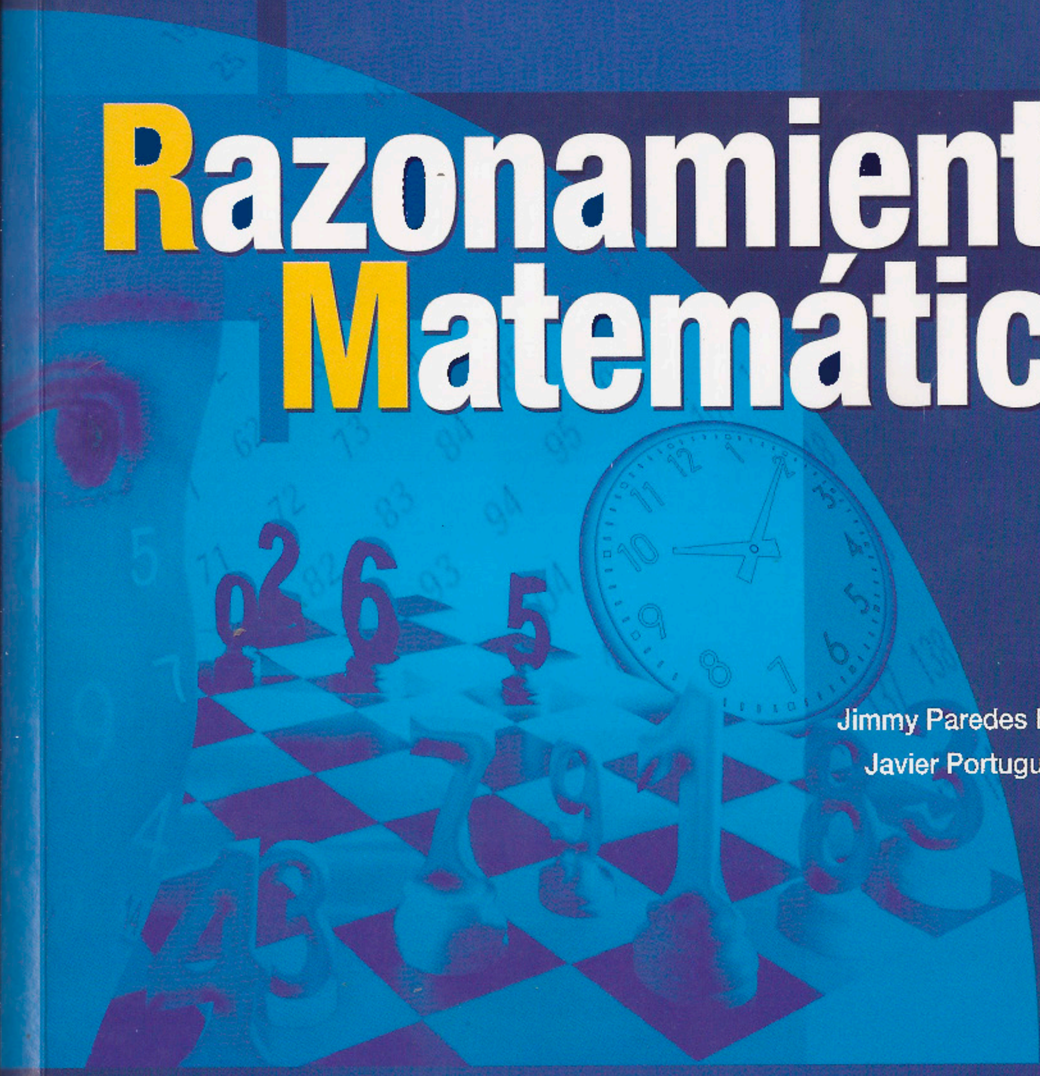
Colección Compendios Académicos

Razonamiento Matemático



Jimmy Paredes Barbarón
Javier Portuguez Pérez

Lumbreras
Editores

Índice

Presentación

La realidad de la educación en el Perú es hoy algo preocupante. Los distintos esfuerzos provenientes del Gobierno no se ven reflejados en avances significativos en este aspecto. Las políticas educativas nos muestran resultados negativos desde hace ya muchos años, y es poco lo que los estudios y las propuestas han logrado mejorar en las condiciones del sistema educativo; peor aún, permiten las desigualdades a nivel socioeconómico en las zonas rurales más alejadas del país; es decir, los estudiantes reciben una educación de baja calidad y en condiciones precarias.

En este contexto, los esfuerzos por aportar al desarrollo de la cultura y la educación en el país serán siempre valorados. Es así que, conscientes de esta realidad, la Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Afined), a través de su sello Lumbreras Editores, tiene como uno de sus objetivos contribuir al desarrollo de la educación; ello se cristaliza a través del aporte de los profesores del Instituto de Ciencias y Humanidades, quienes han sistematizado los materiales de manera didáctica gracias a su amplia experiencia docente que garantizan un contenido de calidad y, sobre todo, siempre accesible a los sectores populares, sumado a la presencia de nuestro sello editorial en distintos puntos del territorio nacional.

En esta ocasión presentamos el libro *Razonamiento matemático*, perteneciente a la Colección Compendios Académicos, publicación dirigida al estudiante preuniversitario, que constituye una herramienta útil para reforzar sus conocimientos gracias al trabajo teórico-práctico así como los problemas resueltos y propuestos mostrados por niveles, que permiten una mejor comprensión del tema. Este libro se constituye en material de consulta no solo para alumnos sino también para docentes, tanto de los últimos años del nivel escolar como preuniversitario.

Finalmente, nuestra institución reafirma su compromiso con la educación y la cultura del país, contribuyendo en la elaboración de libros de calidad, además de promover el trabajo de investigación, que nos permite acceder a una educación científica y humanista; todo ello siempre al servicio de los sectores más amplios de nuestra sociedad.

Razonamiento lógico

Capítulo I

OBJETIVOS

- Potenciar su razonamiento creativo aplicando su criterio lógico en la resolución de problemas.
- Estimular los diversos aspectos que llevan a enfocar la matemática desde un punto de vista lúdico y entretenido.

