Del gráfico tenemos

$$\theta_1+\theta_2=\frac{3\pi}{2}$$

$$\omega_1\cdot t+\omega_2\cdot t=\frac{3\pi}{2}$$

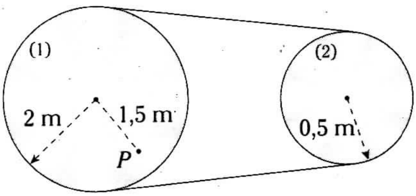
$$4\pi\cdot t+8\pi\cdot t=\frac{3\pi}{2}$$

$$12\pi\cdot t=\frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \quad t=\frac{1}{8}\text{ s}$$

Problema N.º 3

Dos poleas rotan conectadas a una faja como se muestra. Un punto periférico de la polea (2) realiza MCU con una rapidez angular $\omega_2=16$ rad/s. Determine el módulo de la aceleración centrípeta del punto P.



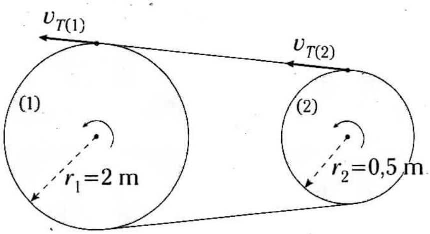
Resolución

La aceleración centrípeta (módulo) del punto P se determina así

$$a_{cp}=\omega_1^2 \cdot r_p$$

$$a_{cp}=\omega_1^2 \cdot (1{,}5) \qquad \text{(I)}$$

Luego, tenemos



Se verifica

$$v_{T(1)}=v_{T(2)}$$

$$\omega_1 \cdot r_1=\omega_2 \cdot r_2$$

$$\omega_1 \cdot (2)=16(0{,}5)$$

$$\omega_1=4 \text{ rad/s}$$

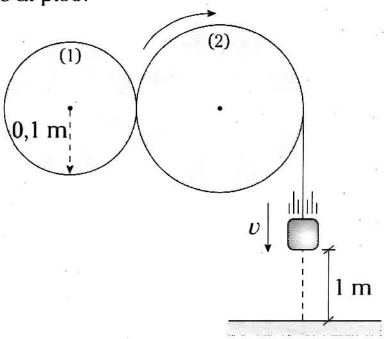
Reemplazamos en (I)

$$a_{cp}=(4)^2 \cdot (1{,}5)$$

$$\therefore \quad a_{cp}=24 \text{ m/s}^2$$

Problema N.º 4

La rapidez angular constante del disco (1) es 20 rad/s. Determine a partir del instante mostrado el tiempo que transcurre hasta que el bloque llegue al piso.



Resolución

Se sabe que para las poleas mostradas se verifica que la rapidez tangencial de los puntos de sus periferias son iguales. También que la rapidez del bloque (v) es igual a la rapidez tangencial de la polea (2), entonces tenemos

$$v_{\text{bloque}}=v_{T(1)}=v_{T(2)}$$

$$v=\omega_1 \cdot r_1$$

$$v=20(0{,}1)$$

$$v=2 \text{ m/s}$$

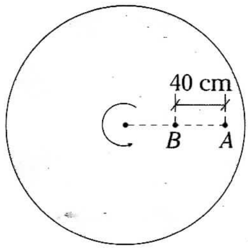
Como la rapidez v del bloque es constante se cumple

$$d=v \cdot t \ \rightarrow \ 1=2 \cdot t$$

$$\therefore \quad t=0{,}5 \text{ s}$$

Problema N.º 5

El disco mostrado rota de tal manera que el punto A realiza MCU con rapidez tangencial de 5π m/s. Si la rapidez tangencial del punto B es 3π m/s, determine cuántas vueltas da el disco en 1 minuto.



Resolución

Nos piden el número de vueltas (N) que da el disco en un intervalo de tiempo $t=60$ s.

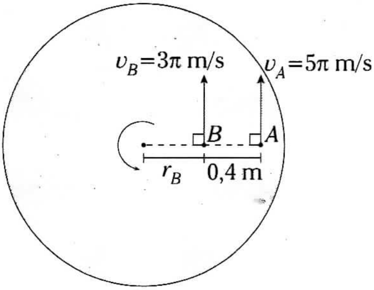
Se sabe

$$f=\frac{\text{Número de vueltas}}{\text{Tiempo}}=\frac{N}{t}$$

$$N=t \cdot f$$

$$N=60 \cdot f \qquad \text{(I)}$$

En el disco tenemos



Se cumple

$$\omega_A=\omega_B$$

$$\frac{v_A}{r_A}=\frac{v_B}{r_B} \rightarrow \frac{5\cancel{\pi}}{r_B+0{,}4}=\frac{3\cancel{\pi}}{r_B}$$

$$r_B=0{,}6 \text{ m}$$

Por otro lado

$$v_B=\omega\cdot r_B \rightarrow 3\pi=\omega\cdot(0{,}6)$$

$$\omega=5\pi \text{ rad/s}$$

Se conoce

$$\omega=2\pi f$$

$$5\pi=2\pi\cdot f$$

$$f=2{,}5 \text{ Hz}$$

Finalmente, reemplazamos en (I)

$$N=60(2{,}5)$$

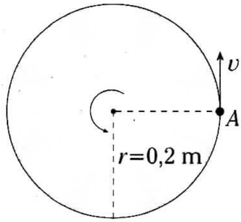
$$\therefore \quad N=150$$

Problema N.º 6

Se tiene un disco de 20 cm de radio que rota respecto a un eje que pasa por su centro. Si los puntos de su periferia tienen una rapidez de $\frac{2\pi}{5}$ m/s, determine cuánto tiempo emplean estos puntos en dar dos vueltas completas.

Resolución

Gráficamente tenemos



El punto A pertenece a la periferia y tiene una rapidez $v=\frac{2\pi}{5}$ m/s.

También se cumple

$$v=\omega\cdot r$$

$$\frac{2\pi}{5}=\omega(0{,}2)$$

$$\omega=2\pi \text{ rad/s}$$

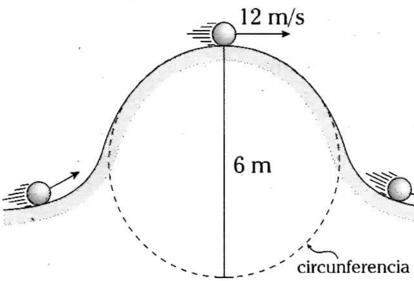
El resultado nos indica que en cada segundo un punto del disco barre un ángulo de 2π rad, es decir, en cada segundo da una vuelta completa, entonces el tiempo que emplea en dar dos vueltas completas es

$$t=2 \text{ s}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

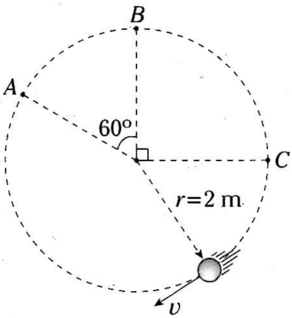
NIVEL BÁSICO

1. Un móvil se desplaza con una rapidez constante de 12 m/s sobre la pista, según se muestra en el gráfico. Determine el valor de la aceleración en el punto más alto de la elevación.



A) 36 m/s^2 B) 12 m/s^2 C) 48 m/s^2
D) 8 m/s^2 E) 54 m/s^2

2. La partícula mostrada realiza MCU. Si para ir desde B hasta C demora 0,1 s más que para ir desde A hasta B, determine su frecuencia.

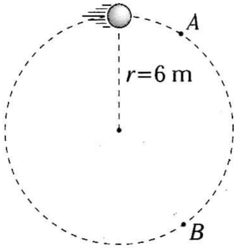


A) 5/6 Hz B) 5/12 Hz C) 3 Hz
D) 4/5 Hz E) 2 Hz

3. Un disco rota con rapidez angular constante alrededor de un eje que pasa por su centro, de tal manera que da 50 vueltas en 100 s. Determine el módulo de la aceleración de un punto del disco que dista 50 cm de su centro.

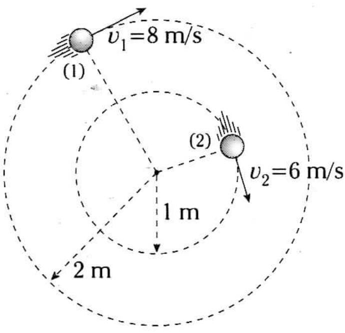
A) π^2 m/s^2 B) $\pi^2/2$ m/s^2 C) $\pi^2/3$ m/s^2
D) $2\pi^2$ m/s^2 E) $3\pi^2$ m/s^2

4. La partícula mostrada realiza MCU de manera que da 36 vueltas en 6 minutos. Determine el tiempo que tarda en ir desde A hasta B si el recorrido e_{AB}=12 m.



A) 2/π s B) 5/π s C) 10/π s
D) 20/π s E) 1/π s

5. Las dos partículas mostradas realizan MCU. Halle cuántas vueltas da la partícula (2) cuando la partícula (1) da 60 vueltas.

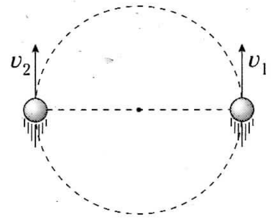


A) 120 B) 90 C) 60
D) 30 E) 10

NIVEL INTERMEDIO

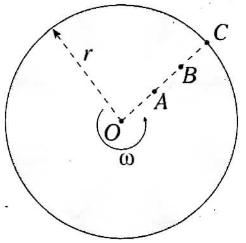
6. Las partículas mostradas realizan MCU con periodos $T_1=10$ s y $T_2=40$ s. Determine luego de cuánto tiempo, a partir del instante mostrado, logran cruzarse por segunda vez.

A) 4 s
B) 6 s
C) 8 s
D) 10 s
E) 12 s

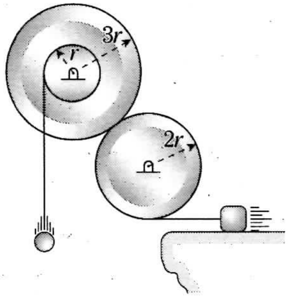


7. El disco del gráfico rota con rapidez angular constante, respecto a su centro. Si el módulo de las velocidades tangenciales de los puntos A y B son 40 cm/s y 80 cm/s, respectivamente, determine el radio de dicho disco. ($OA=BC=40$ cm).

A) 100 cm
B) 120 cm
C) 140 cm
D) 160 cm
E) 180 cm

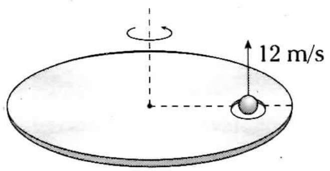


8. En el sistema de poleas que se indica la esfera desciende con una rapidez constante de 80 cm/s. Determine la rapidez del bloque.



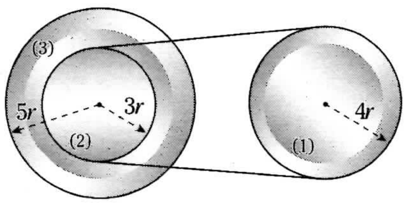
A) 40 cm/s B) 60 cm/s C) 120 cm/s
D) 200 cm/s E) 240 cm/s

9. En el instante mostrado una esfera que realiza MVCL atraviesa el agujero que tiene un disco que rota con rapidez angular constante. Determine el mínimo valor de la rapidez angular del disco tal que la esfera vuelva a pasar por el agujero a su regreso. ($g=10$ m/s^2).



A) $\frac{\pi}{2}$ rad/s B) $\frac{5\pi}{6}$ rad/s C) $\frac{5\pi}{12}$ rad/s
D) $\frac{10\pi}{6}$ rad/s E) $\frac{\pi}{6}$ rad/s

10. Se muestra un sistema de poleas conectadas por una faja. Si el módulo de la aceleración de un punto periférico de la polea (1) es 18 m/s^2, determine el módulo de la aceleración centrípeta de un punto periférico de la polea (3).



A) 10 m/s^2
B) 20 m/s^2
C) 30 m/s^2
D) 40 m/s^2
E) 50 m/s^2

Aceleración angular y movimiento circunferencial uniformemente variado (MCUV)

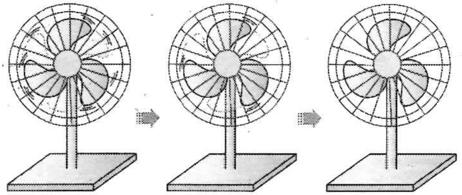
Capítulo VII

OBJETIVOS

- Conocer qué es aceleración angular.
- Entender y aplicar las características del movimiento circunferencial uniformemente variado.

Aceleración angular

Cuando un ventilador está en funcionamiento estable, sus álabes se mueven con una velocidad angular $(\vec{\omega})$ constante. Si de pronto apagamos el ventilador, el movimiento de rotación de sus álabes disminuyen hasta que se detienen, es decir, hasta que su velocidad angular se hace cero.



funcionamiento estable ($\vec{\omega}$=constante) | se apaga el ventilador ($\vec{\omega}$=disminuye) | los álabes dejan de rotar ($\vec{\omega}$=0)

Notamos que la velocidad angular $(\vec{\omega})$ disminuye gradualmente hasta que se hace cero.

Para medir los cambios de velocidad angular $(\vec{\omega})$ que experimenta un cuerpo o partícula empleamos una magnitud vectorial denominada aceleración angular $(\vec{\alpha})$.

El valor de la aceleración angular se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{\alpha = \frac{|\Delta\vec{\omega}|}{\Delta t}}$$

Su unidad: rad/s^2

donde

- $|\Delta\vec{\omega}|$: valor del cambio de velocidad angular

  $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_{final} - \vec{\omega}_{inicial}$

- Δt: intervalo de tiempo o tiempo transcurrido

Ejemplos

1. En un día de verano se enciende un ventilador y sus álabes alcanzan una velocidad de 2 rad/s luego de 5 s. Determine el valor de la aceleración angular que experimentan los álabes en este intervalo de tiempo.

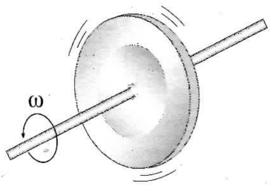
Resolución

Del enunciado se deduce que inicialmente la velocidad angular es cero y luego de 5 s es 2 rad/s, entonces el cambio en el valor de la velocidad es 2 rad/s, luego

$$\alpha = \frac{|\Delta\vec{\omega}|}{\Delta t} = \frac{2\text{ rad/s}}{5\text{ s}}$$

$\therefore\ \alpha = 0{,}4\text{ rad/s}^2$

2. El disco rota con una velocidad de 5π rad/s. Si su rapidez empieza a disminuir y luego de 2 s es de π rad/s, determine el valor de su aceleración angular.



Resolución

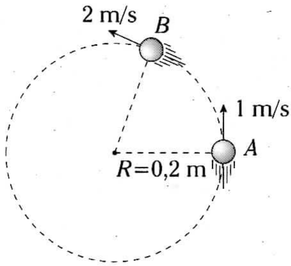
Como la unidad de la velocidad está en rad/s, se trata de la velocidad angular.

En este caso el valor del cambio de velocidad angular es 4π rad/s, luego

$$\alpha = \frac{|\Delta\vec{\omega}|}{\Delta t} = \frac{4\pi\text{ rad/s}}{2\text{ s}}$$

$\therefore\ \alpha = 2\pi\text{ rad/s}^2$

3. El cuerpo que se muestra emplea 4 s en ir desde *A* hasta *B*. Determine el valor de la aceleración angular que experimenta en este trayecto.



Resolución

Se sabe que el valor de la aceleración angular se determina así

$$\alpha = \frac{|\Delta\vec{\omega}|}{\Delta t} \qquad \text{(I)}$$

El intervalo de tiempo desde *A* hasta *B* es $\Delta t = 4$ s

Se conoce

$$v_T = \omega\cdot R \ \rightarrow\ \omega = \frac{v_T}{R}$$

- Para la posición *A*

$$\omega_A = \frac{v_{T(A)}}{R} = \frac{1}{0{,}2}$$

$$\omega_A = 5\text{ rad/s}$$

- Para la posición *B*

$$\omega_B = \frac{v_{T(B)}}{R} = \frac{2}{0{,}2}$$

$$\omega_B = 10\text{ rad/s}$$

Luego

$$|\Delta\vec{\omega}| = |\vec{\omega}_B - \vec{\omega}_A| = |10-5|$$

$$|\Delta\vec{\omega}| = 5\text{ rad/s}$$

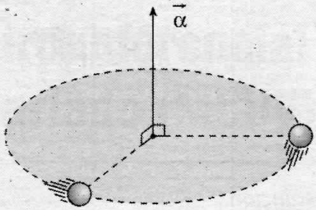
Reemplazamos en (I)

$$\alpha = \frac{5\text{ rad/s}}{4\text{ s}}$$

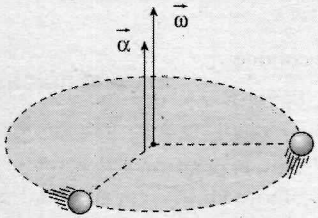
$\therefore\ \alpha = 1{,}25\text{ rad/s}^2$

Observación

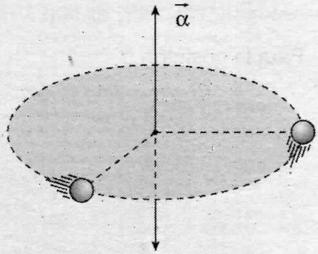
a. El vector aceleración angular es perpendicular al plano de movimiento del cuerpo.



b. En un movimiento acelerado la velocidad angular $(\vec{\omega})$ y aceleración angular $(\vec{\alpha})$ son paralelas y tienen la misma dirección; en un movimiento desacelerado tienen direcciones opuestas.



Movimiento circunferencial acelerado



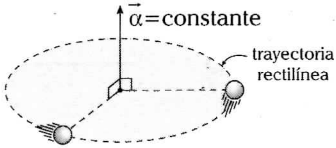
Movimiento circunferencial desacelerado

c. La aceleración angular $(\vec{\alpha})$ es constante si su valor y dirección se mantienen constantes.

Aceleración angular constante $\begin{cases} \text{valor constante} \\ \text{dirección constante} \end{cases}$

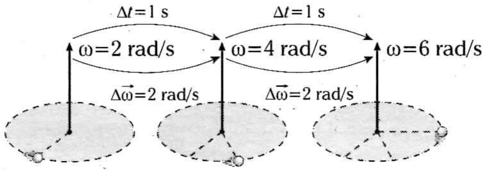
Movimiento circunferencial uniformemente variado (MCUV)

Es aquel movimiento mecánico que desarrolla un cuerpo describiendo una trayectoria circunferencial y experimentando una aceleración angular constante.



Características del MCUV

- En intervalos de tiempos iguales (Δt) los cambios en la velocidad angular $(\Delta\vec{\omega})$ son iguales.



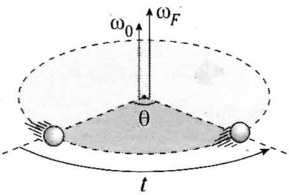
- Los cambios de velocidad angular $(\Delta\vec{\omega})$ son proporcionales al tiempo transcurrido.

Ecuaciones del MCUV

En el movimiento circunferencial uniformemente variado tenemos ecuaciones angulares y ecuaciones lineales.

Ecuaciones angulares

Para una partícula tenemos



donde

- ω_0: rapidez angular inicial (rad/s)
- ω_F: rapidez angular final (rad/s)
- θ: desplazamiento angular (rad)
- t: tiempo transcurrido (s)

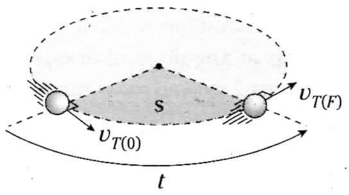
Las ecuaciones angulares son

$$\left.\begin{aligned} \omega_F &= \omega_0 \pm \alpha t \\ \omega_F^2 &= \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta \\ \theta &= \omega_0 \cdot t \pm \frac{\alpha t^2}{2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} +\text{: cuando la rapidez angular aumenta} \\ -\text{: cuando la rapidez angular disminuye} \end{array}$$

$$\theta = \left(\frac{\omega_0 + \omega_F}{2}\right)t$$

Ecuaciones lineales

En este caso tenemos



donde

- $v_{T(0)}$: rapidez tangencial inicial (m/s)
- $v_{T(F)}$: rapidez tangencial final (m/s)
- a_T: aceleración tangencial (m/s^2)
- s: longitud de arco recorrido

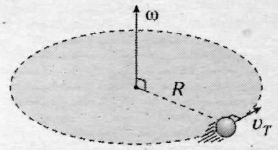
Las ecuaciones lineales son

$$\left.\begin{aligned} v_{T(F)} &= v_{T(0)} \pm a_T t \\ v_{T(F)}^2 &= v_{T(0)}^2 \pm 2a_T s \\ s &= v_{T(0)} \cdot t \pm \frac{a_T \cdot t^2}{2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} +\text{: cuando la rapidez tangencial aumenta} \\ -\text{: cuando la rapidez tangencial disminuye} \end{array}$$

$$s = \left(\frac{v_{T(0)} + v_{T(F)}}{2}\right)t$$

OBSERVACIÓN

- En cada instante se verifica la siguiente relación entre la rapidez tangencial (v_T) y la rapidez angular (ω).



$$\boxed{v_T = \omega \cdot R}$$

Unidades
v_T: en metros por segundo (m/s)
ω: en radianes por segundo (rad/s)
R: en metros (m)

Note que la velocidad angular $(\vec{\omega})$ es perpendicular a la velocidad tangencial $(\vec{v}_T)$.

- Existe una relación entre el módulo de la aceleración tangencial (a_T) y la aceleración angular (α), esta relación es la siguiente:

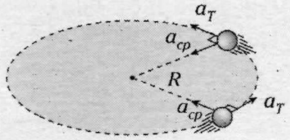
$$\boxed{a_T = \alpha \cdot R}$$

Unidades
a_T: en metros por segundos al cuadrado (m/s^2)
α: en radianes por segundos al cuadrado (rad/s^2)
R: en metros (m)

- En el MCUV la velocidad lineal o tangencial varía en módulo y dirección, entonces el cuerpo experimenta aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$ y aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$.

La **aceleración tangencial** mide los cambios en el valor de la velocidad tangencial y en todo instante es tangente a la trayectoria.

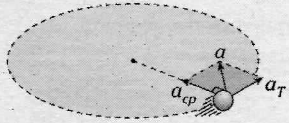
La **aceleración centrípeta** mide los cambios de dirección que experimenta la velocidad tangencial y en todo instante apunta hacia el centro de la trayectoria circunferencial.



- El módulo de la aceleración centrípeta (a_{cp}) se determina de la siguiente manera:

$$\boxed{a_{cp}=\frac{v_T^2}{R}=\omega^2\cdot R}$$ Su unidad: m/s^2

- La aceleración tangencial y la aceleración centrípeta en todo instante son mutuamente perpendiculares y se ubican en el plano de la trayectoria circunferencial, estas son componentes de la aceleración total del cuerpo que experimenta el MCUV.



El valor de la aceleración total (a) se evalúa de la siguiente forma:

$$\boxed{a=\sqrt{a_T^{\,2}+a_{cp}^{\,2}}}$$

Ejemplos

1. Una partícula inicia un MCUV desde el reposo con una aceleración de $2\ rad/s^2$. Determine su rapidez angular al finalizar el tercer segundo de su movimiento.

Resolución

En el MCUV la aceleración angular es constante y en nuestro caso su valor nos indica que en cada segundo la rapidez angular (ω) aumenta su valor en 2 rad/s, entonces al cabo de tres segundos la rapidez angular es

$\omega=6\ rad/s$

Otra forma

Aplicamos la ecuación angular del MCUV

$\omega_F=\omega_0+\alpha t$

$\omega_F=0+2(3)$

$\omega_F=6\ rad/s$

2. Una partícula en reposo inicia un MCUV con una aceleración angular de $4\pi\ rad/s^2$. Determine el ángulo central que barre en los primeros 2 s de su movimiento.

Resolución

La partícula en el primer segundo de movimiento barre un ángulo que es igual a la mitad del valor de la aceleración angular (α).

$$\theta_1=\frac{\alpha}{2}$$

$$\theta_1=\frac{4\pi}{2}=2\pi\ rad$$

En el siguiente segundo de su movimiento el ángulo que barre se incrementa en el valor de la aceleración angular respecto al primer segundo.

$\theta_2=\theta_1+\alpha$

$\theta_2=2\pi+4\pi=6\pi\ rad$

Finalmente, el ángulo total que barre en los primeros dos segundos es

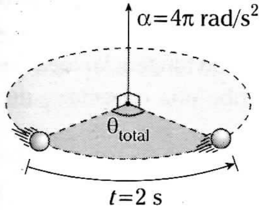
$\theta_{total}=\theta_1+\theta_2$

$\theta_{total}=2\pi+6\pi$

$\theta_{total}=8\pi\ rad$

Otra forma

Aplicamos las ecuaciones angulares del MCUV.



$$\theta = \cancel{\omega_0 t} + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\theta_{total} = 0 + \frac{4\pi(2)^2}{2}$$

$$\theta_{total} = 8\pi \text{ rad}$$

3. Una partícula que desarrolla un MCUV presenta inicialmente una rapidez angular de 2π rad/s. Si luego de 5 s su rapidez es 10π rad/s, determine su rapidez angular transcurridos 5 s más.

Resolución

En un MCUV, en intervalos de tiempos iguales los cambios de velocidad angular son iguales.

Si en los primeros 5 s la rapidez angular aumenta en 8π rad/s (va desde 2π rad/s a 10π rad/s), entonces en los siguientes 5 s también aumentará en 8π rad/s.

Por lo planteado, al final la rapidez angular será $\omega_F=18\pi$ rad/s.

Otra forma

- Para los primeros 5 s

  El cambio de la rapidez angular es 8π rad/s, entonces

$$\alpha = \frac{|\Delta\vec{\omega}|}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{8\pi \text{ rad/s}}{5 \text{ s}}$$

$$\alpha=1{,}6\pi \text{ rad/s}^2$$

- Para los últimos 5 s

$$\omega_F=\omega_0+\alpha t$$

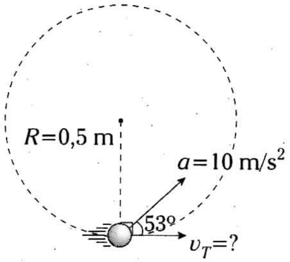
$$\omega_F=(10\pi)+(1{,}6\pi)(5)$$

$$\omega_F=18\pi \text{ rad/s}$$

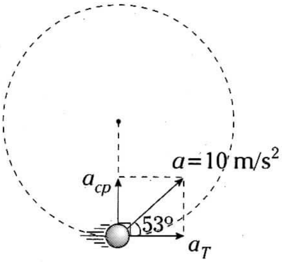
4. Un cuerpo se mueve describiendo una trayectoria circunferencial de 0,5 m de radio y en un instante determinado su aceleración es de 10 m/s^2 formando un ángulo de 53° con su velocidad tangencial. Determine el valor de la velocidad tangencial en ese instante.

Resolución

De acuerdo al enunciado del ejercicio nos están dando información respecto a la aceleración total o instantánea.



Realizamos la descomposición de la aceleración total $(\vec{a})$ que tiene como sus componentes a la aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$ y a la aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$.



Del gráfico

$$a_{cp}=a\cdot \text{sen}53° \rightarrow a_{cp}=10\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$a_{cp}=8 \text{ m/s}^2$$

Además

$$a_{cp}=\frac{v_T^{\,2}}{R}$$

$$v_T^{\,2}=a_{cp}\cdot R \rightarrow v_T^{\,2}=8(0{,}5)$$

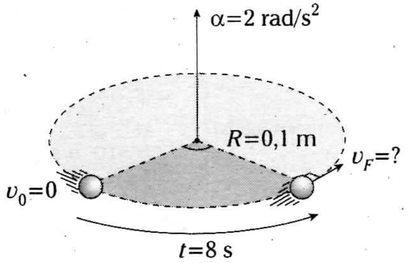
$$v_T=2 \text{ m/s}$$

Problema N.º 1

Una partícula inicia un MCUV desde el reposo describiendo una trayectoria circunferencial de 10 cm de radio y con una aceleración angular de 2 rad/s^2. Determine su rapidez tangencial luego de transcurrir los primeros ocho segundos.

Resolución

Del enunciado tenemos



Luego

$$v_F=v_0+a_T\cdot t$$

$$v_F=0+a_T(8)$$

$$v_F=8\cdot a_T \qquad \text{(I)}$$

Se sabe

$$a_T=\alpha\cdot R$$

$$a_T=2(0,1)$$

$$a_T=0,2 \text{ m/s}^2$$

Reemplazamos en (I)

$$v_F=8(0,2)$$

$$\therefore \quad v_F=1,6 \text{ m/s}$$

Problema N.º 2

Una partícula en reposo inicia un MCUV con una aceleración angular de 2 rad/s^2. Determine la relación entre los módulos de su aceleración centrípeta y aceleración tangencial luego de 2 s si la partícula describe una trayectoria de 4 m de radio.

Resolución

Se sabe que

$$a_{cp}=\omega^2\cdot R$$

$$a_T=\alpha\cdot R$$

Dividiendo tenemos

$$\frac{a_{cp}}{a_T}=\frac{\omega^2\cdot \cancel{R}}{\alpha\cdot \cancel{R}}$$

$$\frac{a_{cp}}{a_T}=\frac{\omega^2}{\alpha} \qquad \text{(I)}$$

También se conoce

$$\omega_F=\omega_0+\alpha t$$

$$\omega=0+\alpha t$$

$$\omega=\alpha t$$

Reemplazamos en (I)

$$\frac{a_{cp}}{a_T}=\frac{(\alpha t)^2}{\alpha}=\frac{\alpha^2\cdot t^2}{\alpha}$$

$$\frac{a_{cp}}{a_T}=\alpha\cdot t^2$$

$$\frac{a_{cp}}{a_T}=(2)\cdot(2)^2$$

$$\therefore \quad \frac{a_{cp}}{a_T}=8$$

Problema N.° 3

Un cuerpo que experimenta un MCUV barre en el primer segundo de su movimiento un ángulo de 2π rad y en el tercer segundo barre un ángulo de π rad. Determine el valor de su aceleración angular.

Resolución

Del enunciado se deduce que al transcurrir el tiempo el ángulo que se barre disminuye, entonces estamos frente a un MCUV desacelerado.

Se conoce que en un movimiento desacelerado el ángulo que se barre disminuye en cada segundo en una cantidad igual al valor de la aceleración, luego tenemos

1.$^{\text{er}}$ segundo: $\theta_1=2\pi$ rad

2.$^{\text{o}}$ segundo: $\theta_2=\theta_1-\alpha$

3.$^{\text{er}}$ segundo: $\theta_3=\theta_2-\alpha$

El ángulo θ_3 también se expresa como

$$\theta_3=(\theta_1-\alpha)-\alpha$$

$$\theta_3=\theta_1-2\alpha$$

Reemplazamos valores

$$\pi=2\pi-2\alpha$$

$$2\alpha=\pi$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{\pi}{2}\,\text{rad/s}^2$$

Otra forma

Aplicamos las ecuaciones angulares del MCUV. Sea ω_0 la rapidez angular inicial, entonces al finalizar cada segundo la rapidez angular es

- Al finalizar el 1.$^{\text{er}}$ segundo

$$\omega_F=\omega_0-\alpha t$$

$$\omega_1=\omega_0-\alpha$$

- Al finalizar el 2.$^{\text{o}}$ segundo

$$\omega_2=\omega_0-2\alpha$$

- Al finalizar el 3.$^{\text{er}}$ segundo

$$\omega_3=\omega_0-3\alpha$$

Por dato del problema los ángulos barridos son

- En el primer segundo

$$\theta_1=\left(\frac{\omega_0+\omega_F}{2}\right)\cdot t$$

$$2\pi=\left(\frac{\omega_0+(\omega_0-\alpha)}{2}\right)\cdot 1$$

$$4\pi=2\omega_0-\alpha$$

$$2\omega_0=4\pi+\alpha \qquad \text{(I)}$$

- En el tercer segundo

$$\theta_3=\left(\frac{\omega_2+\omega_3}{2}\right)\cdot t$$

$$\pi=\left[\frac{(\omega_0-2\alpha)+(\omega_0-3\alpha)}{2}\right]\times 1$$

$$2\pi=2\omega_0-5\alpha$$

$$2\omega_0=2\pi+5\alpha \qquad \text{(II)}$$

Igualamos (I) y (II)

$$4\pi+\alpha=2\pi+5\alpha$$

$$4\pi-2\pi=5\alpha-\alpha$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{\pi}{2}\,\text{rad/s}$$

Problema N.° 4

Las hélices de un ventilador rotan a razón de 120 RPM y comienzan a disminuir su rapidez uniformemente deteniéndose luego de 10 s. Determine el número de vueltas que dio en dicho intervalo de tiempo.

Resolución

Primero vamos a determinar el ángulo central que barren las hélices en un tiempo de 10 s.

$$\theta=\left(\frac{\omega_0+\omega_F}{2}\right)t$$

Como al final se detiene, entonces $\omega_F=0$.

Luego

$$\theta=\left(\frac{\omega_0+0}{2}\right)\cdot 10$$

$$\theta=5\omega_0 \qquad \text{(I)}$$

Nos dan como dato la frecuencia que es de 120 RPM, esto equivale a decir que las hélices dan 120 revoluciones (vueltas) en un minuto (60 segundos).

$$f=120\text{ RPM}=\frac{120\text{ vueltas}}{60\text{ s}}$$

$$f=2\text{ Hz}$$

Pero en el inicio

$$\omega_0=2\pi f$$

$$\omega_0=2\pi(2)$$

$$\omega_0=4\pi\text{ rad/s}$$

Reemplazamos en (I)

$$\theta=5(4\pi)$$

$$\theta=20\pi\text{ rad} \qquad \text{(II)}$$

Para hallar el número de vueltas consideramos lo siguiente: en 1 vuelta el ángulo girado es 2π, en 2 vueltas el ángulo girado es 4π, en 3 vueltas el ángulo girado es 6π, en N vueltas el ángulo girado es $\theta=N(2\pi)$; entonces

$$\boxed{N=\frac{\theta}{2\pi}}$$

En el problema usamos el resultado (II)

$$N=\frac{20\pi}{2\pi}$$

$$\therefore\quad N=10$$

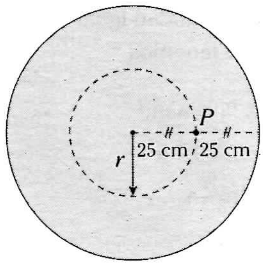
Problema N.º 5

Una polea de 50 cm de radio inicia su movimiento de rotación con una aceleración angular constante de 2 rad/s^2. Determine el recorrido que realiza en los primeros 8 s un punto que se ubica, en el medio, entre el centro de la polea y su borde.

Resolución

Como el radio de la polea es de 50 cm, el punto del cual nos habla el problema está a 25 cm del centro de la polea.

Sea P este punto, gráficamente tenemos



Para determinar el recorrido del punto P aplicamos las ecuaciones lineales del MCUV.

$$S=v_{T0}\cdot t+\frac{a_T\cdot t^2}{2} \qquad \text{(I)}$$

Como inicialmente la polea estaba en reposo

$$v_{T(0)}=0$$

Cualquier punto de la polea tiene la misma aceleración angular (α), y para el punto P tenemos

$$a_T=\alpha\cdot r$$

$$a_T=(2\text{ rad/s})(0{,}25\text{ m})$$

$$a_T=0{,}5\text{ m/s}^2$$

Reemplazamos en (I)

$$S=0(8)+\frac{0{,}5(8)^2}{2}$$

$$\therefore\quad S=16\text{ m}$$

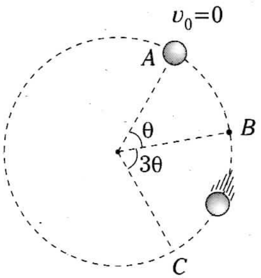
NIVEL BÁSICO

1. Una partícula inicia un MCUV cuando tiene una rapidez angular de π rad/s. Si la aceleración angular que experimenta es $\pi/2$ rad/s^2, determine el ángulo que barre en los primeros 3 s.

A) $\frac{2\pi}{4}$ rad B) $\frac{19\pi}{2}$ rad C) 32π rad

D) $\frac{21\pi}{4}$ rad E) $\frac{17\pi}{2}$ rad

2. La partícula inicia un MCUV en la posición A y emplea 2 s en llegar a B por primera vez. Determine el tiempo que emplea en ir de B hasta C por primera vez.

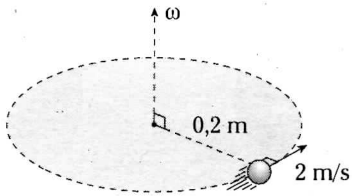


A) 2 s B) 3 s C) 4 s
D) 5 s E) 2,5 s

3. Una rueda inicia un MCUV desde el reposo respecto a un eje que pasa por su centro. Al cabo de 10 vueltas completas presenta una rapidez de 20 rad/s. Determine la aceleración angular de la rueda.

A) 6,4 rad/s^2
B) 3,2 rad/s^2
C) 8 rad/s^2
D) 4,5 rad/s^2
E) 7,2 rad/s^2

4. A partir del instante mostrado la partícula inicia un MCUV desacelerado. Si luego de 5 s se detiene la partícula, determine el ángulo que barre la partícula en los últimos 2 s de su movimiento.



A) 1 rad B) 2 rad C) 4 rad
D) 8 rad E) 12 rad

5. Una partícula inicia un MCUV desde el reposo con una aceleración angular de 12 rad/s^2. Si el radio de su trayectoria es 1 m, determine su aceleración total luego de 0,25 s.

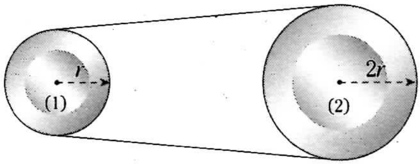
A) 6 m/s^2
B) 8 m/s^2
C) 9 m/s^2
D) 12 m/s^2
E) 15 m/s^2

NIVEL INTERMEDIO

6. Una partícula inicia un MCUV desde el reposo. Si en 3 s da dos vueltas, determine el ángulo que barrió en el tercer segundo de su movimiento.

A) $10\pi/3$ rad
B) $15\pi/4$ rad
C) $20\pi/3$ rad
D) $40\pi/3$ rad
E) $20\pi/9$ rad

7. El sistema está en reposo y de pronto el disco (1) inicia su movimiento de rotación con una aceleración angular constante de módulo 2 rad/s^2. Determine la aceleración centrípeta de un punto de la periferia del disco (2) luego de 5 s. (r=10 cm).



A) 4 m/s^2 B) 5 m/s^2 C) 10 m/s^2
D) 12 m/s^2 E) 15 m/s^2

8. Un móvil inicia un MCUV desde el reposo. Determine la razón entre los módulos de su aceleración tangencial y centrípeta cuando termine de dar una vuelta.

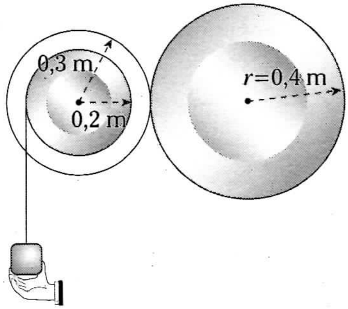
A) $\frac{1}{\pi}$ rad B) $\frac{2}{\pi}$ rad C) $\frac{1}{2\pi}$ rad

D) $\frac{2}{3\pi}$ rad E) $\frac{1}{4\pi}$ rad

9. Una partícula realiza un movimiento circunferencial recorriendo dos tramos, el primero con una velocidad angular constante durante 3 s y el segundo tramo desacelerando a razón de 2 rad/s^2 hasta detenerse. Si el ángulo total barrido es de 160 rad, determine el intervalo de tiempo que duró el movimiento.

A) 5 s B) 13 s C) 8 s
D) 9 s E) 20 s

10. En el instante mostrado se deja en libertad el bloque y se mueve con una aceleración constante de módulo 8 m/s^2. Determine la rapidez angular del disco de radio r luego de 5 s de soltar el bloque.



A) 50 rad/s B) 80 rad/s C) 100 rad/s
D) 120 rad/s E) 150 rad/s

Estática y equilibrio mecánico de traslación (EMT)

Capítulo VIII

OBJETIVOS

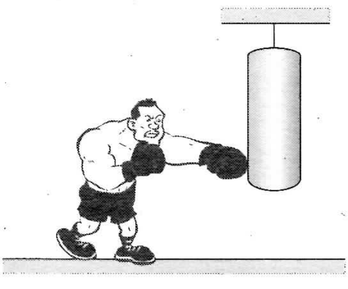
- Conocer el concepto de fuerza.
- Analizar las interacciones entre los cuerpos.
- Conocer algunas fuerzas comunes.
- Entender y aplicar la condición de equilibrio mecánico de traslación.

Es muy importante que muchas estructuras que el hombre construye se mantengan en reposo, sin caerse, sin derrumbarse, como los puentes, edificios o túneles. ¿Qué leyes físicas permiten asegurarnos que una estructura o un cuerpo se mantenga en reposo? En este capítulo veremos algunas de estas leyes básicas.

Fuerza

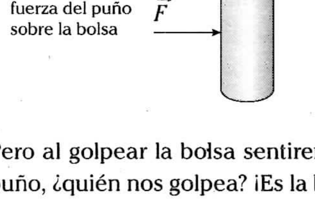
Antes de estudiar las leyes de la estática debemos conocer el concepto de **fuerza**. Todos tenemos una idea de fuerza, sabemos que ejercemos fuerza al empujar o jalar un cuerpo.

Para entender qué es fuerza, consideremos que damos un golpe a una bolsa de arena.



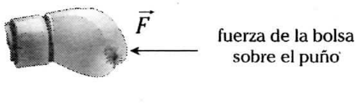
Ejercemos una acción a la bolsa.

Esta acción actúa en una dirección y presenta una cierta intensidad, entonces se puede medir con una magnitud vectorial, a la cual denominamos **fuerza** $(\vec{F})$.

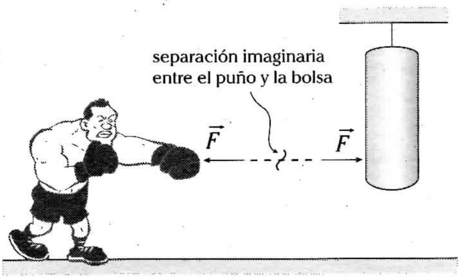


La unidad de la fuerza es el newton (N).

Pero al golpear la bolsa sentiremos dolor en el puño, ¿quién nos golpea? ¡Es la bolsa!



Es decir, que entre el puño y la bolsa hay una acción mutua, una **interacción**.

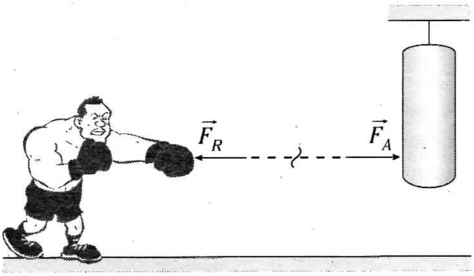


En función a estos hechos el gran científico Isaac Newton planteó su tercera ley.

Tercera ley de Newton

Si el cuerpo *A* ejerce una fuerza sobre el cuerpo *B* (una "acción"), entonces, *B* ejerce una fuerza sobre *A* (una "reacción"). Estas dos fuerzas tienen el mismo módulo pero dirección opuesta y actúan sobre diferentes cuerpos.

En el ejemplo que estamos analizando.



$\vec{F}_A$: fuerza de acción

$\vec{F}_R$: fuerza de reacción

$$\boxed{F_A=F_R}$$

Notamos que las fuerzas no aparecen solas, sino en pares (acción y reacción) cuando dos cuerpos interactúan, por esto se considera que la fuerza es la medida de las interacciones entre los cuerpos.

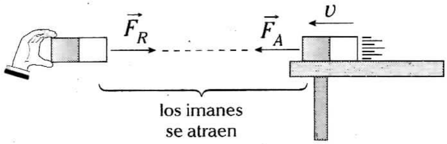
Para que dos cuerpos interactúen entre sí pueden estar en contacto o separados una cierta distancia, por lo cual tenemos:

Interacción por contacto

Cuando entre los cuerpos hay contacto físico para que se manifieste la interacción. Por ejemplo, al patear una pelota.

Interacción a distancia

Cuando entre los cuerpos hay una cierta distancia y aún así se manifiesta la interacción. Por ejemplo, entre dos imanes.



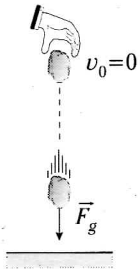
Fuerzas usuales

Existen algunas fuerzas que comúnmente encontramos en el análisis de un sistema mecánico, estas son las siguientes:

Fuerza de gravedad $(\vec{F}_g)$

Es aquella con la cual la Tierra atrae a los cuerpos que están a su alrededor.

Cuando soltamos una piedra.



Notamos que la piedra cae, se dirige hacia el suelo, esto nos induce a pensar que la Tierra atrae a la piedra (la jala hacia su centro) le ejerce una fuerza que llamamos fuerza de gravedad $\left(\vec{F}_g\right)$.

Cuando el cuerpo está próximo a la superficie terrestre, el valor de la fuerza de gravedad se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{F_g = mg}$$

m: masa del cuerpo, en kilogramos (kg)
g: aceleración de la gravedad, en (m/s^2)
F_g: se expresa en newton (N)

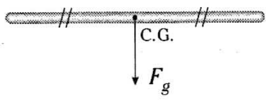
NOTA

La fuerza que actúa sobre la piedra es el resultado de la interacción gravitatoria piedra-Tierra, la atracción es mutua entre dichos cuerpos.

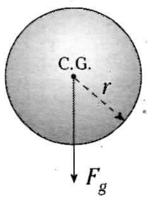
Hay que tomar en cuenta que la fuerza de gravedad que actúa sobre un cuerpo se gráfica vertical y hacia abajo, actúa en un punto llamado **centro de gravedad (C. G.)** el cual para cuerpos homogéneos y regulares coincide con su centro geométrico.

Ejemplos

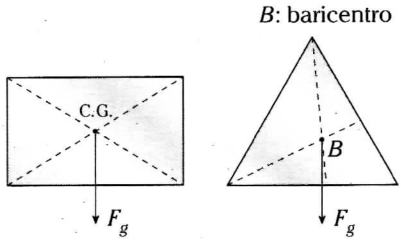
a. Para una barra homogénea



b. Para una esfera homogénea

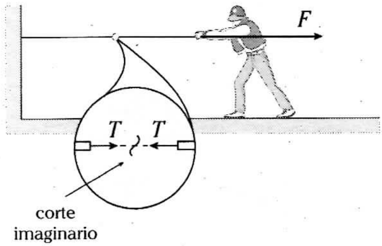


c. Para una placa

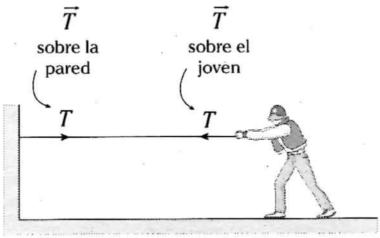


TENSIÓN $(\vec{T})$

Es una fuerza que se manifiesta en cuerdas, cables, cadenas, etc., cuando se les trata de estirar.

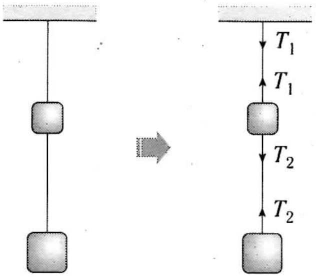


La $\vec{T}$ es una fuerza interna que se opone a que la cuerda se estire. En forma práctica se dibuja a lo largo de la cuerda, sobre el cuerpo que está en contacto con la cuerda.

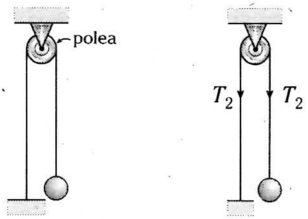


La $\vec{T}$ solo puede "jalar" a un cuerpo, no puede "empujar", así que siempre se dibuja "saliendo" del cuerpo. Además, en todos los puntos de una cuerda ideal (masa despreciable) el valor de la $\vec{T}$ es la misma.

Ejemplo



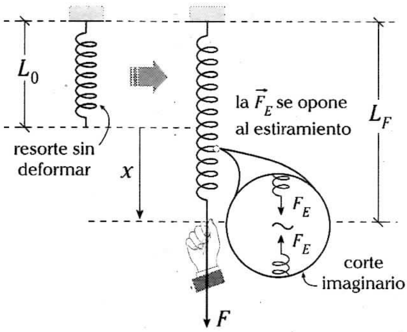
Sobre una polea



FUERZA ELÁSTICA ($\vec{F}_E$)

Es una fuerza interna que se manifiesta en un cuerpo elástico (resorte o liga), cuando es deformado.

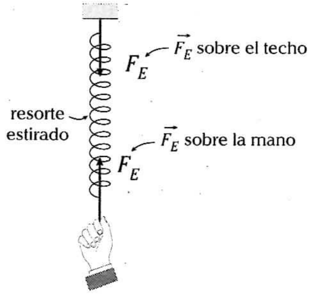
- Cuando estiramos un resorte



L_0: longitud natural del resorte
L_F: longitud final
x: deformación longitudinal

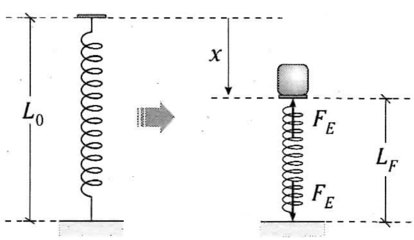
$$\boxed{x=L_F-L_0}$$

En forma práctica dibujaremos la $\vec{F}_E$ sobre los cuerpos con los que está en contacto el resorte.



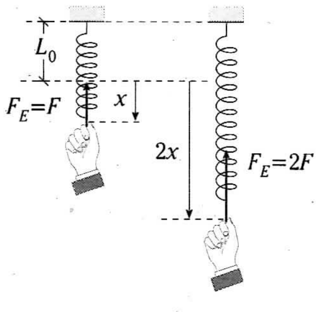
En todos los puntos de un resorte ideal (masa despreciable) la $\vec{F}_E$ tiene el mismo valor.

- Cuando comprimimos un resorte.



$$\boxed{x=L_0-L_F}$$

El valor de la $\vec{F}_E$ se calcula con ayuda de la ley de Hooke.



La $\vec{F}_E$ es DP a la deformación del resorte.

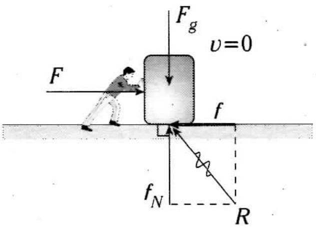
$$\boxed{\vec{F}_E = Kx}$$

donde

- K: constante de elasticidad o rigidez del resorte, en $\left(\frac{N}{m}\right)$ o $\left(\frac{N}{cm}\right)$
- x: en (m) o (cm)
- F_E: en (N)

Reacción $(\vec{R})$ y fuerza de rozamiento $(\vec{f})$

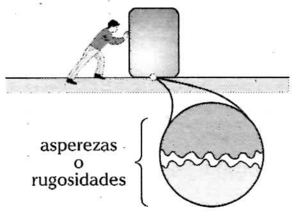
Consideremos a una persona que trata de empujar un bloque muy pesado pero no lo consigue.



La fuerza que el piso ejerce al bloque se divide en 2, la fuerza de gravedad que actúa sobre el bloque trata que este se hunda en el piso, para evitar que esto ocurra el piso ejerce al bloque una fuerza hacia arriba, que es perpendicular a las dos superficies en contacto, esta fuerza es llamada **fuerza normal** $(\vec{f}_N)$. La fuerza que la persona ejerce al bloque trata que este se deslice hacia la derecha, esto no lo permite el piso para lo cual ejerce una fuerza que se opone a este posible deslizamiento, esta fuerza es llamada **fuerza de rozamiento** $(\vec{f})$ que es tangente a las superficies en contacto. Si sumamos vectorialmente estas dos fuerzas, obtenemos la fuerza (total) que el piso le ejerce al bloque, esta fuerza se llama **reacción** $(\vec{R})$.

> **NOTA**
>
> La $\vec{f}_N$ y la $\vec{f}$ son componentes de la $\vec{R}$.
>
> $$\boxed{R = \sqrt{f^2 + f_N^2}}$$

La fuerza de rozamiento aparece entre dos superficies en contacto debido a que estas son ásperas o rugosas.

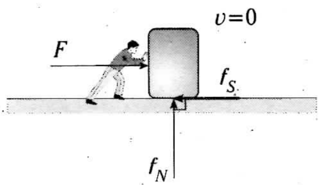


Vamos a considerar dos tipos de fuerza de rozamiento:

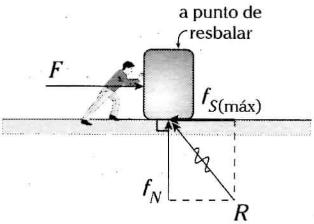
Fuerza de rozamiento estático $(\vec{f}_S)$

Se manifiesta cuando las superficies en contacto tienden a resbalar una sobre la otra pero no hay deslizamiento.

Ejemplo



Si el joven va aumentando el valor de $\vec{F}$, de tal modo que el bloque no resbale, la $\vec{f}_S$ también va aumentando, es decir, que el módulo de $\vec{f}_S$ es variable. Pero en algún momento para cierto valor de $\vec{F}$ el bloque estará a punto de resbalar, en este momento la $\vec{f}_S$ alcanza su máximo valor, $f_{S(\text{máx})}$.



Se verifica experimentalmente lo siguiente:

$$\boxed{\frac{f_{S(\text{máx})}}{f_N}=\text{constante}=\mu_S}$$

μ_S: coeficiente de rozamiento estático

De modo que

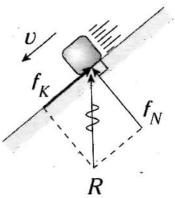
$$\boxed{f_{S(\text{máx})}=\mu_S f_N}$$

Observación

Recuerde que esta ecuación solo es válida cuando hay deslizamiento inminente.

Fuerza de rozamiento cinético $(\vec{f}_K)$

Se manifiesta cuando hay deslizamiento de una de las superficies en contacto respecto de la otra.



En este caso se cumple lo siguiente:

$$\boxed{f_K=\mu_K f_N}$$

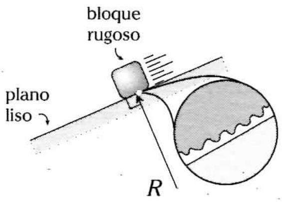
μ_K: coeficiente de rozamiento cinético

Nota

Generalmente

$\boxed{\mu_S \neq \mu_K}$ $\boxed{\mu_S > \mu_K}$

Si una de las superficies en contacto es lisa (no presenta rugosidades).