En este capítulo se abordarán principalmente los siguientes problemas:

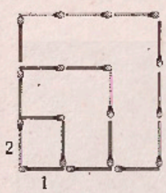
Arreglos con cerillos

Los cerillos pueden ser usados para definir formas y figuras que cumplan condiciones geométricas, o también pueden usarse para representar números o ecuaciones que cumplan condiciones aritméticas o algebraicas.

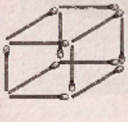
Podemos distinguirlos en gráficos y operaciones matemáticas.

Gráficos

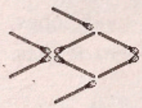
Ejemplos



Tres cuadrados de diferente tamaño. Si se retiran los cerillos 1 y 2, no se formarán cuadrados.



Doce cerillos forman un cubo que cuenta con seis caras cuadradas.

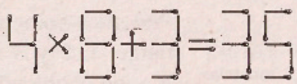


Ocho cerillos que forman un pez con dirección a la derecha.

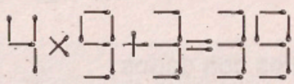
Operaciones matemáticas

Ejemplo

La operación 4×8+3=35 usando cerillos sería



Moviendo un cerillo podemos obtener



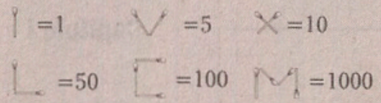
lo cual también es correcto, pues 4×9+3=39.

Un ejemplo en números romanos sería

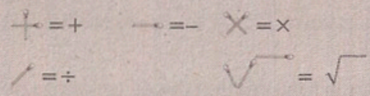
 ($\sqrt{4}=2$)

Nota

En el caso de los números romanos, considere las siguientes representaciones con cerillos.



También considere los siguientes signos matemáticos:



Arreglos con monedas

En estos casos se deberá conseguir distribuciones especiales de monedas bajo ciertas condiciones, ya sea con un mínimo o máximo número de ellas.

Ejemplos

Triángulo compacto formado por 15 monedas iguales (figura 1). Alrededor de cada moneda hay tangencialmente otras; como máximo seis, en el caso de la moneda 1 (figura 1).

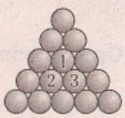


figura 1

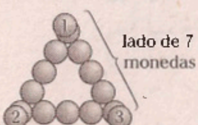


figura 2

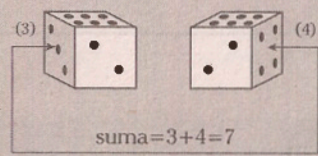
Podemos colocar las monedas 1, 2 y 3 sobre las monedas ubicadas en los vértices y formar un triángulo de siete monedas por lado (figura 2).

Arreglos con dados

La dificultad radica en encontrar los valores ocultos por la distribución de dados. En ocasiones solo es necesario la suma.

¿Sabía que...?

En todo dado común, la suma de los puntajes de dos caras opuestas es 7; así



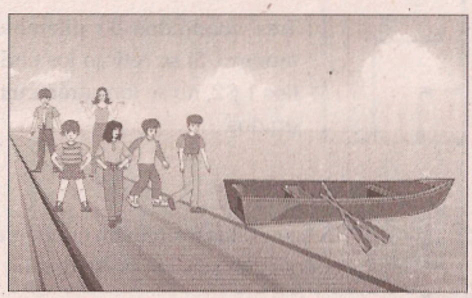
De igual forma

- Adelante tenemos 2 puntos, entonces atrás habrá 7–2=5 puntos.
- En la cara inferior habrá 7–6=1 punto.

Los juegos lógicos consisten en ejercicios recreativos sometidos a reglas o condiciones que desarrollarán nuestra capacidad de razonar. Hay una diversidad de juegos lógicos; sin embargo, en este capítulo se estudiarán los más frecuentes.

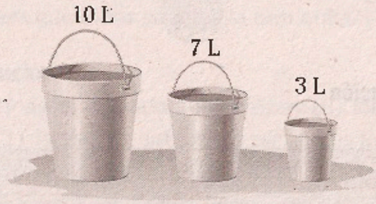
Problemas sobre traslados

Bajo ciertas condiciones del problema, trasladaremos a personas, animales u objetos hacia otra posición con el menor número de movimientos. Son muy frecuentes los problemas referentes a traslados de personas en un bote (viajes).



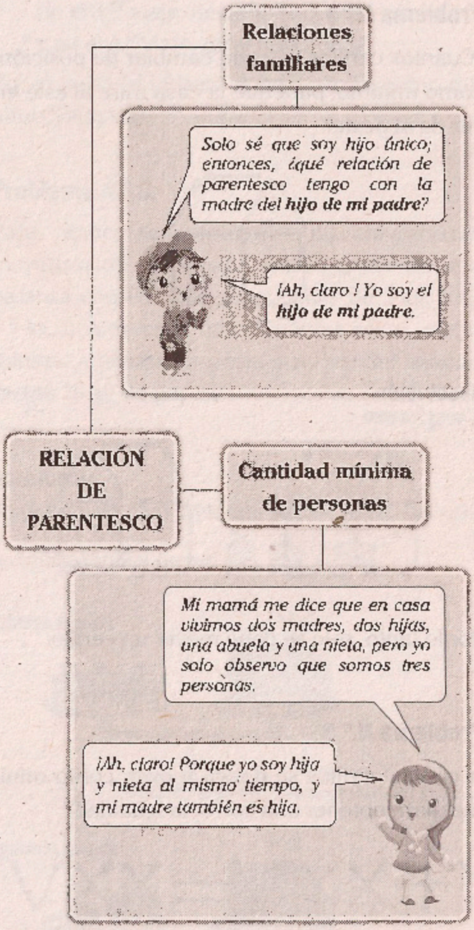
Problemas sobre trasvases

Se deberá verter líquido de un recipiente a otro hasta obtener el volumen del líquido requerido, pero con el menor número de traslados. La mayor dificultad reside en que los recipientes estarán sin graduar, es decir, no tienen marcas para realizar mediciones exactas.



Problemas sobre estrategias

En realidad, para resolver todo tipo de problema aplicamos ciertas estrategias, pero en este caso nos referimos a los juegos donde participan dos o más personas en forma alternada. Debemos considerar que cada persona en su turno realizará su jugada (sometida a ciertas reglas) buscando anticipar las jugadas de sus oponentes y siguiendo un procedimiento lógico que le permita tomar el control del juego y garantizar su victoria.