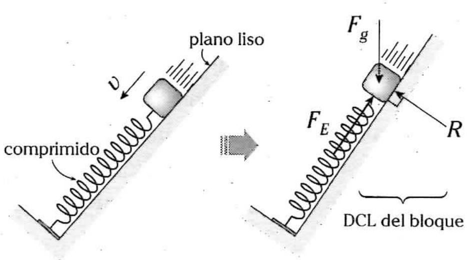
No hay $\vec{f}$, entonces $\vec{R}=\vec{f}_N$, por lo cual la fuerza que el plano ejerce al bloque (que es la $\vec{R}$) es perpendicular a las superficies en contacto.

Diagrama de fuerzas o diagrama de cuerpo libre (DCL)

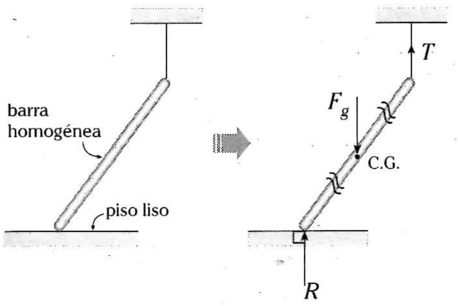
Es aquel diagrama donde se grafican todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo o sistema.

Ejemplos

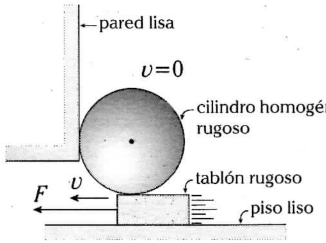
a.

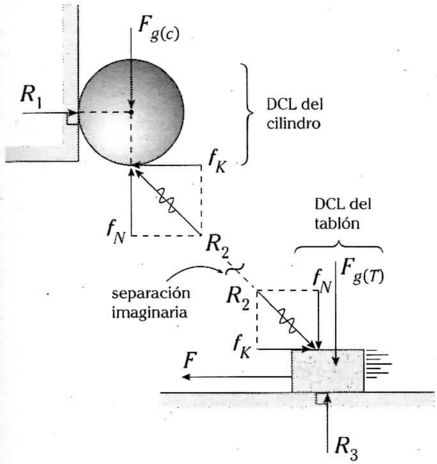


b.



c.





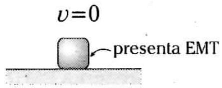
La reacción que le ejerce el cilindro al tablón y la reacción que le ejerce el tablón al cilindro forman un par de acción y reacción.

Solo nos falta ver un aspecto más para plantear una de las leyes más importantes de la estática.

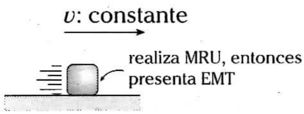
Equilibrio mecánico de traslación (EMT)

Un cuerpo presenta EMT en dos casos.

a. El cuerpo se encuentra en reposo.

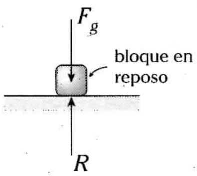


b. El cuerpo se mueve trasladándose con velocidad constante.



PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO

Al analizar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que presenta EMT, se observa



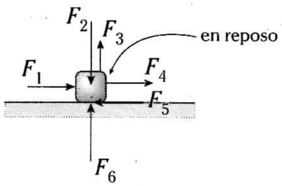
Para que el bloque se mantenga en reposo, el módulo de la $\vec{F}_g$ debe ser igual al módulo de la $\vec{R}$, pero como estas fuerzas son opuestas, sobre el bloque la fuerza resultante $(\vec{F}_R)$ debe ser cero.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_g + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{0}}$$

Primera condición de equilibrio mecánico (1.ª CEM)

Una forma práctica de aplicar la 1.ª CEM a un cuerpo en EMT es



Como este bloque presenta EMT, se debe cumplir

$\vec{F}_R = \vec{0}$ (1.ª CEM)

Entonces, en la horizontal

$F_1 + F_4 = F_5$

es decir

$$\boxed{\sum F(\rightarrow) = \sum F(\leftarrow)}$$

La suma de los valores de las fuerzas que apuntan hacia la derecha es igual a la suma de los valores de las fuerzas que apuntan hacia la izquierda.

En la vertical

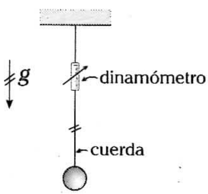
$F_6 + F_3 = F_2$

es decir

$$\boxed{\sum F(\uparrow) = \sum F(\downarrow)}$$

Ejemplos

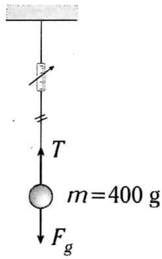
1. La esfera de 400 g se mantiene en reposo como se muestra. Determine la lectura del dinamómetro. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

El dinamómetro es una balanza de resorte, en forma práctica: el dinamómetro va a medir el valor de la tensión en la cuerda.

Si hacemos un DCL de la esfera



Nos piden T.

Como la esfera presenta EMT

$T = F_g$

$\rightarrow\ T = mg$ (I)

La masa debe estar en kilogramos (kg)

$m = 400\ \text{g} <> \dfrac{400}{1000}\ \text{kg}$

$\rightarrow\ m = 0{,}4\ \text{kg}$ (II)

Reemplazamos (II) en (I)

$T = (0{,}4)(10)$

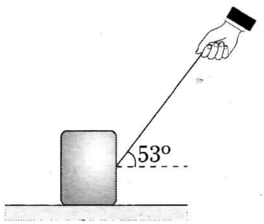
$\therefore\ T = 4\ \text{N}$

NOTA

Si sobre un cuerpo que presenta EMT solo actúan 2 fuerzas, entonces estas deben ser:

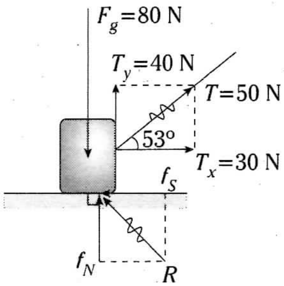
- Opuestas
- De igual valor
- Colineales

2. El bloque de 8 kg se mantiene en reposo como se muestra. Si el módulo de la tensión en la cuerda es 50 N, halle los módulos de la fuerza de rozamiento y la reacción que el piso le ejerce al bloque. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Hagamos el DCL del bloque



Luego de descomponer la tensión vemos que esta tiene una componente horizontal hacia la derecha, lo que significa que trata de que el bloque deslice hacia la derecha, como en el enunciado nos plantean que el bloque no se mueve, entonces el piso le ejerce al bloque una fuerza de rozamiento estático hacia la izquierda.

Nos piden f_S y R.

De la 1.ª CEM en la horizontal

$$f_S=T_x \ \rightarrow \ f_S=30\ \text{N}$$

Notamos

$$R=\sqrt{f_S^2+f_N^2} \qquad \text{(I)}$$

Para hallar f_N, de la 1.ª CEM en la vertical

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$f_N+T_y=F_g$$

$$f_N+40=80$$

$$f_N=40\ \text{N} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

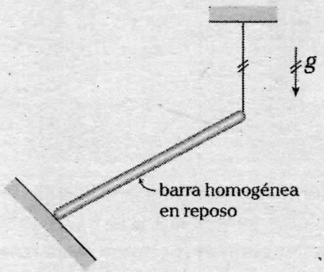
$$R=\sqrt{30^2+40^2}$$

$$\therefore \ R=50\ \text{N}$$

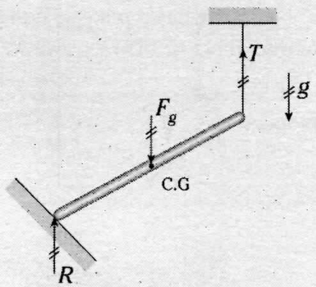
Observación

Si sobre un cuerpo en equilibrio actúan solo 3 fuerzas hay 2 posibilidades.

- Si dos de ellas son paralelas, entonces la tercera fuerza debe ser paralela a las otras dos.



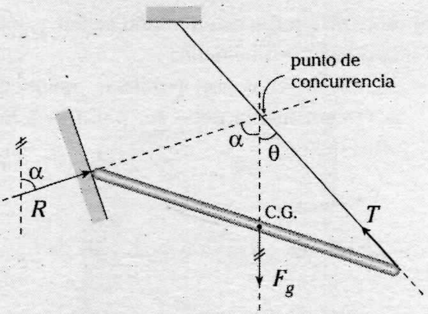
Hagamos el DCL de esta barra.



Sobre la barra que está en EMT actúan solo 3 fuerzas, para graficar la $\vec{R}$ que el plano inclinado le ejerce a la barra debemos notar que la $\vec{F}_g$ y la $\vec{T}$ son paralelas, entonces la $\vec{R}$ debe ser paralela a estas.

- Si las fuerzas no son paralelas, entonces deben ser concurrentes.

Hagamos el DCL de esta barra

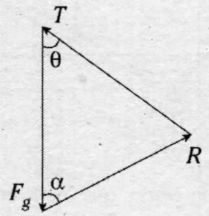


Como en este caso las fuerzas no son paralelas, ya que la $\vec{T}$ y la $\vec{F}_g$ no lo son, para poder graficar $\vec{R}$ primero hallamos el punto en que se cruzan las líneas de acción de la $\vec{T}$ y la $\vec{F}_g$, luego la línea de acción de la $\vec{R}$ también debe pasar por este punto.

Además, de la 1.ª CEM

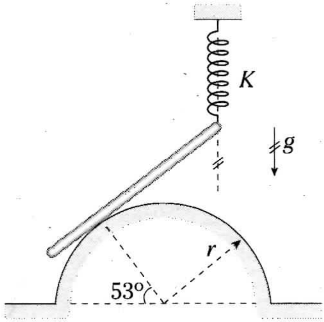
$$\vec{F}_R = \vec{0}$$

Entonces



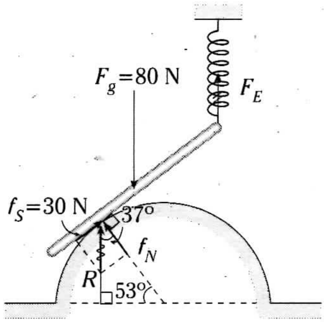
Con las tres fuerzas se puede formar un triángulo colocando los vectores uno a continuación del otro.

3. La barra de 8 kg se mantiene en reposo como se muestra. Si la constante de elasticidad del resorte es 100 N/m y el módulo de la fuerza de rozamiento que la superficie cilíndrica le ejerce a la barra es 30 N, halle la deformación del resorte en cm. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



Resolución

Hagamos un DCL de la barra, notamos que sobre la barra que presenta EMT solo actúan tres fuerzas y dos de ellas $(\vec{F}_g$ y $\vec{F}_E)$ son paralelas, entonces la fuerza que la superficie le ejerce a la barra debe ser paralela a la $\vec{F}_g$.



Nos piden x: deformación del resorte.

De

$$F_E = Kx$$

$$F_E = 100x \qquad \text{(I)}$$

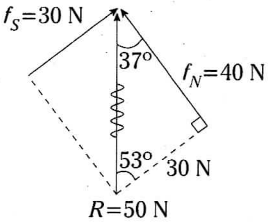
De la 1.ª CEM en la vertical

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$R+F_E=F_g$$

$$R+F_E=80 \qquad \text{(II)}$$

Para hallar R notemos que en el gráfico al descomponer $\vec{R}$ en $\vec{f}_S$ y $\vec{f}_N$, se obtiene



$$\rightarrow\ R=50\text{ N} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II)

$$50+F_E=80$$

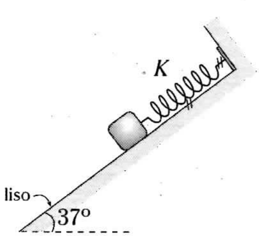
$$\rightarrow\ F_E=30\text{ N} \qquad \text{(IV)}$$

Finalmente, reemplazamos (IV) en (I)

$$30=100x$$

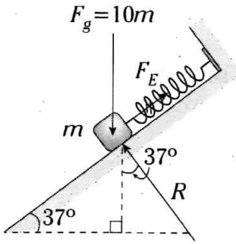
$$\rightarrow\ x=0{,}3\text{ m} <> 30\text{ cm}$$

4. El bloque mostrado se mantiene en reposo. Si el resorte de rigidez 450 N/m está deformado 20 cm, determine la masa del bloque. $(g=10\text{ m/s}^2)$

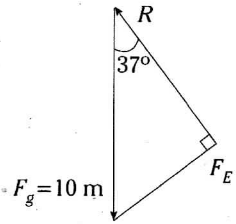


Resolución

Hagamos el DCL del bloque



Como el bloque presenta EMT y sobre este solo actúan 3 fuerzas.



Por dato, la deformación del resorte es

$$x=20\text{ cm} <> 0{,}2\text{ m}$$

$$\rightarrow\ F_E=Kx=\left(450\frac{\text{N}}{\cancel{\text{m}}}\right)(0{,}2\ \cancel{\text{m}})$$

$$\rightarrow\ F_E=90\text{ N}$$

Del triángulo de fuerzas, notamos que

$$\operatorname{sen}37°=\frac{F_E}{10m}$$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}=\frac{\cancel{90}}{\cancel{10m}}$$

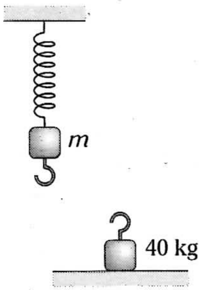
$$2m=30$$

$$\therefore\ m=15\text{ kg}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

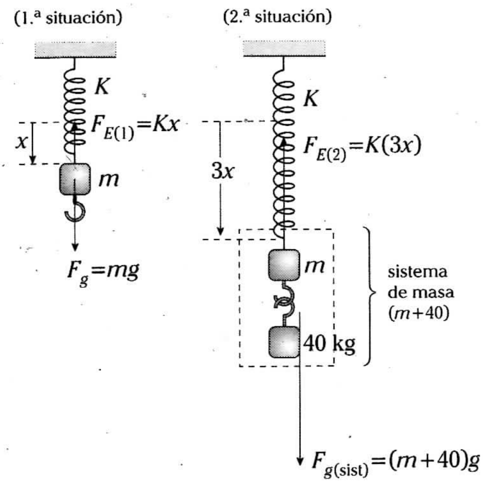
Problema N.º 1

El bloque se mantiene en reposo como se muestra, suspendido de un resorte. Si del gancho que se muestra se suspende un bloque de 40 kg la deformación del resorte se triplica, en el equilibrio, respecto a la deformación inicial. Halle la masa del bloque que estaba suspendido inicialmente.



Resolución

Grafiquemos las dos situaciones indicadas en el enunciado del problema.



Nos piden m.

En la 1.ª situación

$$mg=Kx \qquad \text{(I)}$$

En la 2.ª situación el resorte sostiene al sistema de masa $(m+40)$

$$(m+40)g=K(3x)$$

$$\rightarrow \quad (m+40)g=3Kx \qquad \text{(II)}$$

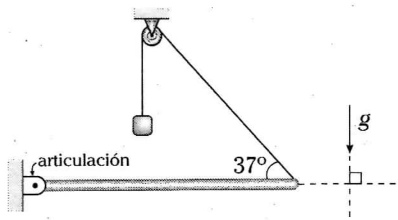
De (I) y (II) dividimos miembro a miembro

$$\frac{m\cancel{g}}{(m+40)\cancel{g}}=\frac{\cancel{Kx}}{3\cancel{Kx}} \rightarrow 3m=m+40$$

$$\therefore \quad m=20 \text{ kg}$$

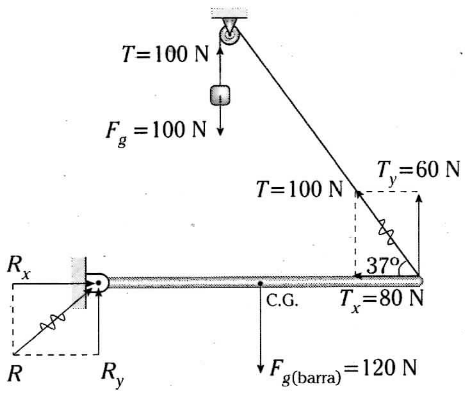
Problema N.º 2

El sistema mostrado se mantiene en equilibrio. Si las masas de la barra y del bloque son 12 kg y 10 kg, respectivamente, determine el módulo de la reacción en la articulación. $(g=10 \text{ m/s}^2)$.



Resolución

Hagamos el DCL del bloque y de la barra.



Luego de descomponer la tensión que actúa sobre la barra en la horizontal y en la vertical, analicemos el equilibrio de la barra:

En la horizontal la articulación debe ejercer una fuerza hacia la derecha que equilibre a $\vec{T}_x$, $(\vec{R}_x)$.

En la vertical la articulación debe ejercer una fuerza hacia arriba que se equilibre con $\vec{F}_g$ y $\vec{T}_y$, (R_y).

La suma vectorial de $\vec{R}_x$ y $\vec{R}_y$ da la fuerza total que la articulación le ejerce a la barra, $\vec{R}$.

Nos piden R.

Del gráfico

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2} \qquad \text{(I)}$$

Del equilibrio en la horizontal

$$R_x=T_x=80\text{ N} \qquad \text{(II)}$$

Del equilibrio en la vertical

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$R_y+T_y=F_g$$

$$R_y+60=120$$

$$R_y=60\text{ N} \qquad \text{(III)}$$

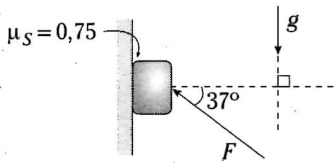
Reemplazamos (II) y (III) en (I)

$$R=\sqrt{80^2+60^2}$$

$\therefore\ R=100$ N

Problema N.º 3

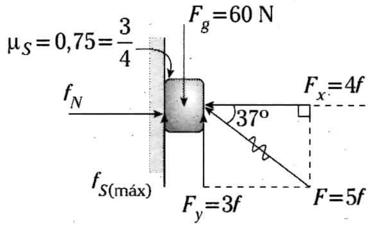
Un bloque se mantiene presionado contra una pared mediante una fuerza $\vec{F}$ como se muestra. Determine el valor de $\vec{F}$ si el bloque está a punto de resbalar hacia abajo. Considere que la masa del bloque es 6 kg. (g=10 m/s^2).



Resolución

Como el bloque está a punto de resbalar hacia abajo, la fuerza de rozamiento que le ejerce la pared es estática hacia arriba y máxima.

Hagamos el DCL del bloque.



Nos piden F.

Luego de descomponer $\vec{F}$

$$F=5f \qquad \text{(I)}$$

Del equilibrio en la vertical

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$\rightarrow\quad \underbrace{f_{S(\text{máx})}}+F_y=F_g$$

$$\rightarrow\quad \mu_S f_N+3f=60 \qquad \text{(II)}$$

Del equilibrio en la horizontal

$$f_N=4f \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II)

$$\frac{3}{4}(4f)+3f=60$$

$$6f=60$$

$$\rightarrow\quad f=10 \qquad \text{(IV)}$$

Finalmente, reemplazamos (IV) en (I)

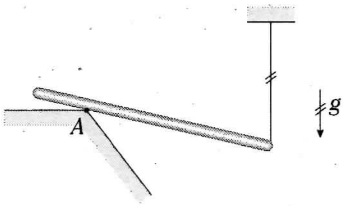
$$F=5(10)$$

$\therefore\ F=50$ N

Problemas Propuestos

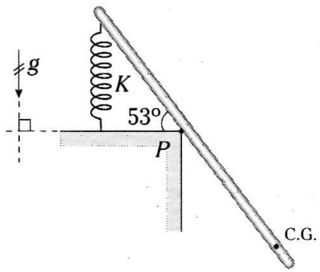
NIVEL BÁSICO

1. La barra de 9 kg se mantiene en reposo como se muestra. Si el módulo de la reacción en A es el doble del módulo de la tensión en la cuerda, halle el módulo de la tensión en la cuerda. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) 10 N B) 30 N C) 50 N
D) 60 N E) 80 N

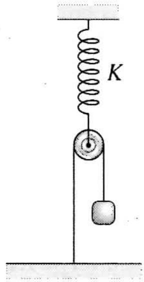
2. La barra de 10 kg se mantiene en reposo como se muestra. Si el resorte, de constante de elasticidad $K=500$ N/m, está estirado 20 cm, determine el módulo de la fuerza de rozamiento en P. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



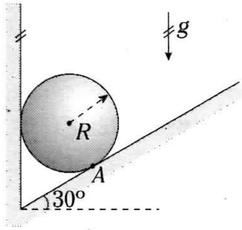
A) 100 N B) 120 N C) 160 N
D) 180 N E) 200 N

3. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio. Si la polea es ideal y el bloque es de 6 kg, halle la deformación del resorte cuya rigidez es $K=240$ N/m. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) 10 cm
B) 20 cm
C) 30 cm
D) 40 cm
E) 50 cm

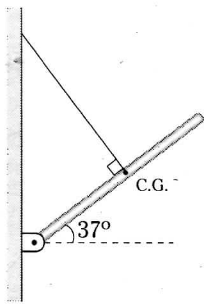


4. El cilindro homogéneo y liso de 15 kg se mantiene en reposo apoyado en dos superficies como se muestra. Halle el módulo de la reacción en A. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) 100 N B) $100\sqrt{3}$ N C) 200 N
D) $200\sqrt{3}$ N E) 300 N

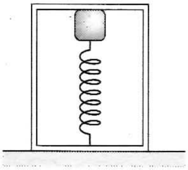
5. La barra homogénea de 100 kg se mantiene en reposo como se muestra. Halle el módulo de la reacción en la articulación.
$(g=10\ \text{m/s}^2)$

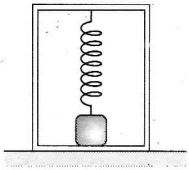


A) 300 N B) 400 N C) 500 N
D) 600 N E) 800 N

NIVEL INTERMEDIO

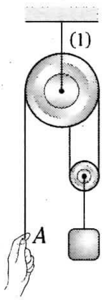
6. En el gráfico 1 se muestra un bloque de 5 kg en reposo, unido a un resorte, dentro de una caja. En el gráfico 2 se muestra el mismo sistema pero invertido, además, el bloque presiona a la caja con una fuerza que es el doble de la fuerza con que presiona la caja en el gráfico 1. Determine el módulo de la fuerza con que el bloque presiona la caja en el gráfico 2. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.


gráf. 1


gráf. 2

A) 50 N B) 100 N C) 150 N
D) 200 N E) 250 N

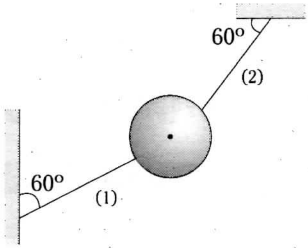
7. Un bloque de 20 kg se mantiene en reposo como se muestra. Si las poleas son ideales, determine el módulo de la fuerza ejercida por la persona que sostiene la cuerda en *A* y el módulo de la tensión en la cuerda (1). $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



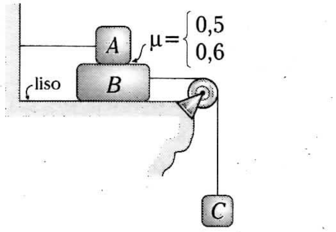
A) 100 N; 300 N
B) 100 N; 400 N
C) 200 N; 400 N
D) 400 N; 1200 N
E) 400 N; 800 N

8. Una esfera de 16 kg se mantiene en reposo sostenida por 2 cuerdas como se muestra. Halle el módulo de la tensión en la cuerda (1). $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) 40 N
B) 80 N
C) 160 N
D) 320 N
E) 400 N



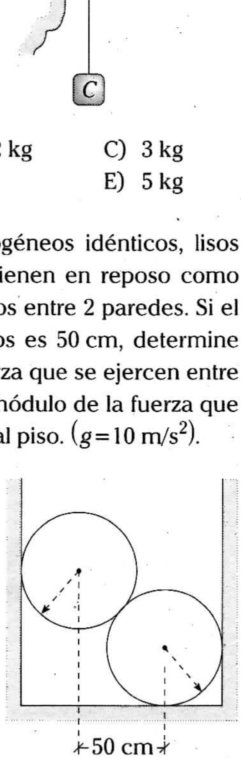
9. Las masas de los bloques *A* y *B* son 5 kg y 15 kg, respectivamente. Halle el máximo valor de la masa del bloque *C* de manera que los bloques se mantengan en reposo. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



A) 1 kg B) 2 kg C) 3 kg
D) 4 kg E) 5 kg

10. Dos cilindros homogéneos idénticos, lisos y de 30 kg se mantienen en reposo como se muestra, apoyados entre 2 paredes. Si el radio de los cilindros es 50 cm, determine el módulo de la fuerza que se ejercen entre sí los cilindros y el módulo de la fuerza que uno de ellos ejerce al piso. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) 600 N; 600 N
B) 600 N; 1200 N
C) $200\sqrt{3}$ N; 1200 N
D) $200\sqrt{3}$ N; 600 N
E) 300 N; 600 N



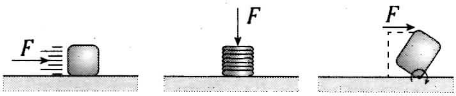
Momento de una fuerza y equilibrio mecánico de rotación

Capítulo IX

OBJETIVOS
- Entender qué es momento de una fuerza.
- Conocer y aplicar la condición de equilibrio mecánico de rotación.

Momento de una fuerza

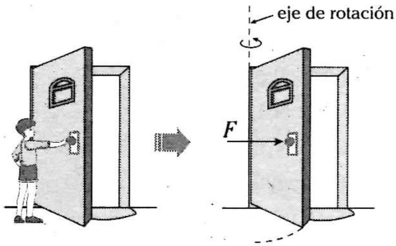
Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo puede causar varios efectos como son: traslación, deformación, rotación, entre otros.



traslación del cuerpo | deformación del cuerpo | rotación del cuerpo

En el tema que estamos desarrollando, analizaremos el efecto de rotación que experimenta un cuerpo debido a la acción de una fuerza.

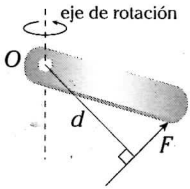
Considere el caso de una persona que intenta cerrar una puerta ejerciendo una fuerza que hace rotar la hoja de puerta respecto a un eje que pasa a través de sus bisagras como se muestra.



La persona ejerce una fuerza sobre la hoja de puerta | La hoja de puerta rota respecto a un eje que pasa por las bisagras

Dependiendo del punto de aplicación de la fuerza esta puede hacer rotar la hoja de puerta en forma rápida, lentamente o simplemente no hacerla rotar; luego, para medir el efecto de rotación producido por una fuerza sobre un cuerpo respecto a un punto o eje, empleamos una magnitud vectorial denominada **momento de una fuerza** $\left(\vec{M}_O^F\right)$.

El módulo (valor) del momento que produce una fuerza se determina de la siguiente manera:



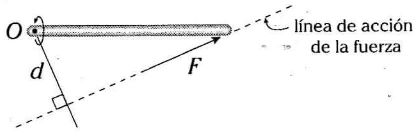
$$\boxed{M_O^F = F \cdot d}$$ Su unidad: $N \cdot m$

donde

- M_O^F: momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto de O
- O: centro de momentos
- F: valor de la fuerza aplicada (N)
- d: distancia o brazo de la fuerza (m)

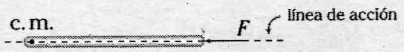
Esta distancia es la medida de la longitud del segmento de recta trazado a partir del centro de momentos en forma perpendicular a la línea de acción de la fuerza.

Vista superior del cuerpo que rota



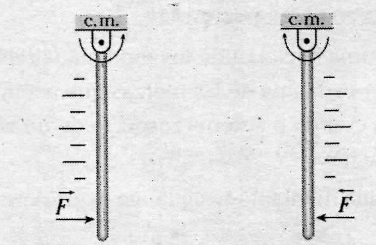
OBSERVACIÓN

Si la línea de acción de la fuerza aplicada pasa por el centro de momentos (c. m.), no se produce efecto de rotación.



$$\boxed{M_O^F=0}$$

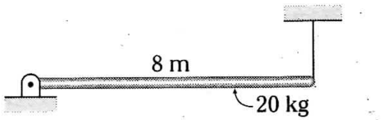
Por convención, se considera positivo el momento que producen las fuerzas que hacen rotar al cuerpo en sentido antihorario, y negativo los momentos que producen las fuerzas que hacen rotar al cuerpo en sentido horario.



rotación en sentido antihorario	rotación en sentido horario
$\vec{M}_O^F(+)$	$\vec{M}_O^F(-)$

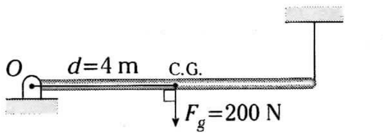
Ejemplos

1. Determine el momento producido por la fuerza de gravedad sobre la barra homogénea respecto de la articulación. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Grafiquemos la $\vec{F}_g$.



Como la $\vec{F}_g$ es perpendicular a la barra recta

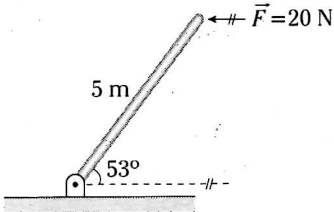
$$\vec{M}_O^{F_g}=-F_g\cdot d$$

El signo es negativo (–) porque la $\vec{F}_g$ trata de provocar rotación en sentido horario alrededor de O.

$$\vec{M}_O^{F_g}=-200\cdot 4$$

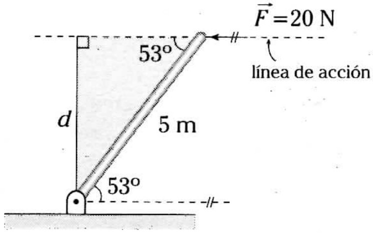
$$\therefore\ \vec{M}_O^{F_g}=-800\ \text{N}\cdot\text{m}$$

2. Determine el momento producido por la fuerza $\vec{F}$ sobre la barra respecto de la articulación.



Resolución

Trazamos la línea de acción de la fuerza $\vec{F}$ y luego el segmento de recta (d) a partir del centro de momentos (articulación) en forma perpendicular a la línea de acción de la fuerza.



Del triángulo rectángulo formado tenemos

d=4 m

Luego, el momento producido por $\vec{F}$ es

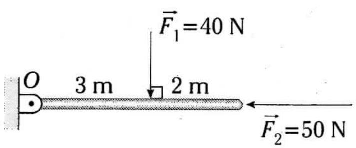
$$\vec{M}_O^F = F \cdot d$$

$$\vec{M}_O^F = (20)(4)$$

$$\vec{M}_O^F = 80\ \text{N}\cdot\text{m}$$

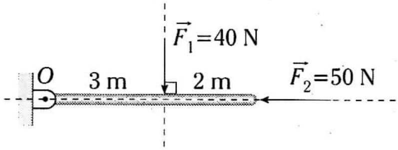
El momento es positivo, esto indica que $\vec{F}$ intenta o hace rotar a la barra en sentido antihorario.

3. Determine el momento producido por $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ sobre la barra. (O: centro de momentos).



Resolución

Graficamos las líneas de acción de las fuerzas.



La fuerza $\vec{F}_1$ hace rotar a la barra en sentido horario (momento negativo).

$$\vec{M}_O^{F_1} = -F_1 \cdot d_1$$

Como la fuerza $\vec{F}_1$ es perpendicular a la barra, d_1=3 m.

$$\vec{M}_O^{F_1} = -40 \cdot (3)$$

$$\vec{M}_O^{F_1} = -120\ \text{N}\cdot\text{m}$$

La línea de acción de la fuerza $\vec{F}_2$ pasa por el centro de momentos.

$$\vec{M}_O^{F_2} = F_2 \cdot d_2$$

$$\vec{M}_O^{F_2} = 50(0)$$

$$\therefore\ \vec{M}_O^{F_2} = 0$$

Momento resultante $\left(\vec{M}_O^{\text{res}}\right)$

Es la suma vectorial de los momentos producidos por cada una de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo o sistema respecto de un centro de rotación.

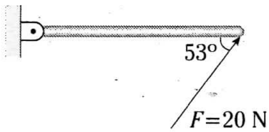
Se evalúa mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{\vec{M}_O^{\text{res}} = \vec{M}_O^{F_1} + \vec{M}_O^{F_2} + \ldots + \vec{M}_O^{F_n}}$$

Como la suma es vectorial, al reemplazar los momentos debemos incluir su signo.

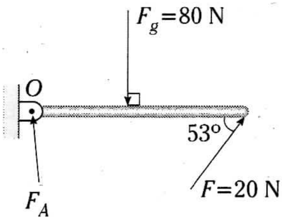
Ejemplo

Determine el momento resultante sobre la barra homogénea de 2,5 m de longitud respecto de la articulación. $\left(m_{\text{barra}}=8\text{ kg};\ g=10\text{ m/s}^2\right)$.



Resolución

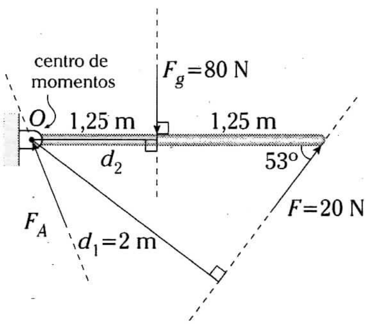
Realizamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la barra homogénea.



El momento resultante para este caso se determina así

$$\vec{M}_O^{\text{res}}=\vec{M}_O^{F}+\vec{M}_O^{F_g}+\vec{M}_O^{F_A} \qquad \text{(I)}$$

Antes de evaluar los momentos identificamos las distancias.



Reemplazamos en (I)

$$\vec{M}_O^{\text{res}}=(F\cdot d_1)+(-F_g\cdot d_2)+(F_A\cdot 0)$$

$$\vec{M}_O^{\text{res}}=(20\times 2)+(-80\times 1{,}25)+0$$

$$\vec{M}_O^{\text{res}}=40-100$$

$$\vec{M}_O^{\text{res}}=-60\text{ N}\cdot\text{m}$$

Como el momento resultante es diferente de cero y negativo, la barra rota en sentido horario. El momento producido por $\vec{F}_A$ es nulo porque su línea de acción pasa por el centro de momentos.

Equilibrio mecánico de rotación

Un cuerpo o sistema se encuentra en equilibrio mecánico de rotación si el momento resultante sobre él respecto a cualquier punto es nulo.

$$\boxed{\vec{M}_O^{\text{res}}=\vec{0}}$$

segunda condición de equilibrio

De la segunda condición de equilibrio se deduce que la suma de momentos de las fuerzas en sentido antihorario es igual a la suma de momentos de las fuerzas en sentido horario, el cual matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

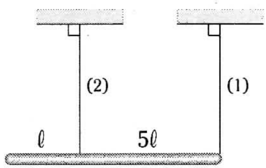
$$\boxed{\sum M\circlearrowleft=\sum M\circlearrowright}$$

Observación

Si sobre un cuerpo o sistema se verifica que $\vec{M}_O^{\text{res}}=0$, entonces dicho cuerpo o sistema está en reposo o está rotando con velocidad angular $(\vec{\omega})$ constante.

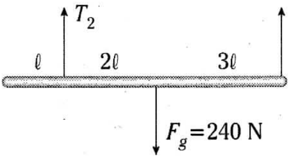
Ejemplos

1. Determine el valor de la fuerza de tensión en la cuerda (1) si la barra homogénea de 24 kg está en reposo. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



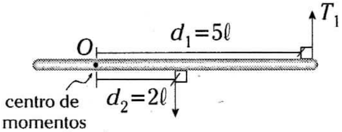
Resolución

Realizamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la barra.



Nos piden determinar la tensión T_1.

Aplicamos la segunda condición de equilibrio y elegimos el centro de momentos en el punto de aplicación de la tensión T_2 para eliminar el efecto de rotación que podría originar.



Luego

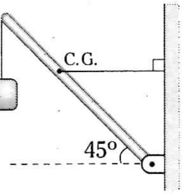
$$\boxed{\sum M_O\circlearrowleft=\sum M_O\circlearrowright}$$

$$T_1\cdot d_1=F_g\cdot d_2$$

$$T_1(\cancel{5\ell})=240(\cancel{2\ell})$$

$$\therefore\ T_1=96\ \text{N}$$

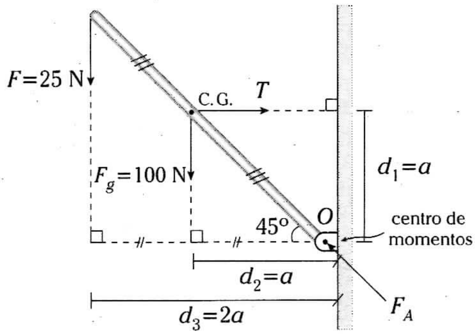
2. La barra homogénea de 10 kg y el bloque de 2,5 kg están en reposo. Determine la tensión en la cuerda horizontal. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Para determinar la tensión en la cuerda horizontal, analizamos a la barra que está en contacto con ella.

Realizamos el DCL de la barra y luego aplicamos la segunda condición de equilibrio eligiendo a la articulación como centro de momentos, de esta manera eliminamos a las fuerzas que no conocemos y no nos interesan para la solución del problema.



Luego

$$\sum M_O\circlearrowright=\sum M_O\circlearrowleft$$

$$M_O^T=M_O^{F_g}+M_O^F$$

$$T\cdot d_1=F_g\cdot d_2+F\cdot d_3$$

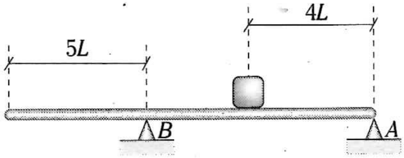
$$T(\cancel{a})=100(\cancel{a})+25(2\cancel{a})$$

$$T=100+50$$

$$\therefore\ T=150\ \text{N}$$

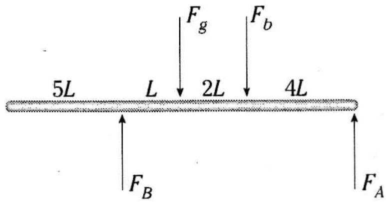
Problema N.º 1

La viga homogénea de 40 kg y longitud $12L$ está en reposo. Sobre la viga un bloque de 10 kg se mantiene en reposo. Determine el valor de la fuerza que ejerce el apoyo A sobre la barra. (g=10 m/s^2)



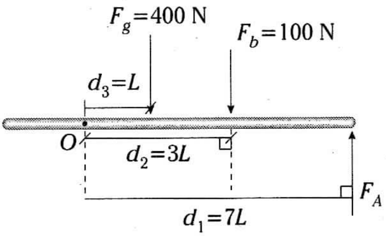
Resolución

Realizamos el DCL de la barra.



Para determinar el valor de la fuerza que ejerce el apoyo A (F_A) aplicamos la segunda condición de equilibrio.

Tomamos como centro de momentos el apoyo en B y eliminamos el efecto de rotación producido por F_B.



Luego

$$\sum M_O \circlearrowleft = \sum M_O \circlearrowright$$

$$M_O^{F_A} = M_O^{F_g} + M_O^{F_b}$$

$$F_A \cdot d_1 = F_g \cdot d_3 + F_b \cdot d_2$$

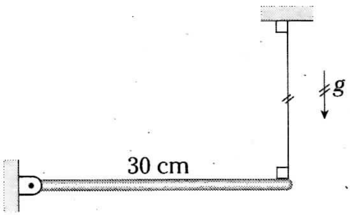
$$F_A(7\cancel{L}) = 400(\cancel{L}) + 100(3\cancel{L})$$

$$7F_A = 400+300$$

$$\therefore \quad F_A = 100\ \text{N}$$

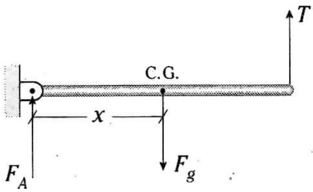
Problema N.º 2

La barra mostrada está en reposo. Si la tensión en la cuerda es el doble del valor de la reacción en la articulación; determine a qué distancia de la articulación se encuentra el centro de gravedad (C. G.) de la barra.



Resolución

Realizamos el DCL de la barra y ubicamos el centro de gravedad (C. G.) en un punto arbitrario de la barra.

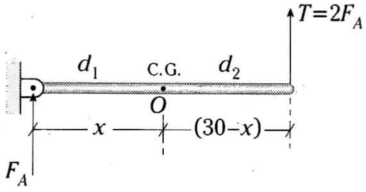


Las tres fuerzas son paralelas.

Nos piden determinar x.

Dato: $T=2F_A$

Aplicamos la segunda condición de equilibrio tomando como centro de momentos el centro de gravedad de la barra.



Luego

$$\sum M_O \circlearrowright = \sum M_O \circlearrowleft$$

$$M_O^{F_A} = M_O^{T}$$

$$F_A \cdot d_1 = T \cdot d_2$$

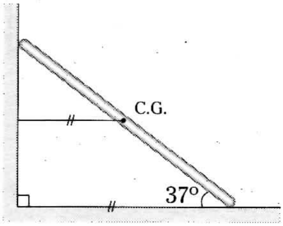
$$\cancel{F_A} \cdot (x) = 2\cancel{F_A} \cdot (30-x)$$

$$x = 60 - 2x$$

$$\therefore \quad x = 20 \text{ cm}$$

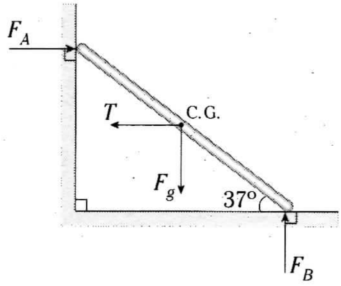
Problema N.º 3

La barra homogénea de 6 kg se mantiene en reposo. Determine el módulo de la fuerza de tensión en la cuerda. Considere que las superficies son lisas. $(g=10 \text{ m/s}^2)$.

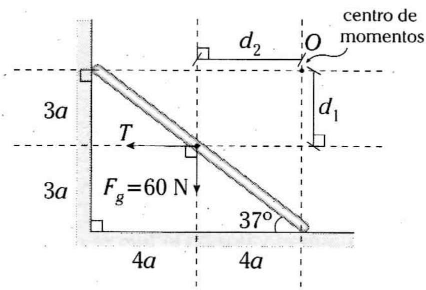


Resolución

Realizamos el DCL de la barra.



No conocemos F_A y F_B, tampoco son relevantes para determinar la fuerza de tensión, entonces tomamos como centro de momentos la intersección de sus líneas de acción.



Luego

$$\sum M_O \circlearrowright = \sum M_O \circlearrowleft$$

$$M_O^{T} = M_O^{F_g}$$

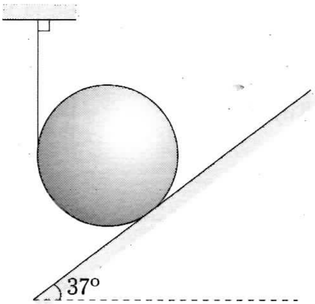
$$T \cdot d_1 = F_g \cdot d_2$$

$$T(3\cancel{a}) = 60(4\cancel{a})$$

$$\therefore \quad T = 80 \text{ N}$$

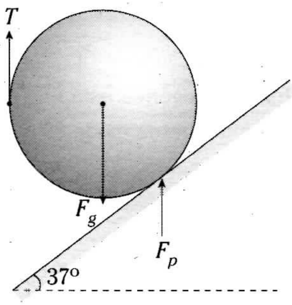
Problema N.º 4

La esfera homogénea de 8 kg se mantiene en reposo. Determine el valor de la fuerza de rozamiento sobre la esfera. (g=10 m/s^2).



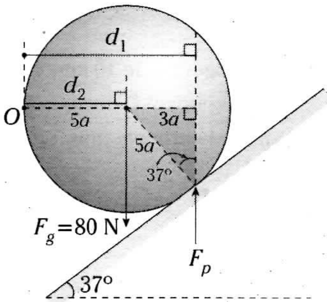
Resolución

Realizamos el DCL de la barra.



La fuerza de rozamiento sobre la esfera es una componente de la fuerza que ejerce el piso (F_p), entonces primero determinamos el valor de esta fuerza.

Aplicamos la segunda condición de equilibrio tomando como centro de momentos el punto de contacto entre la cuerda y la esfera.



$$\sum M_O \circlearrowleft = \sum M_O \circlearrowright$$

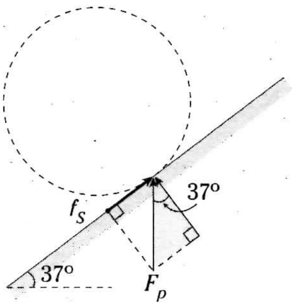
$$M_O^{F_p} = M_O^{F_g}$$

$$F_p \cdot d_1 = F_g \cdot d_2$$

$$F_p(8\cancel{a}) = 80(5\cancel{a})$$

$$F_p = 50 \text{ N}$$

Descomponemos la fuerza que ejerce el piso (F_p) para obtener la fuerza de rozamiento (f_s).



Del gráfico

$$f_s = F_p \cdot \text{sen}37°$$

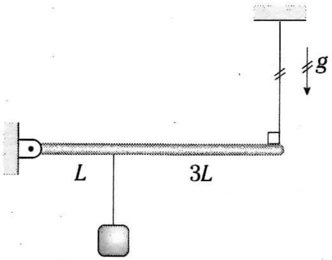
$$f_s = 50\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \quad f_s = 30 \text{ N}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

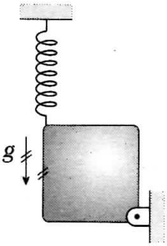
1. La barra homogénea de 10 kg y el bloque de 2 kg están en reposo. Determine el valor de la reacción en la articulación. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



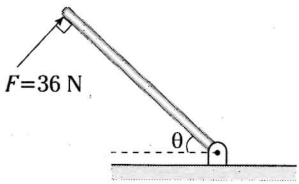
A) 25 N B) 45 N C) 65 N
D) 15 N E) 50 N

2. La placa cuadrada homogénea de 8 kg se mantiene en reposo. Determine el módulo de la reacción en la articulación. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) 20 N
B) 30 N
C) 40 N
D) 50 N
E) 80 N

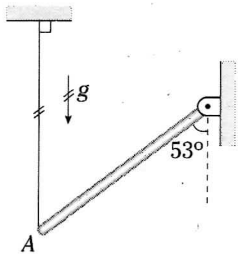


3. La barra homogénea de 12 kg está en reposo. Determine el ángulo θ.



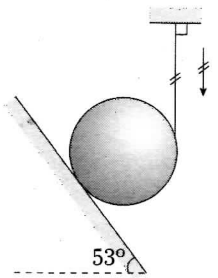
A) 16° B) 30° C) 37°
D) 53° E) 60°

4. La barra de 50 cm está en reposo, donde el valor de la fuerza que le ejerce la articulación es tres veces el valor de la fuerza de tensión. Determine a qué distancia del extremo A se ubica su centro de gravedad. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



A) 20 cm B) 40 cm C) 30 cm
D) 25 cm E) 15 cm

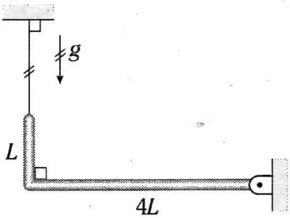
5. La esfera homogénea está en reposo. Si la tensión en la cuerda es de 80 N, determine la masa de la esfera. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) 4 kg B) 8 kg C) 12 kg
D) 16 kg E) 18 kg

NIVEL INTERMEDIO

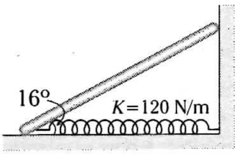
6. La barra homogénea de 5 kg está en reposo. Determine el valor de la tensión en la cuerda.



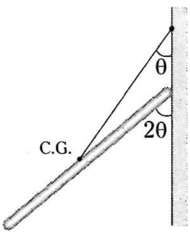
A) 30 N B) 40 N C) 50 N
D) 25 N E) 15 N

7. La barra lisa y homogénea se mantiene en reposo. Si el resorte está deformado 20 cm, determine la masa de la barra. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) 0,5 kg
B) 0,7 kg
C) 1,2 kg
D) 1,4 kg
E) 2 kg

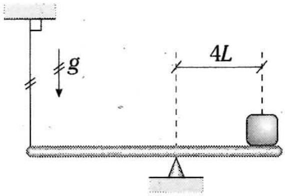


8. La barra homogénea de 6 kg está en reposo. Si la componente normal de la fuerza que ejerce la pared sobre la barra es de 30 N, determine el valor del ángulo θ. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



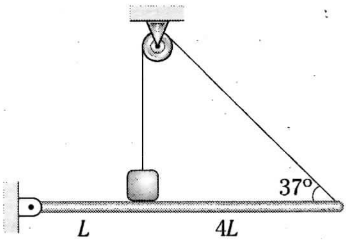
A) 15° B) 30° C) 37°
D) 16° E) 7°

9. La barra homogénea de 12 kg y longitud $10L$ está en reposo. Determine el máximo valor que puede tomar la masa del bloque para que la barra no pierda el equilibrio. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) 1 kg B) 2 kg C) 3 kg
D) 6 kg E) 10 kg

10. La barra homogénea de 8 kg está en reposo. Si el bloque tiene una masa de 24 kg, determine el valor de la fuerza entre el bloque y la barra. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) 50 N
B) 90 N
C) 110 N
D) 130 N
E) 150 N

Dinámica rectilínea

Capítulo X

OBJETIVOS

- Entender el concepto de inercia.
- Analizar el movimiento mecánico de los cuerpos considerando sus causas.
- Entender y aplicar la segunda ley de Newton.

Hasta ahora hemos analizado de manera descriptiva el movimiento mecánico, pero no hemos analizado por qué los cuerpos se mueven como lo hacen, ¿por qué algunos cuerpos se mueven con velocidad constante?, ¿por qué, cuando los cuerpos presentan aceleración, algunos presentan mayor aceleración que otros?, ¿por qué algunos cuerpos se mueven en línea recta y otros lo hacen en trayectoria curvilínea? Estas y otras preguntas serán respondidas en este capítulo.

Ley de inercia

Desde siempre, el problema del movimiento fue para el hombre un tema fascinante. Los filósofos griegos se admiraban y no ocultaban su sorpresa al ver cómo una flecha podía seguir en movimiento después de haber abandonado el arco que la había arrojado, ¿cómo es posible que siga moviéndose si nadie la impulsa?, se cuestionaban.

Para Aristóteles, uno de los más grandes sabios griegos, el movimiento de un cuerpo estaba condicionado a la acción de una fuerza. Según Aristóteles, se necesita siempre una fuerza neta para que un objeto se mantenga en movimiento continuo.

Las ideas de Aristóteles prevalecieron por espacio de 2000 años, durante todo este tiempo tuvo el apoyo incondicional de la Iglesia, puesto que sus ideas no se contraponían a las leyes de Dios. Se le acredita a Galileo ser el principal gestor en el derrumbamiento de las ideas de Aristóteles para llegar finalmente a la ley de inercia, que entre otras cosas afirma: "La naturaleza está hecha de tal manera, que los cuerpos que están en movimiento siguen en movimiento por sí solos, sin que nadie tenga que ir empujándolos".

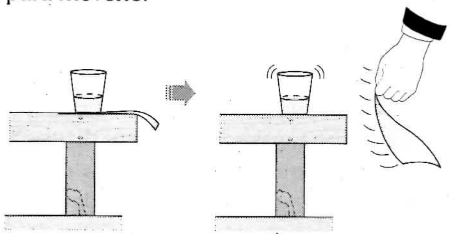
Antes que hubiese transcurrido un año de la muerte de Galileo, nació Isaac Newton. En 1665, a la edad de 23 años, Newton planteó sus célebres leyes del movimiento. Estas leyes reemplazaron las ideas aristotélicas que habían dominado el pensamiento de los científicos durante casi 2000 años.

La primera ley de movimiento de Newton, que se conoce como ley de inercia, es otra forma de expresar la idea de Galileo:

"Todo objeto persiste en su estado de reposo, o de movimiento en línea recta con rapidez constante, a menos que se le apliquen fuerzas que lo obliguen a cambiar dicho estado".

Dicho simplemente, las cosas tienden a seguir haciendo lo que ya estaban haciendo.

Por ejemplo, un vaso sobre una mesa está en estado de reposo y tiende a mantenerse de esa manera, sin embargo, si se tira repentinamente de una hoja de papel sobre el que descansa dicho vaso notaremos que la breve y pequeña fuerza de fricción entre el vaso y el papel no basta para moverlo.



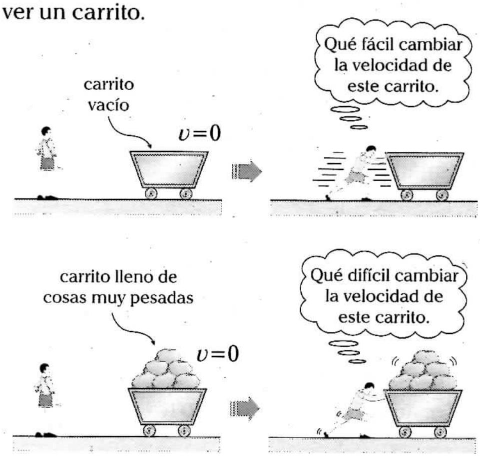
El vaso tiende a mantenerse en reposo

Considere ahora un objeto en movimiento: si se lanza un disco pequeño de plástico sobre la superficie de una vereda, alcanzará el reposo en poco tiempo, si dicho disco se lanza sobre una superficie de hielo, recorrerá una distancia mayor, esto se debe a que la fuerza de fricción es más pequeña. Si el disco se mueve sobre una mesa de aire donde la fricción es prácticamente nula, se deslizará sin pérdida de rapidez aparente. Vemos, pues, que en ausencia de fuerzas, los objetos en movimiento tienden a moverse indefinidamente en línea recta.

INERCIA

Propiedad de todo cuerpo de mantener su reposo o movimiento (conservar su velocidad).

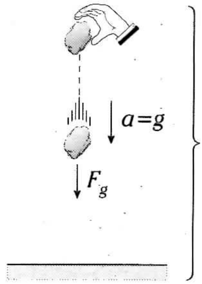
Veamos el caso en que una persona busca mover un carrito.



A mayor masa de un cuerpo, es más difícil cambiar su velocidad, es decir, a mayor masa un cuerpo presenta mayor inercia, por lo tanto, **la masa mide la inercia de un cuerpo**.

En la primera ley de Newton está expresada la causa que puede provocar que la velocidad de un cuerpo cambie, esta es la fuerza.

Por ejemplo, si soltamos una piedra y consideramos caída libre:



Sobre la piedra hay una fuerza resultante, la fuerza de gravedad, esta provoca que cambie su velocidad, es decir, le provoca aceleración ($\vec{a}$), que es, en este caso, la aceleración de la gravedad.