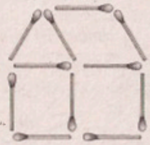
Observación

En los problemas sobre trasvases, considere lo siguiente:

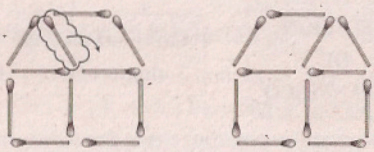
- No es posible realizar dos o más trasvases simultáneos.
- No se desperdicia líquido.
- En cada trasvase solo es posible llenar un recipiente o vaciar aquel del cual se vierte el líquido.

Problema N.º 1

¿Cuántos cerillos hay que cambiar de posición, como mínimo, para que la casa mire al este en vez de al oeste?



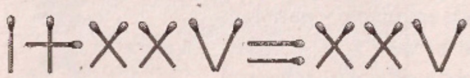
Resolución



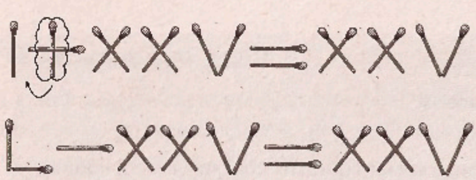
Por lo tanto, solo se debe mover un cerillo.

Problema N.º 2

¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para obtener una correcta igualdad?



Resolución



Por lo tanto, solo se debe mover un cerillo.

Problema N.º 3

En la figura se muestran 4 monedas de S/.1. ¿Cuál es el máximo número de monedas de S/.1 que pueden ser colocadas tangencialmente a ellas?

Resolución

Nota

Alrededor de una moneda se pueden ubicar de forma tangencial 6 monedas del mismo tamaño, como máximo.

Entonces, en el problema

Por lo tanto, se pueden colocar, como máximo, 10 monedas.

Problema N.º 4

Un balsero debe transportar, de una orilla a la otra de un río, a un lobo, una col y una oveja; pero el bote solo tiene capacidad para trasladar al balsero y a uno de los tres seres vivos. Se sabe que, en ausencia del balsero, el lobo puede comerse a la oveja y la oveja puede comerse la col. Si el balsero debe garantizar el cuidado de cada ser, ¿cuántos viajes, como mínimo, debe realizar para que todos pasen a la otra orilla?

Resolución

A partir del enunciado, sean balsero (*B*), lobo (*L*), col (*C*) y oveja (*V*), surgen las siguientes interrogantes:

¿Qué debe trasladar el balsero en el 1.er viaje?

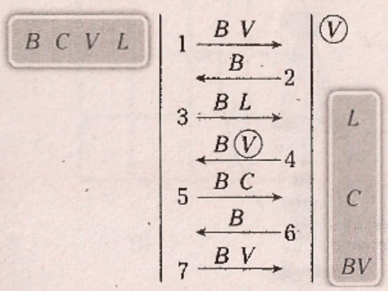
- Si viaja *B* con *C*, entonces *L* se come a *V*.
- Y si viaja *B* con *L*, entonces *V* se come a *C*.

En cambio, si *B* viaja con *V*, entonces no habría problemas porque *L* no come a *C*.

Se concluye que el balsero viajará con *V*. Luego el balsero deja a *V* en la otra orilla (2.º viaje).

En el 3.er viaje

- Si *B* viaja con *C* o con *L*, necesariamente *B* debe regresar con *V* para evitar que sea devorada por *L* o se coma a *C*. Luego el balsero continúa con los viajes cumpliendo las condiciones dadas.
- En el siguiente gráfico, mostramos los viajes que se realizan.



- En el 3.er viaje, decidimos que *B* viaja con *L*; y en el 4.º viaje, *B* regresa con *V*.

Por lo tanto, el balsero debe realizar, como mínimo, siete viajes.

Problema N.º 5

Para vender sus productos, un comerciante mayorista de tubérculos solo dispone de una balanza con dos platillos y pesas de 3 kg, 5 kg y 7 kg, una de cada una. ¿Cuántas veces, como mínimo, utilizará las pesas para vender exactamente 26 kg de papas?

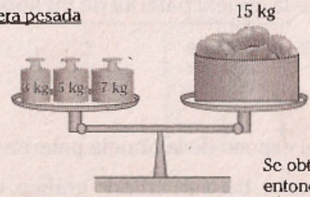
UNMSM 2007-II

Resolución

Se deben obtener 26 kg de papas, para ello solo se utilizarán las pesas 3 kg, 5 kg y 7 kg.

Primera pesada

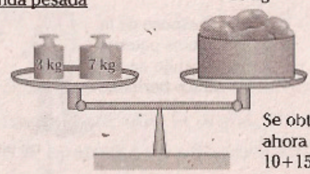
15 kg



Se obtiene 15 kg, entonces faltan 11 kg.

Segunda pesada

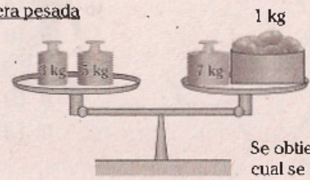
10 kg



Se obtiene 10 kg, ahora tenemos 10+15=25 kg, entonces falta 1 kg.

Tercera pesada

1 kg



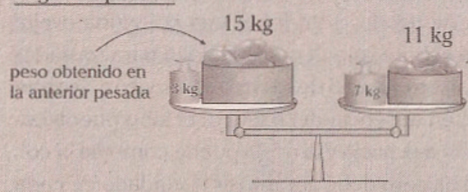
Se obtiene 1 kg, con el cual se completa 26 kg.

Se utilizaron tres veces las pesas; por lo tanto, el número de pesadas es 3.

Observación

Si se permitiera usar los objetos obtenidos, como pesas, solo se requeriría dos veces las pesas. La primera pesada sería igual que la consideración anterior.

Segunda pesada



Se obtendría los 11 kg que faltaban.

Problema N.º 6

¿Qué representa para mí el esposo de la abuela paterna del hijo de mi único hermano?

Resolución

Analicemos el enunciado desde la parte final y vayamos estableciendo las relaciones familiares.