Cuando sobre un cuerpo hay una fuerza resultante, no nula, $\vec{F}_R \neq 0$, esta le provoca cambios en su velocidad.

¿Cuál es la relación cuantitativa entre la $\vec{F}_R$ y la $\vec{a}$? Esta relación la plantea Newton en su famosa segunda ley.

Segunda ley de Newton

La aceleración que adquiere un cuerpo es directamente proporcional al módulo de la fuerza resultante externa sobre él e inversamente proporcional a su masa.

Matemáticamente

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}_R}{m} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_R=m\cdot\vec{a}}$$

donde

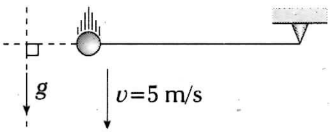
- $\vec{F}_R$: fuerza resultante (N)
- m: masa (kg)
- $\vec{a}$: aceleración del cuerpo (m/s^2)

NOTA

La $\vec{F}_R$ y la $\vec{a}$ presentarán iguales direcciones.

Ejemplos

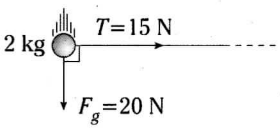
1. En el instante mostrado, sobre la esfera de 2 kg la cuerda ejerce una tensión de 15 N. Halle el módulo de la aceleración que experimenta la esfera en este instante. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



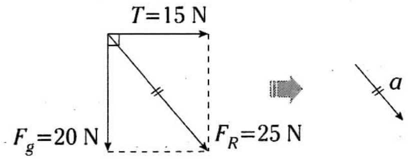
Resolución

Para calcular la aceleración de la esfera necesitamos hallar la fuerza resultante, por lo cual hacemos un DCL de la esfera.

¡Cuidado! La velocidad no es una fuerza.



Hallamos la $\vec{F}_R$ gráficamente.



Para determinar la aceleración, usamos la segunda ley de Newton.

$$\vec{F}_R=m\vec{a}$$

Tomando módulos

$$\boxed{F_R=m\cdot a}$$

Reemplazamos datos

$$25=2\cdot a$$

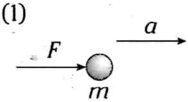
$$\therefore\ a=12{,}5\ \text{m/s}^2$$

2. Una partícula experimenta una aceleración de módulo a. Halle el módulo de la aceleración que experimenta otra partícula cuya masa es el quíntuple de la masa de la primera. Considere que el módulo de la fuerza resultante que actúa sobre la segunda partícula es el doble de la que actúa sobre la primera.

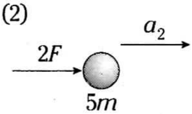
Resolución

Ilustremos las dos situaciones.

Situación (1)



Situación (2)



Nos piden a_2.

De la segunda ley de Newton en la situación (2)

$$F_{R_2}=m_2\cdot a_2$$

$$2F=5m\cdot a_2 \qquad \text{(I)}$$

En la situación (I)

$F_{R_1}=m_1 \cdot a_1$

$F=m \cdot a \qquad \text{(II)}$

Dividimos, miembro a miembro, las ecuaciones (I) y (II).

$$\frac{2\cancel{F}}{\cancel{F}}=\frac{5\cancel{m} \cdot a_2}{\cancel{m} \cdot a}$$

$$2a=5a_2$$

$$\therefore \ a_2=\frac{2a}{5}$$

Otra forma

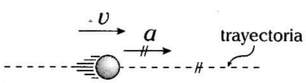
De la segunda ley de Newton, se sabe que la fuerza resultante y la aceleración son directamente proporcionales, por lo tanto, si se duplica la fuerza resultante, debe duplicarse la aceleración; además, masa y aceleración son inversamente proporcionales, por lo tanto, si se quintuplica la masa, debe reducirse a la quinta parte la aceleración. Sea a_2 el módulo de la aceleración que piden, adicionando los efectos mencionados se tiene

$a_2=\frac{2a}{5}$ que es la misma que hallamos.

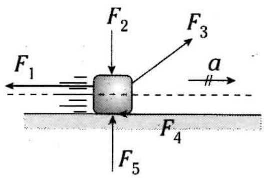
Vamos ahora a centrarnos en aplicaciones de la segunda ley de Newton al movimiento rectilíneo.

Aplicación de la segunda ley de Newton a un movimiento rectilíneo

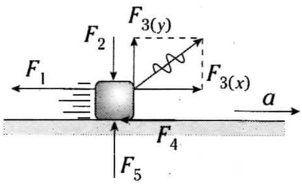
Como ya vimos en cinemática, cuando la trayectoria es rectilínea y hay aceleración, entonces el vector aceleración es paralelo a la trayectoria.



En general, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo no son paralelas a la trayectoria.



Como ya vimos, la $\vec{F}_R$ tiene la misma dirección que la $\vec{a}$. Si descomponemos todas las fuerzas en dirección paralela a la trayectoria y en dirección perpendicular a esta, tenemos



Como la $\vec{F}_R$ es paralela a la $\vec{a}$, entonces las fuerzas que son perpendiculares a la trayectoria deben anularse.

$$\boxed{F_5+F_{3(y)}=F_2}$$

El módulo de la $\vec{F}_R$ lo hallamos con las fuerzas paralelas a la $\vec{a}$, recordando que $\vec{F}_R$ y $\vec{a}$ tienen iguales direcciones.

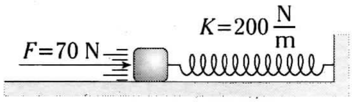
$$F_R=F_{3x}-(F_1+F_4)$$

En general

$$\boxed{F_R=\sum_{\substack{\text{a favor}\\ \text{de } \vec{a}}} F-\sum_{\substack{\text{en contra}\\ \text{de } \vec{a}}} F}$$

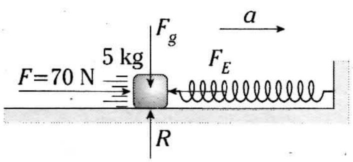
Ejemplos

1. Halle el módulo de la aceleración que experimenta el bloque liso, de 5 kg, en el instante mostrado, si se sabe que el resorte está comprimido 10 cm.



Resolución

Hacemos un DCL del bloque.



Calculamos F_E

$F_E=Kx$ (I)

Por dato

$x=10\text{ cm} <> 0{,}1\text{ m}$

En (I)

$F_E=200(0{,}1)$

$\rightarrow \boxed{F_E=20\text{ N}}$

De la segunda ley de Newton

$F_R=m\cdot a$

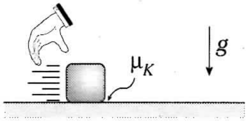
$F-F_E=5\cdot a$

$70-20=5a$

$50=5a$

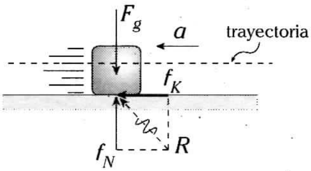
$\therefore\ a=10\text{ m/s}^2$

2. Un bloque se lanza sobre una superficie horizontal como se muestra. Halle el módulo de la aceleración del bloque.



Resolución

Vamos a analizar luego del lanzamiento, de manera que sobre el bloque solo actúan 2 fuerzas, la fuerza de gravedad y la reacción del piso.



La $\vec{F}_R$ sobre el bloque es la $\vec{f}_K$.

Nos piden a.

De la segunda ley de Newton

$F_R=m\cdot a$

$f_K=m\cdot a$

$\mu_K f_N=m\cdot a$ (I)

Se debe verificar

$f_N=F_g$

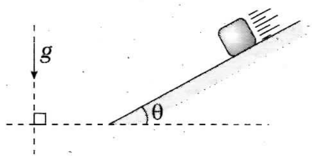
$f_N=mg$ (II)

Reemplazamos (II) en (I)

$\mu_K\,\cancel{m}g=\cancel{m}a$

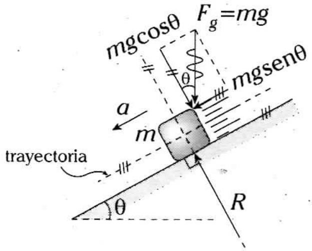
$\therefore\ a=\mu_K g$

3. Un bloque se mueve, libremente, hacia abajo, sobre un plano inclinado liso como se muestra. Halle el módulo de su aceleración.



Resolución

Hacemos el DCL del bloque.



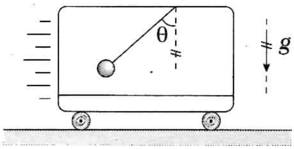
Luego de descomponer la fuerza de gravedad como se muestra, notamos que

$$\underbrace{F_R}=mg\text{sen}\theta$$

$$\cancel{m}\cdot a=\cancel{m}g\,\text{sen}\,\theta$$

$\therefore\ a=g\text{sen}\theta$

4. El coche mostrado se mueve aceleradamente, de tal manera que la esfera se mantiene en reposo respecto del coche. Halle el módulo de la aceleración del coche.



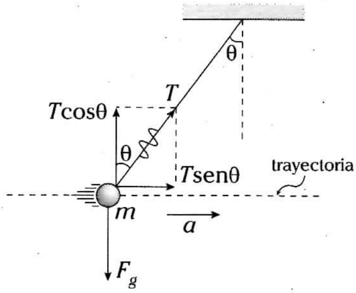
Resolución

Para empezar a analizar este problema, debemos recordar lo que experimentamos cuando subimos a un bus y viajamos parados, ya que no hay asientos libres. Cuando el bus "acelera" parece como si fuésemos empujados hacia atrás, en realidad se trata de un efecto de nuestra inercia, nuestro cuerpo se resiste a aumentar su velocidad. Lo mismo ocurre en este caso con la esfera, por lo cual tiende a irse hacia atrás y por ello es que la cuerda forma el ángulo θ con la vertical.

Como la esfera no se mueve respecto del coche, entonces se mueve igual que el coche, con igual velocidad, en cada instante, y con igual aceleración.

Así que para hallar el módulo de la aceleración del coche hallaremos el módulo de la aceleración de la esfera.

Hacemos el DCL de la esfera.



Luego de descomponer la tensión como se muestra

$$\underbrace{F_R}=T\text{sen}\theta$$

$$m\cdot a=T\text{sen}\theta \qquad \text{(I)}$$

En la vertical se verifica que

$$F_g=T\cos\theta$$

$$mg=T\cos\theta \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (I) entre (II)

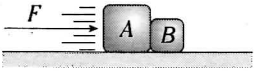
$$\frac{\cancel{m}\cdot a}{\cancel{m}\cdot g}=\frac{\cancel{T}\,\text{sen}\,\theta}{\cancel{T}\,\cos\theta}$$

$$\frac{a}{g}=\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

$\therefore\ a=g\tan\theta$

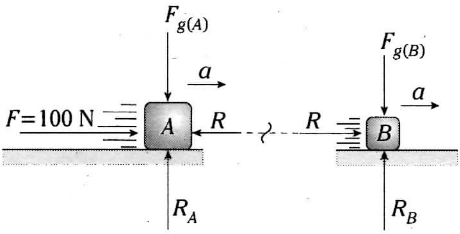
Problema N.° 1

La fuerza $\vec{F}$ es constante y tiene un módulo de 100 N. Determine el módulo de la reacción que el bloque A le ejerce al bloque B si se sabe que las masas de A y B son 3 m y 2 m, respectivamente. Desprecie todo rozamiento.



Resolución

Hacemos una separación imaginaria entre los bloques A y B, para poder graficar la reacción entre ambos.



Nos piden R.

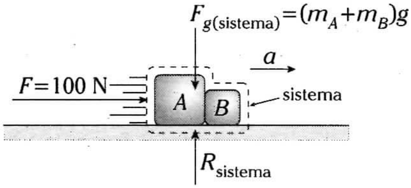
Note que al graficar la reacción entre los bloques estamos considerando la tercera ley de Newton, además, como los bloques se mueven juntos presentan en todo momento igual velocidad e igual aceleración.

Para hallar R analicemos, usando la segunda ley de Newton, al bloque B.

$$F_{R(B)}=m_B\cdot a_B$$

$$R=2m\cdot a \qquad \text{(I)}$$

A continuación podemos analizar al bloque A y luego usando métodos de solución de ecuaciones podemos hallar R, pero seguiremos otro camino: analizaremos a los dos bloques como si fueran un solo cuerpo, es decir, al sistema conformado por los bloques A y B.



$$F_{R_{\text{sistema}}}=m_{\text{sist}}\cdot a_{\text{sist}} \;\rightarrow\; F=(m_A+m_B)\cdot a$$

$$^{20}\cancel{100}={}^{1}\cancel{5}ma$$

$$\rightarrow\; 20=ma \qquad \text{(II)}$$

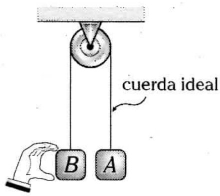
Reemplazamos (II) en (I)

$$R=2\cdot 20$$

$$\therefore\; R=40\text{ N}$$

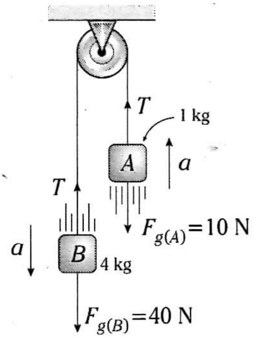
Problema N.° 2

En el instante mostrado se suelta el bloque B de 4 kg. Determine luego de cuánto tiempo el bloque A recorre 1 m. Considere que la masa del bloque A es 1 kg y desprecie todo rozamiento. ($g=10$ m/s^2)



Resolución

Hacemos un DCL de los bloques A y B luego de soltar a B.



Como los bloques se mueven unidos por la cuerda, sus movimientos son idénticos, excepto por la dirección, entonces en cada instante presentan aceleraciones de igual módulo.

Para A

$$F_{R(A)}=m_A \cdot a_A$$

$$T-F_{g(A)}=1\cdot a$$

$$T-10=a$$

$$T=10+a \qquad \text{(I)}$$

Para B

$$F_{R(B)}=m_B \cdot a_B$$

$$F_{g(B)}-T=4\cdot a$$

$$40-T=4a$$

$$40-4a=T \qquad \text{(II)}$$

De las ecuaciones (I) y (II)

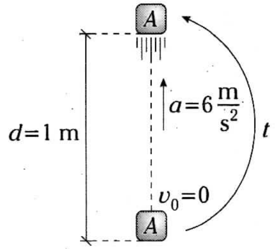
$$10+a=40-4a$$

$$5a=30$$

$$\rightarrow \quad a=6 \text{ m/s}^2$$

Con este resultado estamos demostrando que los bloques A y B realizan MRUV, ya que sus trayectorias son rectilíneas y sus aceleraciones son constantes.

Ahora para hallar lo que nos piden analicemos al bloque A.



Nos piden t.

De la ecuación

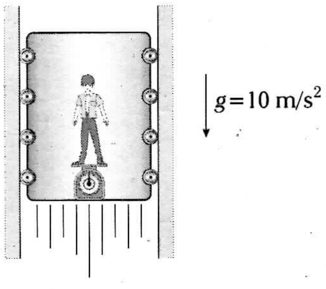
$$d=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \;\rightarrow\; 1=0\cdot t+\frac{1}{\cancel{2}_1}\cancel{(6)}^3 t^2$$

$$\frac{1}{3}=t^2 \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{3}}=t$$

$$\therefore \quad t=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{ s}$$

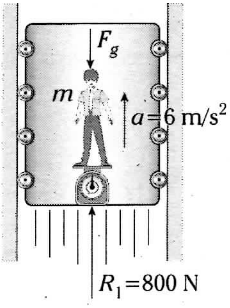
Problema N.º 3

Dentro de un ascensor que se mueve verticalmente hacia arriba se encuentra un joven parado sobre una balanza. Si la aceleración constante del ascensor es hacia arriba y vale 6 m/s^2, la lectura de la balanza es 800 N, y si es hacia abajo también vale 6 m/s^2, determine la lectura de la balanza.

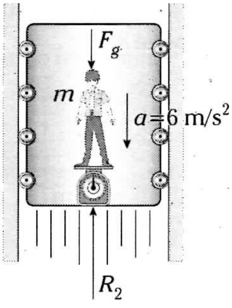


Resolución

Según el problema, debemos considerar dos situaciones, para ambas hacemos el DCL del joven.



Situación (1)



Situación (2)

Lo que marque la balanza va a ser igual al módulo de la reacción que los pies ejercen a esta.

Nos piden R_2.

En la situación (2), para el joven

$$F_R=ma_2$$

$$F_g-R_2=m\cdot a$$

$$mg-R_2=m\cdot 6$$

$$m\cdot 10-R_2=6m$$

$$4m=R_2 \qquad \text{(I)}$$

En la situación (1), para el joven

$$F_R=ma_1$$

$$R_1-F_g=m\cdot a$$

$$800-mg=m\cdot 6$$

$$800-m\cdot 10=6m$$

$$800=16m$$

$$\rightarrow \quad m=50 \text{ kg} \qquad \text{(II)}$$

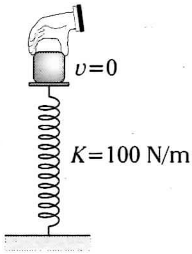
Reemplazamos (II) en (I)

$$4\cdot 50=R_2$$

$$\therefore \quad R_2=200 \text{ N}$$

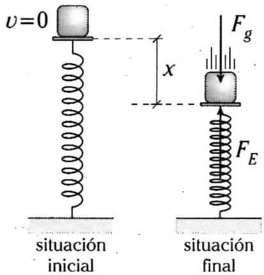
Problema N.° 4

Un bloque de 2 kg se suelta sobre un resorte que presenta su longitud natural. Determine la deformación del resorte luego de soltar el bloque y cuando este presente una aceleración nula. $(g=10 \text{ m/s}^2)$



Resolución

Luego de soltar el bloque, este empieza a comprimir el resorte, como el resorte se deforma surge la fuerza elástica que actúa sobre el bloque; pero, además, sobre el bloque actúa la fuerza de gravedad tal como se indica en la situación final del siguiente gráfico.



Como la aceleración del bloque debe ser cero, entonces la fuerza resultante es cero.

$$\vec{F}_R=\vec{0}$$

$$F_E-F_g=0 \ \rightarrow \ F_E=F_g$$

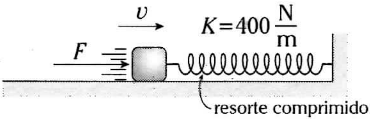
$$Kx=mg$$

$$x=\frac{mg}{K}$$

$$x=\frac{2(10)}{100} \ \rightarrow \ x=0{,}2m$$

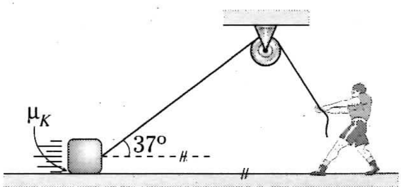
NIVEL BÁSICO

1. En el instante mostrado, el bloque liso de 5 kg presenta una aceleración que es horizontal, hacia la derecha y vale 4 m/s^2. Si el módulo de $\vec{F}$ es 100 N, halle la deformación del resorte. (g=10 m/s^2).



A) 5 cm B) 10 cm C) 15 cm
D) 20 cm E) 25 cm

2. El bloque de 10 kg desliza sobre el piso. Halle el módulo de su aceleración, en el instante mostrado, si en este instante el módulo de la tensión en la cuerda es 100 N. Considere que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el piso es 0,5. (g=10 m/s^2).

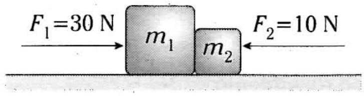


A) 2 m/s^2 B) 4 m/s^2 C) 6 m/s^2
D) 8 m/s^2 E) 9 m/s^2

3. Un bloque de masa 5 kg se encuentra en reposo descansando sobre un plano horizontal liso. De pronto, una fuerza horizontal, constante, de módulo 25 N empieza a actuar sobre este. Halle el recorrido del bloque al cabo de 4 s.

A) 20 m B) 40 m C) 60 m
D) 80 m E) 100 m

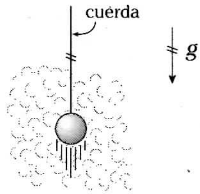
4. Dos bloques están sobre una superficie lisa y en contacto. Se aplican dos fuerzas horizontales $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tal como se muestra en el gráfico. Si m_1=6 kg y m_2=4 kg, ¿cuál es el módulo de la fuerza que un bloque le ejerce al otro?



A) 12 N B) 18 N C) 20 N
D) 24 N E) 30 N

5. La esfera de 20 kg asciende acelerando uniformemente, tal que en 3 segundos su rapidez aumenta en 60 m/s. Si el módulo de la tensión en la cuerda es 1 kN, halle el módulo de la resistencia del aire sobre la esfera. (g=10 m/s^2)

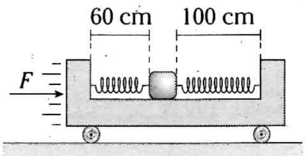
A) 400 N
B) 300 N
C) 200 N
D) 100 N
E) 800 N



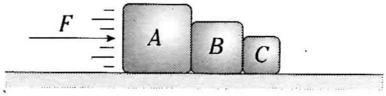
NIVEL INTERMEDIO

6. El bloque de 2 kg se mantiene en reposo respecto del coche de 18 kg. Los dos resortes ideales son idénticos, de longitud natural 80 cm y constante de elasticidad 100 N/m. Halle el módulo de la fuerza horizontal constante $\vec{F}$. Desprecie todo rozamiento. (g=10 m/s^2)

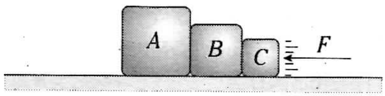
A) 200 N
B) 400 N
C) 800 N
D) 1000 N
E) 1600 N



7. Tres bloques se mueven juntos sobre una superficie horizontal, por acción de una fuerza horizontal constante de módulo F=100 N, en dos casos, según se muestra. Si R_1 es el módulo de la fuerza que el bloque A le ejerce a B en el primer caso y R_2 es el módulo de la fuerza que el bloque B le ejerce a C en el segundo caso, halle $\frac{R_1}{R_2}$. Desprecie todo rozamiento.
(m_A=5 kg; m_B=3 kg; m_C=2 kg)



Caso 1

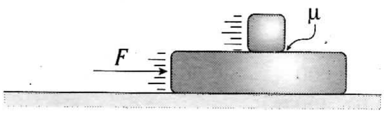


Caso 2

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{8}$

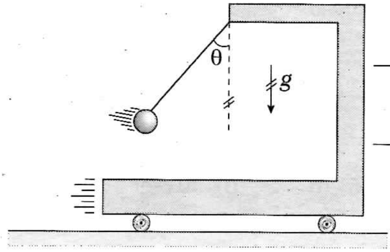
D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

8. El sistema conformado por el tablón y el bloque se mueven sobre una superficie horizontal lisa por acción de una fuerza horizontal constante de módulo F=250 N, aplicada al tablón. Si el bloque no resbala, sobre el tablón; halle el módulo de la fuerza que el bloque ejerce al tablón. Considere que el tablón es de 40 kg y el bloque de 10 kg. (g=10 m/s^2)



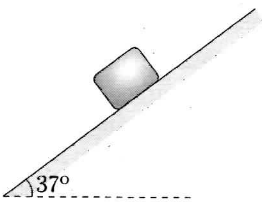
A) 100 N B) 50 N C) $100\sqrt{2}$ N
D) $50\sqrt{5}$ N E) 150 N

9. El carrito acelera uniformemente tal que la esfera no se mueve respecto del carrito. Halle a_1-a_2, donde a_1 es el módulo de la aceleración del carrito cuando θ=53° y a_2 cuando θ=37°. Considere que en este lugar g=9,6 m/s^2.



A) 2,4 m/s^2
B) 3,6 m/s^2
C) 5,6 m/s^2
D) 6,3 m/s^2
E) 6 m/s^2

10. ¿Qué coeficiente de rozamiento tiene un plano inclinado, que forma un ángulo de 37° con la horizontal, si al resbalar un cuerpo tarda en recorrer la misma distancia el doble del tiempo que tardaría si no hay rozamiento? Considere que el cuerpo parte del reposo. (g=10 m/s^2).



A) 1/2 B) 3/4 C) 5/12
D) 9/16 E) 4/5

Dinámica circunferencial

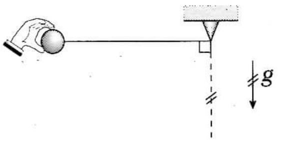
Capítulo XI

OBJETIVO

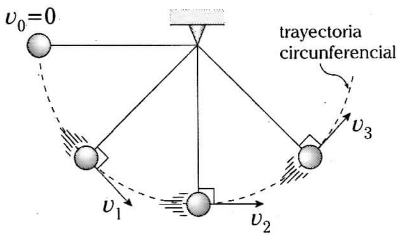
- Aplicar la segunda ley de Newton al movimiento circunferencial.

Aceleración en el movimiento circunferencial

Considere el caso de una esfera atada a una cuerda que se suelta en la posición mostrada.



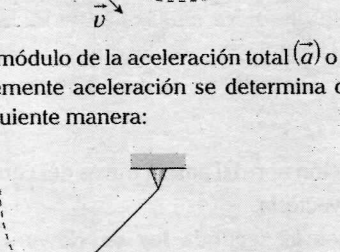
Luego de soltar la esfera esta describe una trayectoria circunferencial que se ubica en el plano vertical y su velocidad varía en módulo y dirección.



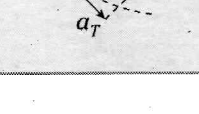
Debido a que la velocidad es variable tanto en módulo como en dirección, la esfera experimenta aceleración $(\vec{a})$, la cual tiene dos componentes denominadas aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$ y aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$.

NOTA

La **aceleración tangencial** $(\vec{a}_T)$ mide los cambios en el valor de la velocidad y en todo instante tiene la misma dirección que la velocidad.
La **aceleración centrípeta** $(\vec{a}_{cp})$ mide los cambios de dirección que experimenta la velocidad, y en un movimiento circunferencial en todo momento apunta hacia el centro de la trayectoria circunferencial.



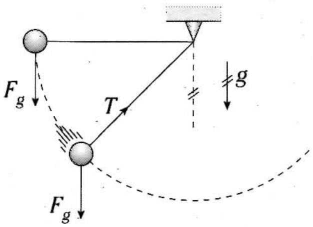
El módulo de la aceleración total $(\vec{a})$ o simplemente aceleración se determina de la siguiente manera:



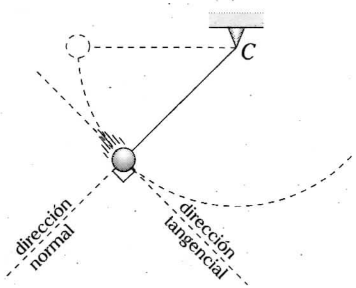
$$a = \sqrt{a_T^2 + a_{cp}^2}$$

Aplicación de la segunda ley de Newton al movimiento circunferencial

Continuamos analizando el caso anterior. Cuando la esfera se suelta, el causante de iniciar el movimiento es la fuerza de gravedad $(\vec{F}_g)$, pero una vez en movimiento, también actúa la fuerza de tensión que ejerce la cuerda.



Debido a la dirección de la aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$ y la aceleración centrípeta $(\vec{a}_{cp})$ nos conviene analizar el movimiento del cuerpo en la dirección tangente a la trayectoria y en la dirección normal (perpendicular) al movimiento.



La dirección normal pasa a través del centro (C) de la trayectoria.
Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección tangencial y en la dirección normal al movimiento del cuerpo.

En la dirección tangencial

Al aplicar la segunda ley de Newton tenemos

$$\boxed{\vec{F}_{R(\tan)} = m \cdot \vec{a}_T}$$

donde

- $\vec{F}_{R(\tan)}$: fuerza resultante en la dirección tangencial (N)
- m: masa del cuerpo (kg)
- $\vec{a}_T$: aceleración tangencial (m/s^2)

De la expresión anterior se deduce que la fuerza resultante tangencial $(\vec{F}_{R(\tan)})$ y la aceleración tangencial $(\vec{a}_T)$ tienen la misma dirección.

En la dirección normal

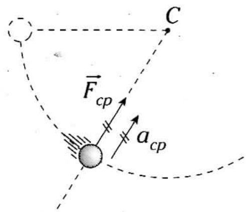
Si aplicamos la segunda ley de Newton obtenemos

$$\boxed{\vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}}$$

donde

- $\vec{F}_{cp}$: fuerza centrípeta (N)
- m: masa del cuerpo (kg)
- $\vec{a}_{cp}$: aceleración centrípeta (m/s^2)

En este caso la $\vec{F}_{cp}$ y la $\vec{a}_{cp}$ tienen la misma dirección.



La fuerza centrípeta $\vec{F}_{cp}$ siempre apunta hacia el centro de la trayectoria circunferencial.

Observación

- La fuerza centrípeta $\left(\vec{F}_{cp}\right)$ es la fuerza resultante en la dirección normal y su módulo se determina de la siguiente manera:

$$F_{cp}=\left(\begin{array}{c}\text{suma de}\\ \text{fuerzas}\\ \text{orientadas}\\ \text{hacia el}\\ \text{centro}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{suma de}\\ \text{fuerzas}\\ \text{orientadas}\\ \text{en dirección}\\ \text{opuesta}\\ \text{al centro}\end{array}\right)$$

$$\boxed{F_{cp}=\sum F_{\substack{\text{orientadas}\\ \text{al centro}}}-\sum F_{\substack{\text{opuestas}\\ \text{al centro}}}}$$

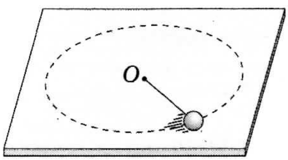
- Tomando en cuenta las expresiones que nos permiten determinar el valor de la aceleración centrípeta (a_{cp}), la segunda ley de Newton en módulo se puede escribir de la siguiente forma:

$$\boxed{F_{cp}=m\cdot a_{cp}=m\cdot\frac{v^2}{r}=m\cdot\omega^2\cdot r}$$

donde
- v: rapidez tangencial o lineal (m/s)
- ω: rapidez angular (rad/s)
- r: radio de la trayectoria circunferencial (m)

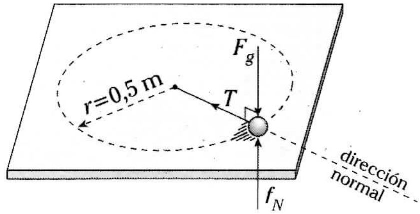
Ejemplos

1. La esfera lisa de 4 kg atada a la cuerda de 0,5 m de longitud se mueve en el plano horizontal alrededor del punto O con una rapidez de 2 m/s. Determine el valor de la tensión en la cuerda.



Resolución

Realizamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) de la esfera.



Por dato

$m=4$ kg; $v=2$ m/s

Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección normal.

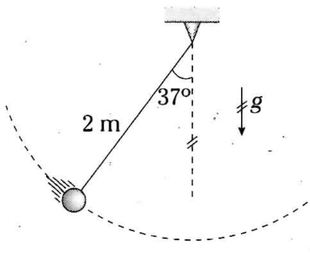
$$F_{cp}=m\cdot a_{cp}$$

$$F_{cp}=m\cdot\frac{v^2}{r}$$

$$T=4\cdot\frac{(2)^2}{0{,}5}$$

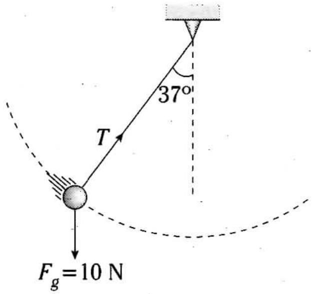
$\therefore\ T=32$ N

2. La esfera de 1 kg se mueve en un plano vertical. Si en el instante mostrado tiene una rapidez de 5 m/s, determine el valor de la tensión en la cuerda. (g=10 m/s^2).

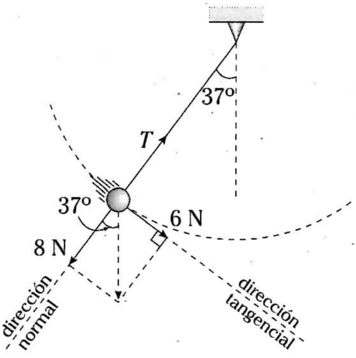


Resolución

Graficamos el DCL de la esfera.



Realizamos la descomposición de la fuerza de gravedad, una componente en la dirección tangencial y otra en la dirección normal.



Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección normal.

$$F_{cp}=m\cdot a_{cp}$$

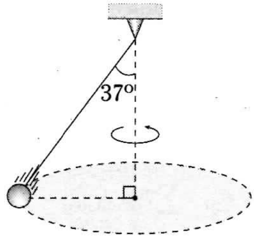
$$F_{cp}=m\cdot\frac{v^2}{r}$$

$$T-8=1\cdot\frac{(5)^2}{2}$$

$$T-8=12{,}5$$

$$\therefore\ T=20{,}5\text{ N}$$

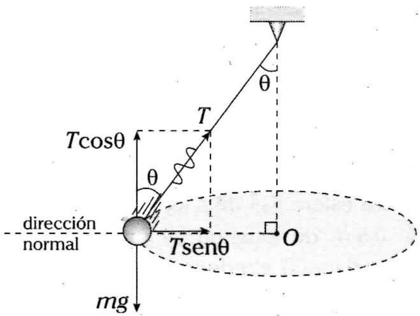
3. La esfera se mueve como se muestra desarrollando un MCU. Determine el módulo de la aceleración centrípeta que experimenta el cuerpo. $(g=10\text{ m/s}^2)$.



Resolución

El cuerpo describe una trayectoria circunferencial con centro en *O* que se ubica en un plano horizontal.

Realizamos el DCL del cuerpo y luego descomponemos la fuerza de tensión en una componente perpendicular al plano de movimiento y otra en la dirección normal.



Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección normal.

$$F_{cp}=m\cdot a_{cp}$$

$$T\cdot\text{sen}\theta=m\cdot a_{cp} \qquad \text{(I)}$$

En la dirección perpendicular al plano de movimiento la fuerza resultante es nula.

$$T\cos\theta = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Reemplazamos en (I)

$$\left(\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\right)\operatorname{sen}\theta = \cancel{m}\cdot a_{cp}$$

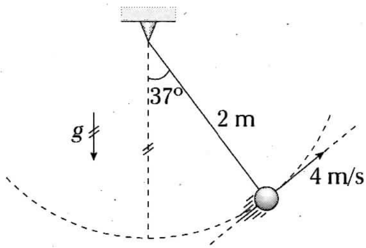
$$\boxed{a_{cp} = g\cdot\tan\theta}$$

Para $\theta=37^\circ$

$$a_{cp} = 10\cdot(\tan 37^\circ)$$

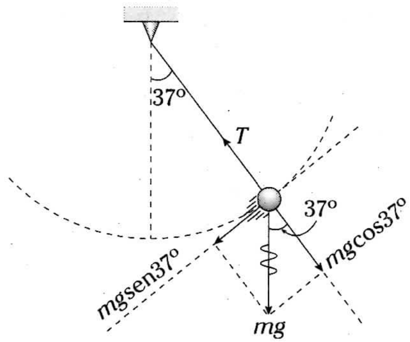
$$\therefore\ a_{cp} = 7{,}5\ \text{m/s}^2$$

4. Para el instante mostrado, determine la aceleración total del cuerpo. ($g=10$ m/s^2).



Resolución

Realizamos el DCL del cuerpo y luego descomponemos las fuerzas de tal manera que obtengamos solo fuerzas en la dirección tangencial y normal al movimiento.



El valor de la aceleración total (a) se evalúa

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_{cp}^2} \qquad \text{(I)}$$

En la dirección tangencial

$$F_{R(\tan)} = m\cdot a_T$$

$$\cancel{m}g\cdot\operatorname{sen}37^\circ = \cancel{m}\cdot a_T$$

$$a_T = g\cdot\operatorname{sen}37^\circ = 10\cdot\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$a_T = 6\ \text{m/s}^2$$

La aceleración centrípeta (módulo) se evalúa

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

$$a_{cp} = \frac{(4)^2}{2}$$

$$a_{cp} = 8\ \text{m/s}^2$$

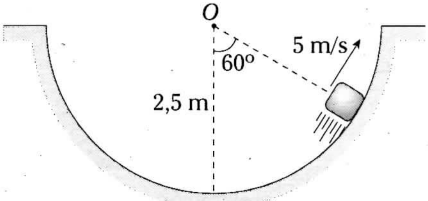
Finalmente en (I)

$$a = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$

$$\therefore\ a = 10\ \text{m/s}^2$$

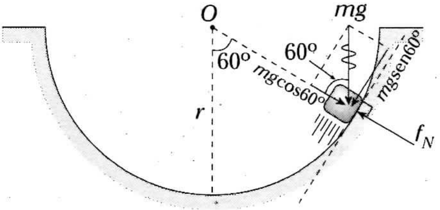
Problema N.º 1

El bloque de 2 kg se mueve sobre la superficie cilíndrica lisa. Para el instante mostrado, determine la fuerza que ejerce la superficie.
(g=10 m/s^2)



Resolución

Realizamos el DCL del bloque y descomponemos las fuerzas en la dirección tangencial y normal.



La fuerza que ejerce la superficie lisa es f_N.
Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección normal.

$$F_{cp}=m\cdot a_{cp}$$

$$f_N-mg\cdot\cos 60°=m\cdot\frac{v^2}{r}$$

$$f_N=mg\left(\frac{1}{2}\right)+m\cdot\frac{v^2}{r}$$

$$f_N=2(10)\left(\frac{1}{2}\right)+2\frac{(5)^2}{(2,5)}$$

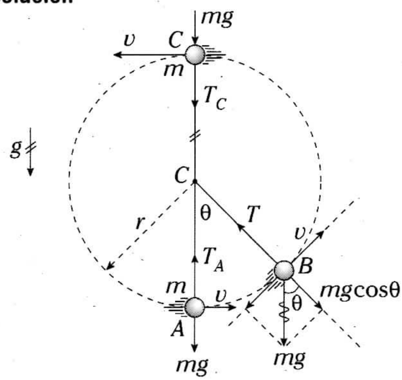
$$f_N=10+20$$

$$\therefore\quad f_N=30\text{ N}$$

Problema N.º 2

Una piedra atada a una cuerda gira con rapidez constante en un plano vertical. Determine la masa de la piedra si la diferencia entre la tensión máxima y mínima en la cuerda es 50 N.
(g=10 m/s^2)

Resolución



Luego de descomponer la $\vec{F}_g$ en B, en la dirección radial

$$F_{cp(B)}=ma_{cp(B)}$$

$$T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{r}$$

$$T=mg\cos\theta+m\frac{v^2}{r}$$

En esta última ecuación notamos que T es máxima cuando θ=0 (en A), y T es mínima cuando θ=180° (en C).

En A

$$F_{cp(A)}=ma_{cp(A)}$$

$$T_A-mg=m\frac{v^2}{r}\qquad\text{(I)}$$

En C

$$F_{cp(C)}=ma_{cp(C)}$$

$$T_C+mg=m\frac{v^2}{r}\qquad\text{(II)}$$

De las ecuaciones (I) y (II)

$$T_A - mg = T_B + mg$$

$$T_A - T_B = 2mg$$

Por dato

$$T_A - T_B = 50 \text{ N}$$

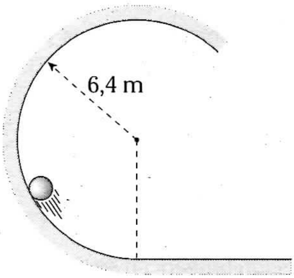
Entonces

$$50 = 2mg \rightarrow 50 = 2m(10)$$

$\therefore \quad m = 2{,}5$ kg

Problema N.º 3

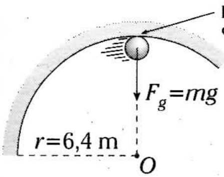
La esfera mostrada se desprende de la superficie cilíndrica lisa en la posición más alta. Determine para ese instante su rapidez. (g=10 m/s^2).



Resolución

Graficamos a la esfera en la posición más alta de su trayectoria y para esta posición realizamos su DCL.

Como en la posición más alta se desprende, la superficie no le ejerce fuerza, entonces la única fuerza que actúa sobre la esfera es su fuerza de gravedad, luego tenemos



En la dirección normal (radial) aplicamos la segunda ley de Newton.

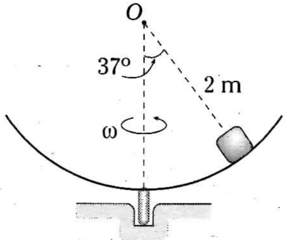
$$F_{cp} = m \cdot a_{cp}$$

$$F_g = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow \cancel{m}g = \cancel{m} \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow 10 = \frac{v^2}{6{,}4}$$

$\therefore \quad v = 8$ m/s

Problema N.º 4

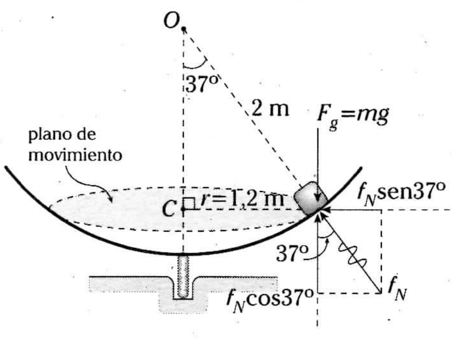
El sistema rota con rapidez angular constante ω. Si el bloque no resbala sobre la superficie esférica, determine ω. Desprecie todo rozamiento. (g=10 m/s^2)



Resolución

El bloque describe una trayectoria circunferencial que se ubica en un plano horizontal con centro en C, tal como se muestra.

Realizamos el DCL del bloque y descomponemos a las fuerzas en la dirección perpendicular al plano de movimiento y en la dirección radial (normal) del movimiento del bloque.



Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección radial (normal).

$$F_{cp}=m\cdot a_{cp}$$

$$f_N\cdot \text{sen}37°=m\cdot\omega^2\cdot r \qquad \text{(I)}$$

En la dirección perpendicular al plano de movimiento la fuerza resultante es nula, entonces

$$f_N\cdot\cos37°=F_g$$

$$f_N=\frac{mg}{\cos37°}$$

Reemplazamos en (I)

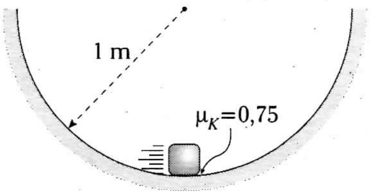
$$\left(\frac{\cancel{m}g}{\cos37°}\right)\cdot\text{sen}37°=\cancel{m}\cdot\omega^2\cdot r$$

$$\omega^2=\frac{g}{r}\cdot\tan37°=\frac{10}{1{,}2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$$

$\therefore\quad \omega=2{,}5$ rad/s

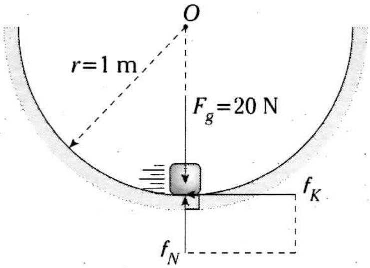
Problema N.° 5

El bloque de 2 kg pasa por la posición más baja de la superficie áspera con 2 m/s. Determine el módulo de la reacción del piso en dicha posición. $(g=10\text{ m/s}^2)$.



Resolución

Realizamos el DCL del bloque.



La fuerza de reacción del piso $(\vec{F}_{\text{piso}})$ es la resultante de $\vec{f}_N$ y $\vec{f}_K$. Su módulo se determina así

$$F_{\text{piso}}=\sqrt{f_N^2+f_K^2} \qquad \text{(I)}$$

En la dirección normal tenemos

$$F_{cp}=m\cdot a_{cp}\ \rightarrow\ f_N-f_g=m\cdot\frac{v^2}{r}$$

$$f_N-20=2\cdot\frac{(2)^2}{1}$$

$$f_N=28\text{ N}$$

En la dirección tangencial se tiene

$$f_K=\mu_K\cdot f_N$$

$$f_K=0{,}75\cdot(28)$$

$$f_K=21\text{ N}$$

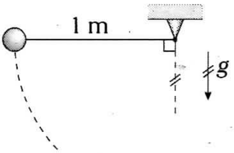
Reemplazamos en (I)

$$F_{\text{piso}}=\sqrt{(28)^2+(21)^2}$$

$\therefore\quad F_{\text{piso}}=35$ N

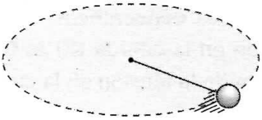
NIVEL BÁSICO

1. La esfera de 200 g es lanzada como se muestra. Cuando pasa por su posición más baja la tensión en la cuerda es de 9,2 N, determine para esta posición su rapidez.



A) 2 m/s B) 4 m/s C) 6 m/s
D) 8 m/s E) 10 m/s

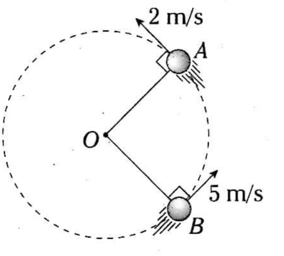
2. La esfera de 2 kg se mueve en un plano horizontal liso. Si la cuerda en cada segundo barre 5 rad y el valor de su tensión constante es igual a 20 N, determine su longitud.



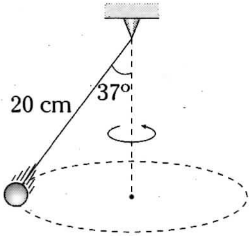
A) 0,1 m B) 0,2 m C) 0,3 m
D) 0,4 m E) 0,8 m

3. La esfera unida a la cuerda se mueve en un plano horizontal liso. Si la tensión en la cuerda cuando pasa por *A* es 16 N, determine el valor de la tensión en la cuerda cuando pase por *B*.

A) 100 N
B) 80 N
C) 50 N
D) 40 N
E) 20 N



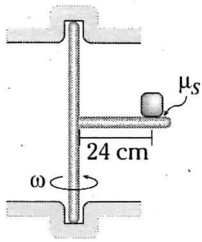
4. El péndulo cónico desarrolla un MCU. Determine el periodo de su movimiento. $(g=\pi^2\ \text{m/s}^2)$



A) 1,8 s B) 1,2 s C) 0,8 s
D) 0,6 s E) 0,2 s

5. El sistema está rotando como se indica. Determine la máxima rapidez angular de tal manera que el bloque no deslice respecto a la superficie. $(\mu_S=0{,}6;\ g=10\ \text{m/s}^2)$.

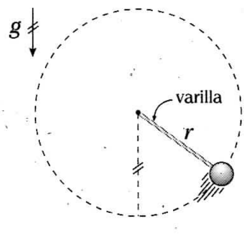
A) 2 rad/s
B) 4 rad/s
C) 5 rad/s
D) 6 rad/s
E) 10 rad/s



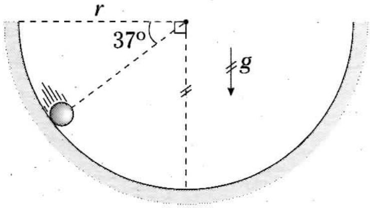
NIVEL INTERMEDIO

6. La esfera de 800 g se mueve en un plano vertical desarrollando un MCU. Si la tensión máxima en la varilla es 20 N, determine el mínimo valor de la tensión.

A) 1 N
B) 2 N
C) 3 N
D) 4 N
E) 8 N

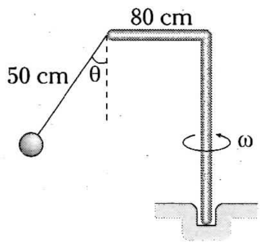


7. En el instante mostrado, la superficie lisa le ejerce a la esfera de 1 kg una fuerza de 14 N. Determine para el instante indicado la aceleración de la esfera. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



A) $8\ \text{m/s}^2$ B) $8\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$ C) $4\ \text{m/s}^2$
D) $4\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$ E) $2\ \text{m/s}^2$

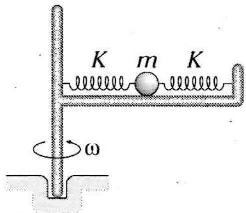
8. Para el sistema en movimiento, determine ω cuando $\theta=53°$.



A) 10 rad/s B) 5 rad/s C) 6 rad/s
D) $\frac{5}{3}$ rad/s E) $\frac{10}{3}$ rad/s

9. El sistema rota uniformemente con una rapidez angular ω. Si la longitud natural de los resortes es de 90 cm y están deformados 10 cm, despreciando todo rozamiento, determine ω.

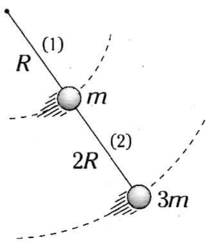
$\left(K=5\dfrac{\text{N}}{\text{cm}};\ m=1\,\text{kg}\right)$



A) 2 rad/s B) 5 rad/s C) 10 rad/s
D) 20 rad/s E) 25 rad/s

10. Los cuerpos lisos se mueven en un plano horizontal describiendo trayectorias circunferenciales concéntricas. Si el valor de la tensión en la cuerda (2) es 9 N, determine el valor de la tensión en la cuerda (1).

A) 10 N
B) 20 N
C) 30 N
D) 50 N
E) 25 N



Trabajo mecánico

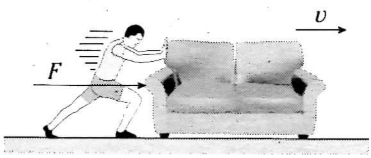
Capítulo XII

OBJETIVOS

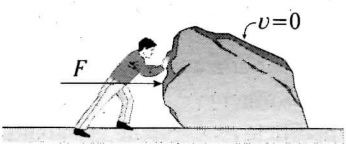
- Conocer el proceso mediante el cual se realiza la transmisión de movimiento mecánico.
- Cuantificar la transmisión del movimiento mecánico.

Definición

La palabra trabajo es común y de uso cotidiano, al empujar un auto o un sofá o al elevar un balde con agua, realizamos trabajo, note que en todos estos casos hay una fuerza aplicada al cuerpo, el cual es desplazado.



El joven aplica una fuerza al sofá y lo desplaza, entonces el joven realiza trabajo sobre él.

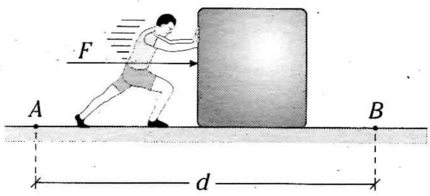


El joven aplica una fuerza a la roca, pero esta no se mueve, entonces el trabajo realizado por el joven sobre la roca es nulo.

En física se define el trabajo realizado mediante una fuerza constante de la siguiente manera:

$$\boxed{W_{AB}^{F}=F\cdot d}$$

Su unidad:
(N·m) < > (J);
J: joule



donde

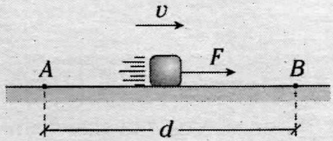
- W_{AB}^{F}: cantidad de trabajo realizado mediante la fuerza $\vec{F}$ al desplazar al cuerpo desde A hasta B

- 1 J: trabajo realizado por una fuerza de 1 N al desplazar a un cuerpo una distancia de 1 m

OBSERVACIÓN

El trabajo mecánico es una magnitud escalar que puede ser positiva o negativa.

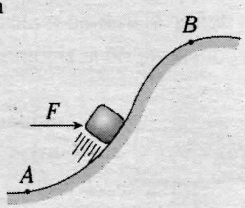
- Si la fuerza está a favor de la velocidad, el trabajo es positivo.



Si $\vec{F}$ es constante

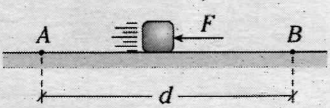
$W_{AB}^{F}=+F\cdot d$

También



W_{AB}^{F} es "+"

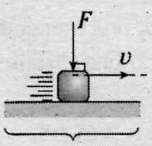
- Si la fuerza está en contra de la velocidad, el trabajo es negativo.



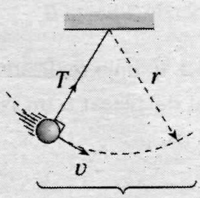
Si $\vec{F}$ es constante

$W_{AB}^{F}=-F\cdot d$

- Si la fuerza es perpendicular a la velocidad del cuerpo, entonces el trabajo es nulo.



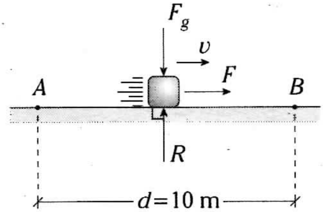
$W^{F}=0$



$W^{T}=0$

Ejemplos

1. Un bloque liso se mueve rectilíneamente por la acción de una fuerza horizontal constante de módulo F=40 N. Determine la cantidad de trabajo desarrollado por las fuerzas que actúan sobre el bloque.



Resolución

El trabajo desarrollado mediante F, sobre el bloque, desde A hasta B se calcula así

$$W_{AB}^{F}=+F\cdot d$$

$$W_{AB}^{F}=+40\cdot 10$$

$$W_{AB}^{F}=+400\text{ J}$$

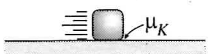
Como la $\vec{F}_g$ es perpendicular a la $\vec{v}$

$$W_{AB}^{F_g}=0$$

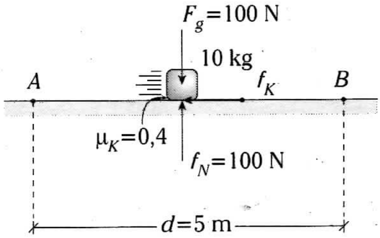
Como la $\vec{R}$ es perpendicular a la $\vec{v}$

$$W_{AB}^{R}=0$$

2. Un bloque de 10 kg es lanzado sobre una superficie horizontal rugosa. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es 0,4, halle el trabajo realizado mediante la fuerza de rozamiento cinético cuando el bloque ha avanzado 5 m. (g=10 m/s²)



Resolución



Nos piden $W_{AB}^{f_K}$.

$$W_{AB}^{f_K} = -f_K \cdot d$$

El signo negativo (–) se debe a que la $\vec{f}_K$ es opuesta a la $\vec{v}$.

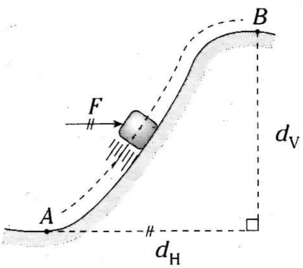
Entonces

$$W_{AB}^{f_K} = -\mu_K \cdot f_N \cdot d$$

$$W_{AB}^{f_K} = -(0,4)(100)(5)$$

$$\therefore \quad W_{AB}^{f_K} = -200 \text{ J}$$

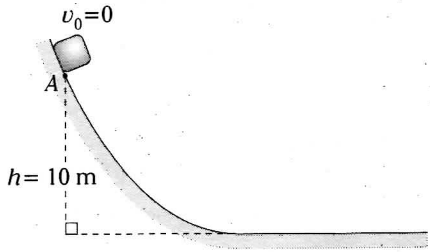
Cálculo del W^F de una fuerza constante sobre una trayectoria curvilínea



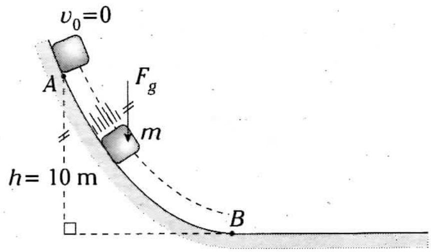
$$\boxed{W_{AB}^{F} = F \cdot d_H}$$

Ejemplos

1. Un bloque de 500 g es soltado en A y desliza hacia abajo sobre la superficie curva. Halle el trabajo de la $\vec{F}g$ desde A hasta que el bloque llega al piso. $(g=10 \text{ m/s}^2)$.



Resolución



Nos piden $W_{AB}^{F_g}$.

Como la $\vec{F}_g$ es constante y está a favor de la $\vec{v}$.

$$W_{AB}^{F_g} = +F_g \cdot h$$

$$W_{AB}^{F_g} = +m \cdot g \cdot h \qquad \text{(I)}$$

Por dato

$$m = 500 \text{ g} <> 0,5 \text{ kg} \qquad \text{(II)}$$

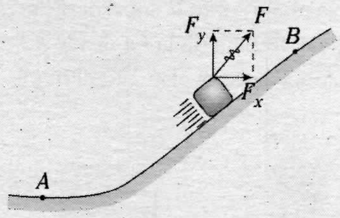
Reemplazamos (II) en (I)

$$W_{AB}^{F_g} = +(0,5)(10)(10)$$

$$\therefore \quad W_{AB}^{F_g} = +50 \text{ J}$$

OBSERVACIÓN

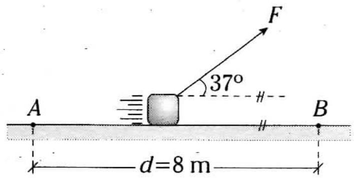
Se verifica lo siguiente:



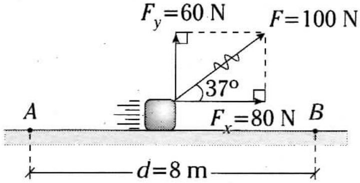
Si $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ son componentes de $\vec{F}$, entonces

$$\boxed{W_{AB}^{F} = W_{AB}^{F_x} + W_{AB}^{F_y}}$$

2. El bloque es arrastrado horizontalmente por acción de la fuerza constante $\vec{F}$, de módulo 100 N. Halle el trabajo desarrollado mediante $\vec{F}$ desde A hasta B.



Resolución



Nos piden W_{AB}^{F}.

$$W_{AB}^{F} = W_{AB}^{F_x} + W_{AB}^{F_y} \qquad \text{(I)}$$

Como $\vec{F}_y$ es perpendicular a la velocidad del bloque, entonces

$$W_{AB}^{F_y} = 0$$

En (I)

$$W_{AB}^{F} = W_{AB}^{F_x} + 0 \quad \rightarrow \quad W_{AB}^{F} = +F_x \cdot d$$

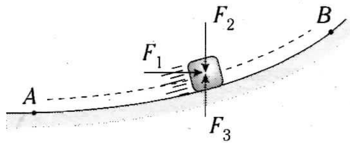
$$W_{AB}^{F} = +80 \cdot 8$$

$$\therefore \quad W_{AB}^{F} = +640 \text{ J}$$

Cantidad de trabajo neto o resultante

Cuando sobre un cuerpo actúan varias fuerzas se define lo siguiente:

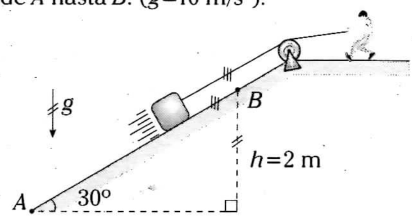
$$\boxed{W_{AB}^{\text{neto}} = \sum W_{\text{fuerzas}}^{\text{todas las}}}$$



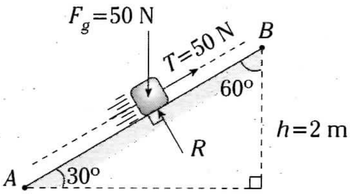
$$W_{AB}^{\text{neto}} = W_{AB}^{F_1} + W_{AB}^{F_2} + W_{AB}^{F_3}$$

Ejemplo

El bloque liso de 5 kg es arrastrado de manera que la tensión que la cuerda le ejerce es constante y de módulo 50 N. Halle el trabajo neto realizado sobre el bloque cuando es desplazado desde A hasta B. (g=10 m/s^2).



Resolución



$$W_{AB}^{\text{neto}} = W_{AB}^{F_g} + W_{AB}^{T} + W_{AB}^{R}$$

$\vec{R}$ es $\perp$ a la $\vec{v}$ por lo cual

$$W_{AB}^{R}=0$$

Entonces

$$W_{AB}^{\text{neto}}=W_{AB}^{F_g}+W_{AB}^{T}$$

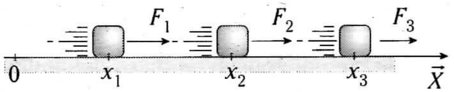
$$W_{AB}^{\text{neto}}=-F_g\cdot h+T\cdot AB$$

$$W_{AB}^{\text{neto}}=-50\cdot 2+50\cdot 4$$

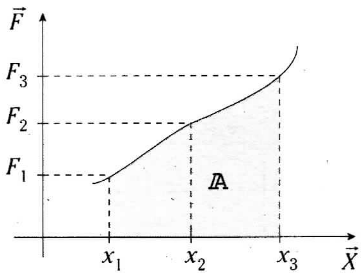
$$\therefore\quad W_{AB}^{\text{neto}}=+100\text{ J}$$

Cálculo del W^F de una fuerza paralela a una trayectoria rectilínea pero de módulo variable

Ubiquemos el movimiento del cuerpo en un eje de coordenadas.



Si se conoce $\vec{F}$ para cada posición, entonces podemos construir una gráfica fuerza $(\vec{F})$ *versus* (vs.) posición $(\vec{X})$



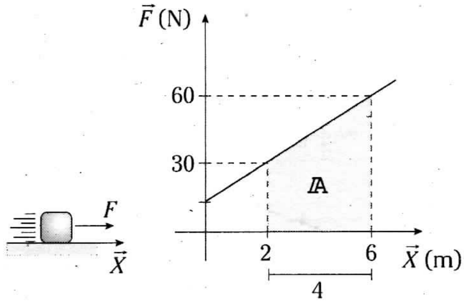
Se verifica lo siguiente:

$$\boxed{W_{x_1x_3}^{F}=\pm A}$$

A: área encerrada debajo de la gráfica $\vec{F}$ vs. $\vec{X}$ desde x_1 hasta x_3

Ejemplo

La gráfica muestra el comportamiento de la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre el bloque, en función de la posición. Calcule la cantidad de trabajo realizado mediante $\vec{F}$ desde x_1=2 m hasta x_2=6 m.



Resolución

La $W_{x_1x_2}^{F}$ es positiva (+) ya que $\vec{F}$ está a favor de la velocidad, entonces

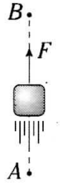
$$W_{x_1x_2}^{F}=+A$$

$$W_{x_1x_2}^{F}=+\left(\frac{30+60}{2}\right)\cdot 4$$

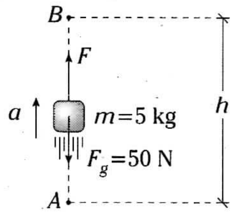
$$\therefore\quad W_{x_1x_2}^{F}=+180\text{ J}$$

Problema N.º 1

El bloque de 5 kg es elevado mediante la fuerza constante $\vec{F}$, de manera que su rapidez en A es nula y en B es 20 m/s. Si el tiempo transcurrido para el movimiento desde A hasta B es 5 s, halle el trabajo realizado mediante $\vec{F}$ desde A hasta B. (g=10 m/s^2).



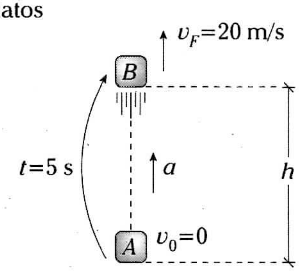
Resolución



Nos piden W_{AB}^{F}.

$$W_{AB}^{F}=+F\cdot h \qquad \text{(I)}$$

De los datos



De $v_F=v_0+at$

$$20=0+a\cdot 5$$

$$a=4\ \text{m/s}^2 \qquad \text{(II)}$$

De $d=\left(\dfrac{v_0+v_F}{2}\right)\cdot t$

$$h=\left(\frac{0+20}{2}\right)\cdot 5$$

$$h=50\ \text{m} \qquad \text{(III)}$$

Para el bloque

$$F_R=m\cdot a$$

Luego, reemplazamos el valor de la aceleración

$$F-F_g=5\cdot 4$$

$$F-50=20$$

$$F=70\ \text{N} \qquad \text{(IV)}$$

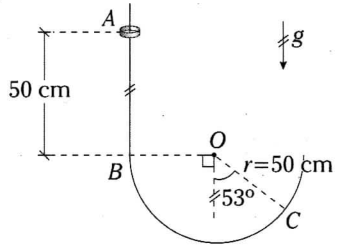
Finalmente, reemplazamos (III) y (IV) en (I)

$$W_{AB}^{F}=+70\cdot 50$$

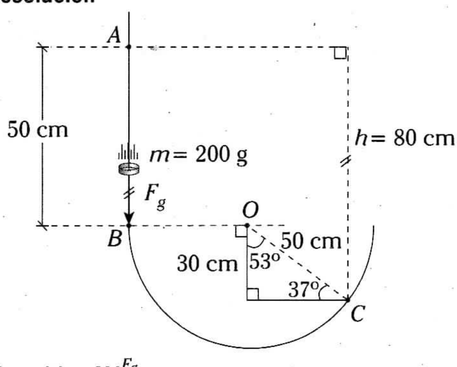
$$\therefore\quad W_{AB}^{F}=+3500\ \text{J} < > +3{,}5\ \text{kJ}$$

Problema N.º 2

Un anillo, que está ensartado en un alambre, es soltado en A. Determine la cantidad de trabajo mecánico desarrollado mediante la fuerza de gravedad sobre el anillo cuando este se mueve desde A hasta C. En la parte BC el alambre tiene forma de circunferencia. La masa del anillo es 200 g. (g=10 m/s^2).



Resolución



Nos piden $W_{AC}^{F_g}$.

La $\vec{F}_g$ es una fuerza constante, cuando el anillo se mueve desde A hasta C la $\vec{F}_g$ está a favor de la velocidad ya que apunta hacia abajo y el anillo se mueve hacia abajo.

$\rightarrow \quad W_{AC}^{F_g} = +F_g \cdot h \qquad$ (I)

m=200 g < > 0,2 kg

$\rightarrow \quad F_g$=2 N $\qquad$ (II)

h=80 cm < > 0,8 m $\qquad$ (III)

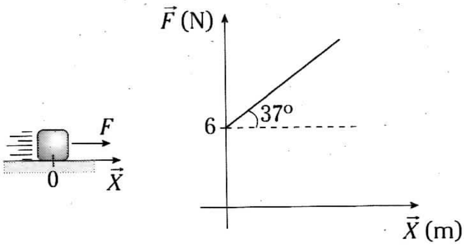
Reemplazamos (II) y (III) en (I)

$$W_{AC}^{F_g} = +2 \cdot 0{,}8$$

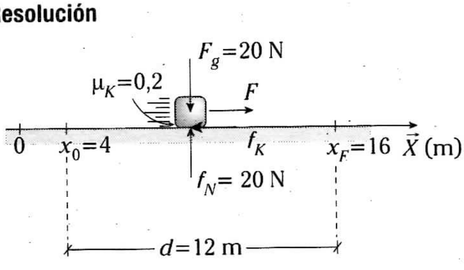
$$\therefore \quad W_{AC}^{F_g} = +1{,}6 \text{ J}$$

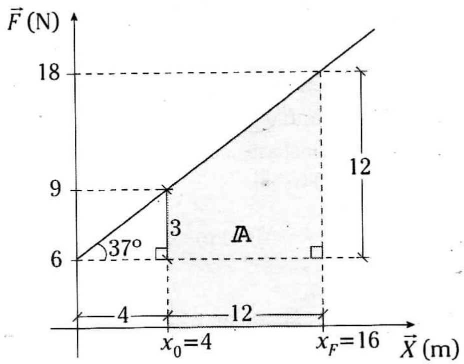
Problema N.º 3

Un bloque se mueve rectilíneamente sobre una superficie horizontal bajo la acción de una fuerza horizontal variable $\vec{F}$. La gráfica muestra el comportamiento de $\vec{F}$ en función de la posición $\vec{x}$, entre el bloque y la superficie hay un coeficiente de rozamiento cinético que vale 0,2. Halle la cantidad de trabajo neto desarrollado sobre el bloque de 2 kg desde $\vec{x} = 4$ m hasta $\vec{x} = 16$ m. (g=10 m/s²).



Resolución





Nos piden $W_{x_0x_F}^{\text{neto}}$.

$$W_{x_0x_F}^{\text{neto}} = W_{x_0x_F}^{F_g} + W_{x_0x_F}^{F} + W_{x_0x_F}^{f_K} + W_{x_0x_F}^{f_N}$$

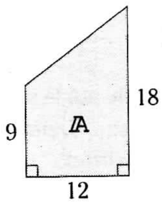
Como $\vec{F}_g$ y $\vec{f}_N$ son perpendiculares a la velocidad, no desarrollan trabajo, luego

$$W_{x_0x_F}^{F} = 0;\ W_{x_0x_F}^{f_N} = 0$$

Entonces

$$W_{x_0x_F}^{\text{neto}} = W_{x_0x_F}^{F} + W_{x_0x_F}^{f_K}$$

$$W_{x_0x_F}^{\text{neto}} = +A + (-f_K \cdot d) \qquad \text{(I)}$$



$$A = \underbrace{\left(\frac{9+18}{2}\right).12}_{162}$$

En (I)

$$W_{x_0x_F}^{\text{neto}} = +162 - f_K \cdot 12$$

$$W_{x_0x_F}^{\text{neto}} = +162 - \mu_K f_N \cdot 12$$

$$W_{x_0x_F}^{\text{neto}} = +162 - 0{,}2(20)(12)$$

$$W_{x_0x_F}^{\text{neto}} = +162 - 48$$

$$\therefore \quad W_{x_0x_F}^{\text{neto}} = +114 \text{ J}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Al elevar verticalmente un bloque de 5 kg hasta una altura de 1 m la fuerza aplicada realiza un trabajo de 80 J. Determine la aceleración constante con que se elevó el bloque. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) $2\ \text{m/s}^2$ B) $3\ \text{m/s}^2$ C) $4\ \text{m/s}^2$
D) $5\ \text{m/s}^2$ E) $6\ \text{m/s}^2$

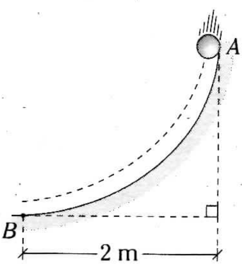
2. Un alumno levanta un bloque de 50 kg hacia arriba en línea recta, con rapidez constante, hasta una altura de 0,5 m antes de soltarlo. Si hace lo anterior 10 veces, ¿qué cantidad de trabajo desarrolla? $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

A) 2 kJ B) 2,5 kJ C) 5 kJ
D) 6 kJ E) 12 kJ

3. Un grupo de perros arrastra un trineo de 80 kg en un tramo de 100 m sobre una superficie horizontal a velocidad constante. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y el hielo es 0,1, determine la cantidad de trabajo realizado por los perros. $(g=10\ \text{m/s}^2)$

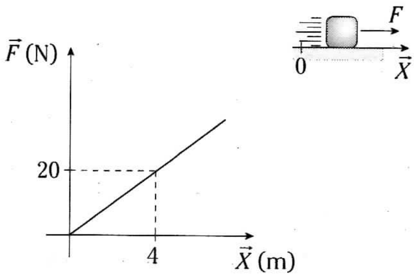
A) 8 kJ B) 4,8 kJ C) 16 kJ
D) 4 kJ E) 6 kJ

4. La esfera de 1 kg desciende por la superficie curva tal como se muestra. Determine la cantidad de trabajo realizado mediante la fuerza de gravedad desde A hasta B. $(g=10\ \text{m/s}^2;\ AB=\sqrt{13}\ \text{m})$



A) 30 J B) 20 J C) 10 J
D) 15 J E) 40 J

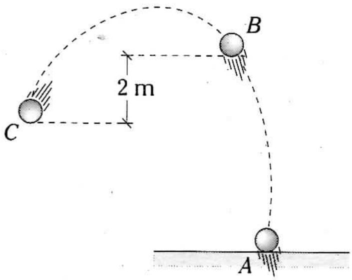
5. La fuerza $\vec{F}$ varía con la posición $\vec{x}$ de acuerdo a la gráfica adjunta. Determine la cantidad de trabajo realizado mediante $\vec{F}$ entre las posiciones $\vec{x}=1\ \text{m}$ y $\vec{x}=6\ \text{m}$.



A) 22,5 J B) 62,5 J C) 70 J
D) 87,5 J E) 100 J

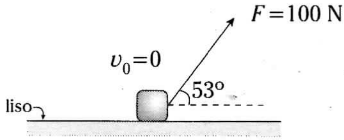
NIVEL INTERMEDIO

6. Una esferita de 2 kg es lanzada desde A tal como se indica. Determine el trabajo que realiza la fuerza de gravedad desde A hasta C si el trabajo realizado por la fuerza de gravedad desde A hasta B vale, numéricamente, 80 J. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



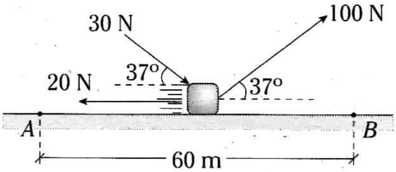
A) 40 J B) −80 J C) 80 J
D) −40 J E) 60 J

7. Determine la cantidad de trabajo neto realizado sobre el bloque de 10 kg en los primeros 4 segundos de su movimiento si la fuerza $\vec{F}$ es constante. ($g=10$ m/s^2).



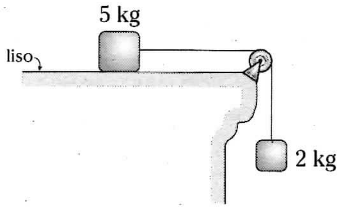
A) 1000 J B) 1860 J C) 2880 J
D) 3000 J E) 4260 J

8. Sobre el bloque liso las fuerzas constantes que se muestran le permiten desplazarse desde A hasta B. Determine en este tramo la cantidad de trabajo neto.



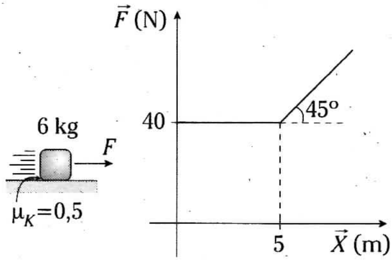
A) 5040 J
B) 5100 J
C) 5160 J
D) 5320 J
E) 5500 J

9. El sistema mostrado empieza a moverse a partir del reposo. Halle el trabajo que realiza la tensión de la cuerda, para desplazar al bloque de 5 kg una longitud de 7 m. ($g=10$ m/s^2)



A) 100 J B) –200 J C) –100 J
D) 400 J E) 800 J

10. Determine la cantidad de trabajo neto desarrollado sobre el bloque desde $\vec{x}=0$ hasta $\vec{x}=10$ m.



A) 100 J B) 150,5 J C) 75,5 J
D) 112,5 J E) 225,5 J

Energía y potencia

Capítulo XIII

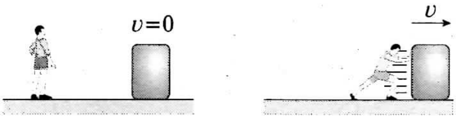
OBJETIVOS

- Establecer el concepto de energía que nos permita entender diversos fenómenos físicos.
- Conocer algunas formas de energía que se presentan en la naturaleza.

Energía

Se define como la capacidad que tienen los cuerpos para desarrollar trabajo.

Veamos un caso particular.
Se tiene un bloque inicialmente en reposo, luego una persona le ejerce una fuerza y logra trasladarlo.



Como la persona le transmite movimiento mecánico al bloque, desarrolla trabajo mecánico, entonces la persona tiene energía.

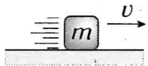
NOTA

Se puede enfocar el concepto de energía de otra manera:
Se sabe que en la naturaleza se presentan diversas formas de movimiento e interacción que experimenta la materia y para medirlo y cuantificarlo de manera escalar se requiere de una magnitud, a esta magnitud se le denomina **energía**.

A continuación detallaremos algunas formas de energía que serán de uso frecuente en el desarrollo de este y otros capítulos.

ENERGÍA CINÉTICA (E_C)

Es aquella energía asociada a un cuerpo en virtud de su movimiento mecánico.
Para el movimiento mecánico de traslación la energía cinética se evalúa de la siguiente forma:



$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} m v^2}$$

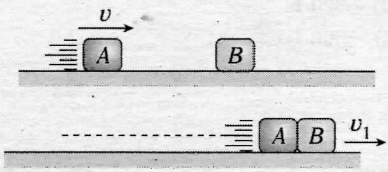
Su unidad: joule (J)

donde

- m: masa del cuerpo (kg)
- v: rapidez del cuerpo (m/s)

OBSERVACIÓN

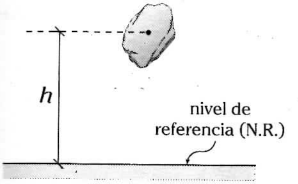
Un bloque liso es lanzado con una determinada velocidad ($\vec{v}$), contra otro bloque liso en reposo y luego del impacto se mueven como se muestra.



Como el bloque A le transmite movimiento al bloque B, desarrolla trabajo, entonces, se concluye que antes del impacto el bloque A posee energía debido al movimiento mecánico que presenta y se le denomina energía cinética.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA (E_{PG})

Es aquella energía asociada a la interacción de un cuerpo con la Tierra.
Se evalúa de la siguiente manera:



$$\boxed{E_{PG} = mgh}$$

Su unidad: joule (J)

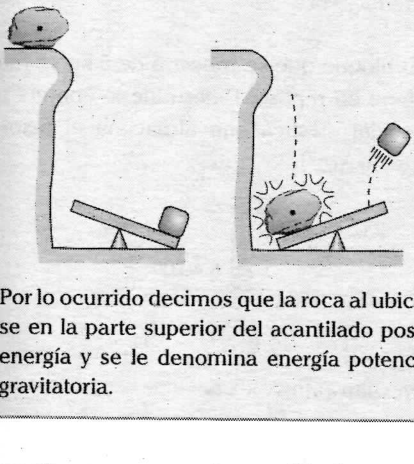
donde

- m: masa del cuerpo (kg)
- h: altura (m)

La altura es la ubicación del cuerpo respecto a un nivel de referencia (N.R.) previamente elegido.

OBSERVACIÓN

Se tiene inicialmente una roca en la parte superior de un acantilado. Si de pronto se deja caer, notamos que es capaz de transmitir movimiento al bloque, entonces, desarrolla trabajo.

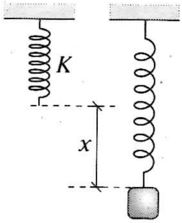


Por lo ocurrido decimos que la roca al ubicarse en la parte superior del acantilado posee energía y se le denomina energía potencial gravitatoria.

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA (E_{PE})

Es aquella energía asociada a los cuerpos elásticos en virtud de la deformación que experimentan.
El caso más común es el de un resorte.

En el gráfico que se muestra a continuación, el resorte almacena energía elástica cuando se suspende el bloque. La energía se evalúa de la siguiente forma:



$$\boxed{E_{PE} = \frac{1}{2}Kx^2}$$

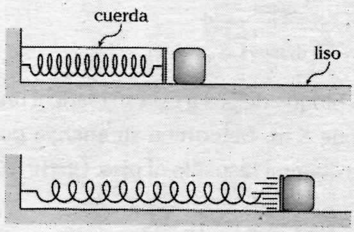
Su unidad: joule (J)

donde

- K: constante de rigidez del resorte $\left(\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)$
- x: deformación del resorte (m)

OBSERVACIÓN

Se tiene un resorte comprimido y sujetado por una cuerda. Si de pronto se corta la cuerda el resorte empieza a recuperar su longitud natural y en el proceso le transmite movimiento al bloque, es decir, desarrolla trabajo.



Si el resorte es capaz de desarrollar trabajo, entonces antes de cortar la cuerda tiene energía a la cual denominamos potencial elástica.

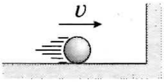
Energía mecánica (E_M)

Para un cuerpo o sistema se define la energía mecánica como la suma de las tres formas de energía vistas anteriormente.

$$\boxed{E_M = E_C + E_{PG} + E_{PE}}$$

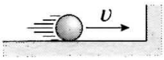
Ejemplos

1. Una esfera lisa se lanza contra una pared como se muestra. Si luego del impacto su rapidez se reduce a la mitad, determine la relación entre la energía cinética antes y después del impacto.

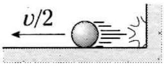


Resolución

Determinamos la energía cinética antes y después del impacto.



$$E_{C\,\text{antes}} = \frac{1}{2}\,m\upsilon^2$$



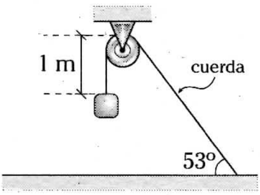
$$E_{C\,\text{después}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}m\upsilon^2$$

Luego

$$\frac{E_{C\,\text{antes}}}{E_{C\,\text{después}}} = \frac{\frac{1}{2}\,m\upsilon^2}{\frac{1}{8}\,m\upsilon^2}$$

$$\therefore \quad \frac{E_{C\,\text{antes}}}{E_{C\,\text{después}}} = 4$$

2. Un bloque de 500 g está sujetado a una cuerda de 6 m. Determine su energía potencial gravitatoria respecto al piso. (g=10 m/s).



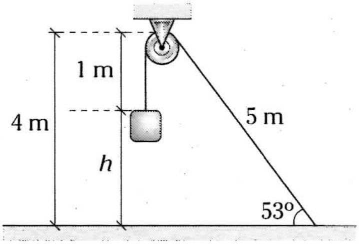
Resolución

Se sabe que la energía potencial gravitatoria se determina así

$$E_{PG} = mgh \qquad \text{(I)}$$

La masa debe estar expresada en kilogramos y en nuestro caso es de 0,5 kg.

La altura la determinamos del gráfico.



Del gráfico se deduce

$h+1=4$

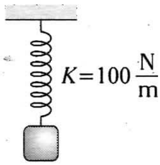
$h=3$ m

Reemplazamos en (I)

$E_{PG}=0,5(10)(3)$

$\therefore \; E_{PG}=15$ J

3. El bloque que se muestra de 5 kg se mantiene en reposo. Determine la energía potencial elástica que almacena el resorte. (g=10 m/s^2)



Resolución

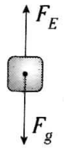
La energía potencial elástica se evalúa así

$$E_{PE} = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{(I)}$$

- De los datos del enunciado tenemos

  K=100 N/m

- Para determinar la deformación del resorte aprovechamos la condición de equilibrio del bloque.



Como la fuerza resultante es cero, tenemos

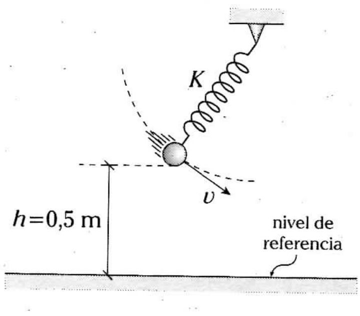
$$F_E = F_g$$
$$Kx = mg$$
$$100(x) = 5(10)$$
$$x = 0{,}5 \text{ m}$$

Reemplazamos en (I)

$$E_{PE} = \frac{1}{2}(100)(0{,}5)^2$$

$\therefore\ E_{PE} = 12{,}5$ J

4. Determine la energía mecánica del sistema (esfera - resorte ideal), cuando la esfera de 2 kg pasa por la posición B con una rapidez de 10 m/s y el resorte ideal de rigidez K=100 N/m tiene una deformación de 10 cm. $\left(g=10 \text{ m/s}^2\right)$.



Resolución

Para el caso señalado, notamos que el cuerpo está en movimiento, entonces tiene energía cinética (E_C), también se encuentra a cierta altura respecto del nivel de referencia por lo que tiene energía potencial, y el resorte está deformado (estirado), es decir, tiene energía potencial elástica.

Por lo señalado, en la posición B tenemos

$$E_M = E_{C_{\text{esfera}}} + E_{PG_{\text{esfera}}} + E_{PE_{\text{resorte}}}$$

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{(I)}$$

Por dato

$$m=2 \text{ kg};\ v=10 \text{ m/s};\ K=1000\ \frac{\text{N}}{\text{m}};$$
$$x=10 \text{ cm}=0{,}1 \text{ m}$$

Reemplazamos en (I)

$$E_M = \frac{1}{2}(2)(10)^2 + 2(10)(0{,}5) + \frac{1}{2}(1000)(0{,}1)^2$$

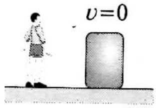
$$E_M = 100+10+5$$

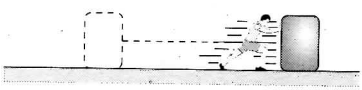
$\therefore\ E_M = 115$ J

Relación entre el trabajo y la energía mecánica ($W - E_M$)

Veamos los siguientes casos:

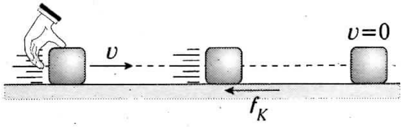
- Se tiene un bloque inicialmente en reposo, luego una persona ejerce una acción y desarrolla trabajo sobre dicho bloque logrando que este adquiera energía mecánica, específicamente energía cinética.





La persona desarrolla un trabajo positivo y la energía mecánica del bloque varía aumentando su valor.

- Un bloque se lanza sobre una superficie áspera como se indica. Durante el movimiento la fuerza de rozamiento cinético actúa sobre el bloque y finalmente lo detiene.



La fuerza de rozamiento $(\vec{f}_K)$ desarrolla un trabajo negativo y la energía mecánica del bloque varía disminuyendo su valor.

Luego se concluye que una forma de hacer cambiar la energía mecánica de un cuerpo o sistema es mediante el desarrollo de trabajo mecánico.

En forma general, la variación de la energía mecánica (ΔE_M) de un cuerpo o sistema es igual a la suma de las cantidades de trabajo desarrolladas por las fuerzas diferentes a la fuerza de gravedad $(\vec{F}_g)$ y la fuerza elástica $(\vec{F}_E)$.

$$\boxed{\sum W^{F\neq\begin{cases}F_g\\F_E\end{cases}}=\Delta E_M}$$

También se puede plantear lo siguiente:

$$\boxed{\sum W^{F\neq\begin{cases}F_g\\F_E\end{cases}}=E_{M_F}-E_{M_0}}$$

donde

- E_{M_F}: energía mecánica final
- E_{M_0}: energía mecánica inicial

Ley de conservación de la energía mecánica

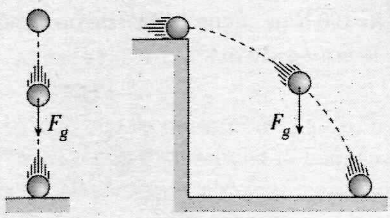
Establece que si sobre un cuerpo o sistema la suma de las cantidades de trabajo desarrollado por las fuerzas diferentes a la fuerza de gravedad y la fuerza elástica es igual a cero, entonces la energía mecánica se conserva.

$$\boxed{E_{M_0}=E_{M_F}}$$

Lo planteado indica que la energía mecánica del cuerpo o sistema en todo instante se mantiene constante.

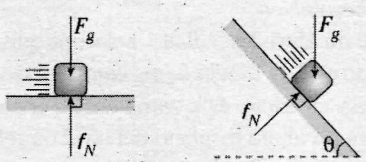
Observación

- En los movimientos de caída libre donde solo desarrolla trabajo la fuerza de gravedad $(\vec{F}_g)$ la energía mecánica del cuerpo se conserva.



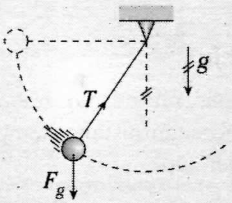
En el MVCL y MPCL la energía mecánica se conserva.

- Para un bloque que desliza sobre una superficie lisa, su energía mecánica se conserva.



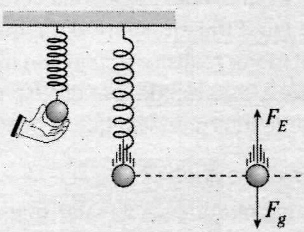
En ambos casos la única fuerza diferente a la fuerza de gravedad y la fuerza elástica es la fuerza normal $(\vec{F}_N)$, pero como es perpendicular a la dirección del movimiento no desarrolla trabajo mecánico, entonces la energía mecánica del bloque se conserva.

- Para una esfera que se mueve en un plano vertical unida a una cuerda como se muestra.



La única fuerza diferente a la $\vec{F}_g$ y $\vec{F}_E$ que actua sobre el cuerpo es la fuerza de tensión $(\vec{T})$, pero como en todo instante es perpendicular a la dirección del movimiento no desarrolla trabajo mecánico, entonces la energía mecánica (E_M) de la esfera se conserva.

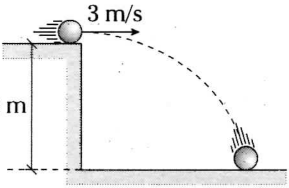
- El sistema esfera-resorte se deja en libertad y se inicia el movimiento.



En el sistema solo desarrolla trabajo la fuerza de gravedad $(\vec{F}_g)$ y la fuerza elástica $(\vec{F}_E)$, por lo tanto, la energía mecánica del sistema se conserva.

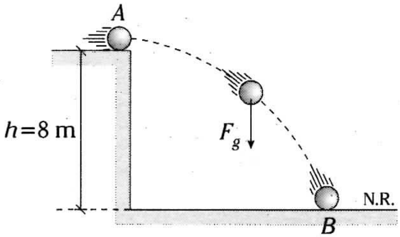
Ejemplos

1. La esfera es lanzada como se muestra. Determine con qué rapidez impacta en la superficie horizontal. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

La esfera experimenta un movimiento parabólico de caída libre y durante su movimiento solo actúa la fuerza de gravedad.



La energía mecánica de la esfera se conserva. Considerando la superficie horizontal inferior como el sistema de referencia, tenemos

$$E_{M_A}=E_{M_B}$$

$$E_{C_A}+E_{PG_A}+\cancel{E_{PE_A}}=E_{C_B}+\cancel{E_{PG_B}}+\cancel{E_{PE_B}}$$

$$E_{C_A}+E_{PG_A}=E_{C_B}$$

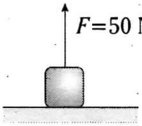
$$\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot v_A^2+\cancel{m}gh=\frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v_B^2$$

$$\frac{1}{2}(3)^2+10(8)=\frac{1}{2}(v_B)^2$$

$$9+160=v_B^2$$

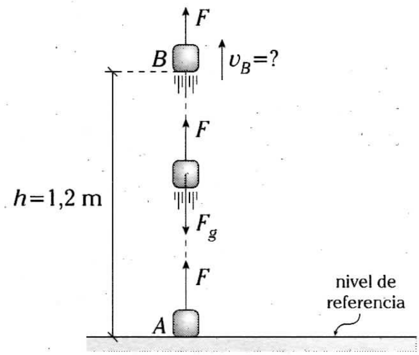
$$\therefore\ v_B=13\ \text{m/s}$$

2. Sobre el bloque de 2 kg que se encuentra en reposo actúa una fuerza vertical constante como se muestra en el gráfico. Determine la rapidez del bloque cuando se encuentre a una altura de 1,2 m. (g=10 m/s^2).



Resolución

Interpretamos gráficamente el enunciado del problema.



Cuando el bloque está en movimiento, además de la fuerza de gravedad actúa la $\vec{F}$, esta desarrolla trabajo sobre el bloque y hace variar su energía mecánica. Luego se verifica

$$\sum W^{F\neq\left\{\begin{smallmatrix}Fg\\F_E\end{smallmatrix}\right.}=\Delta E_M$$

$$W_{AB}^{F}=E_{M_F}-E_{M_0} \qquad \text{(I)}$$

En la posición final (posición B) el bloque tiene energía cinética y potencial gravitatoria, en la posición inicial (posición A) no hay energía mecánica.

Reemplazamos en (I)

$$W_{AB}^{F}=\left(E_{C_B}+E_{PG_B}\right)-(0)$$

$$F\cdot h=\frac{1}{2}\cdot mv_B^2+mgh$$

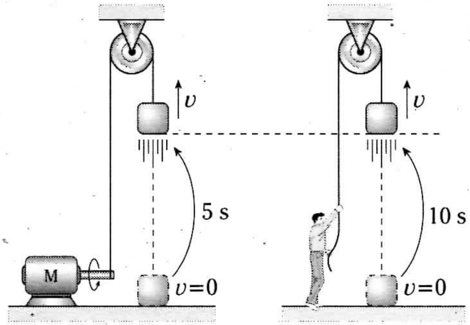
$$50(1,2)=\frac{1}{2}(2)v_B^2+2(10)(1,2)$$

$$60=v_B^2+24$$

$\therefore\ v_B$=6 m/s

Potencia

Para efectuar un mismo trabajo, diferentes cuerpos necesitan distinto tiempo. Veamos el siguiente ejemplo.



Se observa que tanto la persona como el motor realizan igual trabajo sobre el bloque; sin embargo, el motor realiza el trabajo en menor tiempo, es decir, más rápido, por ello, se dice que el motor tiene más potencia que la persona.

¿Qué es la potencia?

Es una magnitud física escalar que expresa la rapidez con la cual se realiza un trabajo, es decir, se transmite energía.

Se define matemáticamente con la siguiente expresión:

$$\boxed{P=\frac{W}{t}}$$

Su unidad:
watt o vatio (W)

donde

- W: cantidad de trabajo (J)
- t: tiempo transcurrido (s)

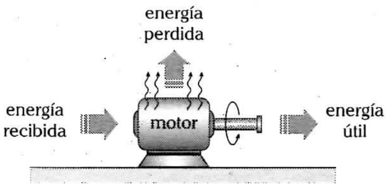
$$1 \text{ watt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ segundo}}$$

La potencia (P) también se define como la rapidez con la cual se transfiere energía.

$$\boxed{P = \frac{\text{Energía}}{t}}$$

Eficiencia (η)

Cuando un motor funciona, este no entrega energía de sí, solamente transforma la energía que recibe. Además durante su funcionamiento el motor experimenta **pérdidas** de energía debido al funcionamiento interno de sus componentes.



La eficiencia (η) es la relación que existe entre la energía útil y la energía que se recibe.

$$\boxed{\eta = \frac{E_{\text{útil}}}{E_{\text{recibida}}}}$$

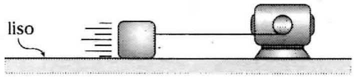
Como $\quad E_{\text{útil}} < E_{\text{recibida}}$

$$\frac{E_{\text{útil}}}{E_{\text{recibida}}} < 1$$

$$\eta < 1$$

Ejemplos

1. Por acción del motor, la velocidad del bloque que inicialmente se encontraba en reposo aumenta hasta 20 m/s en 5 s. Determine la potencia del motor. (m_{bloque}=20 kg).



Resolución

Evaluamos la potencia del motor.

$$P = \frac{W_{\text{desarrollado}}}{t} \qquad \text{(I)}$$

El motor desarrolla trabajo sobre el bloque a través de la cuerda, este trabajo hace variar la energía mecánica del bloque específicamente su energía cinética, entonces

$$W_{\text{desarrollado}} = E_{C_F} - \cancel{E_{C_0}}^{\,0}$$

Al inicio el bloque está en reposo, por lo tanto, su energía cinética es cero.

$$W_{\text{desarrollado}} = \frac{1}{2} m v_F^2$$

$$W_{\text{desarrollado}} = \frac{1}{2}(20)(20)^2$$

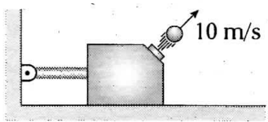
$$W_{\text{desarrollado}} = 4000 \text{ J}$$

Reemplazamos en (I)

$$P = \frac{4000 \text{ J}}{5 \text{ s}}$$

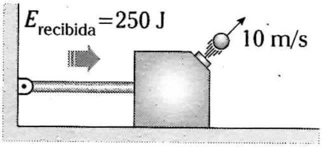
$\therefore \; P$=800 W

2. El equipo mostrado consume 250 J de energía y con ello lanza un objeto de 3 kg como se muestra. Determine su eficiencia.



Resolución

Interpretando gráficamente el enunciado tenemos



La eficiencia se determina así

$$\eta=\frac{E_{útil}}{E_{recibida}} \qquad \text{(I)}$$

La energía útil es la energía que entrega el equipo al objeto de 3 kg en forma de energía cinética, luego

$$E_{útil}=E_{cinética}$$

$$E_{útil}=\frac{1}{2}mv^2$$

$$E_{útil}=\frac{1}{2}(3)(10)^2$$

$$E_{útil}=150\text{ J}$$

Reemplazamos en (I)

$$\eta=\frac{150\text{ J}}{250\text{ J}}$$

$$\eta=0{,}6$$

$$\therefore\ \eta=60\%$$

3. A un dispositivo que lanza pelotas de 1 kg verticalmente se le suministra una energía de 100 J. Si la máxima altura que alcanza la pelota es de 7 m, determine la eficiencia de dicho dispositivo. Desprecie la resistencia del aire. (g=10 m/s^2).

Resolución

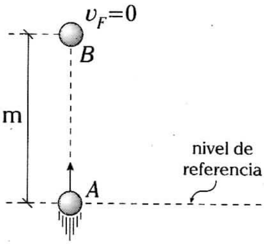
Evaluamos la eficiencia del dispositivo.

$$\eta=\frac{E_{útil}}{E_{recibida}} \qquad \text{(I)}$$

- Por condición del problema, la energía que recibe el dispositivo es

$$E_{recibida}=100\text{ J}$$

- La energía útil es lo que entrega a la pelota y le permite que esta alcance una altura de 7 m. Gráficamente tenemos



Como se desprecia la resistencia del aire, la pelota experimenta un movimiento de caída libre, conservándose su energía mecánica, luego

$$E_{útil}=E_{M_A}=E_{M_B}$$

En la posición B, respecto al nivel de referencia, la pelota solo presenta energía potencial gravitatoria.

$$E_{útil}=E_{PG_B}$$

$$E_{útil}=mgh$$

$$E_{útil}=1(10)(7)$$

$$E_{útil}=70\text{ J}$$

Finalmente, reemplazamos en (I)

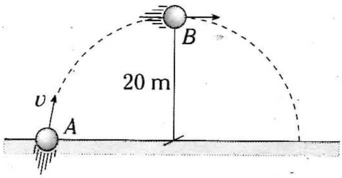
$$\eta=\frac{70\text{ J}}{100\text{ J}}$$

$$\eta=0{,}7$$

$$\therefore\ \eta=70\%$$

Problema N.° 1

La esfera de 0,2 kg lanzada como se indica, experimenta un MPCL. Cuando la esfera alcanza su altura máxima tiene una energía cinética de 30 J. Determine su energía mecánica, respecto al piso, en la posición A. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Como el cuerpo experimenta un movimiento de caída libre, su energía mecánica se conserva. Luego, respecto al piso (nivel de referencia) se tiene

$$E_{M_A}=E_{M_B}$$

$$E_{M_A}=E_{C_B}+E_{PG_B}$$

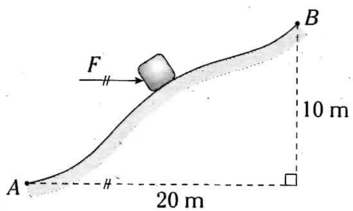
$$E_{M_A}=30+mgh$$

$$E_{M_A}=30+(0,2)(10)(20)$$

$$\therefore\quad E_{M_A}=70\ \text{J}$$

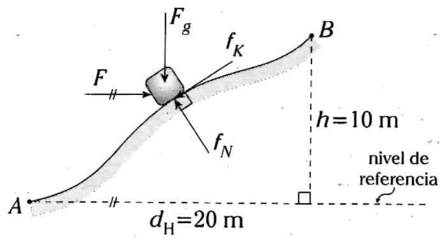
Problema N.° 2

Un bloque de 2 kg se encuentra inicialmente en reposo en la posición A. Se le ejerce una fuerza constante $\vec{F}$ de módulo 15 N, lo que permite que el bloque pase por B con una rapidez de 5 m/s. Determine la cantidad de trabajo desarrollado por la fuerza de rozamiento. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Realizamos el diagrama de cuerpo libre (DCL) del bloque en una posición determinada.



Nos piden determinar W^{f_K}.

Para este caso se verifica

$$\sum W^{F\neq\begin{cases}F_g\\ F_E\end{cases}}=E_{M_F}=E_{M_0}$$

$$W_{AB}^{F}+W_{AB}^{f_K}+W_{AB}^{f_N}=E_{M_B}-E_{M_A}\qquad \text{(I)}$$

El trabajo desarrollado por la fuerza normal (f_N) es nulo.

$$W_{AB}^{f_N}=0$$

Respecto al nivel de referencia, en la posición A la energía mecánica es cero; mientras que, en la posición B el bloque posee energía cinética y energía potencial.

Reemplazando en (I) tenemos

$$W_{AB}^{F}+W_{AB}^{f_K}+0=\left(E_{C_B}+E_{PG_B}\right)-0$$

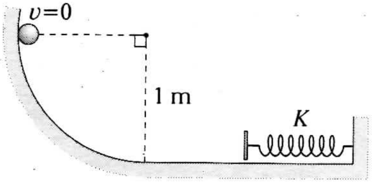
$$F\cdot d_{\text{H}}+W_{AB}^{f_K}=\frac{1}{2}mv_B^2+mgh$$

$$10(20)+W_{AB}^{f_K}=\frac{1}{2}(2)(5)^2+2(10)(10)$$

$$\therefore\quad W_{AB}^{f_K}=-75\ \text{J}$$

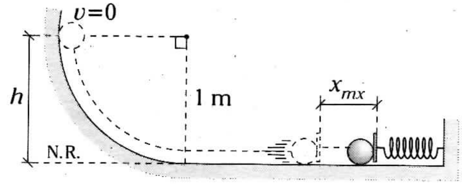
Problema N.° 3

La esfera de 1 kg se suelta en la posición mostrada. Determine la deformación máxima que experimenta el resorte de rigidez 500 N/m. Desprecie todo rozamiento. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Después de soltar la esfera, esta llega a hacer contacto con el resorte y empieza a deformarlo (comprimirlo). Luego, la deformación del resorte es máxima en el instante que la velocidad de la esfera se hace cero.



Para el sistema esfera-resorte, la energía mecánica (E_M) se conserva.

$$E_{M_F}=E_{M_0} \qquad \text{(I)}$$

Respecto al nivel de referencia (N.R.) al inicio solo se tiene energía potencial gravitatoria, y al final solo se tiene energía potencial elástica (cuando la deformación es máxima).

Reemplazamos en (I)

$$E_{PE_{\text{final}}}=E_{PG_{\text{inicial}}}$$

$$\frac{1}{2}Kx_{mx}^2=mgh$$

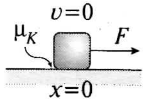
$$\frac{1}{2}(500)x_m^2=1(10)(1)$$

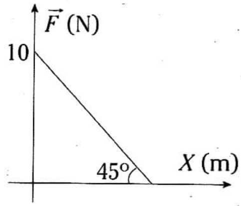
$$\therefore \quad x_{mx}=0{,}2\ \text{m}$$

Problema N.° 4

Sobre el bloque de 1 kg, inicialmente en reposo, se ejerce una fuerza horizontal que varía según se indica en la gráfica. Determine la rapidez del bloque en la posición $x=+4$ m.

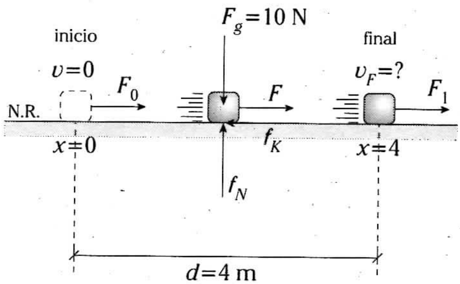
$(\mu_K=0{,}5;\ g=10\ \text{m/s}^2)$





Resolución

Realizamos el DCL del bloque en una posición intermedia de su trayecto.



Nos piden la rapidez final v_F.

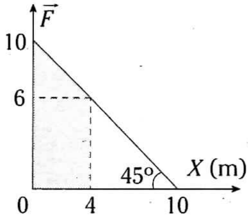
Respecto al nivel de referencia tenemos

$$\sum W^{F\neq\left\{\begin{matrix}F_g\\F_E\end{matrix}\right.}=E_{M_F}-E_{M_0}$$

$$W^F+\cancel{W^{f_N}}+W^{f_K}=E_{M_F}-\cancel{E_{M_0}}$$

$$W^F+W^{f_K}=E_{C_F} \qquad \text{(I)}$$

- La cantidad de trabajo desarrollado por la fuerza variable $\vec{F}$ se determina así



$$W^F = \text{área sombreada}$$

$$W^F = \left(\frac{10+6}{2}\right) \cdot 4$$

$$W^F = 32 \text{ J}$$

- La cantidad de trabajo desarrollado por la fuerza de rozamiento se determina así

$$W^{f_K} = -f_K \cdot d$$

$$W^{f_K} = -\mu_K \cdot f_N \cdot d$$

La fuerza normal tiene el mismo valor que la fuerza de gravedad.

$$W^{f_K} = -\mu_K \cdot F_g \cdot d$$

$$W^{f_K} = -(0{,}5)(10)(4)$$

$$W^{f_K} = -20 \text{ J}$$

Reemplazamos en (I)

$$(32) + (-20) = \frac{1}{2} m v_F^2$$

$$12 = \frac{1}{2}(1) \cdot v_F^2$$

$$\therefore \quad v_F = 2\sqrt{6} \text{ m/s}$$

Problema N.º 5

De una mina debe extraerse cada 2 minutos 600 litros de agua desde una profundidad de 150 m. ¿Qué potencia es necesaria?

Resolución

Se debe elevar agua, es decir, al agua se le debe hacer ganar energía potencial gravitatoria, entonces

$$P = \frac{E_{PG} \text{ transferida}}{\Delta t}$$

$$P = \frac{mgh}{\Delta t}$$

Como 1 litro de agua presenta una masa de 1 kg

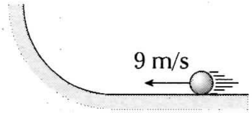
$$P = \frac{\overset{5}{\cancel{(600)}}(10)(150)}{\underset{1}{\cancel{(120)}}} \rightarrow P = (5)(10)(150)$$

$$\therefore \quad P = 7500 \text{ W o } 7{,}5 \text{ kW}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

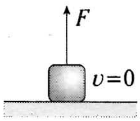
NIVEL BÁSICO

1. La esfera lisa se lanza como se muestra. Determine a qué altura se encuentra cuando su rapidez es 5 m/s. ($g=10$ m/s^2).



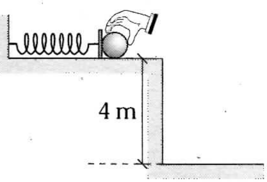
A) 1,4 m B) 2,8 m C) 5,6 m
D) 4,2 m E) 8,1 m

2. Sobre el bloque de 1 kg actúa la fuerza constante $F=26$ N. Calcule la rapidez que presentará el bloque cuando se encuentre a 2 m del piso. ($g=10$ m/s^2).



A) 2 m/s B) 4 m/s C) 8 m/s
D) 10 m/s E) 12 m/s

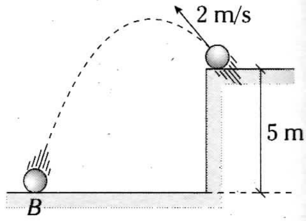
3. Se muestra un resorte comprimido que almacena una energía potencial de 8 J. Si soltamos la esfera de 0,5 kg, determine su energía cinética cuando se encuentre a una altura de 2 m. Desprecie todo rozamiento. ($g=10$ m/s^2)



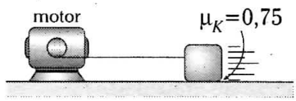
A) 10 J B) 12 J C) 16 J
D) 18 J E) 24 J

4. La esfera de 200 g se lanza desde la parte superior del acantilado como se indica e impacta en B con una rapidez de 8 m/s. Calcule la cantidad de trabajo desarrollado por el viento sobre la esfera. ($g=10$ m/s^2).

A) –4 J
B) –5 J
C) –8 J
D) –10 J
E) –20 J



5. El motor tiene una potencia útil de 3 kW. Si arrastra al bloque con una rapidez constante de 10 m/s, determine la masa del bloque. ($g=10$ m/s^2)

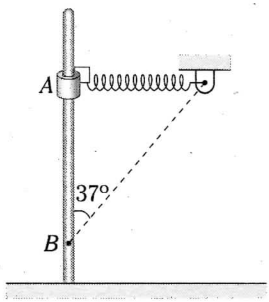


A) 10 kg B) 20 kg C) 40 kg
D) 50 kg E) 80 kg

NIVEL INTERMEDIO

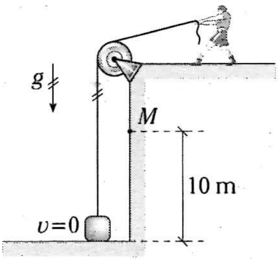
6. El collarín unido al resorte de rigidez 200 N/m y longitud natural 1,2 m que se encuentra sin deformar, es abandonado en A. Si el collarín pasa por B con una rapidez de 4 m/s, determine la masa del collarín. ($g=10$ m/s^2).

A) 24 kg
B) 16 kg
C) 2 kg
D) 4 kg
E) 8 kg

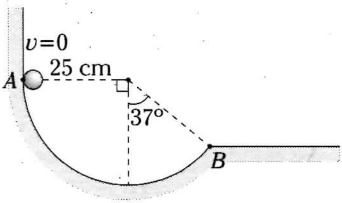


7. Para elevar el bloque de 2 kg, la persona ejerce una fuerza de módulo constante e igual a 60 N. Calcule su rapidez cuando pase frente al punto M. ($g=10$ m/s^2).