... El esposo de la abuela paterna del hijo de mi único hermano

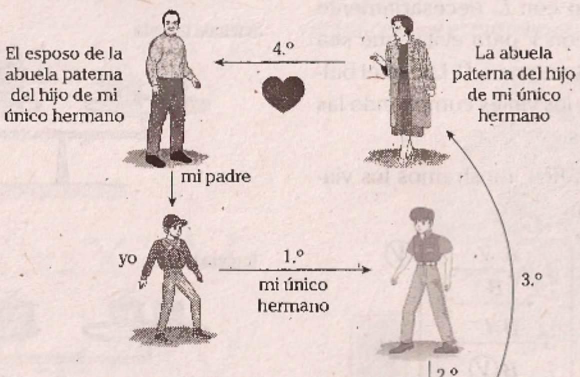
... El esposo de la abuela paterna de **mi sobrino**

... el esposo de **mi madre**

... **mi padre**

Por lo tanto, el esposo de la abuela paterna del hijo de mi único hermano es mi padre.

Ahora abordemos, bajo un criterio gráfico, el desarrollo del mismo problema.



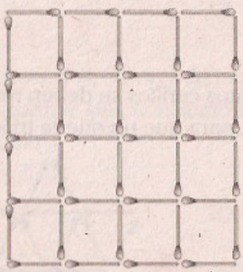
PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. ¿Cuántos cerillos debemos mover, como mínimo, para obtener 19 cuadrados en total?

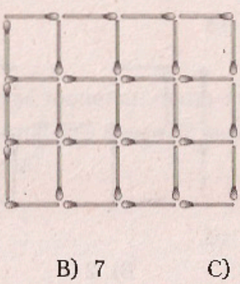
A) 4 B) 6 C) 7
D) 5 E) 8

2. ¿Cuántos cerillos debemos retirar, como mínimo, para que en la figura solo queden ocho cuadrados del mismo tamaño?



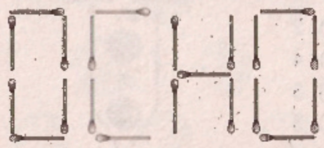
A) 7 B) 9 C) 12
D) 10 E) 8

3. ¿Cuántos cerillos debemos retirar, como mínimo, para que la figura resultante esté formada por cuatro hexágonos iguales?



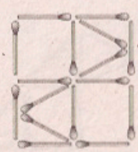
A) 8 B) 7 C) 6
D) 10 E) 12

4. Con 21 cerillos se ha escrito el nombre del número 8. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que se forme el nombre de otro número?



A) 1 B) 5 C) 2
D) 4 E) 3

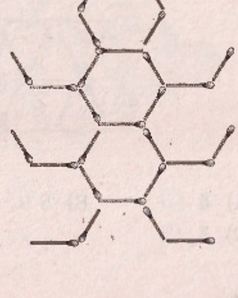
5. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la figura cuadrada quede dividida en cuatro regiones de igual forma y tamaño, sin dejar cerillos sueltos?



A) 6 B) 2 C) 5
D) 4 E) 3

6. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la araña, sin perder su forma, aparezca en otra posición?

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

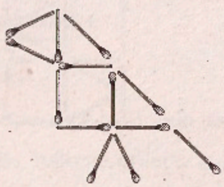


7. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que las cerezas queden fuera de la copa?

Obs.: La copa debe mantener su forma.

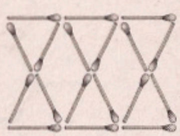
A) 2
B) 4
C) 5
D) 3
E) 6

8. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que el ave representada en la figura se ubique en otra dirección sin perder su forma?



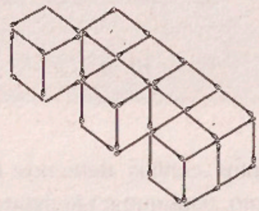
A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

9. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la figura resultante esté formada por 6 rombos iguales?



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

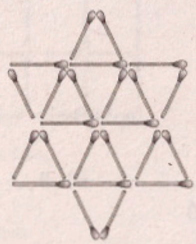
10. Los 40 cerillos de la figura han sido colocados de manera que parecen formar un sólido conformado por 7 cubitos iguales. ¿Cuántos cerillos deben moverse, como mínimo, para que en el sólido resultante se aprecien 9 cubitos iguales a los anteriores?



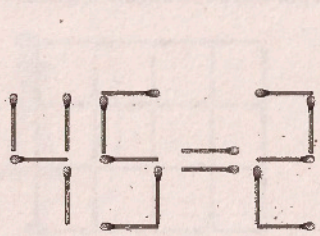
A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

11. ¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para que no quede triángulo alguno?

A) 4
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

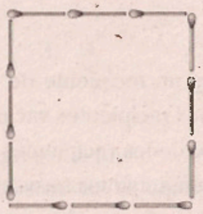


12. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para obtener una igualdad válida?



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13. La siguiente figura es un cuadrado formado por 12 cerillos, donde cada cerillo mide 1 cm y el área de la figura es 9 cm^2. ¿Cuántos cerillos hay que mover, como mínimo, para que la figura resultante tenga 6 cm^2 de área?



A) 3 B) 5 C) 2
D) 6 E) 4

14. ¿Cuántas monedas, como mínimo, se necesitan para formar seis líneas de tres monedas cada una?

A) 18 B) 12
C) 9
D) 7 E) 6

15. ¿Cuántas monedas, como mínimo, se necesitan para formar cinco líneas de cuatro monedas cada una?

A) 8 B) 9
C) 10
D) 12 E) 14

16. ¿Con cuántas monedas, como mínimo, se pueden formar seis líneas de cuatro monedas cada una?

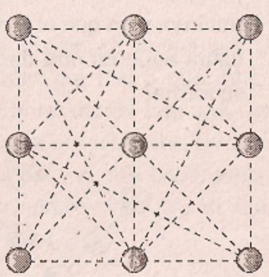
A) 9 B) 12
C) 10
D) 14 E) 13

17. ¿Cuántas monedas se deben agregar, como mínimo, para que se formen diez líneas de tres monedas cada una?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

18. ¿Cuántas monedas debemos agregar en el gráfico mostrado, como mínimo, para que se formen dieciocho líneas de tres monedas cada una?

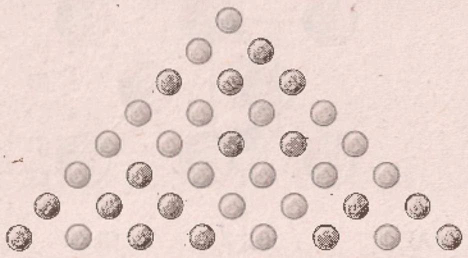
A) 2
B) 3
C) 4
D) 6
E) 8



19. ¿Cuántas monedas debemos mover y reubicarlas de modo que se formen un cuadrado y un triángulo, ambos que tengan cinco monedas en cada lado?

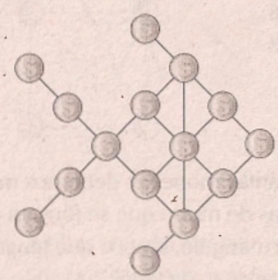
A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

20. ¿Cuántas monedas se deben mover, como mínimo, para formar con todas las monedas un cuadrado?



A) 4 B) 5 C) 6
D) 9 E) 8

21. ¿Cuántas monedas debemos mover, como mínimo, para que el pez representado en la figura nade en otra dirección conservando su forma?



A) 3 B) 4
C) 5
D) 6 E) 7

22. Se tiene un recipiente de 30 L lleno de vino y dos recipientes vacíos de 8 L y 5 L. Si ninguno de los recipientes tiene marcas de medición, ¿cuántos trasvases se hará, como mínimo, para medir exactamente 6 L sin desperdiciar vino?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

23. Se tiene un recipiente de 40 L lleno de leche y dos recipientes vacíos de 7 L y 3 L. Si ninguno de los recipientes tiene marcas de medición, ¿cuántos trasvases se hará, como mínimo, para medir exactamente 5 L sin desperdiciar leche?

A) 6 B) 8 C) 7
D) 9 E) 10

24. Tenemos un recipiente con 80 L de cerveza y tres recipientes vacíos de 27 L, 11 L y 4 L que no presentan marcas de graduación alguna. ¿Con cuántos trasvases, como mínimo, se pueden medir exactamente 17 L, de manera que estos queden en un solo recipiente?

A) 11 B) 7 C) 10
D) 9 E) 8

25. ¿Cuántos cerillos se deben utilizar, como mínimo, para construir ocho triángulos iguales y un cuadrado, cuyos lados tengan la misma medida?

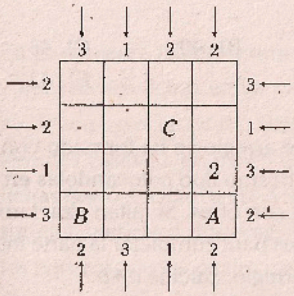
A) 10
B) 9
C) 12
D) 14
E) 16

NIVEL INTERMEDIO

26. ¿Cuántos cuadrados, como máximo, se pueden construir con 20 cerillos, de modo que la longitud de cada lado de los cuadrados mida un cerillo?

A) 9 B) 11 C) 10
D) 12 E) 14

27. El tablero representa un área de edificios en la que en cada casilla se ubica un edificio. En cada horizontal y vertical, los edificios son todos de distintas alturas (de 1 a 4 pisos). Los valores que están junto a los bordes del tablero indican cuántos edificios son visibles en esa dirección. El número 2 que figura dentro del tablero indica que en dicha casilla hay un edificio de dos pisos.



Calcule $2A+3B+4C$.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

28. Dos parejas de recién casados, con sus respectivos bebés, se encuentran en la orilla de un río y quieren cruzarlo con la ayuda de una canoa, donde pueden ingresar dos personas, como máximo. Los bebés deben estar en todo momento en compañía de alguno de sus padres. Los esposos no permiten a sus esposas estar en compañía de otro hombre en su ausencia. ¿Cuántos viajes harán, como mínimo, para cruzar el río?

A) 7 B) 8 C) 11
D) 9 E) 10

29. Después de una batalla, en la orilla de un río se encuentran tres doctores y siete heridos que desean cruzarlo con la ayuda de un bote, en el que podían ir, como máximo, tres personas. ¿Cuántos viajes deben realizar, como mínimo, para que puedan cruzar todos, si los doctores son los únicos que pueden conducir el bote y, además, los heridos deben estar siempre asistidos al menos por un doctor?

A) 7 B) 9 C) 8
D) 11 E) 10

30. En la orilla de un río se encuentran los números naturales del 1 al 5 que quieren cruzarlo en un bote, donde hay una capacidad máxima para dos números, siempre y cuando uno sea par y el otro impar pero no consecutivos. ¿Cuántos viajes harán, como mínimo, para cruzar el río?

A) 9 B) 10 C) 11
D) 8 E) 7

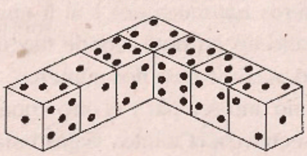
31. A orillas de un río, un granjero quiere pasar un pavo, un gallo y un cubo lleno de maíz hacia otra orilla. Para ello dispone de una canoa donde solo pueden ir él y una de las tres cosas. Si el pavo o el gallo se quedan solos con el maíz, se lo come inmediatamente. ¿Cuántos viajes necesita realizar el granjero para lograr pasarlos a la otra orilla?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

32. Cinco personas desean cruzar un angosto sendero en la montaña que da cabida para que pasen simultáneamente por él solo dos personas. Si lo cruzaran individualmente, tardarían 1; 2; 4; 7 y 11 minutos, respectivamente; pero como es de noche y tienen una sola linterna, deben arreglárselas para que se use la linterna cada vez que se cruce el sendero. Además, cada vez que dos personas pasen por dicho sendero lo harán al ritmo del más lento. ¿Cuántos minutos serán necesarios para que todos crucen?

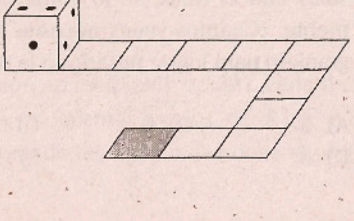
A) 21 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

33. De acuerdo al siguiente gráfico, ¿cuánto suman los puntos de las caras no visibles, si son dados comunes?



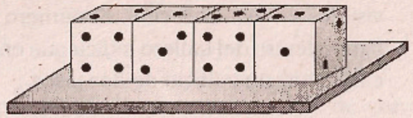
A) 96 B) 94 C) 95
D) 93 E) 97

34. ¿Cuántos puntos mostrará el dado común en su cara superior cuando llegue a la casilla sombreada si va girando de acuerdo al camino mostrado?