A) 2 m/s
B) 4 m/s
C) 8 m/s
D) 10 m/s
E) 20 m/s

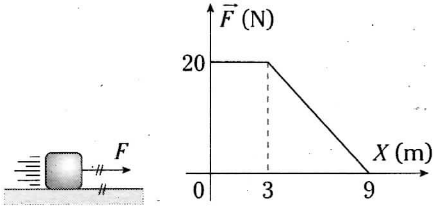


8. La esfera lisa se suelta en A. Determine a qué distancia del punto B impacta. ($g=10$ m/s^2).



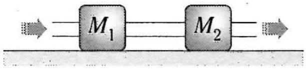
A) 10 m B) 19,2 m C) 26,4 m
D) 38,4 m E) 42,2 m

9. Sobre el bloque liso de 2 kg se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$, que varía según la gráfica adjunta. Si en $x=0$ la rapidez es de 4 m/s, calcule su rapidez en $x=6$ m.



A) 8 m/s B) 9 m/s C) 11 m/s
D) 13 m/s E) 15 m/s

10. Las máquinas M_1 y M_2 están acopladas en serie. Se sabe que la máquina M_1 absorbe 800 W y tiene una eficiencia de 75%. Determine el calor que disipa la máquina M_2 por segundo si entrega una potencia de 420 W.



A) 60 J B) 80 J C) 120 J
D) 150 J E) 180 J

Movimiento armónico simple (MAS)

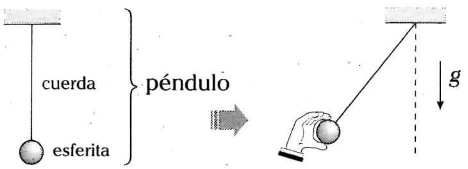
Capítulo XIV

OBJETIVOS

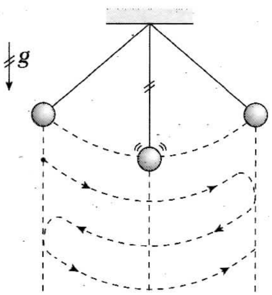
- Entender qué es un movimiento oscilatorio y un movimiento periódico.
- Conocer, entender y aplicar las características del movimiento armónico simple.

Definiciones previas

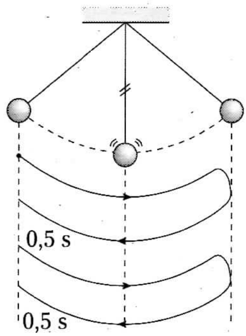
Muchos tipos de movimiento son oscilatorios, es decir, de vaivén (van de un lado hacia el otro alrededor de un punto central), por ejemplo, el movimiento de un péndulo.



Al llevar al péndulo hacía un lado y soltarlo, sucede lo siguiente:



El péndulo realiza un movimiento oscilatorio, además, es un movimiento periódico ya que se repite regularmente a iguales intervalos de tiempo.

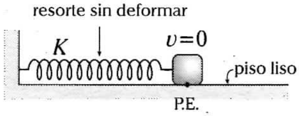


El tiempo que transcurre para que se repita el movimiento se llama periodo (T), así el periodo del péndulo que analizamos es T=0,5 s.

Existen otros ejemplos de movimientos oscilatorios y periódicos, como el movimiento de nuestras piernas cuando caminamos o el movimiento de un edificio en un terremoto, también las moléculas que conforman a los cuerpos. Muchos de estos movimientos se pueden explicar con ayuda de un modelo simplificado llamado movimiento armónico simple (MAS) que a continuación analizaremos.

Movimiento armónico simple (MAS)

Para el estudio del MAS nos apoyaremos en un modelo simple, un bloque unido a un resorte.

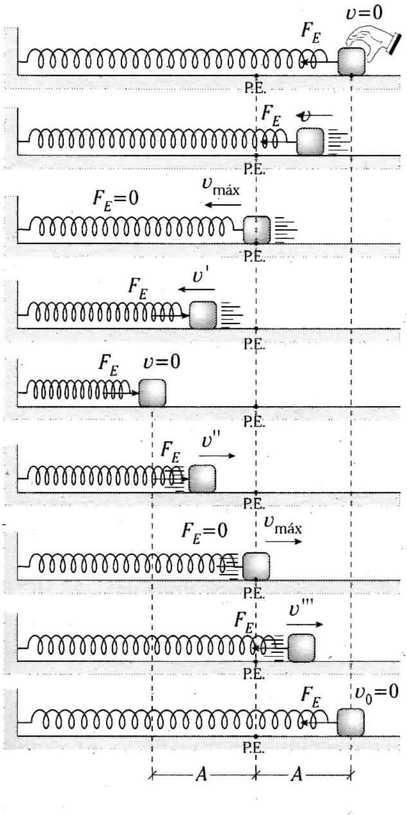


En la posición en que se encuentra el bloque puede permanecer indefinidamente en reposo, en equilibrio, ya que en esta posición la fuerza resultante es cero.

$\vec{F}_R = \vec{0}$

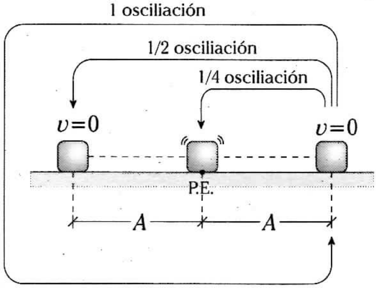
Esta posición también se denomina **posición de equilibrio (P.E.)**.

Si alejamos al bloque de su P.E. y lo soltamos, ocurre lo siguiente:



Debido a la acción de la fuerza elástica $\vec{F}_E$ el bloque realiza un **movimiento oscilatorio** alrededor de su P.E.

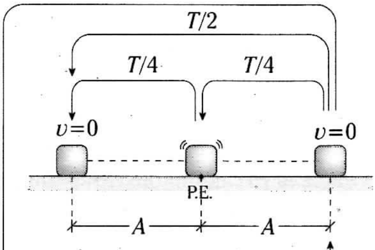
Veamos el siguiente gráfico:



Las posiciones en las cuales la rapidez del bloque es nula son los extremos de oscilación, en estas posiciones la distancia a la que se encuentra el bloque de la P.E. es máxima, esta distancia se conoce como **amplitud (A)**.

Por conservación de la energía mecánica se verifica que siempre que el bloque esté en un extremo de oscilación su distancia a la P.E. es la misma. También por conservación de la energía se verifica que en la P.E. la rapidez es máxima ($v_{\text{máx}}$).

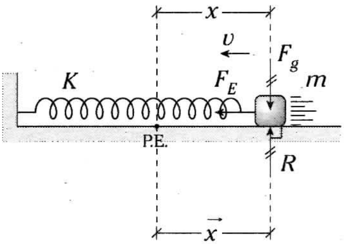
El movimiento del bloque **es periódico**, su **periodo (*T*)** de oscilación es igual a la duración de una oscilación.



tiempo$=T$

Otra característica del movimiento del bloque es que es un **movimiento rectilíneo**.

Por último, analicemos la fuerza resultante que gobierna el movimiento del bloque.



$\vec{x}$: posición del bloque, medida desde la P.E.
x: deformación del resorte

Se deduce

$$\boxed{x = |\vec{x}|}$$

Además, se verifica que la fuerza resultante (F_R) es $F_R = F_E$

$$\rightarrow \quad \boxed{F_R = Kx}$$

Como el vector $\vec{x}$ es opuesto a la $\vec{F}_E$, se cumple

$$\boxed{\vec{F}_R = -\underbrace{K}_{\text{constante de proporcionalidad}}\vec{x}}$$

Entonces, en el movimiento del bloque la $\vec{F}_R$ **es opuesta a la posición y es directamente proporcional a esta**.

Como se observa en el gráfico, la $\vec{F}_R$ siempre apunta hacia la P.E. como buscando que el bloque recupere esta posición, por ello se dice que es una fuerza recuperadora.

Resumen

Un cuerpo realiza un MAS si cumple lo siguiente:

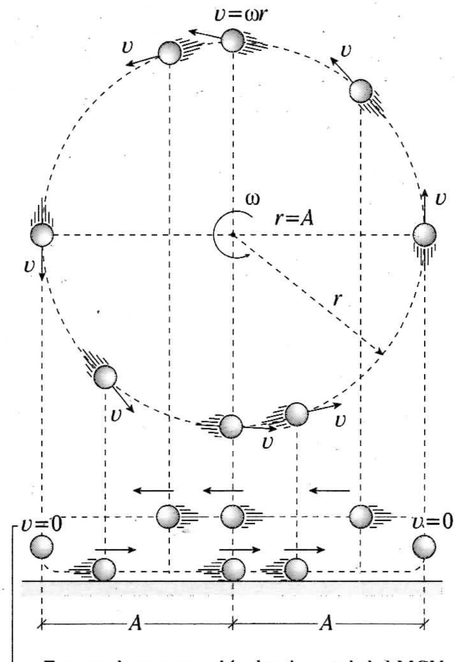
- Su movimiento es oscilatorio.
- Su movimiento es periódico.
- Su movimiento es rectilíneo.
- Su movimiento está gobernado por una fuerza resultante opuesta a la posición y directamente proporcional a esta.

NOTA

A la posición $\vec{x}$ también se le llama elongación.

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL Y ANÁLISIS CINEMÁTICO DEL MAS

Consideremos una esfera que realiza MCU y proyectemos este movimiento en la horizontal (recordemos el MCU).



Esta es la proyección horizontal del MCU

Notamos que para la proyección horizontal del MCU se cumple lo siguiente:

- Su movimiento es rectilíneo.
- Su movimiento es oscilatorio, alrededor del punto central.

- Su movimiento es periódico, el periodo de este es igual al periodo del MCU, es decir, el tiempo que tarda en dar una vuelta.

  Sabemos que la rapidez angular se evalúa a través de la siguiente expresión:

  $$\omega = \frac{\theta}{t}$$

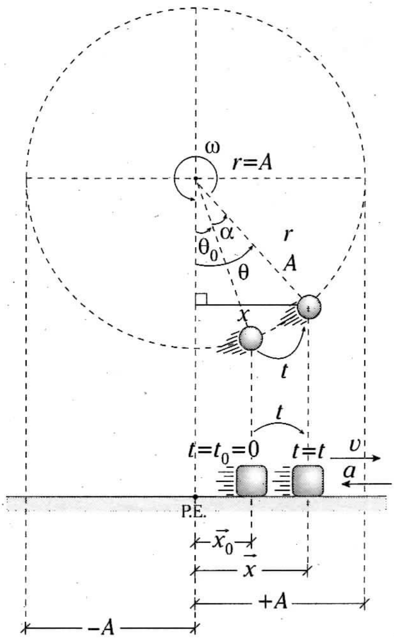
  Entonces, para una vuelta se verifica

  $$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

  De donde $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

Todas estas son características del MAS, de hecho se puede demostrar que esta proyección horizontal del MCU es un MAS. En función a lo planteado vamos a determinar las ecuaciones de su movimiento.

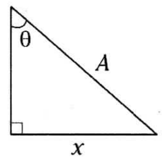
Ecuación de la posición para el MAS



donde

- $\vec{x}_0$: posición inicial
- $\vec{x}$: posición del oscilador en un cierto instante de tiempo t
- θ_0: fase inicial
- θ: fase

En el gráfico observamos el siguiente triángulo



De donde

$$\vec{x} = A\,\text{sen}\,\theta$$

$$\vec{x} = A\,\text{sen}(\alpha + \theta_0) \qquad \text{(I)}$$

En el MCU

$$\alpha = \omega t$$

Reemplazando en (I), obtenemos

$$\boxed{\vec{x} = A\,\text{sen}(\omega t + \theta_0)} \qquad \text{(II)}$$

(ecuación de movimiento o ecuación de la posición del MAS)

ω: es la rapidez angular del MCU, pero para el MAS se llama frecuencia cíclica o frecuencia angular

Se verifica también

$$\boxed{\vec{v} = \omega A\cos(\omega t + \theta_0)} \qquad \text{(III)}$$

(ecuación de velocidad del MAS)

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \theta_0)} \qquad \text{(IV)}$$

(ecuación de aceleración del MAS)

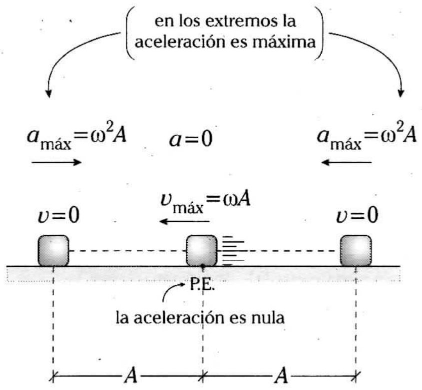
De las ecuaciones (II) y (IV) se deduce

$$\boxed{\vec{a}=-\omega^2\vec{x}} \qquad \text{(V)}$$

Asimismo, de las ecuaciones (II) y (III), obtenemos

$$\boxed{v=\omega\sqrt{A^2-x^2}} \qquad \text{(VI)}$$

A partir de las ecuaciones (V) y (VI) se deduce



Ejemplos

1. Una partícula que realiza MAS presenta la siguiente ecuación de movimiento.

   $$\vec{x}=0,2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{12}\right)\text{ m}$$

   Halle su rapidez máxima, el módulo de su aceleración máxima y su posición en t=1 s.

   Resolución

   Comparamos la ecuación de movimiento de la partícula con

   $$\vec{x}=A\,\text{sen}(\omega t+\theta_0)$$

Entonces

$$A=0,2\text{ m}$$

$$\omega=\frac{\pi}{12}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\theta_0=\frac{\pi}{12}\text{ rad}$$

Calculamos la rapidez máxima

$$v_{\text{máx}}=\omega\cdot A$$

$$v_{\text{máx}}=\frac{\pi}{12}\cdot 0,2$$

$$v_{\text{máx}}=\frac{\pi}{60}\text{ m/s}$$

Calculamos el módulo de la aceleración máxima

$$a_{\text{máx}}=\omega^2 A$$

$$a_{\text{máx}}=\left(\frac{\pi}{12}\right)^2\cdot 0,2$$

$$a_{\text{máx}}=\frac{\pi^2}{720}\text{ m/s}^2$$

Calculamos su posición $\vec{x}_{(t=1\text{ s})}$

$$\vec{x}=0,2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\vec{x}_{(t=1\text{ s})}=0,2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}(1)+\frac{\pi}{12}\right)$$

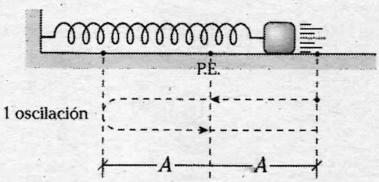
$$\vec{x}_{(t=1\text{ s})}=0,2\underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{\text{sen}(30°)}$$

$$=0,2\cdot\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \vec{x}_{(t=1\text{ s})}=0,1\text{ m}$$

OBSERVACIÓN

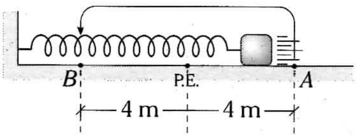
En un MAS



El recorrido del oscilador para 1 oscilación es

$$\boxed{e = 4A}$$

2. Un bloque oscila unido a un resorte sobre un piso liso, de manera que tarda 60 s en desarrollar 5 oscilaciones y recorre 64 m en 2 oscilaciones. Halle cuánto tiempo le toma ir desde A hasta B.



Resolución

De los datos

tiempo		# de oscilaciones
60 s	———	5
T	———	1

$$T = \frac{1 \times 60}{5}$$

$$T = 12 \text{ s}$$

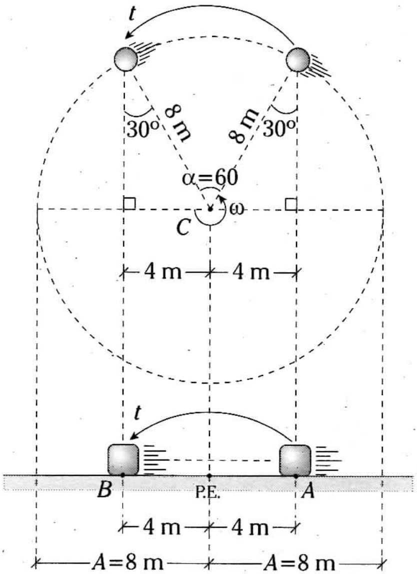
También

recorrido		# de oscilaciones
64 m	———	2
$4A$	———	1

$$4A \cdot 2 = 64 \cdot 1$$

$$A = 8 \text{ m}$$

Para hallar el tiempo que tarda en ir desde A hasta B nos apoyaremos en el MCU asociado a este MAS.



Nos piden t.

En el MCU

$$\alpha = \omega t \qquad \text{(I)}$$

$$\alpha = 60° <> \frac{\pi}{3} \text{ rad} \qquad \text{(II)}$$

Recordemos

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Reemplazando el valor del periodo, obtenemos

$$\omega = \frac{2\pi}{12}$$

$$\omega = \frac{\pi}{6} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad \text{(III)}$$

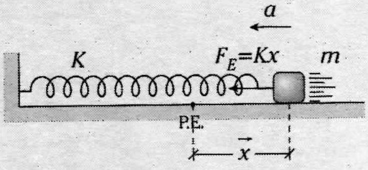
Finalmente, reemplazamos (II) y (III) en (I)

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \cdot t$$

$$\therefore \quad t = 2 \text{ s}$$

OBSERVACIÓN

En un MAS



Aplicando dinámica

$F_R=ma$

$\rightarrow Kx=ma$ (I)

También se sabe

$\vec{a}=-\omega^2\vec{x}$

$\rightarrow a=\omega^2x$ (II)

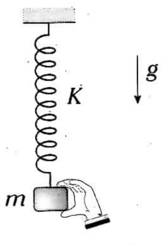
Reemplazamos (II) en (I)

$Kx=m\omega^2x$

$K=m\omega^2$

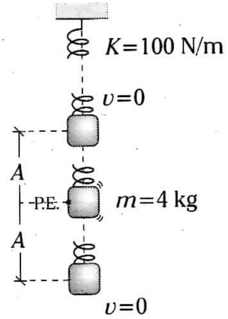
$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

3. Un bloque de 4 kg está unido a un resorte de rigidez 100 N/m, el cual a su vez está suspendido de un techo como se muestra. Determine la frecuencia de oscilación del bloque luego de que se lanza verticalmente hacia abajo.



Resolución

Luego de lanzar al bloque, este realizará un MAS vertical.



Nos piden la frecuencia (f), también conocida como frecuencia lineal, f se define como el número de oscilaciones realizadas en 1 s, se calcula así

$$\boxed{f=\frac{(\#\text{ de oscilaciones})}{\text{tiempo}}}$$

Si consideramos 1 sola oscilación

$$\boxed{f=\frac{1}{T}}$$

Para nuestro caso

$$f=\frac{1}{T} \qquad \text{(I)}$$

Sabemos que

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(II)}$$

También

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{100}{4}}=\sqrt{25}$$

$$\rightarrow \omega=5\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II)

$$T=\frac{2\pi}{5}\ \text{s} \qquad \text{(IV)}$$

Finalmente, reemplazamos (IV) en (I)

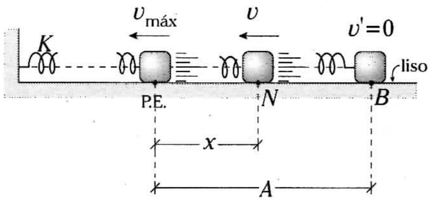
$$f=\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{5}\right)}$$

$$f=\frac{5}{2\pi}$$

La unidad de la f sería $\frac{1}{s}$, es decir, s^{-1} que es equivalente a Hz (hertz o hertzios).

$$\therefore\ f=\frac{5}{2\pi}\ \text{Hz}$$

ANÁLISIS ENERGÉTICO DEL MAS



En el MAS, la energía mecánica (E_M) se conserva.

$$E_{M_B}=E_{M_N}=\underbrace{E_{M_{MAS}}}_{E_M \text{ del MAS}}$$

$$\underbrace{E_{C_B}}_{0}+E_{PE_B}=E_{C_N}+E_{PE_N}=E_{M_{MAS}}$$

$$\rightarrow\ \frac{KA^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{Kx^2}{2}=E_{M_{MAS}}$$

Es decir

$$\boxed{E_{M_{MAS}}=\frac{KA^2}{2}}$$

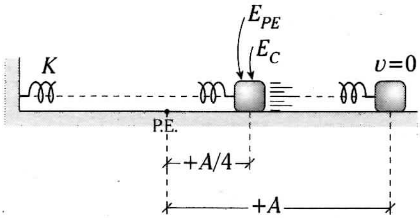
También

$$\boxed{E_{M_{MAS}}=\frac{KA^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{Kx^2}{2}}$$

Ejemplo

Un cuerpo liso realiza un MAS, sobre un piso horizontal, unido a un resorte. Si su energía mecánica es 32 J, halle su energía cinética y su energía potencial elástica, cuando su posición es $\vec{x}=+\frac{A}{4}$, donde A es la amplitud.

Resolución



Nos piden E_C y E_{PE}.

Usamos

$$\underbrace{E_M}_{32\ \text{J}}=E_C+E_{PE}$$

$$\rightarrow\ 32=E_C+E_{PE} \qquad \text{(I)}$$

Sabemos que

$$E_{PE}=\frac{Kx^2}{2}=\frac{K}{2}\left(\frac{A}{4}\right)^2$$

$$E_{PE}=\frac{KA^2}{32} \qquad \text{(II)}$$

Además

$$\underbrace{E_M}_{32\ \text{J}}=\frac{KA^2}{2}$$

$$\rightarrow\ KA^2=64\ \text{J} \qquad \text{(III)}$$

Luego, reemplazamos (III) en (II)

$$E_{PE}=\frac{64}{32}$$

$$E_{PE}=2\text{ J}$$

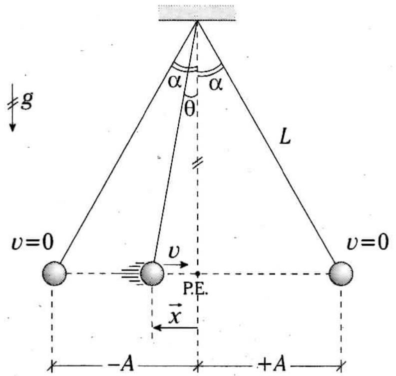
Finalmente, reemplazamos en (I)

$$32=E_C+2$$

$$\therefore\quad E_C=30\text{ J}$$

Péndulo simple

Al inicio de este capítulo mencionamos al péndulo, cuyo movimiento es oscilatorio, pero, en general, no es un MAS. No obstante, si el máximo ángulo que forma la cuerda con la vertical es pequeño, entonces este movimiento se puede considerar como un MAS.



El movimiento del péndulo es un MAS (péndulo simple) si se cumple lo siguiente:

$$\boxed{\alpha\lesssim 10^{\circ}}$$

menor o semejante a

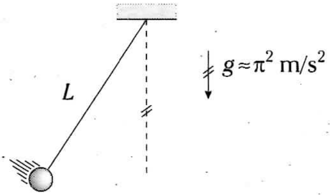
Con esto también se verifica que su periodo de oscilación solo depende de la longitud L y del módulo de la aceleración de la gravedad.

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Ejemplo

Si un péndulo simple da 8 oscilaciones en 32 segundos, ¿cuál es la longitud del péndulo? Considere $g\approx\pi^2$ m/s^2.

Resolución



Nos piden L.

Del dato

tiempo		# de oscilaciones
32 s	———	8
T	———	1

$$T=\frac{32\times 1}{8}$$

$$\underbrace{T}_{2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}=4\text{ s}$$

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=4$$

Elevamos al cuadrado

$$(2\pi)^2\,\frac{L}{\pi^2}=4^2$$

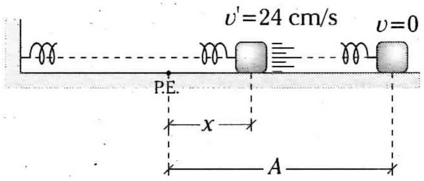
$$4\cancel{\pi^2}\cdot\frac{L}{\cancel{\pi^2}}=16$$

$$\therefore\quad L=4\text{ m}$$

Problema N.° 1

Se sabe que el módulo de la aceleración máxima de una partícula que desarrolla un MAS es 120 cm/s^2 y su rapidez máxima es 30 cm/s. Determine a qué distancia de la posición de equilibrio la rapidez del móvil es 24 cm/s.

Resolución



Nos piden x.

Se verifica

$$v' = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$24 = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad \text{(I)}$$

Luego

$$\underbrace{a_{\text{máx}}} = \omega^2 A$$

$$\rightarrow \quad 120 = \omega^2 A \qquad \text{(II)}$$

También se cumple

$$\underbrace{v_{\text{máx}}} = \omega A$$

$$\rightarrow \quad 30 = \omega A \qquad \text{(III)}$$

Dividimos (II) y (III)

$$\frac{120}{30} = \frac{\omega^2 \cancel{A}}{\omega \cancel{A}}$$

$$\rightarrow \quad 4 = \omega \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazamos (IV) en (III)

$$30 = 4A$$

$$\rightarrow \quad A = 7{,}5 \text{ cm} \qquad \text{(V)}$$

Finalmente, reemplazamos (IV) y (V) en (I)

$$24 = 4\sqrt{7{,}5^2 - x^2}$$

$$6 = \sqrt{7{,}5^2 - x^2}$$

$$6^2 = 7{,}5^2 - x^2$$

$$36 = 56{,}25 - x^2$$

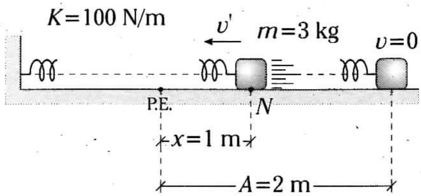
$$x^2 = 20{,}25$$

$$\therefore \quad x = 4{,}5 \text{ cm}$$

Problema N.° 2

Un bloque liso de 3 kg realiza un MAS sobre un piso horizontal, unido a un resorte de rigidez 100 N/m. Si su amplitud de oscilación es 2 m, halle su rapidez en la posición x=1 m.

Resolución



Nos piden v'.

Como sabemos

$$E_M = E_{C_N} + E_{PE_N}$$

$$\rightarrow \quad \frac{KA^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}$$

$$\frac{100(2)^2}{2} = \frac{3v'^2}{2} + \frac{100(1)^2}{2}$$

$$300 = 3v'^2$$

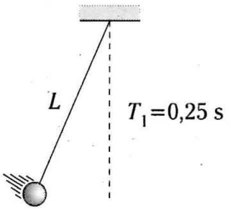
$$\therefore \quad v' = 10 \text{ m/s}$$

Problema N.º 3

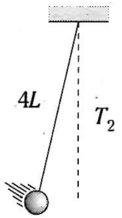
El periodo de un péndulo es 0,25 s. Determine cuánto varía su periodo si su longitud se cuadruplica.

Resolución

Inicialmente



Luego



Para la situación inicial, se cumple

$$\underbrace{T_1} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$0,25 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{0,25}{2\pi} \qquad \text{(I)}$$

Para la situación final, se verifica

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{4L}{g}}$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{4}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\rightarrow \quad T_2 = 4\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II)

$$T_2 = 4\pi\cdot\frac{0,25}{2\pi}$$

$$\rightarrow \quad T_2 = 0,5 \text{ s}$$

Por lo tanto, el periodo del péndulo aumenta en 0,25 s.

Problema N.º 4

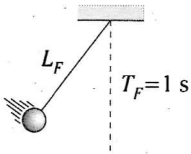
En el problema anterior, qué debe pasar con la longitud del péndulo para que su nuevo periodo sea 1 s?

Resolución

En el problema anterior el periodo es T_1=0,25 s. Además, tenemos

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(I)}$$

En la nueva situación tenemos



Para este caso

$$T_F = 2\pi\sqrt{\frac{L_F}{g}} \qquad \text{(II)}$$

Dividimos (II) entre (I)

$$\frac{T_F}{T_1} = \frac{\sqrt{L_F}}{\sqrt{L}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{0,25} = \frac{\sqrt{L_F}}{\sqrt{L}}$$

Resolvemos

$$L_F = 16L$$

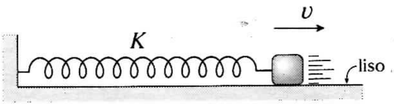
Se concluye que la longitud del péndulo debe aumentar hasta que sean dieciséis veces su longitud inicial.

NIVEL BÁSICO

1. La velocidad del bloque unido al resorte de rigidez $K=40$ N/m está dada por

$$\vec{v}=4\cos\left[10t+\frac{\pi}{2}\right]\hat{\imath}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Determine su máxima energía cinética.



A) 1,6 J B) 2,4 J C) 3,2 J
D) 4 J E) 4,8 J

2. En un MAS, la relación entre la rapidez máxima y el módulo de la máxima aceleración es $2/\pi$. Calcule el periodo del MAS.

A) 1 s B) 2 s C) 3 s
D) 4 s E) 5 s

3. Un cuerpo de 0,02 kg está sujeto a un resorte de constante $K=2$ N/m. Si el cuerpo se desplaza hacia la derecha 0,1 m de su posición de equilibrio y luego se le lanza con $\sqrt{3}$ m/s hacia la izquierda, determine su rapidez máxima.

A) 1 m/s B) 2 m/s C) 3 m/s
D) 4 m/s E) 5 m/s

4. Un cuerpo realiza un MAS con una frecuencia $f=5$ Hz, de modo que en la posición en la que su velocidad es nula el módulo de su aceleración es $10\pi^2$ m/s^2. Determine la amplitud de las oscilaciones.

A) 5 cm B) 7,5 cm C) 10 cm
D) 12,5 cm E) 15 cm

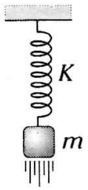
5. Calcule la longitud de un péndulo simple si al aumentar esta en 3 m su periodo se duplica.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

6. Un péndulo simple tiene un periodo de 4 s. Si la masa del péndulo se duplica, determine su nuevo periodo.

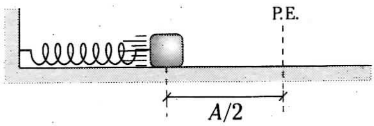
A) 2 s B) 4 s C) 6 s
D) 1 s E) 8 s

7. El sistema mostrado realiza un MAS y tiene un periodo de 3 s. Si la masa del bloque se cuadruplica, determine el nuevo periodo.



A) 12 s B) 3 s C) 4 s
D) 6 s E) 9 s

8. Se inicia el análisis del MAS del bloque liso a partir de la posición mostrada. Determine su ángulo de fase inicial. (A: amplitud).

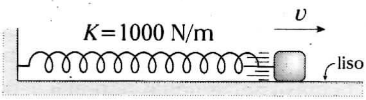


A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{11\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{5\pi}{3}$ E) $\frac{8\pi}{6}$

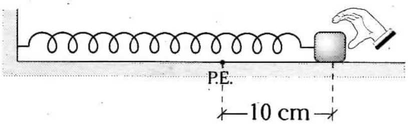
NIVEL INTERMEDIO

9. La energía mecánica del bloque que realiza un MAS es 105 J. Determine la posición del bloque cuando su rapidez es 10 m/s. (m=0,5 kg; g=10 m/s^2)



A) 0,1 m B) 0,2 m C) 0,3 m
D) 0,4 m E) 0,5 m

10. El bloque liso que se muestra es soltado en la posición que se indica, luego recorre 80 cm en 4 s. Determine su rapidez al cabo de 5,5 s.

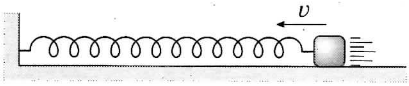


A) 0,1π m/s B) 0,2π m/s C) 0,5π m/s
D) π m/s E) 10π m/s

11. Un bloque unido a un resorte oscila en un plano horizontal con un MAS. Determine qué porcentaje de la energía total del sistema es energía cinética cuando el cuerpo pasa por $\vec{x}=+\dfrac{A}{2}$.

A) 25% B) 50% C) 75%
D) 80% E) 85%

12. El bloque de 2 kg desarrolla un MAS con amplitud de 0,2 m y desarrolla 15 oscilaciones por minuto. Determine su energía cinética medio segundo después de pasar por la posición de equilibrio.



A) $\dfrac{\pi^2}{50}$ J B) $\dfrac{\pi^2}{100}$ J C) $\dfrac{\pi^2}{200}$ J
D) $\dfrac{\pi^2}{250}$ J E) $\dfrac{\pi^2}{500}$ J

13. Calcule el nuevo periodo de un péndulo que bate segundos (periodo T=2 s). Considere lo siguiente:
- Su longitud se cuadruplica.
- La aceleración de la gravedad se reduce a la cuarta parte.
- La masa se triplica.

A) 2 s B) 4 s C) 6 s
D) 8 s E) 16 s

14. La velocidad de un cuerpo que desarrolla un MAS es $\vec{v}=10\cos(2t)$ m/s. Determine el valor de su aceleración máxima.

A) 5 m/s^2
B) 10 m/s^2
C) 20 m/s^2
D) 25 m/s^2
E) 40 m/s^2

15. Un oscilador que tiene un periodo de 8 s pasa por una posición donde su energía cinética y potencial son iguales. Determine el mínimo tiempo que debe transcurrir para que pase por otra posición donde sus energías potencial y cinética sean iguales.

A) 2 s B) 3 s C) 4 s
D) 6 s E) 8 s

Hidrostática

Capítulo XV

Objetivos

- Conocer algunas propiedades de los líquidos y los gases cuando no fluyen.
- Entender la interacción de los líquidos y gases con otras sustancias, básicamente con los sólidos.

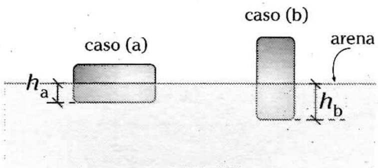
Fluido

En la naturaleza, la sustancia se encuentra principalmente en tres fases: sólido, líquido y gaseoso.
Los **sólidos** poseen volumen y forma definida debido a la disposición de sus moléculas ya que presentan poca movilidad, dado que las fuerzas de enlace internas son suficientemente intensas para vencer la tendencia a la deformación que se origina por la fuerza de gravedad u otra fuerza externa.
En los **líquidos** las fuerzas de cohesión son menos intensas debido a ello las moléculas tienen mayor movilidad y adoptan la forma del recipiente que los contiene manteniendo su volumen definido.
Un **gas** no tiene volumen ni forma definida debido al movimiento caótico de sus moléculas ya que las fuerzas de cohesión entre ellas son bastante débiles.
Cuando las fuerzas intermoleculares en una sustancia son bastante débiles, las moléculas pueden resbalar unas sobre otras bajo la acción de pequeñas fuerzas y decimos que fluyen, razón por la cual **denominamos fluidos a los líquidos y gases**.

Presión

Un ladrillo ubicado sobre una superficie horizontal ejerce sobre esta una fuerza perpendicular de módulo igual a su peso.

Si este ladrillo lo ubicamos sobre una superficie de arena, se presentan dos situaciones que mostramos a continuación.

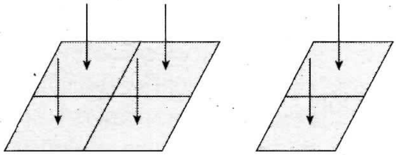


En ambos casos el ladrillo se hunde sobre la arena, pero en el caso (b) el hundimiento es mayor.

$$h_b > h_a$$

¿Por qué ocurre esto?

El ladrillo ejerce fuerza del mismo valor, igual a su peso, en ambos casos, pero cuando se apoya sobre su lado que tiene menor área, la fuerza por unidad de área que actúa sobre la arena es mayor y su efecto (hundimiento) también es mayor; mientras que si se apoya sobre su lado que tiene mayor área, la fuerza por unidad de área sobre la arena es menor y también su efecto.

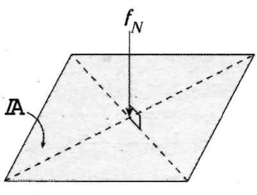


Distribución de fuerzas sobre la superficie de arena de ambos casos.

Lo señalado indica que la acción de una fuerza no solo depende de su módulo, sino también del área de la superficie sobre la cual actúa perpendicularmente.

Para caracterizar la distribución de la fuerza normal en una superficie se establece una magnitud física denominada **presión**.

Su expresión matemática es



$$\boxed{P=\frac{f_N}{\mathbb{A}}}$$

Su unidad: pascal (Pa)

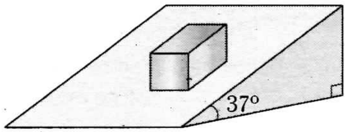
donde

- f_N: módulo de la fuerza normal a la superficie (N)
- $\mathbb{A}$: área (m^2)

entonces, 1 pascal=1 Pa=1 N/m^2

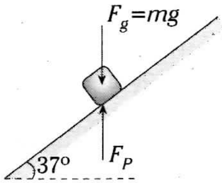
Ejemplo

La caja cúbica de 20 kg se mantiene en reposo sobre la superficie inclinada. Si el área de una de sus caras es 1 m^2, determine la presión que ejerce la caja sobre la superficie. $(g=10\ m/s^2)$.

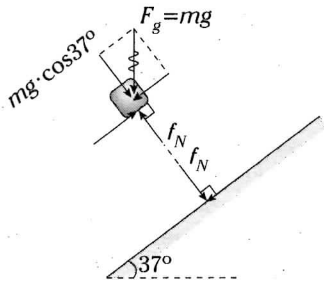


Resolución

Al hacer una vista de perfil, tenemos



La fuerza que ejerce el bloque a la superficie en forma perpendicular es igual al valor de la componente de la fuerza de gravedad que es perpendicular a la superficie inclinada.
Separamos al bloque de la superficie y descomponemos a la fuerza de gravedad.



Luego

$$P=\frac{f_N}{\mathbb{A}}$$

$$P=\frac{mg\cdot\cos 37^{\circ}}{\mathbb{A}}=\frac{20(10)\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)}{1}$$

$\therefore\quad P=160$ Pa

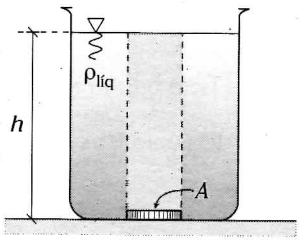
Presión de un líquido en reposo

Los líquidos son muy móviles, basta soplar un recipiente que contenga agua y sobre la superficie libre se forman ondulaciones.

Se puede hacer la analogía con los granos de arena o pequeñas esferas, si tratamos de ubicarlas una sobre la otra, notaremos que estos se resbalan debido a la acción de la fuerza de gravedad.

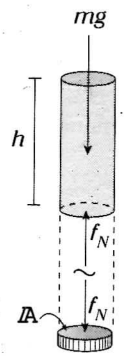
Las moléculas en un líquido tienen mayor movilidad que los granos de arena y fácilmente se ponen en movimiento bajo la acción de pequeñas fuerzas, por ello adoptan la forma del recipiente que los contiene cuando actúa la fuerza de gravedad.

Consideremos un recipiente que contiene agua, tal como se muestra.



Si colocamos cuidadosamente una moneda en el fondo del recipiente, una vez que la moneda está apoyada en la base del recipiente podemos notar que por encima de la superficie de la moneda existe una columna de líquido que la **presiona** contra la base del recipiente.

Hagamos una separación imaginaria entre la columna de líquido y la moneda.



La presión de la columna de líquido sobre la moneda recibe el nombre de **presión hidrostática** $(\boldsymbol{P}_{\mathbf{H}})$ y para nuestra caso será

$$P_{\mathrm{H}}=\frac{f_N}{\mathbb{A}}\qquad\qquad (\mathrm{I})$$

Para el equilibrio mecánico de la columna de líquido, se tiene

$$\sum F(\uparrow)=\sum F(\downarrow)$$

$$f_N=mg$$

m: masa de la columna de líquido por encima de la moneda.

Reemplazamos en (I)

$$P_{\mathrm{H}}=\frac{mg}{\mathbb{A}}\ \rightarrow\ P_{\mathrm{H}}=\frac{\rho_{\text{líq}}\cdot V\cdot g}{\mathbb{A}}$$

$$P_{\mathrm{H}}=\frac{\rho_{\text{líq}}\cdot(\cancel{\mathbb{A}}\cdot h)g}{\cancel{\mathbb{A}}}$$

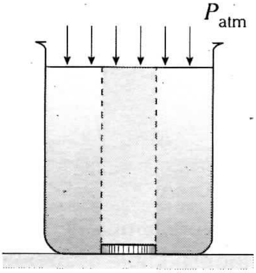
$$\boxed{P_{\mathrm{H}}=\rho_{\text{líq}}\cdot g\cdot h}$$

donde

- $\rho_{\text{líq}}$: densidad del líquido $(\mathrm{kg/m^3})$
- h: profundidad (m)

PRESIÓN TOTAL

Si se desea conocer la presión total en la cara de la moneda, debemos tomar en cuenta la presión debido a la atmósfera que se transmite a través del líquido y se manifiesta sobre la cara de la moneda, entonces la presión total se evalúa de la siguiente manera.



$$P_{total}=P_{atm}+P_H$$

P_{atm}: presión atmosférica

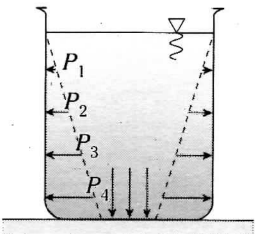
Al nivel del mar, se tiene

P_{atm}=1 atm=10^5 Pa=76 cm Hg

OBSERVACIÓN

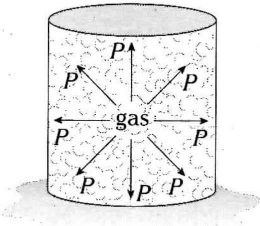
Los fluidos, además de ejercer presión a los cuerpos sumergidos en él, también ejercen presión a las paredes del recipiente que lo contiene.

Para los líquidos



A mayor profundidad, mayor es la presión.

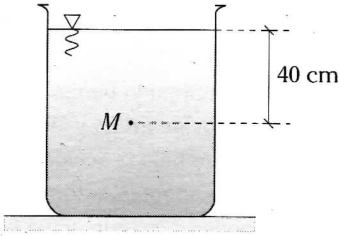
Para los gases



Si se tiene pequeñas cantidades de gas, la presión es la misma en todos los puntos.

Ejemplo

El recipiente que se muestra contiene agua. Si la presión atmosférica es 10^5 Pa, determine la presión total en *M*. $\left(\rho_{H_2O}=1000\ \text{kg/m}^3;\ g=10\ \text{m/s}^2\right)$.



Resolución

La presión total en el punto *M* se evalúa

$$P_{total}=P_{atm}+P_H$$

$$P_{total}=P_{atm}+\rho_{H_2O}\cdot g\cdot h \qquad \text{(I)}$$

La profundidad del punto *M* es

$$h=40\ \text{cm}=0{,}4\ \text{m}$$

Reemplazamos en (I)

$$P_{total}=10^5+1000(10)(0{,}4)$$

$$P_{total}=100\times10^3+4\times10^3$$

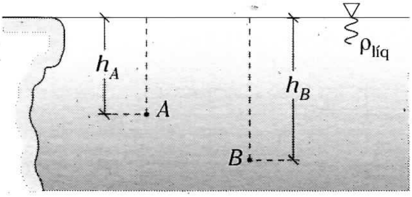
$$P_{total}=104\times10^3\ \text{Pa}$$

$$\therefore\quad P_{total}=104\ \text{kPa}$$

Teorema fundamental de la hidrostática

Establece que "la diferencia de presiones en un líquido es numéricamente igual al producto de la densidad del líquido, la gravedad y la diferencia de profundidades".

Veamos el caso de dos puntos dentro de un mismo líquido de densidad $\rho_{líq}$ tal como se indica.



En el punto A

$$P_A = P_{atm} + P_{H(A)}$$

$$P_A = P_{atm} + \rho_{líq} \cdot g \cdot h_A$$

En el punto B

$$P_B = P_{atm} + P_{H(B)}$$

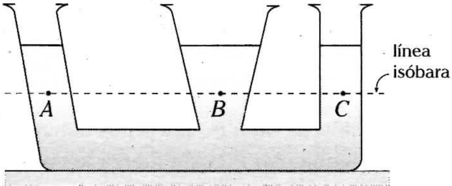
$$P_B = P_{atm} + \rho_{líq} \cdot g \cdot h_B$$

Restando P_B y P_A tenemos

$$\boxed{P_B - P_A = \rho_{líq} \cdot g(h_B - h_A)}$$

Del resultado obtenido se deduce que "todos los puntos de un mismo líquido en reposo y que se encuentran a un mismo nivel soportan la misma presión hidrostática".

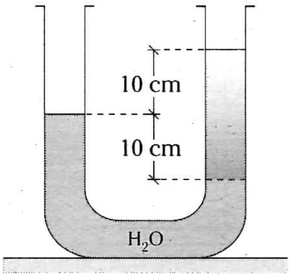
Aplicando a vasos comunicantes, se obtiene



$$\boxed{P_A = P_B = P_C}$$

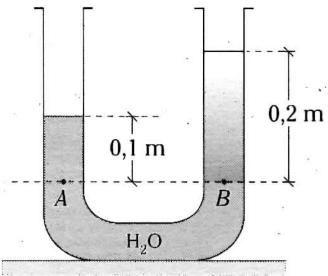
Ejemplo

En el tubo en forma de U se tiene agua y un líquido desconocido. Si el sistema está en equilibrio, determine la densidad del líquido desconocido. $\left(\rho_{H_2O} = 10^3\ \text{kg/m}^3\right)$



Resolución

Se conoce que para un mismo nivel y para un mismo fluido la presión es la misma.



El punto B está en el límite entre los dos fluidos, por lo tanto, pertenece a ambos, luego

$$P_A = P_B \qquad \text{(I)}$$

La presión en A es igual a la presión atmosférica más la presión ejercida por la columna de agua de 0,1 m. La presión en B es igual a la presión atmosférica más la presión ejercida por la columna del líquido desconocido de 0,2 m.

En (I) tenemos

$$\cancel{P_{atm}} + \rho_{H_2O} = \cancel{P_{atm}} + \rho_{líq}$$

$$\rho_{H_2O} \cdot \cancel{g} \cdot h_{H_2O} = \rho_{líq} \cdot \cancel{g} \cdot h_{líq}$$

$$\rho_{líq} = \rho_{H_2O} \cdot \frac{h_{H_2O}}{h_{líq}}$$

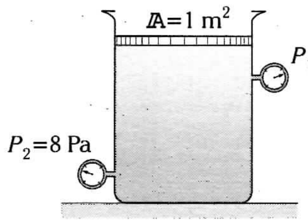
$$\rho_{líq} = 10^3 \cdot \frac{(0,1)}{(0,2)}$$

$$\therefore \quad \rho_{líq} = 500 \text{ kg/m}^3$$

Principio de Pascal

Este principio establece que "la presión que se le ejerce a un líquido o gas es transmitida por este en todas las direcciones con el mismo valor".

- Considere que inicialmente tenemos un cilindro tapado con un pistón, donde los instrumentos indican el valor de las presiones.



- Sobre el pistón cuya área es 1 m^2 se le aplica una fuerza perpendicular de módulo 2 N. Esta fuerza origina una presión adicional P_0.

$$P_0 = \frac{F}{\mathbb{A}}$$

$$P_0 = \frac{2\text{ N}}{1\text{ m}^2}$$

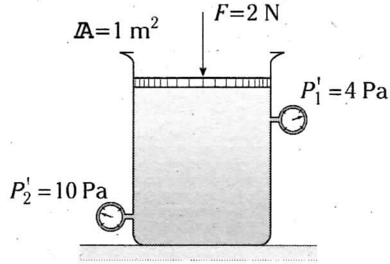
$$P_0 = 2 \text{ Pa}$$

- De acuerdo al principio de Pascal, esta presión adicional (P_0) se transmite en todas las direcciones con igual valor, por lo tanto, las nuevas lecturas de los instrumentos serán

$$P_1' = P_1 + P_0 = 2 \text{ Pa} + 2 \text{ Pa} = 4 \text{ Pa}$$

$$P_2' = P_2 + P_0 = 8 \text{ Pa} + 2 \text{ Pa} = 10 \text{ Pa}$$

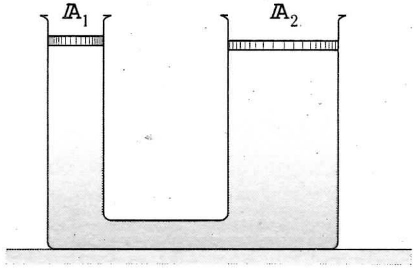
Gráficamente tenemos



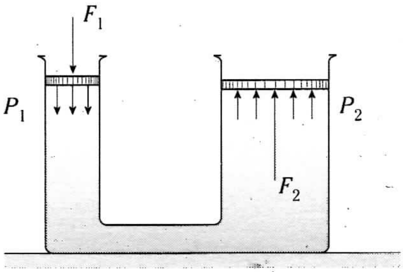
Presión hidráulica

Es una aplicación del principio de pascal.

Considere que tenemos el siguiente sistema en equilibrio donde las áreas de los pistones son $\mathbb{A}_1$ y $\mathbb{A}_2$.



Sobre el pistón de área $\mathbb{A}_1$ hacemos actuar una fuerza perpendicular F_1, esta fuerza le comunica al líquido una presión adicional, la cual se transmite a través del líquido hasta el pistón de área $\mathbb{A}_2$.



Como la presión comunicada es la misma (principio de Pascal), tenemos

$$P_1=P_2$$

$$\frac{F_1}{\mathbb{A}_1}=\frac{F_2}{\mathbb{A}_2}$$

$$\boxed{F_2=\frac{\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1}\cdot F_1}$$

Si $\mathbb{A}_2 > \mathbb{A}_1$, entonces $F_2 > F_1$.

Esto significa que la prensa hidráulica multiplica la fuerza.

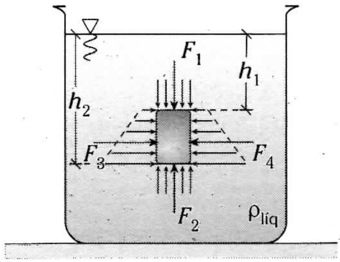
NOTA

Al cociente $\left(\frac{\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_1}\right)$ se le denomina ventaja mecánica.

Acción de un líquido sobre un cuerpo

Muchos cuerpos son elevados fácilmente debajo del agua, mientras que con dificultad fuera de ella. Si sumergimos un corcho en el agua y lo soltamos allí, este emergerá. ¿Cómo se puede explicar este fenómeno?

Primero debemos señalar que todo cuerpo sumergido en un líquido va a estar sometido a la presión que este le ejerce. Además, la presión está relacionada con la fuerza, entonces para examinar a las fuerzas debido a la presión de parte de un líquido, tomaremos por facilidad un cuerpo en forma de paralelepípedo.



Las fuerzas que actúan sobre las caras laterales (F_3 y F_4) se anulan, pero las fuerzas que actúan sobre las caras superior e inferior del cuerpo no se anulan porque no son iguales.

Por lo antes señalado, sobre el cuerpo actúa una fuerza resultante que es la fuerza que ejerce el líquido al cuerpo, esta recibe el nombre de **empuje del líquido (E_L)**.

La fuerza de empuje se evalúa así

$$E_L=F_2-F_1$$

$$E_L=P_2\cdot\mathbb{A}-P_1\cdot\mathbb{A}$$

$$E_L=\rho_{líq}\cdot g\cdot h_2\cdot\mathbb{A}-\rho_{líq}\cdot g\cdot h_1\cdot\mathbb{A}$$

$$E_L=\rho_{líq}\cdot g\cdot\underbrace{\mathbb{A}\cdot(h_2-h_1)}$$

$$\boxed{E_L=\rho_{líq}\cdot g\cdot V_{ps}}$$

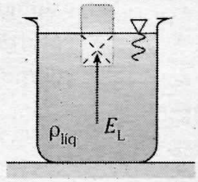
Su unidad: newton (N)

donde

- $\rho_{líq}$: densidad del líquido (kg/m^3)
- V_{ps}: volumen de la parte sumergida (m^3)

Observación

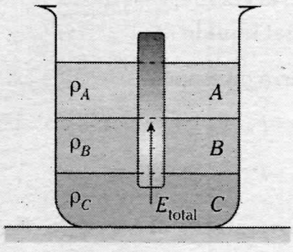
- La fuerza de empuje (E_L) tiene su punto de aplicación en el centro geométrico de la parte sumergida del cuerpo; sea este homogéneo o no y siempre que la densidad del líquido sea constante.



- En la antigüedad, Arquímedes descubrió que el empuje de un líquido es numéricamente igual al peso del líquido desalojado.

$$\boxed{E_L = \text{Peso del líquido desalojado}}$$

- Cuando un cuerpo está sumergido en dos o más fluidos no miscibles (diferente densidad), experimenta la acción de un empuje resultante o total.



$\rho_A < \rho_B < \rho_C$

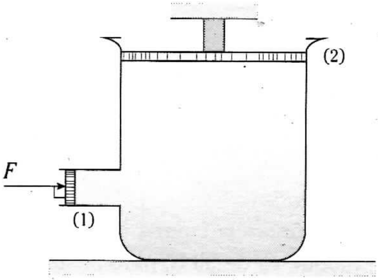
Donde

$$\boxed{E_{total} = E_A + E_B + E_C}$$

- El empuje siempre es perpendicular a las rectas isóbaras.

Ejemplos

1. Sobre el émbolo (1) la fuerza F se incrementa en 6 N. Determine en cuánto se incrementa la fuerza del líquido sobre el émbolo (2). $\left(\frac{A_2}{A_1}=\frac{5}{2}\right)$.



Resolución

El incremento de la fuerza F origina un incremento de presión (ΔP), y de acuerdo al principio de Pascal este incremento de presión se transmite a todos los puntos del fluido con la misma intensidad, luego tenemos

incremento de presión sobre el émbolo (2)	=	incremento de presión sobre el émbolo (1)

$$\Delta P_2=\Delta P_1$$

$$\frac{\Delta F_2}{A_2}=\frac{\Delta F_1}{A_1}$$

$$\Delta F_2=\frac{A_2}{A_1}\cdot\Delta F_1$$

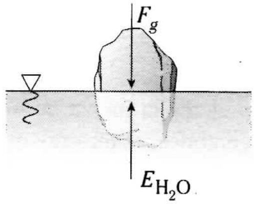
$$\Delta F_2=\left(\frac{5}{2}\right)\cdot 6$$

$\Delta F_2=15$ N incremento de la fuerza del líquido sobre el émbolo (2)

2. Un objeto flota en agua. Si su volumen sumergido representa la quinta parte del volumen total del objeto, calcule su densidad en kg/m^3.

Resolución

Interpretamos gráficamente el enunciado.



Nos piden la densidad del objeto (ρ_C).

Sea V_0 el volumen del cuerpo, entonces el volumen sumergido (V_S) es $\frac{V_0}{5}$.