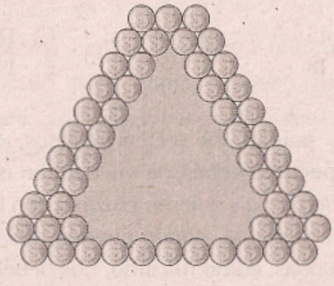
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

35. Todos los dados de la mesa presentan en sus caras números del 1 al 6 y cada uno se ha unido con otro por medio de caras con la misma cantidad de puntos. Uno de ellos es un dado común, en otro dado sus caras opuestas suman tres números primos, en otro sus caras opuestas suman tres números consecutivos, y en el restante sus caras opuestas suman tres números impares consecutivos. Si es posible desplazarse alrededor de la mesa, sin mover los dados, halle cuánto suman las caras no visibles de los dados.



A) 39 B) 40 C) 43
D) 37 E) 42

36. El siguiente arreglo se ha formado con monedas del mismo tipo colocándolas en contacto unas con otras. Si faltan exactamente $\overline{ab}$ monedas para completar la parte interna de dicho arreglo, calcule $a+b$.



A) 5 B) 7 C) 6
D) 8 E) 9

37. Se tienen una balanza de dos platillos y tres pesas metálicas de 17 kg, 9 kg y 2 kg. Si tenemos un saco lleno de azúcar y bolsas plásticas para despachar, ¿cuántas pesadas se deberán usar, como mínimo, para obtener exactamente 23 kg?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

38. En una tienda, un vendedor tiene una balanza de dos platillos y tres pesas metálicas de 1 kg, 3 kg y 9 kg. ¿Cuántos pesos diferentes puede obtener cuando use la balanza?

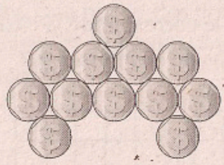
A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

39. En el siguiente tablero numerado ya se han colocado dos fichas en las casillas 19 y 35, y se deben colocar cuatro fichas más (en diferentes casillas), de modo que no haya dos fichas que coincidan en una misma línea, horizontal, vertical o diagonal. ¿Cuánto suman los números de las cuatro casillas en las que ubicaremos las cuatro fichas restantes?

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34		36

A) 55 B) 56 C) 57
D) 58 E) 59

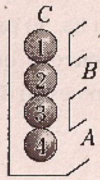
40. ¿Cuántas monedas del mismo tipo se pueden colocar en contacto, como máximo, alrededor de las mostradas en la siguiente figura?



A) 16 B) 17 C) 19
D) 20 E) 18

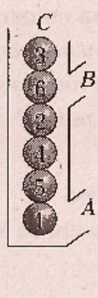
41. En la siguiente caja de esferas, un movimiento consiste en sacar una esfera por A o B e inmediatamente introducirla por C. Si queremos ordenar las esferas de manera descendente, es decir, 4; 3; 2; 1 (de arriba hacia abajo), ¿cuántos movimientos serán necesarios?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 7
E) 8



42. De acuerdo a las indicaciones del ejercicio anterior, ¿cuántos movimientos serán necesarios para ordenarlos descendentemente, es decir, 6; 5; 4; 3; 2; 1 en el siguiente caso?

A) 10
B) 11
C) 12
D) 14
E) 15



43. Se deben juntar todos los pares de números iguales con una línea continua, que una los centros de dichas casillas. Todas las casillas en blanco de la cuadrícula deben quedar cortadas por solo una línea. ¿A qué par de números le corresponde la casilla resaltada, si las líneas no se intersecan?

						4
	4					
					2	
		1				
						3
		5				
				3	5	
			2	1		

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

44. Eddy le dice a su papá que la hermana de su tío no es su tía. Su papá le responde: *Tienes razón*. Entonces, ¿quién es la hermana de su tío que no es su tía?

A) su tía
B) su madre
C) su hermana
D) su amiga
E) su prima

45. Melissa mira un retrato diciendo: *No tengo hermanos ni hermanas; sin embargo, el padre de esta mujer es hija de mi padre*. ¿De quién es el retrato?

A) de Melissa
B) de la madre de Melissa
C) de la hija de Melissa
D) de la abuela de Melissa
E) de la sobrina de Melissa

46. Dos personas se encuentran dialogando; una de ellas le dice a la otra: *Yo soy el hijo de la única nuera de tu madre*, y la otra responde: *Sí, pero yo no soy tu padre*. ¿Qué relación de parentesco existe entre los padres de dichas personas?

A) primos
B) sobrino-tío
C) cuñados
D) hijo-padre
E) nieto-abuelo

47. Si Zoe es la hija de mi único cuñado, ¿qué representa para mí el esposo de la madre de la única hermana del esposo de la madre de Zoe? Considere que soy hijo único.

A) mi padre
B) mi tío
C) mi hermano
D) mi suegro
E) mi abuelo

48. Efraín y Juan son dos amigos de 10 años cada uno. Un día Efraín le dice a Juan: *El padre de tu único hermano es suegro de mi padre*. ¿Qué relación de parentesco existe entre Efraín y Juan?

A) hijo-padre
B) primos
C) sobrino-tío
D) nieto-abuelo
E) hermanos

49. En una reunión familiar se encuentran presentes un bisabuelo, dos abuelos, una abuela, tres padres, dos madres, dos suegros, dos nueras, dos nietos, un bisnieto y tres hijos. ¿Cuántas personas, como mínimo, hay en dicha reunión familiar?

A) 4 B) 6
C) 7
D) 8 E) 9

50. En un ómnibus viajan dos padres, dos madres, tres hijos, un abuelo, una abuela, un tío, un sobrino, dos hermanos, un nieto, una suegra, un suegro, una nuera, una cuñada y un cuñado. ¿Cuántas personas, como mínimo, son pasajeros en dicho ómnibus?