El cuerpo está flotando, entonces

$$\Sigma F(\uparrow)=\Sigma F(\downarrow)$$

$$E_{H_2O}=F_g$$

$$\rho_{H_2O}\cdot g\cdot V_S=m\cdot g$$

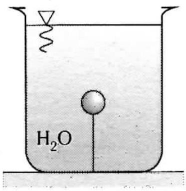
$$\rho_{H_2O}\cdot\cancel{g}\cdot\left(\frac{\cancel{V_0}}{5}\right)=\left(\rho_C\cdot\cancel{V_0}\right)\cancel{g}$$

$$\frac{\rho_{H_2O}}{5}=\rho_C$$

$$\frac{1000\ \text{kg/m}^3}{5}=\rho_C$$

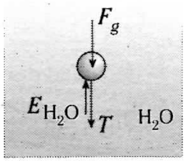
$$\therefore\ \rho_C=200\ \text{kg/m}^3$$

3. Determine el módulo de la fuerza de tensión del hilo que sostiene al globo de 4 litros lleno de aire. $(\rho_{aire}=0{,}5\ \text{g/cm}^3;\ g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

El hilo ejerce la fuerza de tensión sobre el globo, entonces realizamos el DCL del globo.



Como el globo se encuentra en reposo

$$\Sigma F(\downarrow)=\Sigma F(\uparrow)$$

$$T+F_g=E_{H_2O}$$

$$T+mg=\rho_{H_2O}\cdot g\cdot V_S \qquad \text{(I)}$$

- Sea V_0 el volumen del globo, entonces como está totalmente sumergido, tenemos que

  $V_S=V_0=4\ \text{litros}=4000\ \text{cm}^3=4\times10^{-3}\ \text{m}^3$

- El globo contiene aire y su densidad es

  $\rho_{aire}=0{,}5\ \text{g/cm}^3=500\ \text{kg/m}^3$

Reemplazamos en (I)

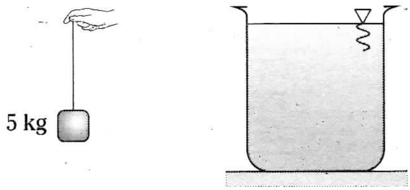
$$T+(\rho_{aire}\cdot V_0)g=\rho_{H_2O}\cdot g\cdot V_0$$

$$T+(500\times4\times10^{-3})\times10=1000(10)(4\times10^{-3})$$

$$T+20=40$$

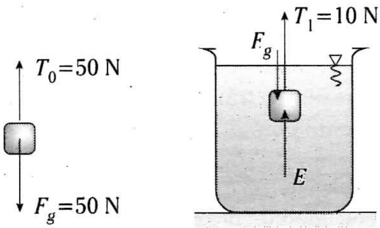
$$\therefore\ T=20\ \text{N}$$

4. Cuando el bloque se sumerge completamente en el agua su peso aparente es 10 N. Determine el volumen del bloque en m^3. $(g=10\ \text{m/s}^2)$



Resolución

La tensión en la cuerda antes de sumergir al bloque es de 50 N, pero al sumergirlo la tensión en la cuerda disminuye hasta 10 N, este es el peso aparente.



Cuando el bloque está sumergido en el agua tenemos

$$\Sigma F(\downarrow)=\Sigma F(\uparrow)$$

$$F_g=E+T_1$$

$$F_g=E+10$$

Como el bloque está totalmente sumergido, este es igual a su volumen total.

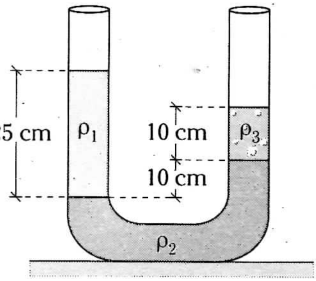
$$50=\rho_{H_2O}\cdot g\cdot V+10$$

$$40=1000(10)V$$

$$\therefore\ V=4\times10^{-3}\ \text{kg/m}^3$$

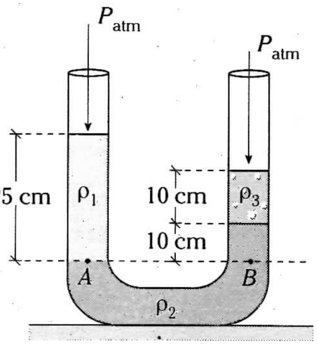
Problema N.º 1

En el tubo en forma de U se tiene tres líquidos de densidades ρ_1, ρ_2 y ρ_3. Si el sistema está en equilibrio, determine la densidad ρ_2.
$(\rho_1=0,6\ \text{g/cm}^3;\ \rho_3=0,3\ \text{g/cm}^3)$



Resolución

Se sabe que para un mismo líquido y a un mismo nivel la presión es la misma.



Luego

$$P_A=P_B$$

$$\cancel{P_{atm}}+P_{\rho_1}=\cancel{P_{atm}}+P_{\rho_3}+P_{\rho_2}$$

$$\rho_1\cdot\cancel{g}(25)=\rho_3\cdot\cancel{g}(10)+\rho_2\cdot\cancel{g}(10)$$

$$25\rho_1=10\rho_3+10\rho_2$$

$$25(0,6)=10(0,3)+10\rho_2$$

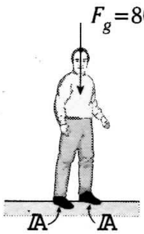
$$\therefore\ \rho_2=1,2\ \text{g/cm}^3$$

Problema N.º 2

Un hombre de 80 kg está de pie. Cada una de las suelas de sus zapatos cubre un área igual a $2\times10^{-3}\ \text{m}^2$. Determine la presión que el hombre ejerce sobre el piso. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.

Resolución

Gráficamente tenemos



Las suelas de sus zapatos cubren un área $\mathbb{A}$ cada una.

$\mathbb{A}=2\times10^{-3}\ \text{m}^2$

La presión que ejerce la persona sobre el piso es

$$P=\frac{F}{\mathbb{A}_{total}}$$

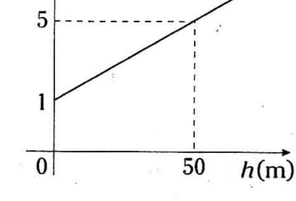
$$P=\frac{F_g}{2\mathbb{A}}=\frac{800\ \text{N}}{2(2\times10^{-3})\ \text{m}^2}$$

$$P=200\times10^3\ \text{Pa}$$

$$\therefore\ P=200\ \text{kPa}$$

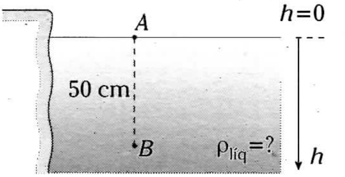
Problema N.º 3

La gráfica presión vs. profundidad corresponde a puntos pertenecientes a un líquido. Determine la densidad del líquido en kg/m^3. $(g=10\ \text{m/s}^2)$.



Resolución

Considere a un líquido contenido en un estanque, luego interpretamos la gráfica (P-h).



La profundidad (h) se mide respecto de la superficie libre del líquido.

- Cuando $h=0$, la presión en la superficie del líquido es 1 atm.

  $P_A=1$ atm

- Cuando $h=50$ m, la presión total es 5 atm.

  $P_B=5$ atm

Pero la presión total en B se evalúa

$$P_B=P_{\text{atm}}+P_{\text{columna del líquido}}$$

$$P_B=P_{\text{atm}}+\rho_{\text{líq}}\cdot g\cdot h_B$$

Reemplazando valores tenemos

$$5\text{ atm}=1\text{ atm}+\rho_{\text{líq}}\cdot g\cdot h_B$$

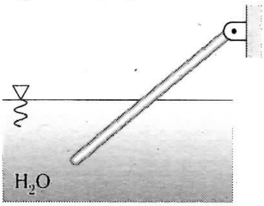
$$4\text{ atm}=\rho_{\text{líq}}\cdot g\cdot h_B$$

$$4\times(10^5\text{ Pa})=\rho_{\text{líq}}(10\text{ m/s}^2)(50\text{ m})$$

$$\therefore\quad \rho_{\text{líq}}=800\text{ kg/m}^3$$

Problema N.° 4

La barra delgada y homogénea permanece en la posición mostrada. Si la mitad de su volumen está sumergida en agua, determine la densidad de la barra. $(g=10\text{ m/s}^2)$.

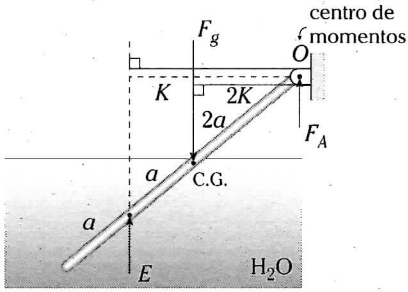


Resolución

Nos piden la densidad de la barra (ρ_b).

Como la barra está en equilibrio, realizamos su diagrama de cuerpo libre (DCL).

En este caso, además de la fuerza de gravedad y la fuerza que ejerce la articulación, actúa la fuerza de empuje por parte del agua.



Como la barra es homogénea su centro de gravedad se ubica en el punto medio.

La fuerza de empuje (E) actúa en el punto medio de la parte sumergida de la barra.

Aplicamos la segunda condición de equilibrio tomando la articulación como centro de momentos, luego

$$\Sigma M_O \circlearrowright = \Sigma M_O \circlearrowleft$$

$$M_O^E = M_O^{F_g}$$

$$E\times(3\cancel{K}) = F_g\times(2\cancel{K})$$

$$3E=2\cdot F_g$$

$$3(\rho_{H_2O}\cdot g\cdot V_S)=2\cdot mg \qquad \text{(I)}$$

Sea V_0 el volumen de la barra, entonces el volumen de la parte sumergida (V_S) es la mitad.

Reemplazamos en (I)

$$3\rho_{H_2O}\cdot \cancel{g}\cdot\left(\frac{\cancel{V_0}}{2}\right)=2\cdot(\rho_b\cdot\cancel{V_0})\cdot\cancel{g}$$

$$\rho_b=\frac{3}{4}\cdot\rho_{H_2O}$$

$$\rho_b=\frac{3}{4}\cdot(1000\text{ kg/m}^3)$$

$$\therefore\quad \rho_b=750\text{ kg/m}^3$$

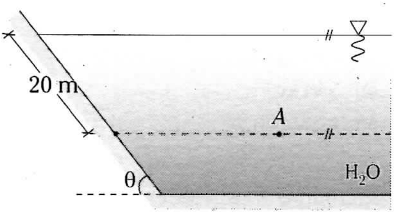
PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Un vaso lleno con agua tiene una masa total de 400 g. Si la presión que le ejerce el vaso a la mesa es de 500 Pa, determine el área de contacto del vaso con la mesa en cm^2.
$(g=10\ m/s^2)$

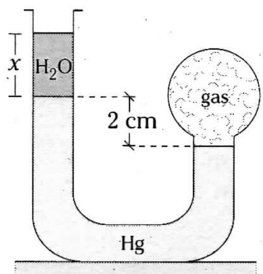
A) 20 B) 40 C) 60
D) 80 E) 120

2. Si la presión en el punto A es 220 kPa, determine el valor del ángulo θ. $(g=10\ m/s^2)$.



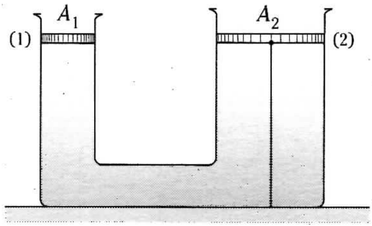
A) 16° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 53°

3. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio y la presión en el gas es 102,76 kPa. Calcule x.
$(\rho_{Hg}=13{,}6\ g/cm^3;\ \rho_{H_2O}=1\ g/cm^3;\ g=10\ m/s^2)$



A) 8 cm B) 12 cm C) 14 cm
D) 16 cm E) 20 cm

4. El sistema está en reposo y la tensión en la cuerda es 120 N. Si se coloca un bloque de 4,5 kg sobre el émbolo (1), determine la tensión final en la cuerda.
$(A_2=4A_1;\ g=10\ m/s^2)$



A) 400 N B) 300 N C) 200 N
D) 100 N E) 600 N

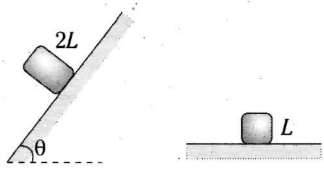
5. Una plataforma de madera de 4,5 m^2 y 30 cm de espesor flota sobre el agua de una laguna. Calcule la cantidad de niños de 45 kg cada uno, que se pueden subir como máximo sobre la plataforma antes que se hunda por completo, si inicialmente la plataforma está con la mitad de su volumen sumergido.

A) 8 B) 12 C) 15
D) 18 E) 21

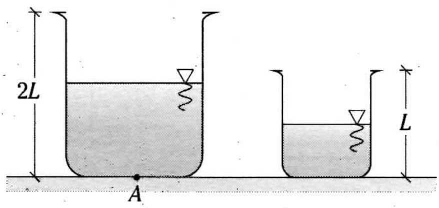
NIVEL INTERMEDIO

6. Se tienen dos bloques cúbicos del mismo material apoyados sobre superficies como se indican. Determine el valor del ángulo θ para que el valor de la presión que ejercen sobre las superficies sean iguales.
$(g=10\ m/s^2)$

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°

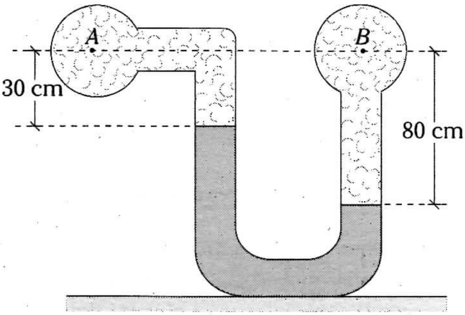


7. Se tienen dos recipientes cúbicos de aristas $2L$ y L, cada uno con la mitad de su volumen lleno con agua. Si todo el agua del recipiente de arista L se llena en el otro recipiente, calcule la variación de la presión en el punto A del piso.
($L=8$ cm; $\rho_{H_2O}=1$ g/cm^3; $g=10$ m/s^2)



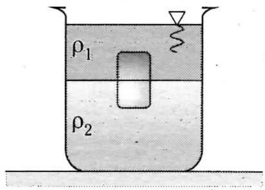
A) 50 Pa B) 100 Pa C) 200 Pa
D) 400 Pa E) 500 Pa

8. Determine la diferencia de presión entre los puntos A y B. ($g=10$ m/s^2).



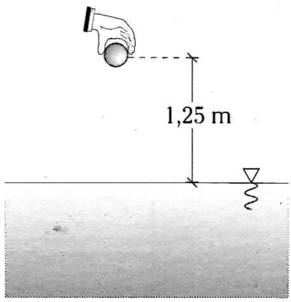
A) 3 kPa B) 4 kPa C) 5 kPa
D) 9 kPa E) 10 kPa

9. El bloque está en reposo con los 3/4 de su volumen sumergido en el líquido de densidad ρ_2. Calcule la densidad del bloque.
($\rho_1=400$ kg/m^3; $\rho_2=600$ kg/m^3; $g=10$ m/s^2)



A) 750 kg/m^3
B) 550 kg/m^3
C) 450 kg/m^3
D) 350 kg/m^3
E) 250 kg/m^3

10. El cuerpo se suelta en la posición mostrada. Determine la profundidad que alcanza el cuerpo respecto a la superficie del agua.
($\rho_{cuerpo}=500$ kg/m^3; $g=10$ m/s^2)



A) 2,5 m B) 5 m C) 7,5 m
D) 10 m E) 12,5 m

Electrostática

Capítulo XVI

OBJETIVOS

- Reconocer y entender la propiedad de la carga eléctrica.
- Comprender algunos fenómenos relacionados con los cuerpos electrizados.
- Conocer las características del campo eléctrico.

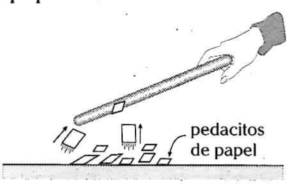
Carga eléctrica

¿Qué sería de nuestra vida sin focos, fluorescentes, plancha eléctrica, licuadora, radio, TV, computadora, etc.?

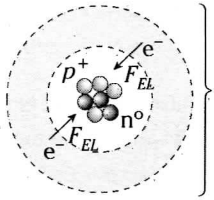
Pues ninguno de estos aparatos se hubiesen inventado si el hombre no hubiese conocido y estudiado la electricidad con los diversos fenómenos en que se manifiesta. Vamos a estudiar en este capítulo las leyes básicas de la electricidad.

Los fenómenos eléctricos se conocen desde la antigüedad, Thales de Mileto (646-546 a.n.e) había comprobado que cuando el ámbar se frota puede atraer a algunos cuerpos de peso ligero. Pero fue en los años 1600 que se empezó a experimentar de manera sistemática con esta.

Si frotamos una barra de vidrio con un paño de seda (puedes frotar tu lapicero en tu cabello, que debe estar limpio), se observa que la barra se ha **electrizado** y es capaz de atraer a los pedacitos de papel.



Para poder explicar la **electrización** de la barra o en general de diversos cuerpos, debemos conocer las características de los entes del micromundo, electrones (e^-) y protones (p^+), estas partículas descubiertas a fines de 1800 e inicios de 1900 son portadoras de la propiedad denominada **carga eléctrica** por la cual se ejercen fuerzas entre sí (fuerzas eléctricas).



Los átomos pueden existir gracias a las fuerzas eléctricas ($\vec{F}_{EL}$) que se ejercen entre sí electrones y protones.

n^o: neutrón

Normalmente en un átomo el número de e^- y p^+ son iguales y el átomo no presenta propiedades eléctricas, es neutro. Pero si un átomo presenta un número de e^- distinto al de p^+, entonces el átomo estará electrizado.

Es decir, un cuerpo (como la barra de vidrio) estará electrizado si en este el número de e^- es distinto al de p^+.

Cuantización de la carga eléctrica

Los experimentos demuestran que hay dos tipos distintos de carga eléctrica, a una de ellas se le denomina carga eléctrica **positiva** y a la otra **negativa**. Para medir la propiedad de carga eléctrica se define la magnitud escalar denominada **cantidad de carga eléctrica** (Q; q) que comúnmente se llama carga eléctrica.

Su unidad en el Sistema Internacional (SI) es el **coulomb (C)**.

Equivalencias:

1 milicoulomb=1 mC $= 10^{-3}$ C
1 microcoulomb=1 μC $= 10^{-6}$ C
1 nanocoulomb=1 ηC $= 10^{-9}$ C

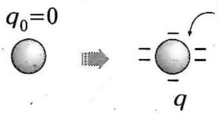
La menor cantidad de carga eléctrica estable que existe en la naturaleza es la del electrón, también conocida como carga fundamental o cuanto de electricidad. Experimentalmente se ha confirmado que la carga del electrón es

$$q_{e^-} = -1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Además

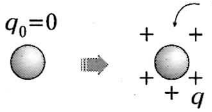
$$q_{p^+} = +1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Un cuerpo, inicialmente neutro, al ganar electrones (ganar carga negativa) se electriza negativamente:



$$q = -10|q_{e^-}|$$

Un cuerpo, inicialmente neutro, al perder electrones (pierde carga negativa que es equivalente a ganar carga positiva) se electriza positivamente:



$$q = +5|q_{e^-}|$$

En general, para un cuerpo electrizado:

$$\boxed{q = \pm n|q_{e^-}|}$$

donde

- (+): al cuerpo le faltan e^- para ser neutro
- (–): al cuerpo le sobran e^- para ser neutro
- n: número de e^- que al cuerpo le faltan o le sobran para que sea neutro

Esta expresión resume el descubrimiento de Robert Millikan, en 1909, que plantea que la carga eléctrica es siempre un múltiplo entero de la carga fundamental.

Consideremos la siguiente situación: un cuerpo electrizado con +5 μC es puesto en contacto con otro, tal que luego la carga del primer cuerpo es –15 μC. Respecto al primer cuerpo, ¿ganó o perdió e^-?

La carga del cuerpo es + al inicio, es decir, le faltan e^- para ser neutro. Al final la carga del cuerpo es –, es decir, le sobran e^- para ser neutro, se ve que ganó e^-. Pero, ¿cuántos e^- ganó?

Primero ganó e^- para neutralizar su carga + y luego, ya neutro, ganó e^- para tener finalmente carga –, así primero ganó –5 μC y luego –15 μC, en total ganó –20 μC.

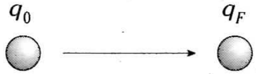
Sea n el número de e^- ganados

número de e^-	carga
1	$-1{,}6 \times 10^{-19}$
n	-20×10^{-6}

$$\rightarrow \quad n = \frac{-20 \times 10^{-6} \times 1}{-1{,}6 \times 10^{-19}}$$

$$\rightarrow \quad n = 125 \times 10^{12}$$

En forma práctica, el número de e^- ganados o perdidos se calcula con la siguiente fórmula:



$$\boxed{n=\frac{q_F-q_0}{q_{e^-}}}$$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA CARGA ELÉCTRICA

En un sistema aislado la carga eléctrica se mantiene constante para todo proceso.

Ejemplo

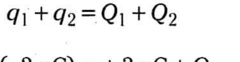
En una situación inicial, tenemos

$q_1=+6\ \mu C$ $\qquad$ $q_2=-2\ \mu C$

Luego las ponemos en contacto

Finalmente sus cantidades de cargas son

$Q_1=+3\ \mu C$ $\qquad$ Q_2



Por conservación de la carga

$$Q_0^{\text{neta}}=Q_F^{\text{neta}}$$

$$q_1+q_2=Q_1+Q_2$$

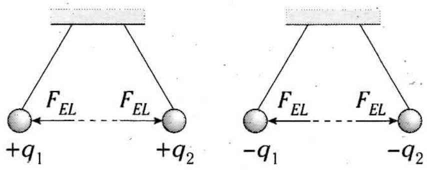
$$+6\ \mu C+(-2\ \mu C)=+3\ \mu C+Q_2$$

$$Q_2=+1\ \mu C$$

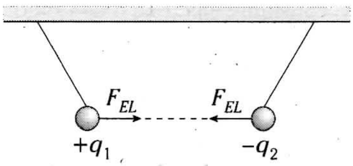
Leyes de la electrostática

LEY CUALITATIVA

- Cuerpos electrizados con cargas de igual signo se repelen.



- Cuerpos electrizados con cargas de signos opuestos se atraen.



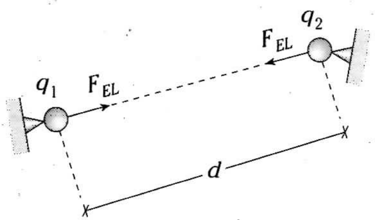
LEY CUANTITATIVA O DE COULOMB

Esta ley nos determina el módulo de la fuerza con que se atraen o repelen dos partículas electrizadas.

> **NOTA**
> A dos cuerpos les llamaremos partículas siempre y cuando sus dimensiones sean pequeñas en comparación con la distancia que los separa.

En el año de 1785, el científico francés Charles Agustín de Coulomb estableció en forma experimental que "el módulo de la fuerza con la cual se atraen o rechazan dos partículas electrizadas, en el vacío, es directamente proporcional al producto de los valores absolutos de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas".

Es decir



$$F_{EL} = K\frac{|q_1||q_2|}{d^2}$$

donde

- K: constante eléctrica o de Coulomb

$$K = 9\times10^9\ \frac{\text{N}\times\text{m}^2}{\text{C}^2}$$

El valor de la fuerza se ve afectado si las partículas son llevadas a un medio dieléctrico, experimentalmente se verifica que disminuye en un factor propio del medio al cual se le denomina constante dieléctrica (ε) y se verifica la siguiente expresión.

$$F_{EL(\text{medio})} = \frac{F_{EL(\text{vacío})}}{\varepsilon_{(\text{medio})}}$$

También se cumple

$$\varepsilon_{(\text{aire})} = \varepsilon_{(\text{vacío})} = 1$$

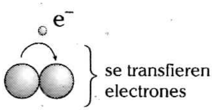
Ejemplo

Se tienen 2 esferitas metálicas idénticas, una de ellas es neutra y la otra está electrizada con $+8\ \mu$C. Si se las pone en contacto durante varios minutos y luego se las separa hasta que la distancia entre ellas es 20 cm, halle, en esta situación final, el módulo de la fuerza eléctrica que se ejercen.

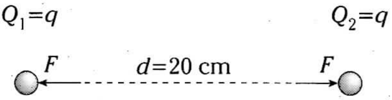
Resolución

Inicialmente

Luego se ponen en contacto



Finalmente, se obtiene



(como las esferas son idénticas al final tienen cargas iguales)

Por el principio de conservación de la carga

$$q_1+q_2=Q_1+Q_2$$

$$8\ \mu\text{C}=2q$$

$$\rightarrow\quad q=4\ \mu\text{C} \qquad \text{(I)}$$

Nos piden F.

$$F = K\frac{|Q_1||Q_2|}{d^2} \qquad \text{(II)}$$

$$d=20\text{ cm} <> 20\times10^{-2}\text{ m}=2\times10^{-1}\text{ m} \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (I) y (III) en (II)

$$F = 9\times10^9 \times \frac{q^2}{\left(2\times10^{-1}\right)^2}$$

$$F = 9\times10^9 \times \frac{\left(4\times10^{-6}\right)^2}{4\times10^{-2}}$$

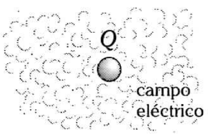
$$F = 9\times10^9 \times \frac{\overset{4}{\cancel{16}}\times10^{-12}}{\underset{1}{\cancel{4}}\times10^{-2}}$$

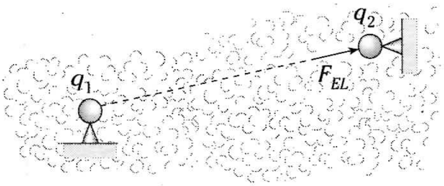
$$F = 36\times10^{-1}\ \text{N}$$

$$\therefore \quad F = 3{,}6\ \text{N}$$

Campo eléctrico

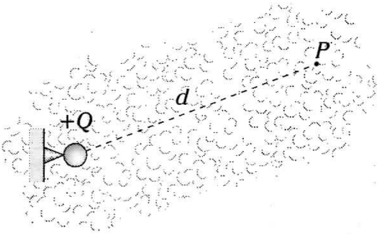
Es el medio transmisor de las fuerzas eléctricas; a todo cuerpo electrizado hay asociado un campo eléctrico.

- 

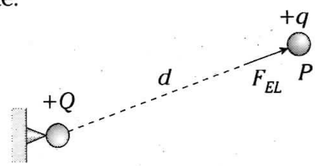
- 

La partícula q_1 le puede ejercer $\vec{F}_{EL}$ a q_2 gracias al campo eléctrico.

Para caracterizar cada punto del campo eléctrico se define la magnitud **vectorial** denominada **intensidad de campo eléctrico** $(\vec{E})$, tal que

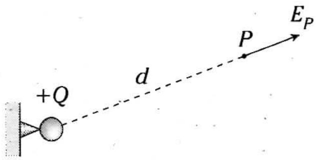


Si colocásemos en P una pequeña partícula electrizada positivamente, también denominada una **carga de prueba**, se tiene gráficamente lo siguiente.



La dirección del vector **intensidad de campo eléctrico en *P*** $(\vec{E}_P)$ está dada por la dirección de la $\vec{F}_{EL}$.

Así



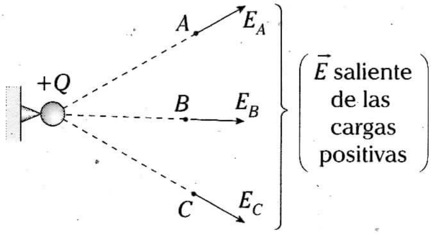
El módulo del vector $\vec{E}_P$ se determina de

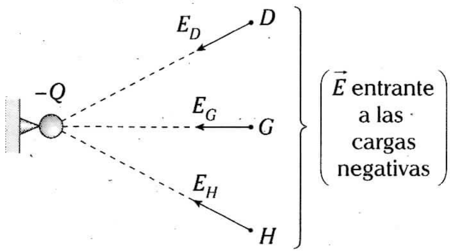
$$\boxed{E_P = \frac{F_{EL}}{q}} \quad \text{Su unidad: } \left(\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)$$

Se verifica que

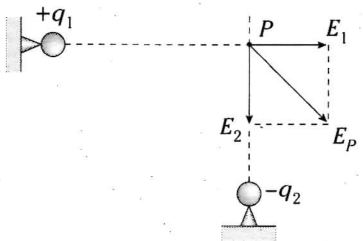
$$\boxed{E_P = K\frac{|Q|}{d^2}}$$

Además

- 

- 

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

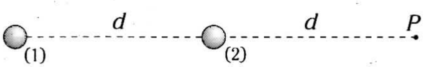


La intensidad de campo eléctrico en P se calcula de la siguiente manera:

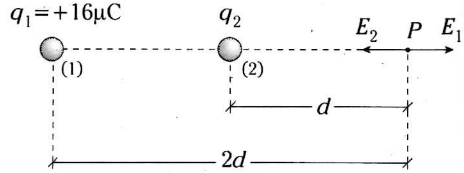
$$\underbrace{\boxed{\vec{E}_P=\vec{E}_1+\vec{E}_2}}_{\text{suma vectorial}}$$

Ejemplo

Se muestran 2 partículas electrizadas fijas. Si en P la intensidad de campo eléctrico es nula, determine la cantidad de carga eléctrica de la partícula (2). Considere que la carga eléctrica de la partícula (1) es $+16\ \mu C$.



Resolución



Nos piden q_2.

Por dato

$$\vec{E}_P=0 \qquad \text{(I)}$$

Entonces $\vec{E}_2$ (la intensidad de campo eléctrico en P debido a q_2) debe ser opuesta a $\vec{E}_1$, observamos en el gráfico que $\vec{E}_2$ es entrante a q_2, por lo cual

$$[q_2 \text{ es negativa}] \qquad \text{(II)}$$

Además de (I)

$$E_1=E_2$$

$$\rightarrow \quad \frac{\cancel{K}|q_1|}{(2d)^2}=\frac{\cancel{K}|q_2|}{d^2}$$

$$\frac{|q_1|}{4\cancel{d^2}}=\frac{|q_2|}{\cancel{d^2}}$$

$$\frac{16\ \mu C}{4}=|q_2|$$

$$|q_2|=4\ \mu C \qquad \text{(III)}$$

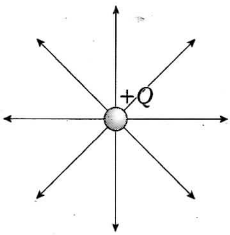
De (II) y (III)

$$q_2=-4\ \mu C$$

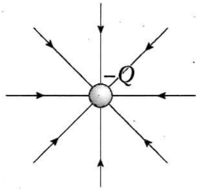
Líneas de fuerza del campo eléctrico

Son líneas imaginarias, se utilizan para representar el campo eléctrico en una región. En cada punto el vector $\vec{E}$ resultante es tangente a estas líneas.

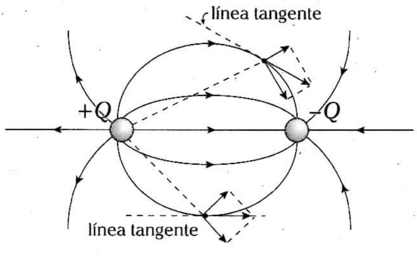
- Para una partícula electrizada positivamente



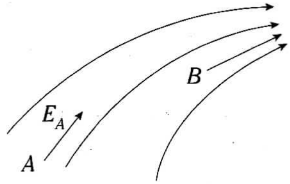
- Para una partícula electrizada negativamente



- Para un dipolo eléctrico



- Las líneas de fuerza del campo eléctrico son salientes de zonas electrizadas en forma positiva y entrantes a zonas electrizadas negativamente; además, donde las líneas están más juntas el vector $\vec{E}$ tiene mayor módulo.

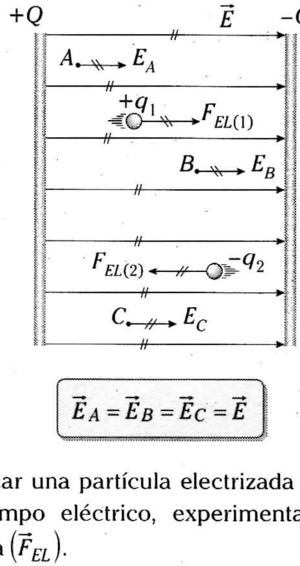


$$\boxed{E_A < E_B}$$

Campo eléctrico homogéneo

En una región se dice que el campo eléctrico es homogéneo si en todos sus puntos el vector intensidad de campo eléctrico es el mismo, es decir, presenta igual dirección y módulo.

Por ejemplo, entre dos placas electrizadas y muy juntas.



$$\boxed{\vec{E}_A = \vec{E}_B = \vec{E}_C = \vec{E}}$$

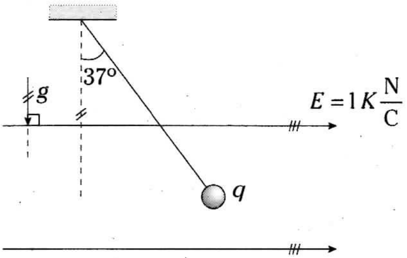
Al colocar una partícula electrizada dentro de este campo eléctrico, experimentará fuerza eléctrica $\left(\vec{F}_{EL}\right)$.

- Si la partícula posee carga (+), la $\vec{F}_{EL}$ y $\vec{E}$ tienen la misma dirección.
- Si la partícula posee carga (–), la $\vec{F}_{EL}$ y $\vec{E}$ tienen direcciones opuestas.
- Además

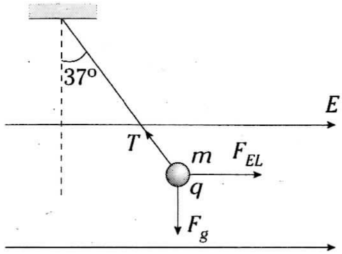
$$\boxed{F_{EL(1)} = |q_1|E} \qquad \boxed{F_{EL(2)} = |q_2|E}$$

Ejemplo

Se muestra a una pequeña esfera electrizada con +3 mC en equilibrio mecánico, unida a una cuerda no conductora, que se halla dentro de un campo eléctrico homogéneo. Determine su masa. $(g=10\text{ m/s}^2)$.



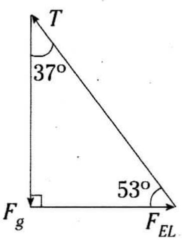
Resolución



Nos piden m: masa de la esfera.

$$F_g=mg \qquad \text{(I)}$$

Del equilibrio de la esfera



$$\frac{F_g}{F_{EL}}=\tan 53°$$

$$F_g=\tan 53°\cdot F_{EL}$$

$$F_g=\frac{4}{3}\cdot|q|E$$

$$F_g=\frac{4}{3}\times 3\times 10^{-3}\times 10^{3}$$

$$F_g=4\text{ N} \qquad \text{(II)}$$

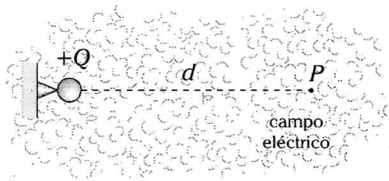
Reemplazamos (II) en (I)

$$4=m\cdot 10$$

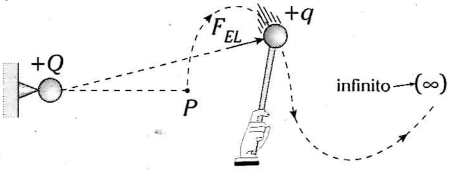
$$\therefore \quad m=0{,}4\text{ kg} <> 400\text{ g}$$

Potencial eléctrico (V)

Es una magnitud física escalar que caracteriza en cada punto al campo eléctrico.



El potencial eléctrico en P (V_P) se define de la siguiente manera:



Si una pequeña partícula electrizada con una mínima cantidad de carga eléctrica positiva (carga de prueba) es desplazada desde P hasta el infinito (∞), tal que $W_{P\to\infty}^{\text{campo}}$ representa el trabajo realizado por el campo eléctrico (mediante $\vec{F}_{EL}$) sobre $+q$ al trasladarlo desde P hasta el ∞.

Luego el potencial eléctrico se evalúa de la siguiente manera:

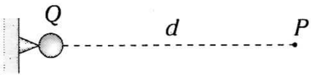
$$\boxed{V_P=\frac{W_{P\to\infty}^{\text{campo}}}{q}}$$

Su unidad:

$$\left(\frac{\text{J}}{\text{C}}\right)<>(\text{V})$$

V: voltio

Se verifica que

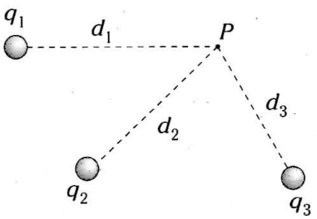


$$\boxed{V_P=\frac{KQ}{d}}$$

donde

- El V_P no es un vector.
- El V_P puede ser positivo o negativo, tiene el mismo signo que Q.

Si se tienen varias partículas electrizadas.



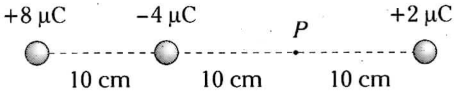
$$\boxed{V_P=V_1+V_2+V_3}$$

$$\boxed{V_P=\frac{Kq_1}{d_1}+\frac{Kq_2}{d_2}+\frac{Kq_3}{d_3}}$$

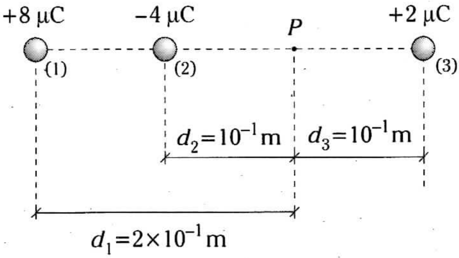
(principio de superposición)

Ejemplo

Se muestran 3 partículas electrizadas, fijas. Halle el potencial eléctrico en P.



Resolución



Nos piden V_P.

$$V_P=V_1+V_2+V_3$$

$$V_P=\frac{Kq_1}{d_1}+\frac{Kq_2}{d_2}+\frac{Kq_3}{d_3}$$

$$V_P=K\left(\frac{q_1}{d_1}+\frac{q_2}{d_2}+\frac{q_3}{d_3}\right)$$

$$V_P=9\times10^9\left(\frac{8\times10^{-6}}{2\times10^{-1}}-\frac{4\times10^{-6}}{10^{-1}}+\frac{2\times10^{-6}}{10^{-1}}\right)$$

$$V_P=9\times10^9\left(\cancel{4\times10^{-5}}-\cancel{4\times10^{-5}}+2\times10^{-5}\right)$$

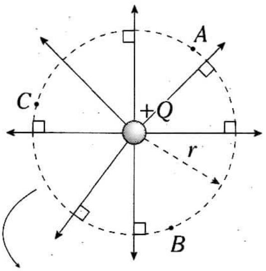
$$V_P=9\times10^9\times2\times10^{-5}$$

$$\therefore\quad V_P=18\times10^4\ \text{V}<>180\ \text{kV}$$

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Son superficies imaginarias tales que todos sus puntos tienen igual potencial eléctrico.

Ejemplo

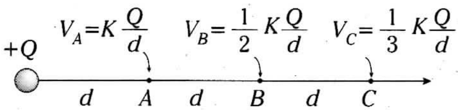


La superficie de una esfera que está centrada en Q, es equipotencial ya que

$$V_A = V_B = V_C = \frac{KQ}{r}$$

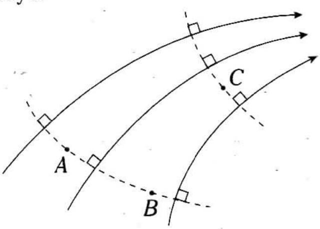
Notamos que las líneas de fuerza son perpendiculares a la superficie equipotencial.

Además



Es decir $V_A > V_B > V_C$

Se concluye que en la dirección en que apunta la línea de fuerza el potencial eléctrico disminuye.



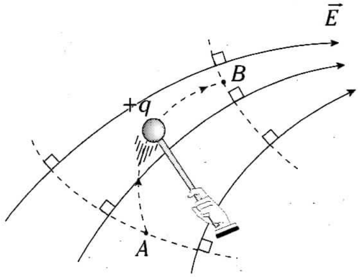
$$\boxed{V_A = V_B}$$

$$\boxed{V_B > V_C}$$

DIFERENCIA DE POTENCIAL ELÉCTRICO

La diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos A y B (V_{AB}) es igual al trabajo realizado por el campo eléctrico al trasladar desde A hasta B una partícula electrizada.

Así tenemos



De donde se deduce lo siguiente:

$$\boxed{V_{AB} = V_A - V_B = \frac{W_{AB}^{\text{campo}}}{q}}$$

$$\boxed{W_{AB}^{\text{campo}} = qV_{AB} = q(V_A - V_B)}$$

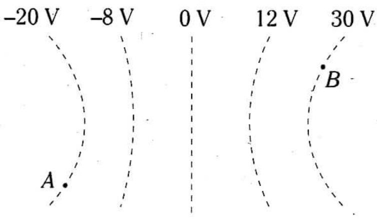
NOTA

Si la partícula es trasladada lentamente, entonces, además del campo eléctrico hay un **agente externo** que realiza trabajo.
Se verifica lo siguiente:

$$\boxed{W_{AB}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}} = -W_{AB}^{\text{campo}}}$$

Ejemplos

1. Si una partícula electrizada con +10 mC es trasladada lentamente, desde A hasta B, halle el trabajo realizado por el agente externo.



Resolución

Nos piden $W_{AB}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}}$.

$$W_{AB}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}}=-W_{AB}^{\text{campo}}=-q\left(V_A-V_B\right)$$

$$W_{AB}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}}=-\left(10\times10^{-3}\right)\left((-20)-30\right)$$

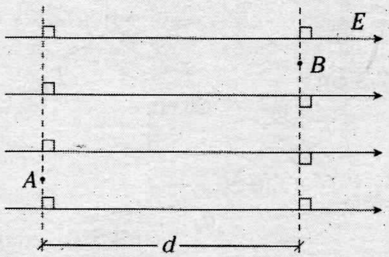
$$W_{AB}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}}=-10^{-2}\times(-50)$$

$$W_{AB}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}}=50\times10^{-2}\ \text{J}$$

$$\therefore\quad W_{AB}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}}=0{,}5\ \text{J}$$

NOTA

En un campo eléctrico homogéneo, se cumple lo siguiente:



$$\boxed{V_{AB}=E\cdot d}$$

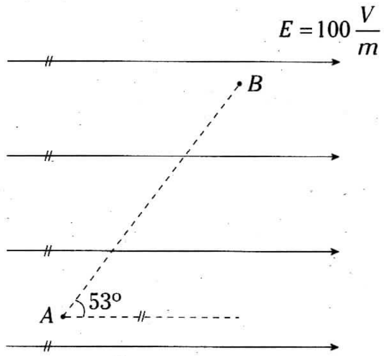
$$\boxed{V_A>V_B}$$

De donde se deduce

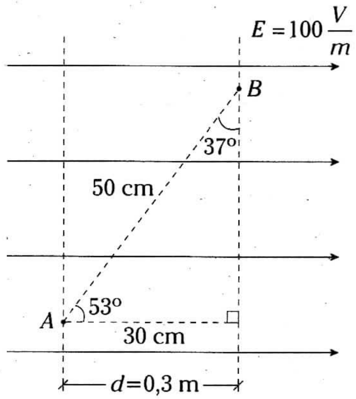
$$E=\frac{V_{AB}}{d}$$

$\vec{E}$ también puede tener como unidad a $\left(\dfrac{V}{m}\right)$.

2. Si el potencial eléctrico en B es 50 V, halle el potencial eléctrico en A. (AB=50 cm).



Resolución



Nos piden V_A.

$$V_{AB}=E\cdot d$$

Notamos que la distancia d es igual a la mínima separación entre las superficies equipotenciales que contiene a los puntos A y B.

$$V_A-V_B=(100)(0{,}3)$$

$$V_A-50=30$$

$$\therefore\quad V_A=80\ \text{V}$$

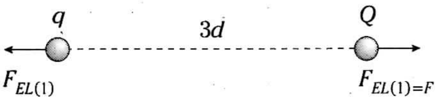
PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

El módulo de la fuerza eléctrica que ejercen entre sí las partículas, electrizadas, mostradas es F. Determine el nuevo módulo de la fuerza eléctrica si la carga de una de las partículas se duplica, la otra se cuadruplica y la distancia que las separa se reduce a la tercera parte.

Resolución

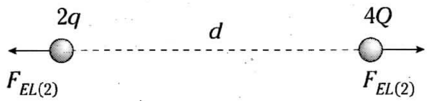
Primera situación



$$\rightarrow \quad F=\frac{KqQ}{(3d)^2}$$

$$\rightarrow \quad F=\frac{KqQ}{9d^2} \qquad \text{(I)}$$

Segunda situación



Nos piden $F_{EL(2)}$.

$$F_{EL(2)}=\frac{K(2q)(4Q)}{d^2}$$

$$\rightarrow \quad F_{EL(2)}=8\frac{KqQ}{d^2} \qquad \text{(II)}$$

De (I)

$$9F=\frac{KqQ}{d^2} \qquad \text{(III)}$$

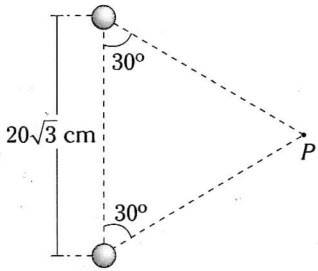
Reemplazamos (III) en (II)

$$F_{EL(2)}=8(9F)$$

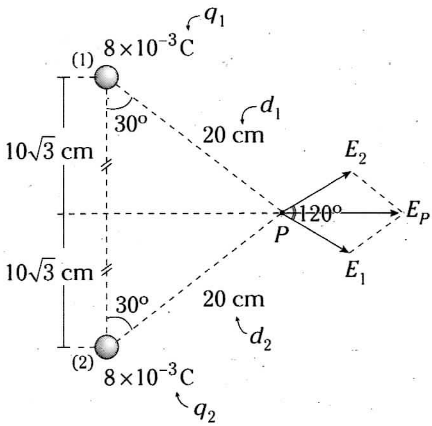
$$\therefore \quad F_{EL(2)}=72F$$

Problema N.º 2

Se muestran a 2 partículas fijas, electrizadas, cada una, con +8 mC. Determine el módulo de la intensidad de campo eléctrico en P.



Resolución



Nos piden E_P.

$$E_P=\sqrt{E_1^2+E_2^2+2E_1\cdot E_2\cdot\cos 120°} \qquad \text{(I)}$$

Como $q_1=q_2$ y $d_1=d_2$

Entonces $E_1=E_2=E=\dfrac{Kq_1}{d_1^2}$

$$\rightarrow \quad E_1=E_2=E=\frac{9\times10^9\times8\times10^{-3}}{\left(2\times10^{-1}\right)^2}$$

$$=18\times10^8\ \frac{N}{C} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

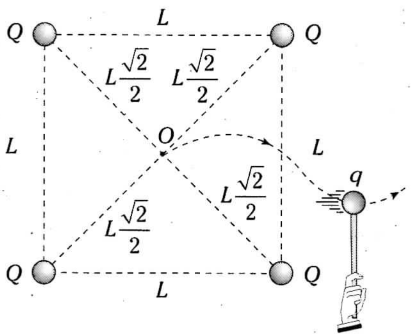
$$E_P = \sqrt{E^2 + E^2 + 2E \cdot E \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$E_P = E = 18 \times 10^8 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\therefore \quad E_P = 18 \times 10^8 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Problema N.º 3

Las partículas mostradas están fijas y todas presentan igual carga eléctrica Q. Determine la cantidad de trabajo realizado por el agente externo, al llevar, lentamente, a una partícula electrizada con q desde O hasta el infinito.



Resolución

Nos piden $W_{O\infty}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}}$.

$$W_{O\infty}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}} = -W_{O\infty}^{\text{campo}}$$

$$= -q\left(V_O - V_\infty\right) \qquad \text{(I)}$$

$$V_O = \frac{KQ}{\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{KQ}{\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{KQ}{\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)} + \frac{KQ}{\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$V_O = 4 \cdot \frac{KQ}{\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)} = 4\frac{KQ}{\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)} = 4\sqrt{2}\frac{KQ}{L}$$

$$\rightarrow \quad V_O = 4\sqrt{2}\frac{KQ}{L} \qquad \text{(II)}$$

$$V_\infty = 0 \qquad \text{(III)}$$

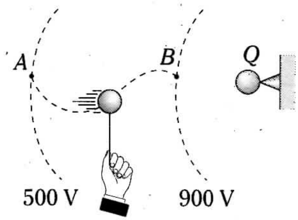
Reemplazamos (II) y (III) en (I)

$$W_{O\infty}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}} = -4\sqrt{2}\frac{KQ}{L}$$

$$\therefore \quad W_{O\infty}^{\substack{\text{agente}\\\text{externo}}} = -4\sqrt{2}\,\frac{KQq}{L}$$

Problema N.º 4

Una partícula electrizada con +6 mC es trasladada desde A hasta B. En dicho tramo, ¿cuánto trabajo realiza el campo eléctrico sobre la partícula?



Resolución

Se sabe que

$$W_{AB}^{\text{campo}} = q\left(V_A - V_B\right) \qquad \text{(I)}$$

Datos

q=+6 mC=6×10^{-3} C

V_A= 500 V

V_B=900 V

Reemplazamos en (I)

$$W_{AB}^{\text{campo}} = 6 \times 10^{-3}(500 - 900)$$

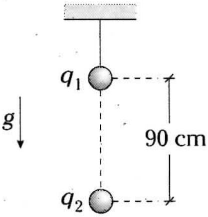
$$W_{AB}^{\text{campo}} = 6 \times 10^{-3}(-400)$$

$$\therefore \quad W_{AB}^{\text{campo}} = -2{,}4 \text{ J}$$

Problema N.º 5

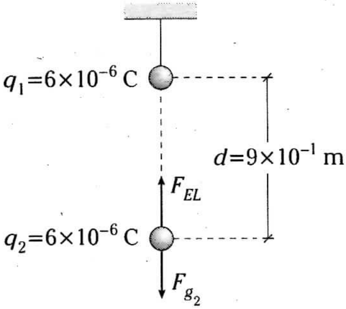
Las esferas electrizadas están en resposo tal como se muestran. Calcule la masa de la esfera inferior.

$\left(g=10\ \text{m/s}^2;\ q_1=+6\ \mu\text{C};\ q_2=-6\ \mu\text{C}\right)$



Resolución

Graficamos las fuerzas que actúan sobre la carga q_2.



Como las esferas están en reposo la fuerza resultante sobre ellas es cero, entonces para q_2 se cumple

$$\Sigma F(\downarrow)=\Sigma F(\uparrow)$$

$$F_{g_2}=F_{EL}$$

$$m_2\cdot g=\frac{K|q_1|\cdot|q_2|}{\mathrm{d}^2}$$

$$m_2(10)=\frac{9\times10^9\left(6\times10^{-6}\right)\left(6\times10^{-6}\right)}{\left(9\times10^{-1}\right)^2}$$

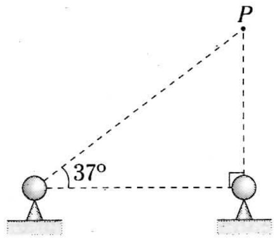
$$m_2=0{,}04\ kg$$

$$\therefore\quad m_2=40\ g$$

Problema N.º 6

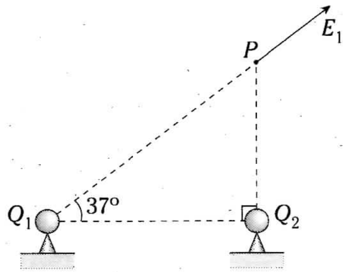
Se muestran dos partículas electrizadas. Si la intensidad de campo eléctrico en el punto P es horizontal, calcule la cantidad de carga Q_2.

$(Q_1=+250\ \mu\text{C})$

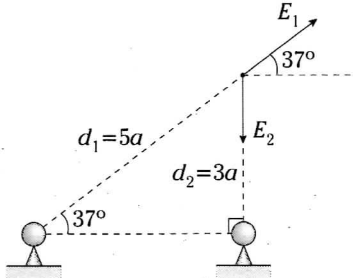


Resolución

Graficamos el vector intensidad de campo eléctrico producido por Q_1 en P.

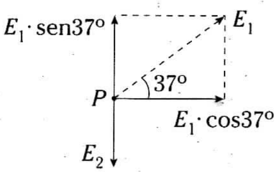


Para que el campo eléctrico en P sea horizontal, el vector intensidad de campo eléctrico originado por la carga Q_2 debe ser vertical hacia abajo tal como se indica.



Por lo señalado se deduce que la cantidad de carga Q_2 es negativa.

Realizamos la descomposición del vector $\vec{E}_1$ en una componente vertical y otra horizontal.



En la vertical la resultante es nula, entonces

$$E_2 = E_1 \cdot \text{sen}37°$$

$$\frac{K|Q_2|}{(d_2)^2} = \frac{K|Q_1|}{(d_1)^2} \cdot \text{sen}\,37°$$

$$\frac{|Q_2|}{(3a)^2} = \frac{250\times10^{-6}}{(5a)^2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)$$

$$|Q_2| = 54\times10^{-6}$$

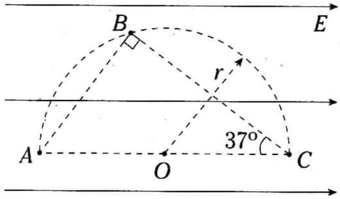
$$|Q_2| = 54\ \mu\text{C}$$

Como la cantidad de carga Q_2 es negativa tenemos

$$Q_2 = -54\ \mu\text{C}$$

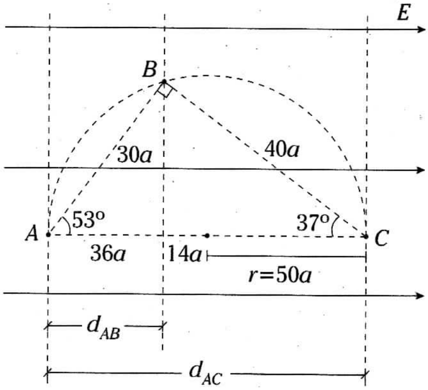
Problema N.º 7

Se muestra un campo eléctrico homogéneo. Si la diferencia de potencial entre los puntos A y B es de 1,8 kV, determine la diferencia de potencial entre A y C.



Resolución

Trazamos las superficies (líneas) equipotenciales que pasan a través de los puntos A, B y C. Asimismo determinamos las mínimas distancias entre estas superficies y para ello hacemos $r=50a$.