A) 4 B) 5
C) 6
D) 7 E) 8

51. Para la celebración del cumpleaños de Alejandro, este invitó a su casa a x personas. En el momento del brindis, estaban presentes un abuelo, una abuela, un padre, dos madres, dos esposos, dos esposas, un suegro, una suegra, una nuera, dos tíos, dos hermanas y un nieto. Si Alejandro vive solo, halle el menor valor de x.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

52. En una reunión familiar se encuentran presentes un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, un nieto, dos hermanas, dos hijos, una tía, un cuñado, una cuñada, un sobrino, una suegra, un suegro y una nuera. ¿Cuántas personas, como mínimo, hay en dicha reunión familiar?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Verdades y mentiras

Capítulo II

OBJETIVOS

- Relacionar enunciados de significado confirmatorio o contradictorio y a partir de ellos establecer algunas conclusiones.
- Usar certeramente el razonamiento lógico en el análisis de proposiciones.

Verdades y mentiras

Resolver problemas sobre verdades y mentiras significa obtener conclusiones a partir de un conjunto de proposiciones, cuyos valores de verdad se desconocen; sin embargo, ya que estas están relacionadas entre sí con condiciones particulares dadas, se pueden descubrir sus valores de verdad.

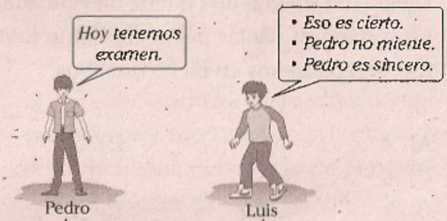
Veamos algunas observaciones previas.

PROPOSICIONES QUE SE CONTRADICEN

Aldo y Beto se contradicen.

Uno de ellos debe estar diciendo la verdad y el otro, en consecuencia, debe estar mintiendo necesariamente.

PROPOSICIONES QUE SE APOYAN



Pedro y Luis se apoyan
(sus afirmaciones son confirmatorias).

O bien ambos dicen la verdad o bien ambos mienten, es decir, ambas afirmaciones deben tener el mismo valor de verdad.

CRITERIOS DE RESOLUCIÓN

Resolución por contradicción

Agrupamos las proposiciones que se contradicen puesto que con ellas aseguramos proposiciones verdaderas y falsas; a partir de las cuales se obtiene su respectivo valor de verdad.

Resolución por suposición

Se asigna un valor de verdad a una de ellas (ya sea verdad o mentira) y, a partir de ello, examinamos el valor de verdad de las demás. Cuando se cumplan todas las condiciones, el problema se habrá solucionado.

Problema N.º 1

Miguel, Fernando, Mario y David son sospechosos de haber robado un celular en una fiesta a la cual los cuatro habían asistido. Cuando se les interrogó acerca del robo, ellos afirmaron lo siguiente:

Miguel: *Yo no fui.*

Fernando: *Mario fue.*

Mario: *Fernando miente.*

David: *Yo lo robé.*

Si se sabe que solo uno robó el celular y tres mienten, ¿quién robó el celular?

Resolución

Fernando: *Mario fue.* ○
Mario: *Fernando miente.* ●
Se contradicen: 1V y 1F necesariamente.

David: *Yo lo robé.* Ⓕ
Miguel: *Yo no fui.* ← Ⓕ
Deben completar las dos falsas que faltan.

por dato 1V y 3F

Luego, Miguel dijo que él no había sido; pero como eso es falso, entonces Miguel sí es el culpable.

Problema N.º 2

Manuel, Carlos y Edwin son tres amigos. Se sabe que dos de ellos pesan 55 kg y siempre mienten, mientras que el peso de la tercera persona es 64 kg y siempre dice la verdad.

Si Carlos afirma: *Manuel no pesa 55 kg,* indique la proposición correcta.

I. Carlos y Edwin mienten.
II. Manuel y Carlos pesan 119 kg juntos.
III. Edwin pesa 64 kg.
IV. Manuel dice la verdad.
V. Carlos no pesa 55 kg.

Resolución

Supongamos que Carlos dice la verdad, entonces pesa 64 kg y, además, lo que dice debe ser cierto; por lo tanto, Manuel no pesa 55 kg, y como no pesa 55 kg, significa que Manuel debe pesar 64 kg.

Luego tendríamos a dos personas que pesan 64 kg, lo cual no cumple las condiciones del problema.

A partir del análisis anterior, llegamos a la conclusión de que Carlos está mintiendo, y por dato quien miente pesa 55 kg. Además, como su afirmación es falsa, se deduce que Manuel sí pesa 55 kg. Finalmente, Edwin debe ser la persona que pesa 64 kg.

Problema N.º 3

Cinco amigos son interrogados por un señor que reconoce haber visto a uno de ellos rayar su auto. Ellos respondieron:

Diana: *Gino rayó el auto.*

Kevin: *Soy inocente.*

Viviana: *Fernando no fue.*

Gino: *Diana miente.*

Fernando: *Kevin dice la verdad.*

Se sabe que solo dos de ellos mienten. ¿Quién rayó el auto?

Resolución

Diana: *Gino rayó el auto.* ○
Gino: *Diana miente.* ●
Se contradicen 1V y 1F.

Kevin: *Soy inocente.* $\boxed{V}$
Fernando: *Kevin dice la verdad.* $\boxed{V}$
Se apoyan (son iguales).

1F y 3V

Viviana: *Fernando no fue.* F ← (para completar)

dato: 2F y 3V

Luego, a partir de lo que dice Viviana que es falso, llegamos a la conclusión que Fernando fue quien rayó el auto.

Problema N.º 4

Tulio dice la verdad los domingos, lunes, miércoles y sábados; en cambio, siempre miente los demás días de la semana. Si el día de hoy dice:

- *Ayer mentí.*
- *Anteayer dije la verdad.*
- *Mañana diré la verdad.*

A partir de lo que dice Tulio, determine qué día es hoy.

Resolución

Hagamos un horario para Tulio señalando día de verdad (V) y día de mentira (F).

dom.	lun.	mar.	mié.	jue.	vie.	sáb.	dom.
V	V	F	V	F	F	V	V

Supongamos que Tulio dice la verdad el día de hoy.