Nos piden V_{AC}.

Se conoce

$$V_{AC} = E \cdot d_{AC}$$

$$V_{AC} = E(100a)$$

$$V_{AC} = 100(Ea) \qquad \text{(I)}$$

Por dato tenemos

$$V_{AB} = 1{,}8\ \text{kV}$$

$$E \cdot d_{AB} = 1{,}8\ \text{kV}$$

$$E(36a) = 1{,}8\ \text{kV}$$

$$Ea = 0{,}05\ \text{kV} \qquad \text{(II)}$$

Finalmente, reemplazamos (II) en (I)

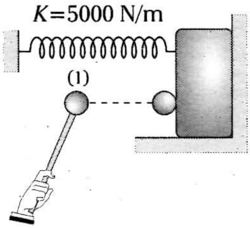
$$V_{AC} = 100(0{,}05\ \text{kV})$$

$$\therefore \quad V_{AC} = 5\ \text{kV}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

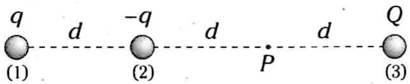
NIVEL BÁSICO

1. Una partícula electrizada con $+4\ \mu C$ está incrustada en un bloque liso que se mantiene en reposo como se muestra. El resorte está comprimido 20 cm. La partícula (1) está electrizada con $+3$ mC y a 20 cm de la partícula incrustada. Halle el módulo de la fuerza que el bloque ejerce a la pared y la distancia que debe moverse la partícula (1) horizontalmente para que la fuerza que la pared ejerce al bloque sea 1300 N.



A) 3000 N; 20 cm
B) 3700 N; 40 cm
C) 2400 N; 40 cm
D) 2700 N; 60 cm
E) 5000 N; 10 cm

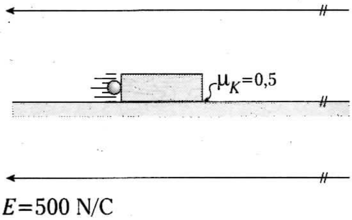
2. Se muestran 3 partículas fijas, electrizadas. Halle la carga eléctrica de la partícula (3) de manera que la intensidad de campo eléctrico en P sea nulo.



A) $\dfrac{3}{4}q$ B) $-\dfrac{3}{4}q$ C) $\dfrac{2}{3}q$

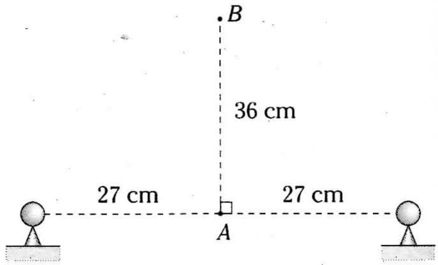
D) $-\dfrac{2}{3}q$ E) $\dfrac{q}{3}$

3. El bloque de madera de 200 g tiene una partícula electrizada con -6 mC y se encuentra resbalando sobre una superficie horizontal, hacia la derecha, dentro de un campo eléctrico homogéneo. Halle el módulo de su aceleración. $(g=10\ m/s^2)$.



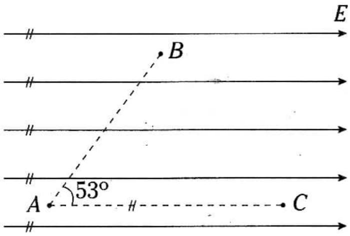
A) $5\ m/s^2$
B) $7,5\ m/s^2$
C) $10\ m/s^2$
D) $20\ m/s^2$
E) $100\ m/s^2$

4. Las partículas que se muestran están electrizadas, ambas, con $+150\ \mu C$. Si se traslada lentamente una partícula electrizada con $+50\ \mu C$ desde A hasta B, halle el trabajo realizado por el campo eléctrico.



A) +100 J B) −100 J C) +200 J
D) −200 J E) −300 J

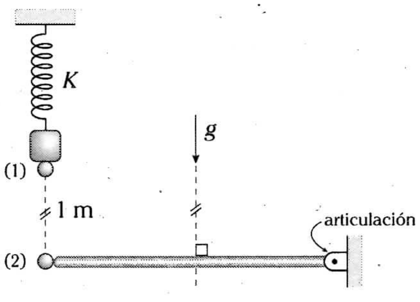
5. En la región mostrada se ha establecido un campo eléctrico homogéneo. Si la diferencia de potencial eléctrico entre A y C es 400 V, halle la diferencia de potencial eléctrico entre C y B. ($AB=AC=100$ cm).



A) +160 V B) −160 V C) 240 V
D) −240 V E) −400 V

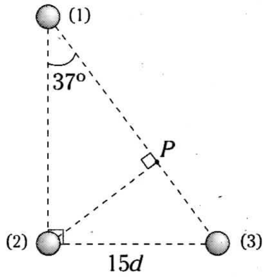
NIVEL INTERMEDIO

6. El sistema mostrado se encuentra en equilibrio. La partícula (1), de masa despreciable, está incrustada en un bloque de madera de 25 g. La partícula (2), de masa despreciable, electrizada con +1 μC, está incrustada en el extremo de una barra de plástico, homogénea, de 450 g. Halle la carga eléctrica de la partícula (1). ($g=10$ m/s^2).



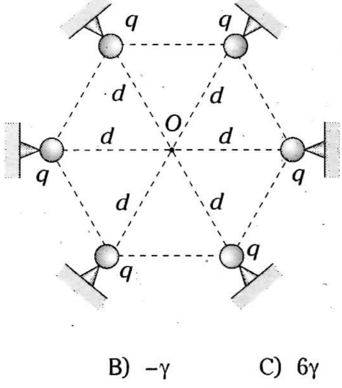
A) 0,25 mC B) −0,25 mC C) 0,5 mC
D) −0,5 mC E) 0,75 mC

7. Las partículas (1), (2) y (3) están electrizadas con $+256q$, $+288q$ y $+81q$, respectivamente. Halle el módulo de la intensidad de campo eléctrico en P. (K: constante de Coulomb).



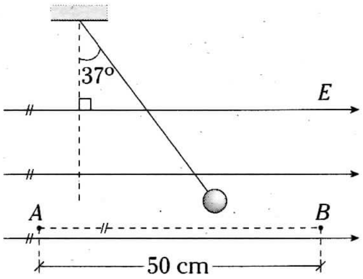
A) $K\dfrac{q}{d^2}$ B) $\dfrac{2Kq}{d^2}$ C) $\dfrac{3Kq}{d^2}$
D) $\dfrac{2}{3}\dfrac{Kq}{d^2}$ E) $\dfrac{3}{2}\dfrac{Kq}{d^2}$

8. Se muestran 6 partículas electrizadas con igual cantidad de carga, ubicadas en los vértices de un hexágono regular. Determine la cantidad de trabajo que se debe realizar para trasladar lentamente una partícula electrizada con $-q$, desde O hasta un lugar muy alejado de este sistema de partículas. ($\gamma=Kq^2/d$)



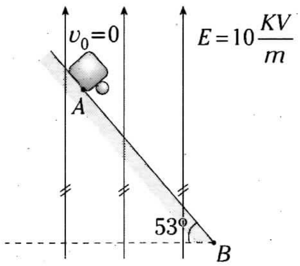
A) γ B) −γ C) 6γ
D) −6γ E) 12γ

9. La partícula de 40 g, electrizada con +0,5 mC, se mantiene en reposo dentro de un campo eléctrico homogéneo, suspendida de un hilo aislante como se muestra. Determine la diferencia de potencial eléctrico entre A y B. (g=10 m/s^2)



A) 100 V B) 200 V C) 300 V
D) 400 V E) 500 V

10. El bloque liso, de madera, lleva incrustada, una partícula de masa despreciable, electrizada con +6 mC. El bloque es soltado en A y pasa por B con 20 J de energía cinética. Halle la masa del bloque si se sabe que se mueve dentro de un campo eléctrico homogéneo. (AB=1,25 m; g=10 m/s^2)



A) 1 kg B) 2 kg C) 4 kg
D) 6 kg E) 8 kg

Electrodinámica

Capítulo XVII

OBJETIVOS

- Entender qué es la corriente eléctrica.
- Analizar los fenómenos relacionados con los portadores de carga eléctrica en movimiento.

Corriente eléctrica

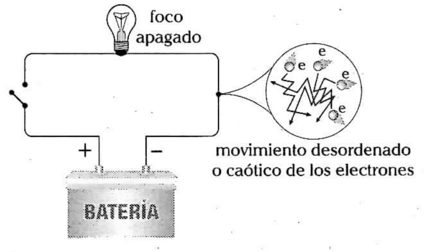
Es un fenómeno que se da a nivel microscópico y se puede manifestar en los sólidos, líquidos y gases bajo la influencia de ciertos factores entre los cuales no puede faltar una diferencia de potencial eléctrico, la cual se puede establecer mediante una batería, pila o alternador.

¿Qué es la corriente eléctrica?

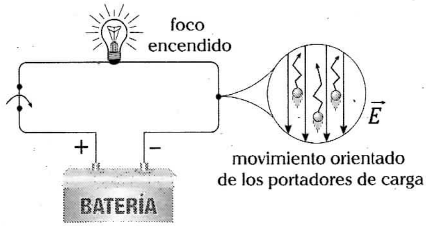
Es el movimiento orientado de portadores de carga eléctrica dentro de un cuerpo por influencia de un campo eléctrico externo.

Veamos el caso de la conexión de un foco a una batería mediante un alambre de cobre.

- Cuando el interruptor está abierto, en el interior del conductor de cobre, que es un cuerpo metálico, los electrones libres se mueven en diversas direcciones como se esquematiza a continuación.



- Al cerrar el interruptor, el foco se enciende y en el interior del conductor se establece un campo eléctrico debido a la diferencia de potencial eléctrico establecido por la batería. El campo eléctrico arrastra a los electrones libres originando una tendencia a desplazarse en una misma dirección como se indica.



Como en el interior del conductor se establece un movimiento orientado de portadores de carga, decimos que se ha establecido una corriente eléctrica.

¿Cómo medimos la corriente eléctrica?

Primero debemos tener presente que un foco, un televisor o un motor eléctrico necesitan de la corriente eléctrica para funcionar; sin embargo, cada uno de ellos requiere una cantidad diferente de corriente, por ello, es necesario medir la corriente eléctrica.

Para medir la corriente eléctrica empleamos una magnitud escalar denominada **intensidad de corriente eléctrica (*I*)**, la cual nos expresa la rapidez con que fluye la carga eléctrica a través de la sección recta de un conductor.

Si la corriente eléctrica es continua, se evalúa de la siguiente forma:

$$\boxed{I=\frac{|Q|}{\Delta t}}$$

Su unidad: amperio (A)

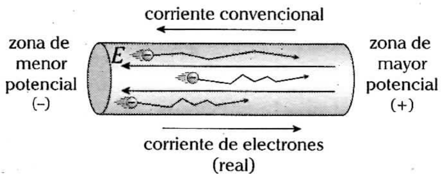
donde

- $|Q|$: valor de la cantidad de carga neta (C)
- Δt: intervalo de tiempo (s)

$$1 \text{ amperio} = 1 \text{ A} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ segundo}}$$

Sentido de la corriente eléctrica

Cuando se descubre el fenómeno de la corriente eléctrica, los hombres de ciencia consideraron que esta se debe al movimiento orientado de portadores de carga positiva y que fluye de la zona de mayor potencial eléctrica a la de menor potencial. Más adelante descubrieron que en los conductores la corriente eléctrica es en realidad un flujo de electrones libres, entonces acordaron (convención) mantener el sentido de la corriente, es decir, que es un movimiento de portadores de cargas positivas.



A la corriente eléctrica que se considera constituida por portadores de cargas positivas, se le denomina **corriente convencional**.

Vamos a trabajar en adelante con la corriente convencional, es decir, la corriente que fluye de la zona de mayor potencial eléctrico a la de menor potencial eléctrico.

Ejemplo

En un conductor circulan 5×10^{13} electrones, a través de una sección recta durante 4×10^{-3} s. Determine la intensidad de corriente, en A.

Resolución

La intensidad de corriente eléctrica se evalúa de la siguiente forma:

$$I=\frac{|Q|}{\Delta t} \qquad \text{(I)}$$

Además, para calcular la cantidad de carga usamos

$$|Q|=|n\cdot q_{e^-}|$$

$$|Q|=|(5\times10^{13})(-1,6\times10^{-19})|$$

$$|Q|=8\times10^{-6} \text{ C}$$

Reemplazamos en (I)

$$I=\frac{8\times10^{-6}}{4\times10^{-3}}$$

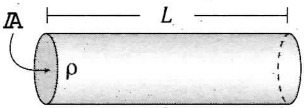
$$\therefore \quad I=2\times10^{-3} \text{ A}$$

Resistencia eléctrica

Nos expresa el grado de oposición que ofrece todo cuerpo a que se establezca en ellos la corriente eléctrica.

Cuando en un conductor se origina la corriente eléctrica, los portadores de carga no se mueven en trayectorias continuas o suaves, las trayectorias son desviadas por la presencia de impurezas o vacíos, es decir, los portadores de carga encuentran oposición durante su movimiento; esta es una característica fundamental para cada material y se le denomina resistividad eléctrica (ρ).

Fue Poulliet, físico francés, quien planteó el cálculo de la resistencia eléctrica (R) para los metales sólidos.

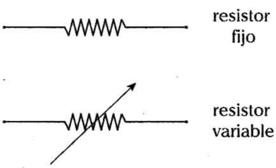


$$\boxed{R=\rho\cdot\frac{L}{\mathbb{A}}}$$ Su unidad: ohmio (Ω)

donde

- ρ: resistividad eléctrica (Ω·m)
- L: longitud del conductor (m)
- $\mathbb{A}$: área de la sección transversal del conductor (m^2)

Todo cuerpo con determinada resistencia eléctrica se denomina **resistor** y los símbolos a usar para representarlos son:

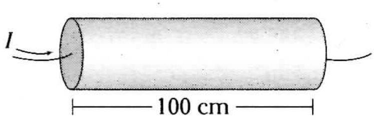


Un ejemplo de un resistor variable es el control de volumen de un equipo de sonido, a este también se le denomina potenciómetro.

Ejemplo

Se muestra un conductor cilíndrico de tungsteno por el cual circula corriente eléctrica. Si su sección transversal tiene un área de 0,5 cm^2, determine su resistencia eléctrica.

$(\rho_{\text{tungsteno}}=5{,}6\times10^{-8}\ \Omega\cdot m)$



Resolución

La resistencia eléctrica de un conductor se evalúa de esta forma

$$R=\rho\cdot\frac{L}{\mathbb{A}} \qquad \text{(I)}$$

Para nuestro caso tenemos

$L=100\ cm=1\ m$

$\mathbb{A}=0{,}5\ cm^2=5\times10^{-5}\ m^2$

Reemplazamos en (I)

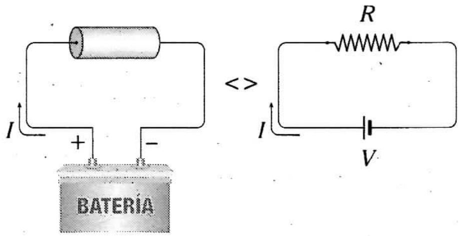
$$R=5{,}6\times10^{-8}\times\frac{1}{5\times10^{-5}}$$

$$R=1{,}12\times10^{-3}\ \Omega$$

$$\therefore\quad R=1{,}12\ m\Omega$$

Ley de Ohm

Establece que "en un conductor, la diferencia de potencial eléctrico (voltaje) es directamente proporcional a la intensidad de corriente que se establece".



$$\frac{V}{I}=\text{constante}$$

La constante de proporcionalidad es la resistencia eléctrica (R).

$$\boxed{\frac{V}{I}=R}$$

De donde

$$\boxed{V=IR}$$

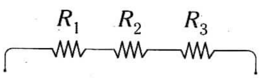
Conexión de resistores

Acoplar resistores obedece a muchas necesidades, tales como dividir corrientes, regular voltajes, estabilizar circuitos, entre otros. Lo que se busca con la conexión de resistores es darle mayor utilidad a la energía eléctrica.

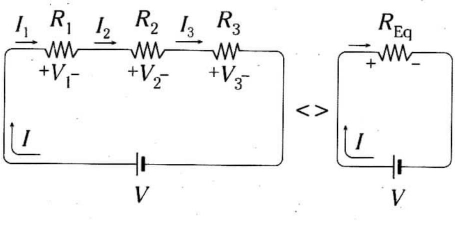
Entre las conexiones comunes tenemos las siguientes:

Conexión en serie

Dos o más resistores están conectados en serie cuando se acoplan uno a continuación del otro.



Estos resistores se pueden reemplazar por un solo resistor al cual denominamos resistor equivalente (R_{Eq}), veamos



Características

- La intensidad de corriente eléctrica a través de todos los resistores es la misma.

$$\boxed{I=I_1=I_2=I_3}$$

- El voltaje de la fuente es igual a la suma de los voltajes de cada resistor.

$$\boxed{V=V_1+V_2+V_3}$$

- Resistor de resistencia equivalente (R_{Eq}).

$$V=I\cdot R_{Eq}$$

Se sabe que

$$V=V_1+V_2+V_3$$

$$\cancel{I}\cdot R_{Eq}=\cancel{I_1}\cdot R_1+\cancel{I_2}\cdot R_2+\cancel{I_3}\cdot R_3$$

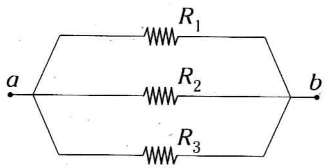
$$\boxed{R_{Eq}=R_1+R_2+R_3}$$

En general

$$\boxed{R_{Eq}=R_1+R_2+R_3+...+R_n}$$ Para n resistores

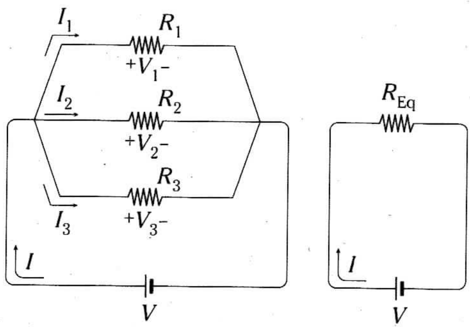
Conexión en paralelo

Dos o más resistores están conectados en paralelo cuando tienen terminales comunes.



a y b terminales comunes

Estos resistores se pueden reemplazar por un solo resistor al cual denominamos equivalente (R_{Eq}).



Características

- La intensidad de corriente eléctrica (I) es igual a la suma de las intensidades de corriente eléctrica en cada resistor.

$$\boxed{I=I_1+I_2+I_3}$$

- El voltaje de la fuente es igual al voltaje en cada resistor.

$$\boxed{V=V_1=V_2=V_3}$$

- Resistor de resistencia eléctrica equivalente (R_{Eq}).

$$V=I\cdot R_{\text{Eq}}$$

$$I=\frac{V}{R_{\text{Eq}}}$$

Se sabe que

$$I=I_1+I_2+I_3$$

$$\frac{\cancel{V}}{R_{\text{Eq}}}=\frac{\cancel{V_1}}{R_1}+\frac{\cancel{V_2}}{R_2}+\frac{\cancel{V_3}}{R_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{Eq}}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

En general

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{Eq}}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+...+\frac{1}{R_n}}$$

OBSERVACIÓN

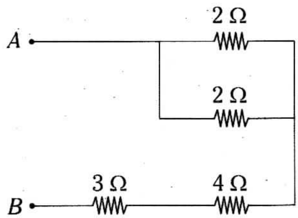
Para dos resistores tenemos:

$$\frac{1}{R_{\text{Eq}}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

$$\boxed{R_{\text{Eq}}=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}}$$

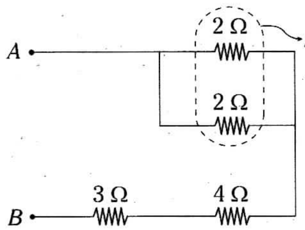
Ejemplo

Para el sistema mostrado, determine la resistencia equivalente entre los puntos A y B.



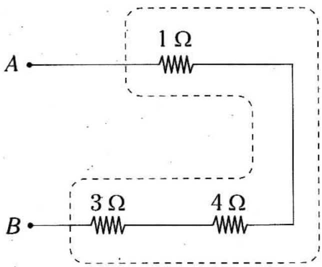
Resolución

Los resistores de 2 Ω están conectados en paralelo.



$$R_{\text{Eq}}=\frac{2\times 2}{2+2}=1\ \Omega$$

Luego



Los resistores están en serie, entonces

$$R_{\text{Eq}(AB)}=1\ \Omega+4\ \Omega+3\ \Omega$$

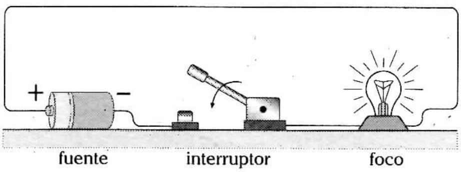
$$\therefore\quad R_{\text{Eq}(AB)}=8\ \Omega$$

Circuitos eléctricos

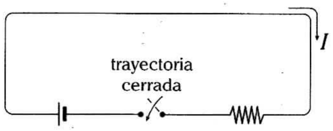
En el término circuito se encuentra implícita la idea de que existe una trayectoria cerrada que les permite a los portadores de carga eléctrica desplazarse a través de los diferentes componentes de modo continuo.

Un circuito eléctrico está conformado por diversos componentes, entre los cuales tenemos baterías, resistores, interruptores, entre otros.

En el análisis de circuitos se hace uso de dos reglas conocidas como de Kirchoff, las cuales surgen de las leyes de conservación de la carga y de la energía.



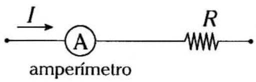
Representación gráfica del circuito anterior



Instrumentos de medición eléctrica

Amperímetro

Se utiliza para registrar la intensidad de corriente que pasa por algún tramo de un circuito eléctrico. Se conecta en serie con los elementos eléctricos en pleno funcionamiento y normalmente presenta una resistencia interna muy pequeña en comparación con la resistencia de los elementos del circuito.

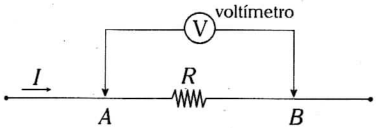


Un amperímetro se considera **ideal** cuando despreciamos su resistencia interna, de tal modo que se comporta como un simple alambre equipotencial.

Voltímetro

Es un instrumento que mide la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un circuito. Tiene una resistencia interna de gran valor en comparación con los elementos del circuito.

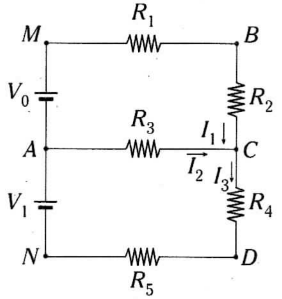
Si buscamos medir la diferencia de potencial eléctrico de un componente que pertenece a un circuito, el voltímetro se conectará en paralelo con este.



Un voltímetro se considera **ideal** cuando asumimos que su resistencia interna es muy grande, de tal manera que impide el paso de la corriente eléctrica a través de él, de esta manera se comporta como si fuese un circuito abierto.

Reglas de Kirchoff

Antes de señalar las reglas consideremos el siguiente circuito.



En todo circuito eléctrico identificamos lo siguiente:

Nodo

Es el punto de unión de dos o más tramos activos en un circuito.

En nuestro caso son nodos los puntos A, B, C, M y N.

Malla

Es un circuito eléctrico cerrado (recorrido cerrado).

En el circuito eléctrico anterior, una malla eléctrica es: $AMBCA$.

Considerando los conceptos anteriores enunciamos las reglas de Kirchoff:

- En todo nodo eléctrico se cumple la conservación de la carga eléctrica y debido a ello la suma de las intensidades de corriente que llegan al nodo es igual a la suma de las intensidades de corriente que salen.

$$\boxed{\sum I_{\text{llegan}} = \sum I_{\text{salen}}}$$ 1.ª regla de Kirchoff

En el nodo C del circuito tenemos

$$I_1 + I_2 = I_3$$

- En toda malla eléctrica se verifica la conservación de la energía eléctrica y debido a ello la suma de voltajes en la malla es igual a cero.

$$\boxed{\sum V_{\text{malla}} = 0}$$ 2.ª regla de Kirchoff

En la malla $AMBCA$ tenemos

$$V_{AM} + V_{MB} + V_{BC} + V_{CA} = 0$$

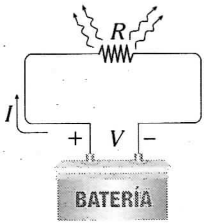
OBSERVACIÓN

En la malla, los voltajes son positivos si vamos del menor al mayor potencial eléctrico, y los voltajes son negativos si vamos del mayor al menor potencial eléctrico.

POTENCIA ELÉCTRICA

Es aquella magnitud escalar que mide la rapidez con que una máquina o dispositivo transforma y/o consume la energía eléctrica.

Veamos el siguiente circuito.



La potencia que entrega la fuente se evalúa.

$$\boxed{P = V \cdot I}$$

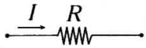
Expresión general de la potencia eléctrica.

La unidad de la potencia eléctrica es el watt o vatio (W).

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ voltio} \times 1 \text{ amperio}$$

Caso particular

Para un resistor eléctrico tenemos



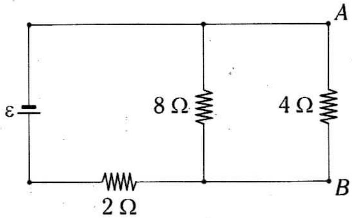
Donde $V = IR$

Reemplazando en la expresión de la potencia tenemos

$$\boxed{P = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}}$$

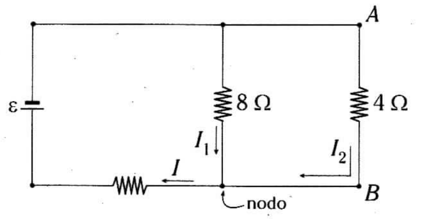
Ejemplos

1. En el circuito eléctrico mostrado, la diferencia de potencial entre A y B es 16 V. Determine la intensidad de corriente que pasa por el resistor de 2 Ω.



Resolución

Sea I la intensidad de corriente que pasa por el resistor de 2 Ω.



En el nodo inferior tenemos

$I = I_1 + I_2$ (I) (1.ª regla de Kirchoff)

- En el resistor de 4 Ω.

  $V_{AB} = I_2 \cdot R$

  $16 = I_2 \cdot (4)$

  $I_2 = 4\text{ A}$

- El resistor de 8 Ω está sometido a la misma diferencia de potencial entre A y B, luego

  $V_{AB} = I_1 \cdot r$

  $16 = I_1 \cdot (8)$

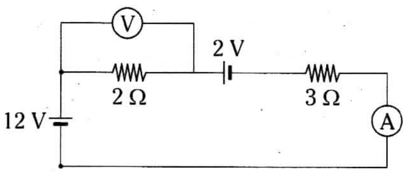
  $I_1 = 2\text{ A}$

Finalmente, reemplazamos en (I)

$I = 2\text{ A} + 4\text{ A}$

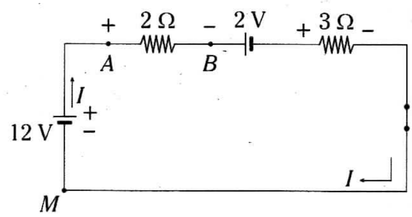
$\therefore\ I = 6\text{ A}$

2. En el circuito mostrado, determine las lecturas de los instrumentos ideales.



Resolución

En el circuito eléctrico tenemos dos fuentes y la que define el sentido de la corriente es la fuente de 12 V.



- El amperímetro ideal mide la intensidad de corriente I.

  Aplicamos la 2.ª regla de Kirchoff en el circuito.

  $$\sum V_{\text{malla}} = 0$$

  Iniciamos en M en sentido horario

  $12 - 2(I) - 2 - 3(I) = 0$

  $10 - 5I = 0$

  $\therefore\ I = 2\text{ A}$

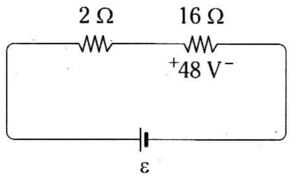
- La lectura del voltímetro es la diferencia de potencial entre A y B.

  $V_{AB} = I \cdot R_{AB}$

  $V_{AB} = 2(2)$

  $\therefore\ V_{AB} = 4\text{ V}$

3. En el circuito, determine la potencia disipada por el resistor de 2 Ω.



Resolución

- En el resistor de 16 Ω tenemos

  $V = I \cdot R \ \rightarrow\ 48 = I \cdot (16) \ \rightarrow\ I = 3\text{ A}$

- Los resistores de 2 Ω y 16 Ω están en serie, entonces la intensidad de corriente a través de ellos es la misma.

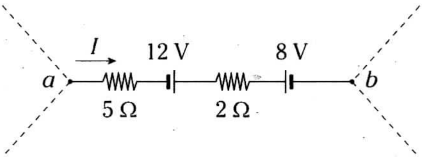
  Para el resistor de 2 Ω tenemos

  $P_{2\,\Omega} = I^2 \cdot r$

  $P_{2\,\Omega} = (3)^2 \cdot (2)$

  $\therefore\ P_{2\,\Omega} = 18\text{ W}$

4. Se muestra un ramal eléctrico que es parte de un circuito complejo en el que los potenciales eléctricos en los nodos a y b son 42 V y 25 V, respectivamente. Determine la intensidad de corriente que fluye por el ramal.



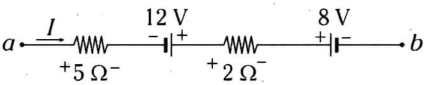
Resolución

Por dato tenemos

$V_a = 42$ V

$V_b = 25$ V

La corriente eléctrica fluye de a hacia b.



Iniciamos el recorrido del ramal de a hacia b y luego tenemos

$$V_a - 5I + 12 - 2I - 8 = V_b$$

Cuando vamos de mayor a menor potencial colocamos el signo negativo, pero cuando vamos de menor a mayor potencial colocamos el signo positivo.

Reemplazamos valores

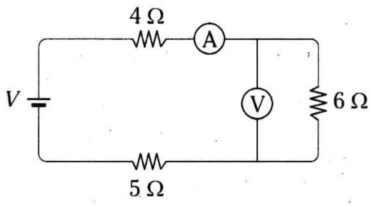
$$42 - 5I + 12 - 2I - 8 = 25$$

$$46 - 7I = 25$$

$$7I = 21$$

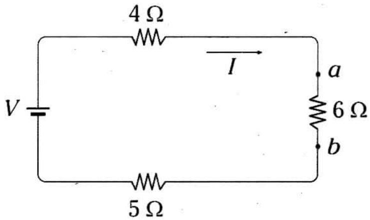
$$\therefore \; I = 3 \text{ A}$$

5. Si la lectura del amperímetro es 3 A, ¿cuánto indica el voltímetro, y cuánto es la potencia entregada por la fuente?



Resolución

Consideramos que los instrumentos son ideales. Si retiramos los instrumentos tenemos el siguiente circuito:



- El amperímetro nos indicará el valor de la intensidad de corriente I, y el voltímetro la diferencia de potencial entre a y b, entonces por condición del ejercicio tenemos

  $I = 3$ A

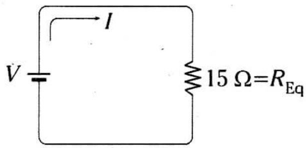
  El voltímetro indica

  $V = V_{ab}$

  $V = I \cdot R_{ab} \;\rightarrow\; V = 3 \cdot (6)$

  $\therefore \; V = 18$ V

- La potencia que entrega la fuente lo absorven los resistores. Reduciendo el circuito tenemos



$$P_{\text{fuente}} = P_{R_{\text{Eq}}}$$

$$P_{\text{fuente}} = I^2 \cdot R_{\text{Eq}}$$

$$P_{\text{fuente}} = (3)^2 \cdot (15)$$

$$\therefore \; P_{\text{fuente}} = 135 \text{ W}$$

Problema N.° 1

Un conductor cilíndrico de latón de 4 m de longitud tiene una resistencia eléctrica de 7 mΩ. Determine el área de su sección transversal. $(\rho_{\text{latón}} = 7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})$

Resolución

Se sabe que la resistencia eléctrica de un conductor de sección recta uniforme se evalúa.

$$R = \rho \cdot \frac{L}{A} \qquad \text{(I)}$$

Nos piden determinar la sección recta (A) del conductor.

Tenemos como dato la resistencia eléctrica.

$$R = 7\ \text{m}\Omega = 7 \times 10^{-3}\ \Omega$$

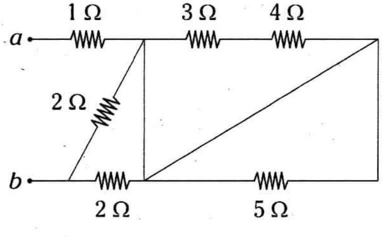
Reemplazamos en (I)

$$7 \times 10^{-3} = 7 \times 10^{-8} \left(\frac{4}{A}\right)$$

$$\therefore \quad A = 4 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$$

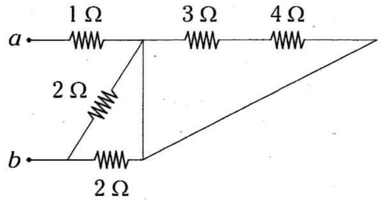
Problema N.° 2

A partir del circuito mostrado, determine la resistencia equivalente entre a y b.

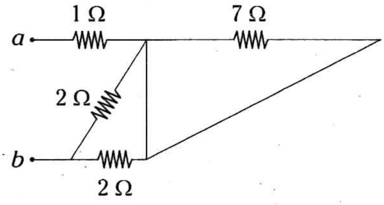


Resolución

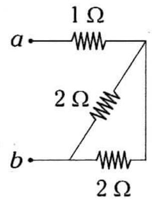
El resistor de 5 Ω tiene sus terminales unidos por un conductor ideal, es decir, está cortocircuitado y lo retiramos del circuito.



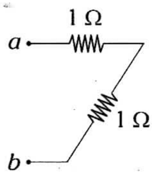
Los resistores de 3 Ω y 4 Ω están conectados en serie, al reducir tenemos



Notamos que el resistor de 7 Ω también está cortocircuitado (terminales unidos), entonces lo retiramos del circuito y nos queda.



Los resistores de 2 Ω están en paralelo, al reducir tenemos



Finalmente, los resistores están en serie, entonces el equivalente entre los terminales a y b será

$$R_{ab} = 1 + 1$$

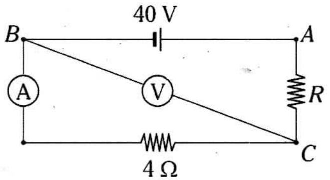
$$\therefore \quad R_{ab} = 2\ \Omega$$

Problema N.º 3

El el circuito se verifica la relación de voltajes

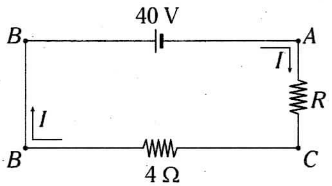
$$\frac{V_{AC}}{V_{CB}}=\frac{2}{3}$$

Determine la lectura de los instrumentos ideales.



Resolución

Retiramos los instrumentos ideales del circuito.



Por dato

$$\frac{V_{AC}}{V_{CB}}=\frac{2}{3}$$

Determinando el valor de los voltajes a partir del circuito, tenemos

$$\frac{\cancel{I}R}{\cancel{I}(4)}=\frac{2}{3} \rightarrow R=\frac{8}{3}\ \Omega$$

Para la malla eléctrica tenemos

$$40-IR-I(4)=0 \rightarrow 40-I\left(\frac{8}{3}\right)-4I=0$$
$$I=6\text{ A}$$

- La lectura del amperímetro nos indica el valor de la intensidad de corriente.

  $\therefore$ Ⓐ $=6$ A

- El voltímetro nos indica el valor de la tensión en el resistor de 4 Ω, entonces

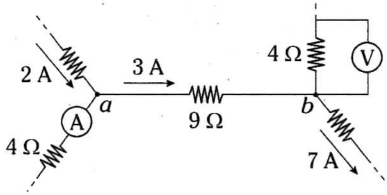
  Ⓥ $=I(4)$

  Ⓥ $=6(4)$

  $\therefore$ Ⓥ $=24$ V

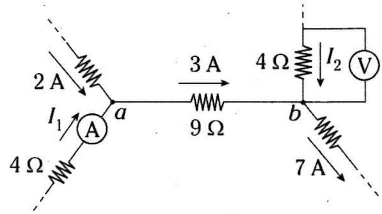
Problema N.º 4

En el gráfico se muestra parte de un circuito eléctrico. Indique las lecturas del amperímetro y voltímetro ideales.



Resolución

En el circuito tenemos



La lectura del amperímetro es

Ⓐ $=I_1$

La lectura del voltímetro es

Ⓥ $=I_2(4)$

- En el nodo a aplicamos la primera regla de Kirchoff

  $$\sum I_{\text{llegan}}=\sum I_{\text{salen}}$$

  $$I_1+2\text{ A}=3\text{ A} \rightarrow I_1=1\text{ A}$$

- En el nodo b aplicamos la primera regla de Kirchoff

  $$\sum I_{\text{llegan}}=\sum I_{\text{salen}}$$

  $$3\text{ A}+I_2=7\text{ A}$$

  $$I_2=4\text{ A}$$

Finalmente, las lecturas de los instrumentos ideales son

Ⓐ $=1$ A

Ⓥ $=8$ V

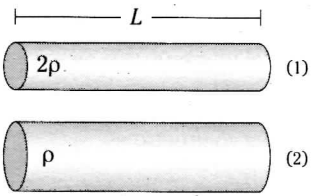
PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. En un conductor se establece una corriente eléctrica de intensidad 16 mA. Calcule el número de electrones que atraviesan su sección transversal en 8 s.

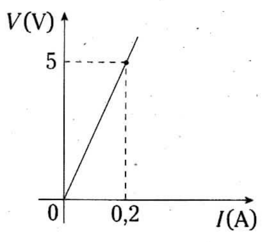
A) 4×10^{17}
B) 8×10^{17}
C) 12×10^{17}
D) 16×10^{17}
E) 20×10^{17}

2. Se muestra dos conductores cilíndricos. Si la sección del conductor (2) es el doble del conductor (1), determine la longitud del conductor (2) para que ambos tengan la misma resistencia eléctrica.



A) L B) $2L$ C) $3L$
D) $4L$ E) $8L$

3. En una experiencia de laboratorio, un foco es sometido a distintas tensiones y se obtuvo la siguiente gráfica.

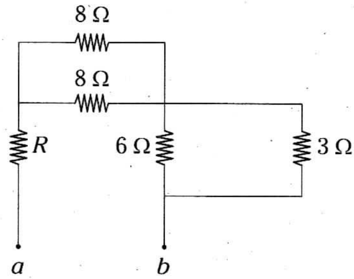


Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto de las siguientes proposiciones.

I. La resistencia eléctrica del foco es 25 Ω.
II. Si la tensión en la fuente es de 8 V, la intensidad de corriente es 0,32 A.
III. Si buscamos que la intensidad de corriente sea de 0,5 A, la tensión en la fuente debe ser 12,5 V.

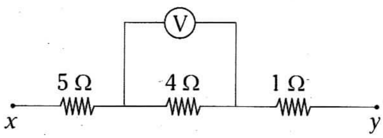
A) FFF B) VFF C) VVF
D) VVV E) VFV

4. Si el resistor equivalente entre a y b es 10 Ω, calcule R.



A) 2 Ω B) 4 Ω C) 6 Ω
D) 8 Ω E) 12 Ω

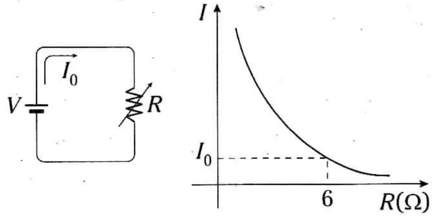
5. En el sistema mostrado, el potencial eléctrico en x es 30 V. Si la lectura del voltímetro es 8 V, determine el potencial eléctrico en y. ($V_x > V_y$)



A) 5 V B) 10 V C) 12 V
D) 20 V E) 25 V

NIVEL INTERMEDIO

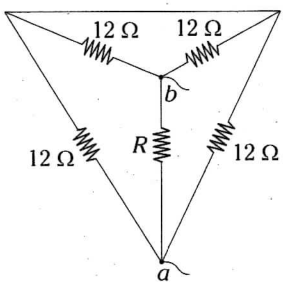
6. En el circuito que se muestra, la fuente de voltaje es constante y la intensidad de corriente varía con la resistencia eléctrica del resistor variable según se indica en la gráfica.



Si se busca que la intensidad de corriente se triplique, ¿cuál debe ser el valor del resistor?

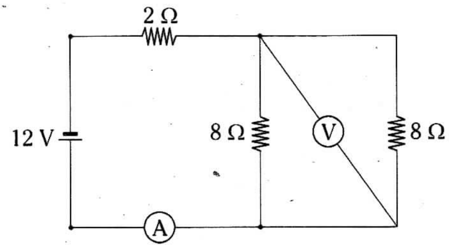
A) 1 Ω B) 2 Ω C) 3 Ω
D) 4 Ω E) 6 Ω

7. En el sistema de resistores, calcule el valor de R si el equivalente entre a y b es 3 Ω.



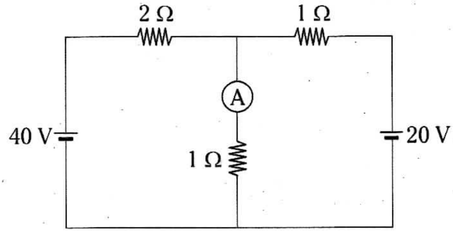
A) 2 Ω B) 4 Ω C) 6 Ω
D) 8 Ω E) 12 Ω

8. En el circuito mostrado, determine la lectura del amperímetro y voltímetro ideal.



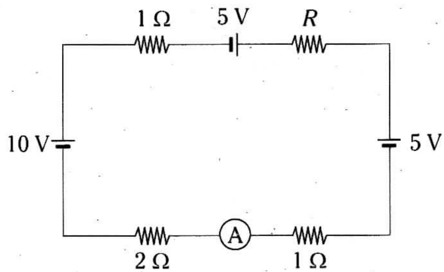
A) 1 A; 8 V B) 1 A; 16 V C) 2 A; 16 V
D) 2 A; 8 V E) 4 A; 32 V

9. En el circuito eléctrico, determine la lectura del amperímetro ideal.



A) 4 A B) 8 A C) 12 A
D) 16 A E) 20 A

10. Si la lectura del amperímetro es 2 A, calcule la potencia disipada por el resistor R.



A) 2 W B) 4 W C) 8 W
D) 10 W E) 12 W

Electromagnetismo

Capítulo XVIII

OBJETIVOS

- Comprender la relación que existe entre los fenómenos eléctricos y magnéticos.
- Establecer el principio de funcionamiento de los generadores eléctricos.

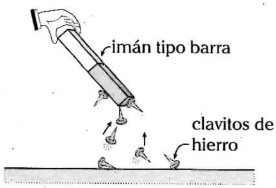
Aspectos previos

Imaginen un mundo sin radio, televisión, celulares y satélites. Ese es el mundo que tuviéramos si no se hubiesen descubierto las relaciones que hay entre electricidad y magnetismo. En la actualidad, gracias al electromagnetismo, se siguen inventando dispositivos que nos benefician a nivel de salud, comunicaciones, industria, entre otros. Estamos cerca de deshacernos de los cables y de transmitir energía eléctrica sin estos, en los hogares.

Para empezar hablemos del **magnetismo**:

Los fenómenos magnéticos se conocen de hace al menos 2500 años, estos se experimentaban con mineral de hierro magnetizado cerca de la antigua ciudad de Magnesia. Estos minerales de hierro eran ejemplos de lo que ahora llamamos **imanes permanentes**.

Así

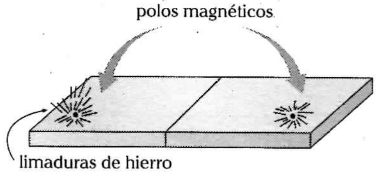


El imán presenta la capacidad de atraer a cuerpos que contienen hierro en su composición.

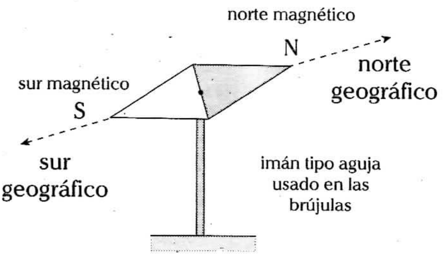
Si frotamos un cuerpo de hierro con un imán, este adquirirá las características de un imán, es decir, será un **imán artificial**.

Algunas de las propiedades observadas para los imanes son las siguientes:

a. Ciertas zonas del imán atraen con mayor intensidad, a estas zonas se les dio el nombre de **polos magnéticos**.

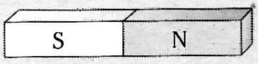


b. Si un imán tipo barra tiene libertad para girar, uno de sus extremos siempre apuntará hacia el norte geográfico, a este extremo se le llama polo norte magnético del imán.

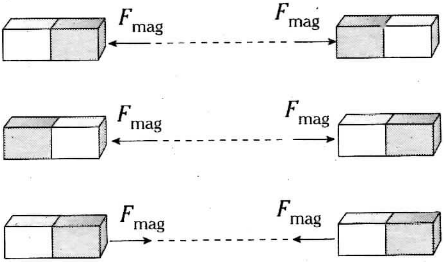


NOTA

Por convenio el polo norte del imán se oscurece.

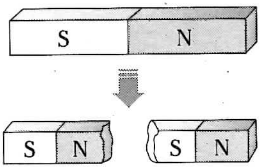


c. La experiencia demuestra que los polos semejantes de dos imanes se repelen y los polos opuestos se atraen.



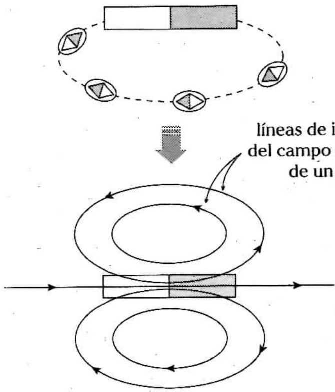
$\vec{F}_{mag}$: fuerza magnética

d. Al contrario de lo que sucede con las cargas eléctricas los polos magnéticos siempre están en pares y no es posible aislarlos. Al romper un imán en dos se producen dos imanes, no dos polos aislados.



Campo magnético

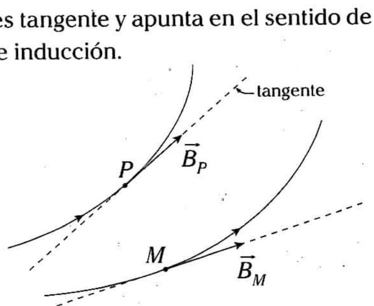
Los cuerpos magnetizados pueden ejercer fuerzas magnéticas a distancia, sin necesidad de contacto entre estos. Vimos que de manera muy parecida interactúan entre sí los cuerpos electrizados, además se sabe que el campo eléctrico es el medio transmisor de las fuerzas eléctricas. De manera parecida hay un campo magnético alrededor de todo cuerpo magnetizado que se representa mediante **líneas de inducción**. Estas líneas imaginarias se representan tal que en cada punto están orientados hacia el norte magnético de una brújula.



En el gráfico se observa lo siguiente:

- Las líneas de inducción son líneas cerradas (se cierran dentro del imán).
- Fuera del imán las líneas de inducción son salientes del polo norte y entrantes al polo sur.

Para el campo eléctrico se definió en cada punto el vector $\vec{E}$, de la misma manera en cada punto del campo magnético se define un vector llamado **inducción del campo magnético** $(\vec{B})$, tal que es tangente y apunta en el sentido de las líneas de inducción.

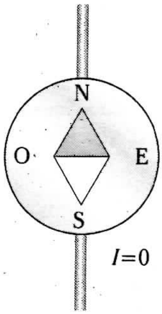


Su unidad: tesla (T)

Experiencia de Oersted

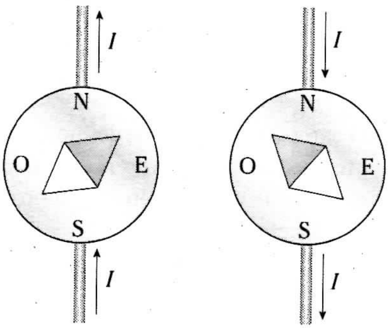
En 1820, el científico danés Hans Christian Oersted, descubrió una de las primeras relaciones profundas que hay entre electricidad y magnetismo.

En el experimento de Oersted, se coloca una brújula directamente sobre un alambre horizontal (visto aquí desde arriba).



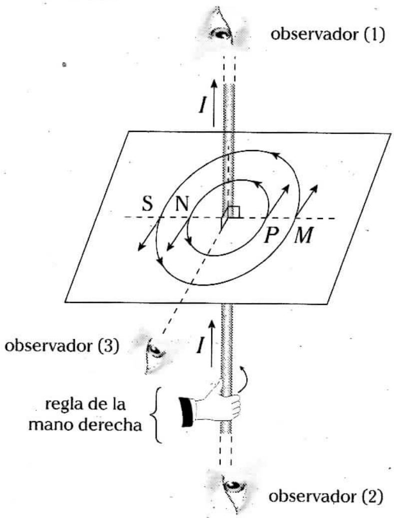
Si el alambre no conduce corriente, la aguja de la brújula apunta hacia el norte.

Si el alambre lleva corriente, la aguja de la brújula tiene una desviación, cuya dirección depende de la dirección de la corriente.



De estos experimentos, Oersted dedujo que "la corriente eléctrica a través de los conductores genera, alrededor de estos, un campo magnético".

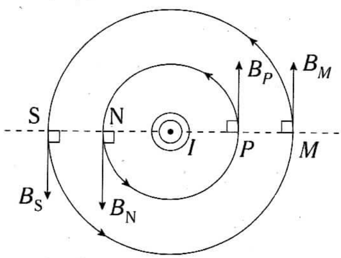
Campo magnético asociado a un conductor rectilíneo



Alrededor del conductor las líneas de inducción son circunferencias concéntricas contenidas en planos perpendiculares al conductor. El sentido de las líneas de inducción se obtiene con la regla de la mano derecha que plantea que "se rodea al conductor con la mano derecha de manera que el pulgar extendido se oriente en el sentido de la corriente eléctrica, entonces los otros cuatro dedos indicarán el sentido de las líneas de inducción".

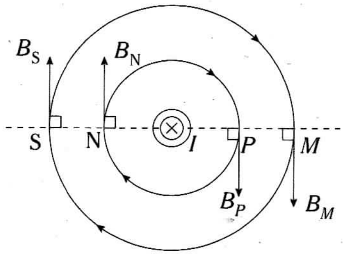
Veamos algunas vistas del campo magnético.

- Para el observador (1)



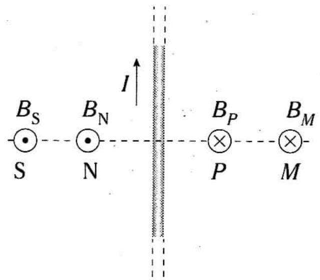
$\odot I$: indica una flecha saliente, perpendicular al plano del papel

- Para el observador (2)



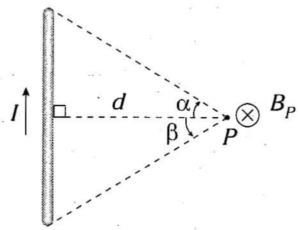
$\otimes I$: indica una flecha entrante, perpendicular al plano del papel

- Para el observador (3)



LEY DE BIOT - SAVART - LAPLACE

Los científicos Biot y Savart plantearon una ley con la cual se puede determinar el vector $\vec{B}$ en un cierto punto, debido a una corriente que fluye por un conductor. De esta ley se deduce que el módulo del vector $\vec{B}_P$, de la porción de corriente mostrada, se evalúa de la siguiente manera:



$$\boxed{B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta)}$$

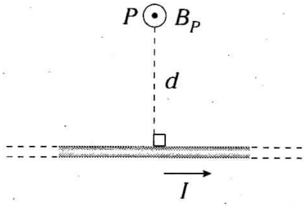
donde

- I: en (A)
- d: en (m)
- B_P: en (T)
- μ_0: permeabilidad magnética en el aire o el vacío

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}$$

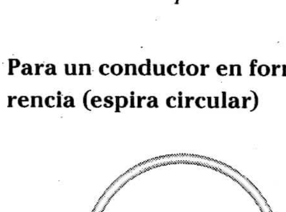
Casos particulares

1. **Para un conductor recto de gran longitud**



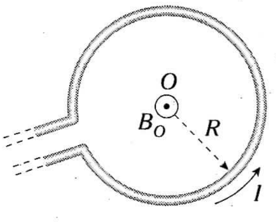
$$\boxed{B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}}$$

2. **Para un conductor semiinfinito**



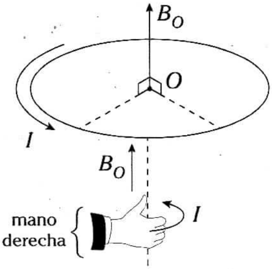
$$\boxed{B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}}$$

3. **Para un conductor en forma de circunferencia (espira circular)**

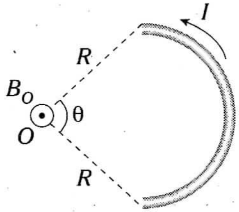


$$\boxed{B_O = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

La vista del perfil es el siguiente:



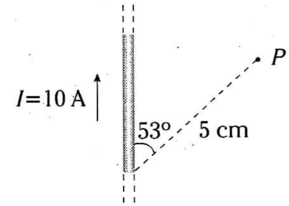
4. Para un conductor en forma de arco de circunferencia



$$\boxed{B_O=\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}}$$

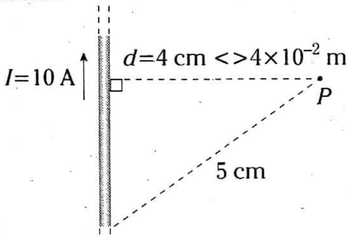
Ejemplos

1. Se muestra un conductor muy largo por el que fluye corriente eléctrica. Halle el módulo de la inducción magnética en P.



Resolución

Tracemos desde P una perpendicular al conductor.



Nos piden B_P.

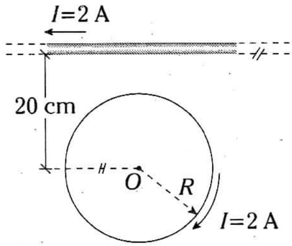
$$B_P=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

$$B_P=\frac{4\pi\times10^{-7}\times10}{2\pi\times4\times10^{-2}}$$

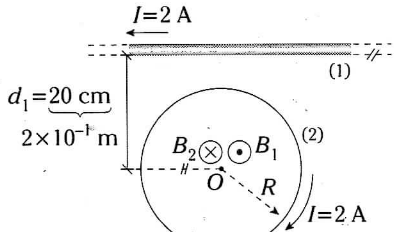
$$B_P=5\times10^{-5}$$

$$\therefore\ B_P=50\times10^{-6}=50\ \mu\text{T}$$

2. Halle el módulo de la inducción magnética en O si el conductor (1) es muy largo y el radio de la espira circular es $R=\dfrac{\pi}{20}$ m.



Resolución



Nos piden B_O.

En O hay dos vectores inducción uno debido al conductor (1) $(\vec{B}_1)$ y otro debido al conductor (2) $(\vec{B}_2)$, se verifica que

$$\vec{B}_O=\vec{B}_1+\vec{B}_2 \qquad \text{(I)}$$

Usando la regla de la mano derecha se obtiene que $\vec{B}_1$ es saliente y $\vec{B}_2$ es entrante, es decir, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ son opuestos.

En (I)

$$B_O=|B_1-B_2| \qquad \text{(II)}$$

- $B_1=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\cdot d_1}$

$$B_1=\frac{4\pi\times10^{-7}\times2}{2\pi\times2\times10^{-1}}$$

$$\rightarrow\ B_1=2\times10^{-6}\ \text{T} \qquad \text{(III)}$$

- $B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

$$B_2=\frac{4\pi\times10^{-7}\times2}{2\times\dfrac{\pi}{20}}$$

$$\rightarrow\ B_2=8\times10^{-6}\ \text{T} \qquad \text{(IV)}$$

Reemplazamos (III) y (IV) en (II)

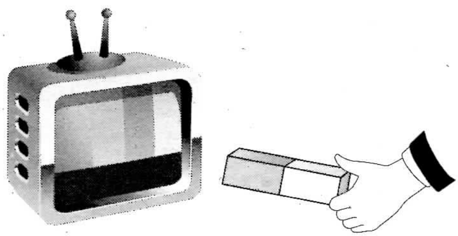
$$B_O=|2\times10^{-6}-8\times10^{-6}|$$

$$\therefore\ B_O=6\times10^{-6}\ \text{T}=6\ \mu\text{T}$$

Fuerza magnética

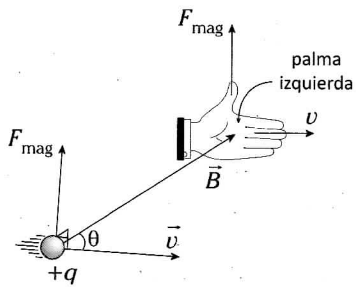
FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UNA PARTÍCULA ELECTRIZADA

Si se acerca un imán a la pantalla de un televisor común, cuando está encendido, se nota que la imagen se deforma. Se estará apreciando el efecto de la **fuerza magnética** $(\vec{F}_{\text{mag}})$ sobre partículas electrizadas, ya que la imagen en la pantalla de estos televisores se forma debido al impacto, por detrás, de electrones. Estos son desviados por la fuerza magnética que el campo del imán les ejerce.



De la experiencia de Oersted, se deduce que una corriente eléctrica establece a su alrededor un campo magnético. Pero una corriente eléctrica es un flujo de portadores de carga eléctrica, es decir, el campo magnético es generado por partículas electrizadas en movimiento. Como una partícula electrizada en movimiento tiene asociado su propio campo magnético, entonces puede interactuar con otros campos magnéticos y experimentar fuerzas magnéticas.

Se verifica que la $\vec{F}_{\text{mag}}$ es perpendicular a la $\vec{\upsilon}$ de la partícula y al vector $\vec{B}$ del campo magnético externo que actúa sobre la carga.



Además, el valor de la fuerza magnética se calcula a través de la siguiente expresión:

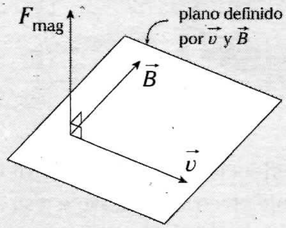
$$\boxed{F_{\text{mag}}=|q|\upsilon B\operatorname{sen}\theta} \quad \text{Su unidad: newton}$$

donde

- q: en (C)
- υ: en (m/s)
- B: en (T)

NOTA

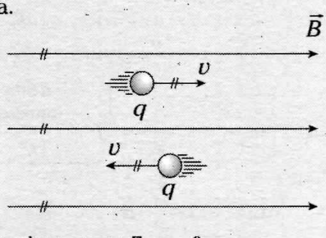
La F_{mag} es $\perp$ al plano definido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$.



Además, estos tres vectores se relacionan según la regla de la palma izquierda como se ve en el gráfico anterior. Si la partícula tiene carga negativa (–), la $\vec{F}_{mag}$ sobre ella tiene una dirección opuesta a la que tendría si es de carga positiva (+).

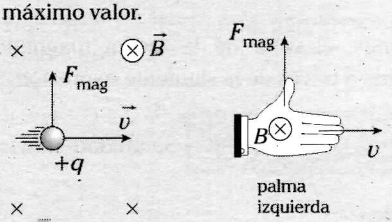
OBSERVACIÓN

1. Si la velocidad de la partícula es paralela al vector $\vec{B}$, la $\vec{F}_{mag}$ sobre dicha partícula es nula.



En ambos casos $F_{mag}=0$

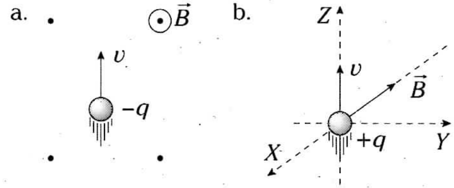
2. Si la $\vec{v}$ es $\perp$ al vector $\vec{B}$, la $\vec{F}_{mag}$ alcanza su máximo valor.



$F_{mag}=|q|vB\text{sen}90° \rightarrow \boxed{F_{mag}=|q|vB}$

Ejemplos

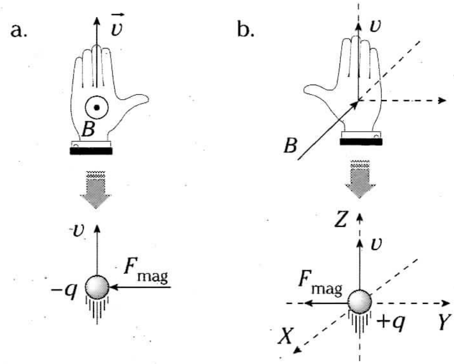
1. En los casos mostrados, indique la dirección de la fuerza magnética.



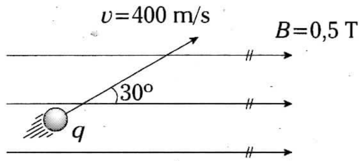
Resolución

Usamos la regla de la palma izquierda.

Tomando en cuenta que en (a) la carga es negativa (–), se tienen los siguientes gráficos:



2. Calcule el módulo de la fuerza magnética que experimenta la partícula electrizada que se mueve como se muestra. (q=6 mC).



Resolución

En este caso, el módulo de la fuerza magnética se calcula así

$F_{mag}=|q|vB\text{sen}30°$

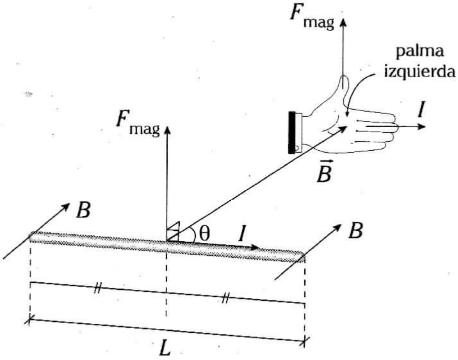
$F_{mag}=6\times10^{-3}\times400\times0{,}5\times0{,}5$

$\therefore\ F_{mag}=0{,}6\text{ N}$

FUERZA MAGNÉTICA SOBRE CONDUCTORES CON CORRIENTE ELÉCTRICA

Ya que un conductor con corriente eléctrica genera su propio campo magnético puede interactuar con campos magnéticos externos y experimentar fuerza magnética.

Consideremos un conductor rectilíneo en un campo magnético homogéneo.



Se verifica lo siguiente:

$$\boxed{F_{mag} = BIL\text{sen}\theta}$$

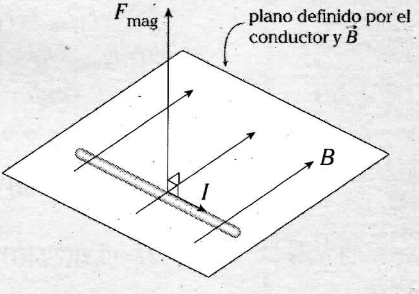
donde

- B: en (T)
- I: intensidad de corriente eléctrica en (A)
- L: longitud de la barra en (m)

  $\rightarrow$ F_{mag} en (N)

NOTA

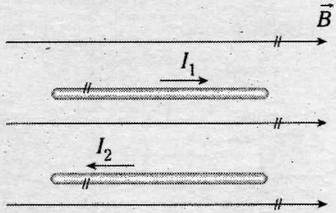
La $\vec{F}_{mag}$ actúa en el punto medio del conductor.



La $\vec{F}_{mag}$ es perpendicular al plano definido por el conductor y el vector $\vec{B}$. Para determinar la dirección de la $\vec{F}_{mag}$ usamos la regla de la palma izquierda como se ve en el gráfico (similar a como la aplicamos para una partícula).

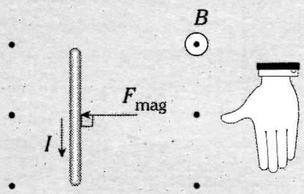
OBSERVACIÓN

1. Si el conductor es paralelo al vector $\vec{B}$



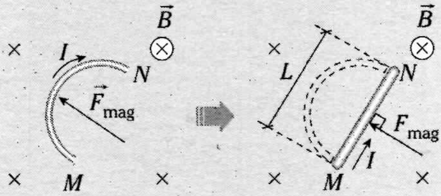
entonces, en ambos casos, $F_{mag}=0$.

2. Si el conductor es $\perp$ al vector $\vec{B}$, la $\vec{F}_{mag}$ es máxima.



$$\boxed{F_{mag}=BIL}$$

3. Si se tiene un conductor no rectilíneo en un campo magnético homogéneo, para hallar la $\vec{F}_{mag}$ sobre este, se le puede reemplazar por un conductor recto equivalente.

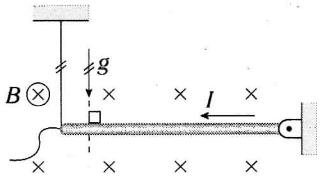


El módulo de la $\vec{F}_{mag}$ sobre el conductor se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{F_{mag}=BIL}$$

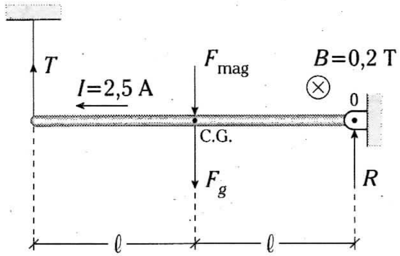
Ejemplo

La barra de 500 g que se muestra se mantiene en reposo, por ella circulan 2,5 A. Halle el módulo de la tensión en la cuerda si la barra, de 1 m de longitud, se encuentra dentro de un campo magnético homogéneo de inducción B=0,2 T. (g=10 m/s^2)



Resolución

Grafiquemos las fuerzas que actúan sobre la barra, a la cual consideramos homogénea.



Nos piden T: tensión en la cuerda.
Del equilibrio de la barra (2.ª CEM)

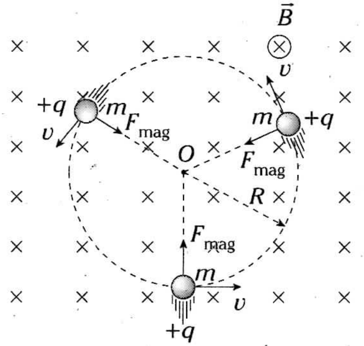
$$M_0^T = M_0^{F_{mag}} + M_0^{F_g}$$
$$T\cdot 2\ell=F_{mag}\cdot \ell+F_g\cdot \ell$$
$$2T=F_{mag}+F_g$$
$$2T=BIL+mg \qquad \text{(I)}$$
$$m=500 \text{ g} <> 0{,}5 \text{ kg} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I) y los demás datos del problema

$$2T=(0{,}2)(2{,}5)(1)+(0{,}5)(10)$$
$$2T=0{,}5+5$$
$$T=\frac{5{,}5}{2}$$
$$\therefore \quad T=2{,}75 \text{ N}$$

Movimiento de una partícula portadora de carga en un campo magnético homogéneo

Cuando lanzamos una partícula electrizada q con una velocidad $\vec{v}$ perpendicular a las líneas de un campo magnético homogéneo $(\vec{B})$, de forma tal que la partícula esté afectada únicamente por este campo, la $\vec{F}_{mag}$ y la $\vec{v}$ siempre estarán en un plano perpendicular a $\vec{B}$. Esta fuerza es perpendicular a la velocidad y, por consiguiente, determina la aceleración centrípeta de la partícula. La invariabilidad de la rapidez de la partícula implica también lo mismo en el módulo de la fuerza magnética y de la aceleración, razón por la cual la trayectoria descrita por la partícula es una circunferencia.



R: radio de la circunferencia

La fuerza centrípeta es igual a la F_{mag} para este caso.

$$F_{mag}=F_{cp}$$

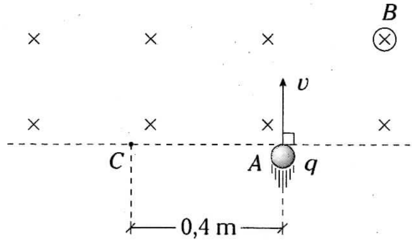
$$F_{mag}=ma_{cp}$$

$$\rightarrow \quad |q|vB=\frac{mv^2}{R}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{R=\frac{mv}{|q|B}}$$

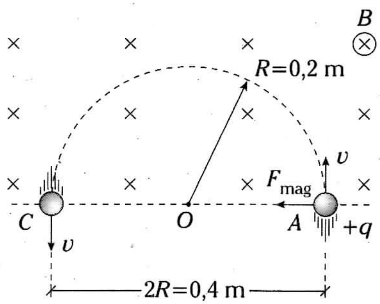
Ejemplo

Una partícula electrizada con +0,5 μC ingresa, como se muestra, a una zona donde se ha establecido un campo magnético homogéneo de inducción B=0,2 T. Si la partícula ingresó a esta zona por A y salió por C, halle su masa. Desprecie efectos gravitatorios y considere que la rapidez de la partícula es 2×10^6 m/s.



Resolución

Ya que el campo es homogéneo y sobre la partícula solo actúa la F_{mag}, la partícula describe una trayectoria circunferencial.



Nos piden m: masa de la partícula.

Sabemos que

$$R=\frac{mv}{|q|B}$$

$$\rightarrow \quad 0,2=\frac{m\times2\times10^6}{0,5\times10^{-6}\times0,2}$$

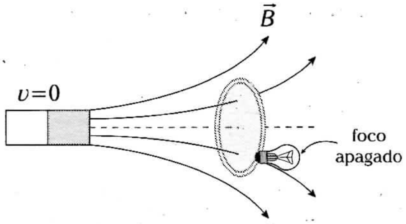
$$\therefore \quad m=10^{-14}\text{ kg}$$

Inducción electromagnética

Como ya sabemos, Oersted descubrió que una corriente eléctrica genera un campo magnético, entonces a Faraday se le ocurrió que con un campo magnético se podría obtener corriente eléctrica, solo hace falta saber cómo.

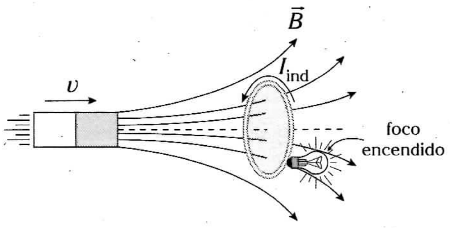
Lo descubierto por Faraday se puede resumir con lo siguiente.

- Primero consideremos un imán en reposo cerca a una espira conductora.



Las líneas de inducción del campo magnético asociado al imán atraviesan la superficie limitada por la espira. El número de líneas de inducción que atraviesan a la espira se mantiene constante, no cambia.

- Ahora consideremos la misma situación pero al imán acercándose a la espira.

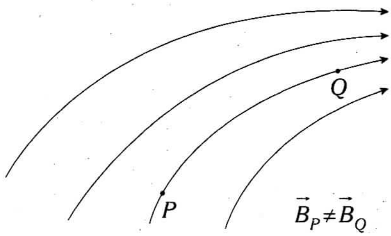


En la espira se puede registrar una corriente eléctrica a la cual denominamos (I_{ind}). Notamos que al moverse el imán, el número de líneas de inducción que atraviesan la superficie limitada por la espira está variando.

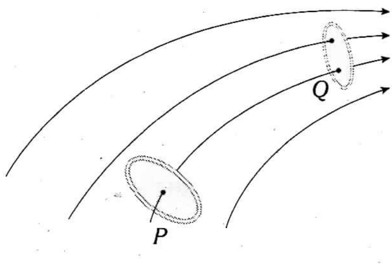
Para la explicación del fenómeno se debe considerar al número de líneas de inducción que atraviesan una superficie, para lo cual Faraday creó el concepto de flujo magnético.

FLUJO MAGNÉTICO (Φ)

Consideremos un campo magnético representado por las líneas de inducción tal como se muestra.



Observamos que el campo magnético no es homogéneo debido a que la distribución de líneas de inducción magnética no es la misma en toda la región, para verificar ello consideremos un anillo el cual lo trasladamos del punto P al punto Q.



Se deduce que la cantidad de líneas de inducción magnética que atraviesa la superficie limitada por el anillo, cuando este está ubicado en P, es menor que en Q. Para cuantificar ello definimos una magnitud escalar denominada flujo magnético (Φ), en consecuencia, tenemos:

$$\Phi_P < \Phi_Q$$

También sabemos que en aquellas zonas donde las líneas se encuentran más juntas, el campo magnético es más intenso, debido a ello concluimos

$B_P < B_Q$

Entonces

(Φ) es DP a (B)

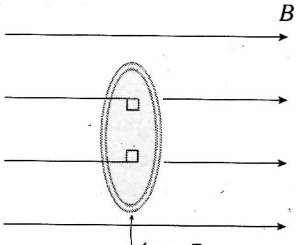
Además, si mayor es el área ($\mathbb{A}$) del anillo, mayor sería el número de líneas que atraviesa la superficie limitada por el anillo. De donde se deduce

(Φ) es DP a ($\mathbb{A}$)

Por lo que concluimos

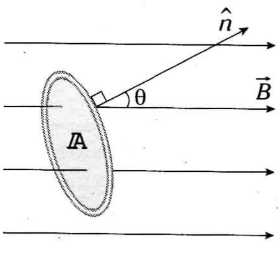
(Φ) es DP a ($B \cdot \mathbb{A}$)

Por lo planteado anteriormente, señalamos que en un campo homogéneo donde las líneas de inducción son perpendiculares a la superficie limitada por el anillo.



$\boxed{\Phi = B \cdot \mathbb{A}}$ Su unidad: webber (Wb)

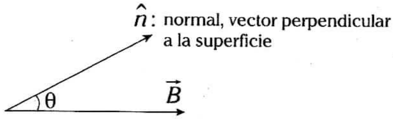
Si la sección del anillo no es perpendicular a las líneas de inducción



$\boxed{\Phi = B \cdot \mathbb{A}\cos\theta}$

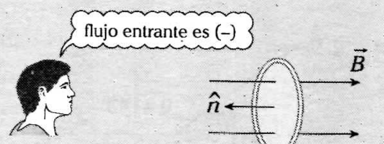
donde

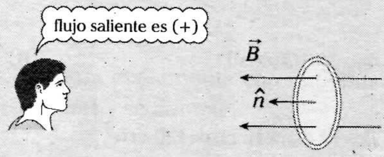
- $\vec{B}$: inducción magnética
- $\mathbb{A}$: área de la superficie limitada por el anillo
- θ: ángulo que forma el vector inducción $\vec{B}$ y la normal $\hat{n}$



Observación

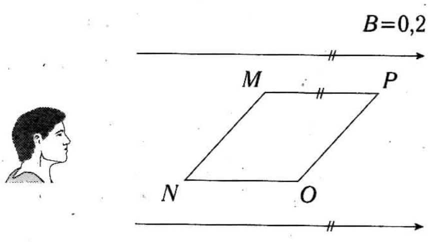
$\hat{n}$ apunta a un observador:

- 

- 

Ejemplo

Una espira rectangular de lados 10 cm y 12 cm se encuentra en un campo magnético homogéneo, tal que la superficie que limita la espira es paralela a las líneas de inducción. Halle la variación del flujo magnético si gira 53° alrededor de $\overline{MN}$.

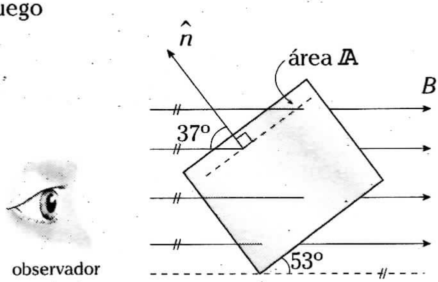


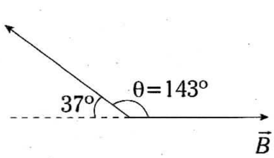
Resolución

Al inicio las líneas de inducción no atraviesan la superficie, entonces

$\Phi_{inicio}=0$ (I)

Luego





$\Phi_{final}=B\mathbb{A}\cos\theta$ (II)

$\mathbb{A}=10\text{ cm}\times12\text{ cm}=120\text{ cm}^2$

$\rightarrow\ A=120\times10^{-4}\text{ m}^2$ (III)

$\cos\theta=\cos143$

$\cos\theta=-\cos37°$

$\rightarrow\ \cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ (IV)

Reemplazamos (III) y (IV) en (II)

$$\Phi_{final}=(0{,}2)(120\times10^{-4})\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$=-\frac{96}{5}\times10^{-4}$$

$$=-19{,}2\times10^{-4}\text{ Wb}$$

$$=-1{,}92\times10^{-3}\text{ Wb}$$

$\rightarrow\ \Phi_{final}=-1{,}92\text{ mWb}$ (V)

De (I) y (V), finalmente, la variación del Φ se calcula así

$$\Delta\Phi=\Phi_{final}-\Phi_{inicial}$$

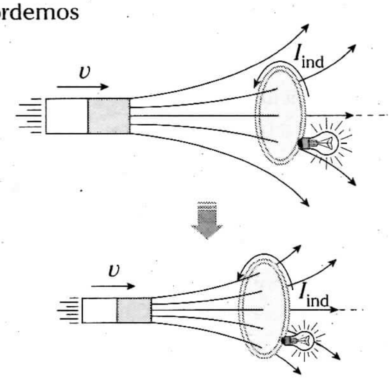
$$=-1{,}92\text{ mWb}-0$$

$\therefore\ \ \Delta\Phi=-1{,}92\text{ mWb}$

Ley de Faraday

Veamos la explicación que dio Faraday al fenómeno que observó.

Recordemos



Al acercar el imán a la espira conductora, el número de líneas de inducción, que atraviesa la superficie limitada por la espira, aumenta, varía y se establece una I_{ind}.

En otras palabras, cuando varía el flujo magnético (Φ), que atraviesa la superficie que encierra la espira, se induce una corriente eléctrica.

También podemos deducir que al establecerse una corriente eléctrica en el circuito así formado debe también surgir un voltaje que se induce, a esto se le llama **fuerza electromotriz inducida** (fem_{ind} o ξ_{ind}). Finalmente, se concluye lo siguiente:

> En todo circuito cerrado a través del cual varía el Φ se induce una fem y una corriente eléctrica.

Faraday llegó a deducir la siguiente expresión:

$$\boxed{\xi_{\substack{\text{ind}\\ \text{med}}} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}} \quad \text{Ley de Faraday}$$

Δt: intervalo de tiempo en que varía el Φ

$\left[\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right]$: rapidez de variación del Φ

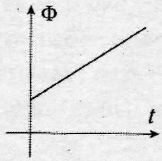
En el caso que el circuito esté constituido por ***N*** espiras conductoras conectadas una a continuación de la otra (bobinas o solenoides), se cumple lo siguiente:

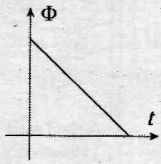
$$\boxed{\xi_{\substack{\text{ind}\\ \text{med}}} = N\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}}$$

ξ: fuerza electromotriz inducida media

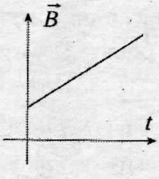
Observación

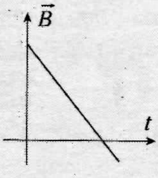
Si el Φ varía linealmente con el tiempo, entonces la ξ_{ind} es constante.





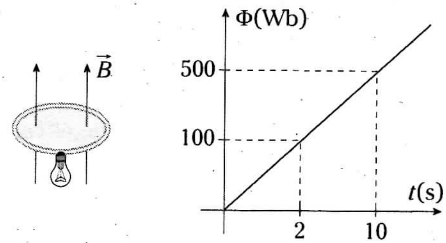
Esto también ocurre si el área de la espira se mantiene constante, la espira no se mueve y el vector $\vec{B}$ (campo homogéneo) varía linealmente con el tiempo.





Ejemplo

El flujo magnético a través de la región limitada por la espira circular varía según la gráfica. Determine la intensidad de corriente que pasa por el foco de 200 Ω.



Resolución

Nos piden I: intensidad de corriente que pasa por el foco.

De

$$\underset{\xi_{\text{ind}}}{\underset{\downarrow}{V}} = I\cdot \underset{200\,\Omega}{\underset{\downarrow}{R}} \qquad \text{(I)}$$

Como el Φ varía linealmente con el tiempo, la ξ_{ind} es constante y se cumple

$$\xi_{\text{ind}} = \xi_{\substack{\text{ind}\\ \text{med}}}$$

$$\xi_{\text{ind}} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$$

$$\xi_{\text{ind}} = \frac{\Phi_{(t=10)} - \Phi_{(t=2)}}{(10-2)}$$

$$\xi_{\text{ind}} = \frac{500-100}{8}$$

$$\rightarrow \quad \xi_{\text{ind}} = 50\ \text{V} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I)

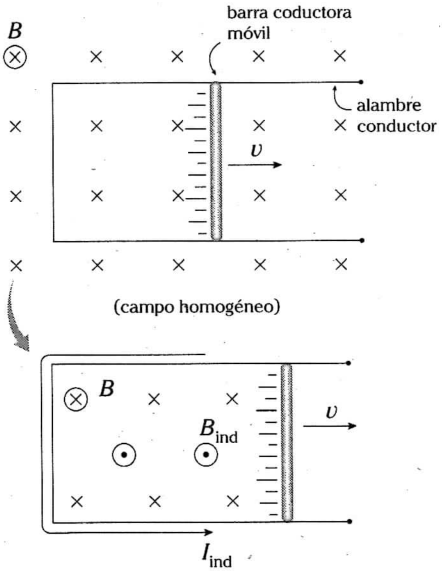
$$\overset{1}{\cancel{50}} = I\cdot(\overset{4}{\cancel{200}})$$

$$I = \frac{1}{4}\ \text{A}$$

$$\therefore \quad I = 0{,}25\ \text{A}$$

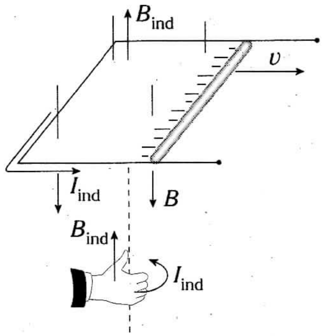
Regla de Lenz

Fue planteada por Heinrich Lenz en 1831 y se fundamenta en la ley de conservación de la energía. Esta ley nos permite determinar el sentido de la corriente que se induce en un circuito. Establece que "la corriente eléctrica que se induce en un circuito cerrado tiene un sentido tal que el campo magnético que este genera se opone a la variación del flujo magnético en el circuito". Dicho de otra manera, el campo magnético de la corriente inducida (campo magnético inducida, $\vec{B}_{ind}$) es la reacción que busca restablecer el flujo magnético a través del circuito. Veamos el siguiente ejemplo.



En la espira formada por el alambre y la barra, el flujo magnético varía ya que el número de líneas que ingresan ha aumentando (de 4 a 6). Entonces hay una ξ_{ind} y una I_{ind}, y las líneas de inducción del campo magnético asociado a I_{ind} deben ser salientes de manera que anulen a las líneas que están aumentando.

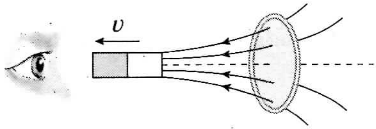
Usando la regla de la mano derecha el sentido de la I_{ind} debe ser entonces antihorario.



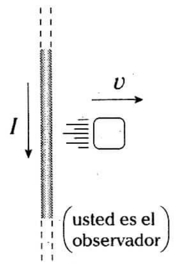
Ejemplo

Halle, para el observador, el sentido de la corriente inducida.

a.

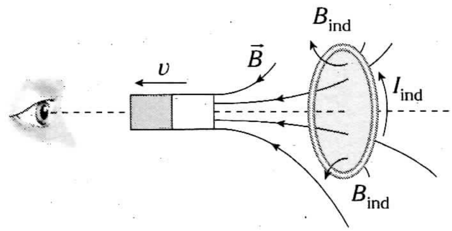


b.



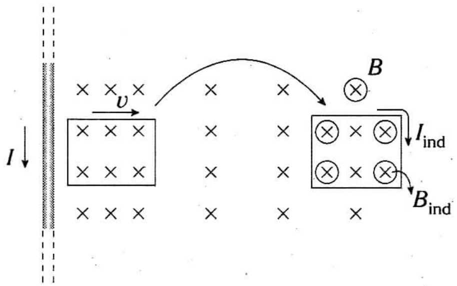
Resolución

a. Al alejarse el imán de la espira, el número de líneas de inducción, que atraviesa la espira, disminuye.



Por la regla de Lenz, las líneas de inducción del $\vec{B}_{ind}$ deben estar a favor del campo magnético generado por el imán, luego, por la regla de la mano derecha se deduce que el sentido de la corriente es antihorario.

b. La espira se mueve en el campo magnético producido por la corriente I que no es homogéneo.



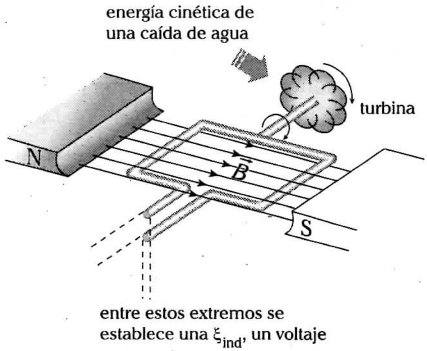
Por la regla de Lenz el $\vec{B}_{ind}$ es entrante, entonces, el sentido es horario.

En el caso que estamos analizando, el campo magnético asociado a la corriente I, las líneas están más juntas cerca al conductor porque ahí el campo es más intenso.

Generador eléctrico

Es aquel dispositivo que transforma una forma de energía que recibe (como la mecánica o la térmica) en energía eléctrica. En la actualidad predominan los generadores de corriente alterna (alternadores) debido a que permiten obtener corriente y tensiones eléctricas muy elevadas.

Analicemos el modelo simplificado de un generador de corriente alterna.



Al rotar la espira conductora, el Φ que atraviesa a la superficie limitada por la espira aumenta y disminuye alternadamente, lo que genera una ξ_{ind} alterna y una corriente alterna.

Si

A: área de la espira

B: módulo de la inducción magnética

ω: es la rapidez angular de rotación de la espira

se obtiene que la fuerza electromotriz inducida se evalúa con la siguiente expresión:

$$\xi_{ind} = BA\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

donde t es tiempo

Si en lugar de una espira hay un embobinado de N espiras, entonces se cumple lo siguiente:

$$\xi_{ind} = NBA\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

Nota

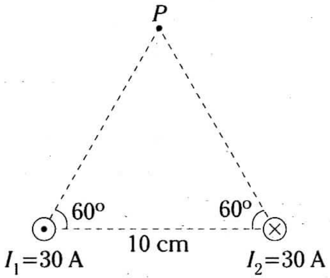
La ξ_{ind} presenta un valor máximo

$$\xi_{ind_{(máx)}} = NBA\omega$$

que vendría a ser el máximo voltaje que se genera.

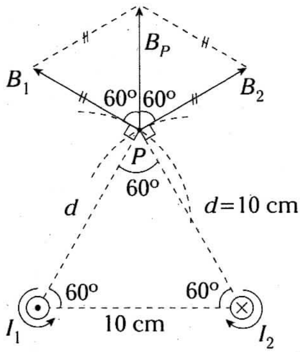
Problema N.º 1

En la figura mostrada se representan las secciones de dos conductores rectilíneos muy largos por los cuales fluye corriente eléctrica. Determine el módulo de la inducción magnética en *P*.



Resolución

Usando la regla de la mano derecha dibujemos, en *P*, los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ debido a I_1 e I_2, respectivamente.



Nos piden B_P.

Como

$$I_1=I_2=I=30\text{ A} \ \text{ y } \ d=10\text{ cm}=10^{-1}\text{ m}$$

Entonces

$$B_1=B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

$$B_1=B_2=\frac{4\pi\times10^{-7}\times30}{2\pi\times10^{-1}}$$

$$B_1=B_2=60\times10^{-6}\text{ T} \qquad \text{(I)}$$

Del gráfico se deduce

$$B_P=B_1$$

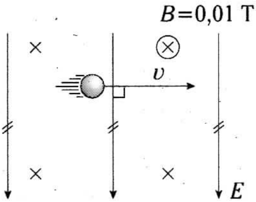
De la expresión (I) se obtiene

$$B_P=60\times10^{-6}\text{ T}$$

$$\therefore \quad B_P=60\ \mu\text{T}$$

Problema N.º 2

Una partícula electrizada positivamente se mueve con velocidad constante dentro de un campo eléctrico homogéneo y un campo magnético homogéneo. Si la rapidez de la partícula es 50 000 m/s, halle el módulo del vector intensidad de campo eléctrico. Desprecie efectos gravitatorios.

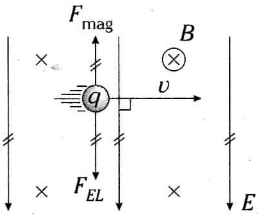


Resolución

Si la partícula se mueve con velocidad constante, entonces

$$F_R=0$$

Grafiquemos las fuerzas que actúan sobre la partícula.



Como la fuerza resultante es cero, se cumple

$$F_{EL}=F_{mag} \rightarrow \cancel{q}E=\cancel{q}\upsilon B$$

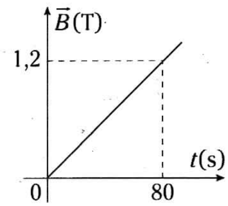
$$E=\upsilon B$$

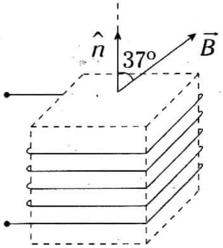
$$E=(50\,000)(0{,}01)$$

$$\therefore \quad E=500\text{ N/C}$$

Problema N.º 3

Una bobina rectangular de 500 vueltas y 100 cm^2 de sección transversal se encuentra en el interior de un campo magnético cuya inducción varía con el tiempo según se muestra. Halle la fem inducida en el embobinado.





Resolución

La bobina no se mueve, el área encerrada por una espira no varía y $\vec{B}$ varía linealmente con el tiempo, entonces la fem inducida es constante.

$$\xi_{ind} = \xi_{med}^{ind}$$

$$\xi_{ind} = N\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$$

$$\xi_{ind} = 500\frac{\left|\Phi_{(t=80)} - \Phi_{(t=0)}\right|}{80}$$

$$\rightarrow \quad \xi_{ind}=6{,}25\cdot\left|\Phi_{(t=80\text{ s})}-\Phi_{(t=0)}\right| \qquad \text{(I)}$$

Además se cumple

$$\Phi_{(t=80\text{ s})}=B_{(t=80\text{ s})}\cdot A\cdot\cos 37^\circ \qquad \text{(II)}$$

$$A=100\text{ cm}^2 <> 10^{-2}\text{ m}^2 \qquad \text{(III)}$$

Luego, reemplazamos (III) en (II)

$$\Phi_{(t=80\text{ s})}=(1{,}2)(10^{-2})\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\rightarrow \quad \Phi_{(t=80\text{ s})}=9{,}6\times10^{-3}\text{ Wb} \qquad \text{(IV)}$$

$$\Phi_{(t=0)}=\underbrace{B_{(t=0)}}_{0}\cdot A\cdot\cos 37^\circ$$

$$\rightarrow \quad \Phi_{(t=0)}=0 \qquad \text{(V)}$$

Finalmente, reemplazamos (IV) y (V) en (I)

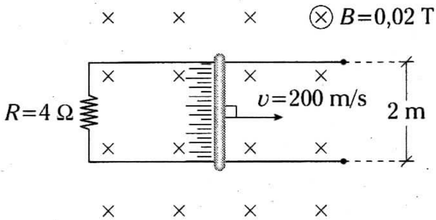
$$\xi_{ind}=6{,}25\cdot(9{,}6\times10^{-3}-0)$$

$$\xi_{ind}=60\times10^{-3}\text{ V}$$

$$\therefore \quad \xi_{ind}=60\text{ mV}$$

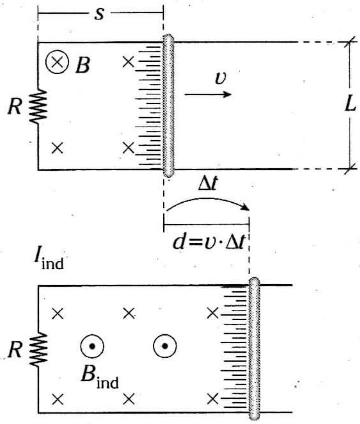
Problema N.º 4

La barra conductora se traslada con velocidad constante apoyada en un alambre conductor. Determine la intensidad de corriente que fluye y el sentido. Desprecie la resistencia eléctrica de la barra.



Resolución

Por la regla de Lenz



El sentido de la I_{ind} es antihorario.

Para hallar I_{ind}

$$V = I \cdot R \qquad \text{(I)}$$
$$\downarrow$$
$$\xi_{ind}$$

Sabemos

$$\xi_{\substack{ind\\med}} = \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} \qquad \text{(II)}$$

$$\Delta\Phi = \Phi_{final} - \Phi_{inicial}$$

$$\Delta\Phi = BA_{final} - BA_{inicial}$$

$$\Delta\Phi = B(A_{final} - A_{inicial})$$

$$\Delta\Phi = B[(s+d)L - sL]$$

$$\rightarrow \quad \Delta\Phi = BdL \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos (III) en (II)

$$\xi_{\substack{ind\\med}} = \frac{BdL}{\Delta t}$$

$$= \frac{Bv \cdot \cancel{\Delta t} \cdot L}{\cancel{\Delta t}}$$

$$\rightarrow \quad \xi_{\substack{ind\\med}} = BvL$$

Esta $\xi_{\substack{ind\\med}}$ es constante para todo intervalo de tiempo que se tome, así que

$$\boxed{\xi_{ind} = BvL} \qquad \text{(IV)}$$

(fem inducida en barra móvil)

Luego, reemplazamos (IV) en (I)

$$BvL = IR$$

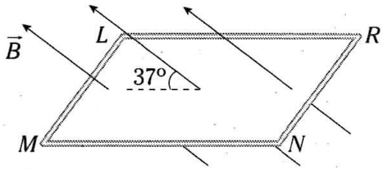
De donde

$$(0{,}02)(200)(2) = I(4)$$

$$\therefore \quad I = 2\ \text{A}$$

Problema N.° 5

La espira rectangular se encuentra en un campo magnético homogéneo (B=5 mT). Determine el flujo magnético sobre dicha espira.
(MN=4 cm; NR=6 cm)



Resolución

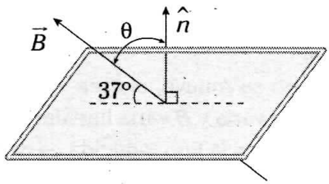
El flujo magnético se determina así

$$\Phi = BA\cos\theta \qquad \text{(I)}$$

Datos

- $B = 5\ \text{mT} = 5\times10^{-3}\ \text{T}$
- $A = (4\ \text{cm})(6\ \text{cm}) = 24\times10^{-4}\ \text{m}^2$

Cálculo de θ



Del gráfico

$$\theta = 53°$$

Reemplazamos en (I)

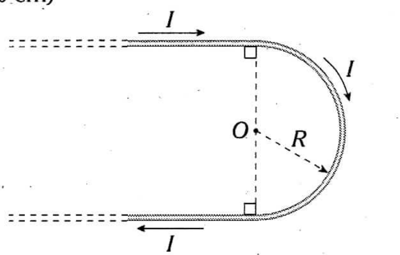
$$\Phi = (5\times10^{-3})(24\times10^{-4})\cdot\cos53°$$

$$\Phi = (5\times10^{-3})(24\times10^{-4})\cdot\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\therefore \quad \Phi = 72\times10^{-7}\ \text{Wb}$$

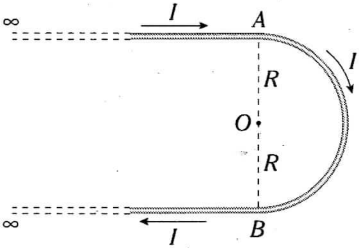
Problema N.° 6

Se muestra un alambre muy largo que transporta una corriente eléctrica de 0,5 A. Determine el módulo de la inducción magnética en O.
(R=10 cm)

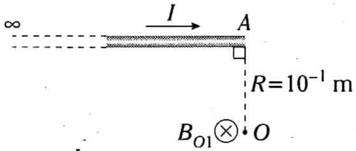


Resolución

En este caso vamos a trabajar con tramos del conductor, así tenemos los tramos $\overline{\infty A}$, $\widehat{AB}$ y $\overline{B\infty}$.



- Para el tramo $\overline{\infty A}$, tenemos



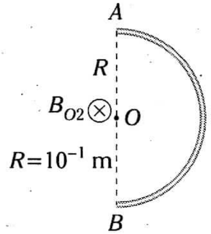
$$B_{O1}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

$$B_{O1}=\frac{\cancel{4\pi}\times 10^{-7}\times(0,5)}{\cancel{4\pi}\left(10^{-1}\right)}$$

$$B_{O1}=0,5\times 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

$$B_{O1}=0,5\ \mu\mathrm{T}$$

- Para el tramo $\widehat{AB}$, tenemos



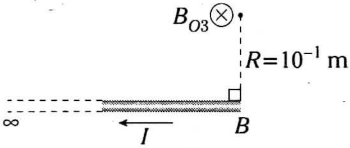
$$B_{O2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cdot\theta$$

$$B_{O2}=\frac{\left(\cancel{4\pi}\times 10^{-7}\right)(0,5)}{\cancel{4\pi}\left(10^{-1}\right)}\cdot\pi$$

$$B_{O2}=0,5\pi\times 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

$$B_{O2}=0,5\pi\ \mu\mathrm{T}$$

- Para el tramo $\overline{B\infty}$, tenemos



$$B_{O3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

$$B_{O3}=\frac{\cancel{4\pi}\times 10^{-7}(0,5)}{\cancel{4\pi}\times\left(10^{-1}\right)}$$

$$B_{O3}=0,5\times 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

$$B_{O3}=0,5\ \mu\mathrm{T}$$

Como los vectores inducción magnética originados por cada tramo en O son paralelos y tienen la misma dirección (entrante a la hoja de papel), sus módulos se suman, entonces

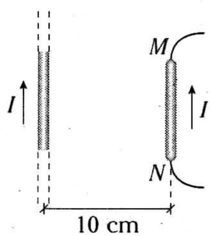
$$B_O=B_{O1}+B_{O2}+B_{O3}$$

$$B_O=(0,5\ \mu\mathrm{T})+(0,5\pi\ \mu\mathrm{T})+(0,5\ \mu\mathrm{T})$$

$$\therefore\quad B_O=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\mu\mathrm{T}$$

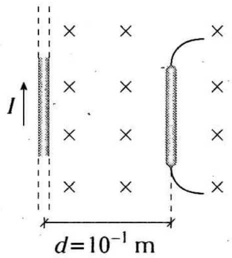
Problema N.º 7

Se muestra un conductor largo colocado a 10 cm de una barra conductora *MN* que transporta una corriente de igual intensidad. Determine el módulo de la fuerza magnética sobre la barra de 1 m de longitud. (I=1 A).



Resolución

El conductor de gran longitud lleva corriente eléctrica y establece en su entorno un campo magnético, a la derecha del conductor el campo se representa mediante líneas de inducción entrante $\otimes$.



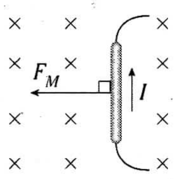
El módulo del campo magnético a 10 cm del conductor de gran longitud es

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

$$B=\frac{4\pi\times10^{-7}(1)}{2\pi\left(10^{-1}\right)}$$

$$B=2\times10^{-6}\ \text{T}$$

La barra de 1 m de longitud lleva corriente y está inmersa en el campo magnético generado por el conductor infinito, entonces la barra experimenta una fuerza magnética $\left(\vec{F}_M\right)$ cuya dirección se determina aplicando la regla de la palma de la mano izquierda.



El valor de la $\vec{F}_M$ es

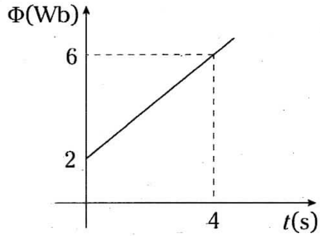
$$F_M=BIL\cdot\text{sen}\theta$$

$$F_M=\left(2\times10^{-6}\right)(1)(1)\cdot\text{sen}90^{\circ}$$

$$\therefore\quad F_M=2\times10^{-6}\ \text{N}$$

Problema N.º 8

En la gráfica se representa cómo varía el flujo magnético a través de la sección recta de una bobina de 40 espiras. Calcule la fuerza electromotriz inducida.

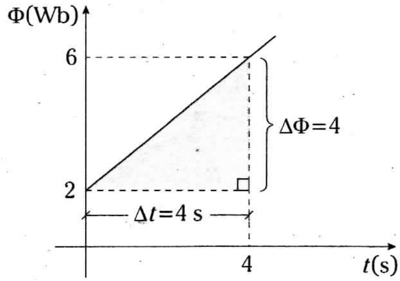


Resolución

Se conoce que en una bobina de N espiras la fuerza electromotriz inducida se determina así

$$\xi_{\text{ind}}=N\cdot\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} \qquad \text{(I)}$$

En nuestro caso N=40, además, gráficamente tenemos



Donde

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{4}{4}=1$$

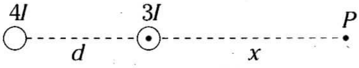
Reemplazamos en (I)

$$\xi_{\text{ind}}=40(1)$$

$$\therefore\quad \xi_{\text{ind}}=40\ \text{V}$$

NIVEL BÁSICO

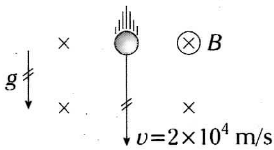
1. Se muestra la sección transversal de dos conductores muy largos por los que fluye corriente eléctrica. Si la inducción magnética es nula en P, halle x.



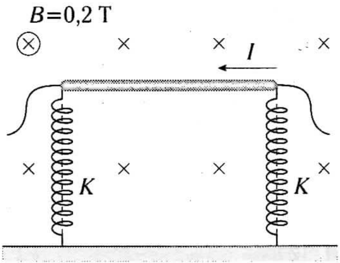
A) d B) $2d$ C) $3d$
D) $4d$ E) $5d$

2. La partícula electrizada con +4 mC presenta una velocidad vertical hacia abajo en el instante mostrado. Si la partícula de 600 g se encuentra en un campo magnético homogéneo de inducción B=0,1 T, halle el módulo de su aceleración para este instante. (g=10 m/s^2)

A) 25 m/s^2
B) 50 m/s^2
C) 25/3 m/s^2
D) 50/3 m/s^2
E) 75 m/s^2

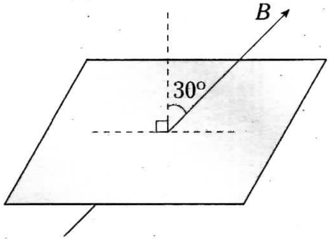


3. Si la barra homogénea de 2 kg y 50 cm se mantiene en equilibrio apoyada en 2 resortes idénticos de rigidez K=1100 N/m, halle la deformación que experimenta uno de los resortes. Considere que por la barra, que se encuentra en un campo magnético homogéneo, fluye una corriente eléctrica de intensidad 20 A. (g=10 m/s^2).



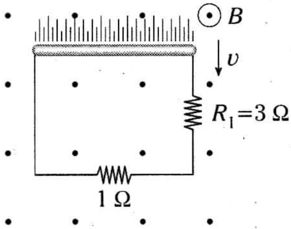
A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E) 5 cm

4. El flujo magnético a través de la espira conductora, de resistencia eléctrica 2 Ω, varía uniformemente tal que en 2 s varía en 20 Wb. Halle la intensidad de la corriente inducida.



A) 3 A B) 4 A C) 5 A
D) 6 A E) 10 A

5. La barra metálica de 40 cm de longitud se traslada con velocidad constante de módulo 20 m/s. Determine la potencia disipada por R_1 si el campo magnético es homogéneo, de inducción 0,5 T.

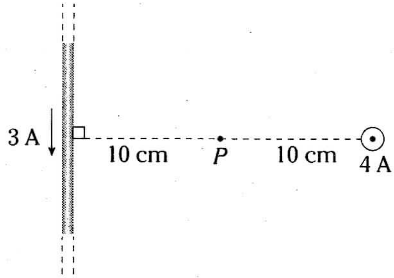


Indique, además, el sentido de la corriente inducida.

A) 1 W; antihorario
B) 1 W; horario
C) 3 W; horario
D) 3 W; antihorario
E) 4 W; antihorario

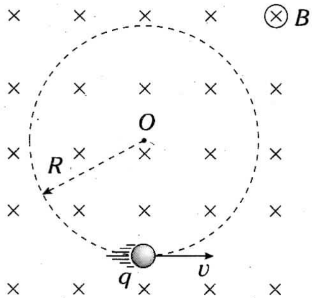
NIVEL INTERMEDIO

6. Los conductores rectos mostrados son muy largos. Halle el módulo de la inducción magnética en *P*.



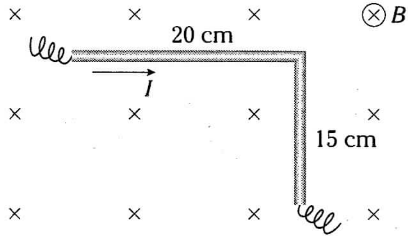
A) 8 μT B) 10 μT C) 15 μT
D) 20 μT E) 25 μT

7. La partícula de 1 g, electrizada con 10 mC, se mueve en un campo homogéneo de inducción $B=2\pi$ T. Determine el número de vueltas que completará en 1 minuto.



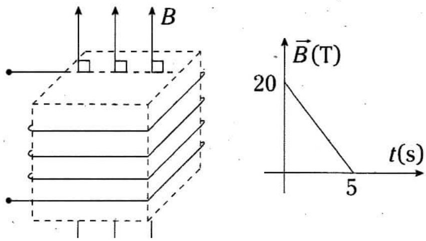
A) 200 B) 300 C) 400
D) 500 E) 600

8. La barra doblada está en un campo magnético homogéneo cuya inducción vale 2 T. Si por la barra fluye corriente eléctrica de intensidad 3 A, halle el módulo de la fuerza magnética sobre dicha barra.



A) 1 N B) 1,5 N C) 2 N
D) 2,5 N E) 3 N

9. La gráfica muestra cómo varía la inducción magnética a través del embobinado de 200 vueltas. El área de la superficie que limita una de las espiras es 50 cm^2. Halle la fem inducida.



A) 1 V B) 2 V C) 3 V
D) 4 V E) 5 V

10. En un generador de corriente alterna el embobinado contiene 10 000 vueltas, el campo magnético es de inducción 0,5 T, el área de la sección transversal del embobinado es 100 cm^2 y la frecuencia angular de rotación del embobinado es 100 rad/s. Halle el máximo valor de la fem inducida.

A) 2 kV B) 5 kV C) 10 kV
D) 12 kV E) 20 kV

Claves

Capítulo I

1	C	3	A	5	C	7	D	9	D
2	D	4	B	6	D	8	A	10	B

Capítulo II

1	B	3	A	5	E	7	D	9	C
2	C	4	D	6	A	8	B	10	E

Capítulo III

1	C	3	C	5	C	7	B	9	A
2	E	4	D	6	B	8	D	10	C

Capítulo IV

1	C	3	E	5	A	7	B	9	C
2	C	4	D	6	C	8	B	10	C

Capítulo V

1	C	3	B	5	D	7	B	9	D
2	B	4	A	6	B	8	E	10	D

Capítulo VI

1	C	3	B	5	B	7	B	9	B
2	A	4	C	6	E	8	E	10	D

Capítulo VII

1	D	3	B	5	E	7	C	9	B
2	A	4	C	6	E	8	E	10	E

Capítulo VIII

1	B	3	E	5	D	7	A	9	C
2	C	4	B	6	D	8	C	10	D

Capítulo IX

1	C	3	D	5	E	7	D	9	C
2	C	4	B	6	A	8	A	10	D

Capítulo X

1	D	3	B	5	A	7	C	9	C
2	C	4	B	6	B	8	D	10	D

Capítulo XI

1	C	3	A	5	C	7	B	9	C
2	D	4	C	6	D	8	E	10	A

Capítulo XII

1	E	3	A	5	D	7	C	9	A
2	B	4	A	6	D	8	A	10	D

Capítulo XIII

1	B	3	D	5	C	7	E	9	C
2	C	4	A	6	E	8	D	10	E

Capítulo XIV

1	C	3	B	5	A	7	D	9	D	11	C	13	D	15	A
2	D	4	C	6	B	8	B	10	A	12	C	14	C		

Capítulo XV

1	D	3	C	5	C	7	B	9	B
2	C	4	B	6	E	8	C	10	E

Capítulo XVI

1	B	3	C	5	B	7	B	9	C
2	B	4	C	6	B	8	C	10	E

Capítulo XVII

1	B	3	D	5	B	7	B	9	D
2	D	4	B	6	B	8	D	10	B

Capítulo XVIII

1	C	3	A	5	D	7	E	9	D
2	D	4	C	6	B	8	B	10	B