Entonces las tres afirmaciones que dio fueron ciertas y se deben cumplir, es decir

anteayer	ayer	hoy	mañana
V	F	V	V

que no corresponden a la secuencia de cuatro días seguidos en el horario basado en los datos.

Entonces Tulio necesariamente el día de hoy está mintiendo, por lo que ninguna de sus afirmaciones se debe de cumplir

anteayer	ayer	hoy	mañana
F	V	F	F
mar.	mié.	jue.	vie.

secuencia que se corresponde con

Por lo tanto, el día de hoy es jueves.

Problema N.º 5

En cierto pueblo habitan los ángeles que siempre dicen la verdad y los demonios que siempre mienten. Un día se encuentran conversando 6 de ellos y al preguntarles cuántos de ellos eran demonios respondieron lo siguiente:

A: *Por lo menos hay 1 demonio entre nosotros.*

B: *Por lo menos hay 2 demonios entre nosotros.*

C: *Por lo menos hay 3 demonios entre nosotros.*

D: *Por lo menos hay 4 demonios entre nosotros.*

E: *Por lo menos hay 5 demonios entre nosotros.*

F: *Los 6 somos demonios.*

¿Cuántos ángeles habían entre ellos?

Resolución

- Si F dijese la verdad, entonces sería ángel, pero de acuerdo a lo que dice los seis serían demonios y él sería uno de ellos. Se llega a una contradicción. Entonces F está mintiendo necesariamente; por lo tanto, es demonio.
- Hasta el momento ya tenemos un demonio. Entonces A está diciendo la verdad; por lo tanto, A es ángel.
- Hasta el momento ya sabemos que F es demonio y A es ángel.

Ahora, si el análisis que hicimos para F lo repetimos para E, llegaremos a la conclusión de que E es demonio, y como consecuencia inmediata tendremos que B dice la verdad y es ángel.

Finalmente al repetir el razonamiento inicial a D llegamos a inferir que este miente, lo cual implica que C dice la verdad y este último es ángel.

Luego tenemos

A (ángel)	D (demonio)
B (ángel)	E (demonio)
C (ángel)	F (demonio)

Por lo tanto, en el grupo hay tres ángeles.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Hay un anillo de oro dentro de una de las tres cajas de diferente color etiquetadas con las siguientes inscripciones.

   Caja ploma: *El anillo no está aquí.*

   Caja negra: *El anillo no está en la caja marrón.*

   Caja marrón: *El anillo está aquí.*

   Si solo uno de los enunciados es verdadero, entonces, ¿en qué caja está el anillo?

   A) ploma B) negra C) marrón
   D) No puede determinarse. E) absurdo

2. Cuatro sospechosos son interrogados, pues uno de ellos cometió un robo a un banco. Cada uno afirmó lo siguiente:

   Aldo: *Fue Gustavo.*

   Juan: *Yo no fui.*

   Raúl: *Fue Aldo.*

   Gustavo: *Aldo miente al decir que fui yo.*

   Si solo uno de ellos dice la verdad, ¿quién robó el banco?

   A) Aldo
   B) Juan
   C) Raúl
   D) Gustavo
   E) No puede determinarse.

3. Ana, Betty y Charo conversan sobre sus edades y durante la charla afirman:

   Ana: *Tengo 22 años; dos años menos que Betty y un año más que Charo.*

   Charo: *Tengo 27 años, Ana tiene 22 años, Betty tiene 28 años.*

   Si se sabe que Ana nunca miente, entonces se concluye que

   A) Charo mintió una sola vez.
   B) Charo siempre miente.
   C) Betty siempre miente.
   D) Betty mintió solo una vez.
   E) Betty siempre dice la verdad.

4. Dentro de un sobre cerrado hay un papel en el que está escrita una cifra. Tres de las afirmaciones que se dan a continuación respecto de dicha cifra son verdaderas y la otra es falsa.

   I. La cifra es 1.
   II. La cifra no es 2.
   III. La cifra es 3.
   IV. La cifra no es 4.

   ¿Cuál de las siguientes es necesariamente correcta?

   A) I es verdadera.
   B) II es falsa.
   C) II es verdadera.
   D) III es verdadera.
   E) IV es falsa.

5. Pedro repartió monedas de S/.0,5; S/.1; S/.2 y S/.5 entre sus cuatro hijos, una a cada hijo. Se sabe que cada uno dijo lo siguiente:

   Carlos: *Yo recibí S/.5.*

   Andrés: *Yo recibí S/.1.*

   Juan: *Carlos recibió S/.0,5.*

   Beto: *Yo recibí S/.0,5.*

   Si solo uno de ellos miente y los otros dicen la verdad, ¿cuánto suman las cantidades que recibieron los que dicen la verdad?

   A) S/.8 B) S/.8,5 C) S/.6,5
   D) S/.7,5 E) S/.3,5

6. Tres estudiantes son llamados a testificar por la desaparición de un portafolio y responden de la siguiente manera:

María: *Susan tiene el portafolio.*
Rolando: *Yo no fui, se lo aseguro.*
Susan: *María tiene razón.*

Se sabe que al menos uno dice la verdad y al menos uno miente. Si solo uno de ellos fue, ¿quién tiene el portafolio?

A) Rolando
B) Héctor
C) Susan
D) María
E) No puede determinarse.

7. Se muestran los letreros de tres puertas. Detrás de una de las puertas hay una dama, pero detrás de cada una de las otras dos hay un tigre. Además se sabe que en la puerta de la habitación donde está la dama, el letrero es verdadero, y que por lo menos uno de los otros dos letreros es falso.

Puerta I: *Aquí no está la dama.*
Puerta II: *Detrás de la puerta está la dama.*
Puerta III: *Aquí no hay un tigre.*

¿En qué habitación se encuentra la dama?

A) I B) II C) III
D) No puede determinarse. E) absurdo

8. Cinco hermanos son interrogados por su padre, pues uno de ellos rompió su florero favorito. Cada uno afirmó lo siguiente:

Miguel: *Javier fue.*
Esteban: *Richard no fue.*
Richard: *Carlos fue.*
Javier: *Yo no fui.*
Carlos: *Miguel fue.*

Si solo uno de ellos dice la verdad, ¿quién rompió el florero?

A) Miguel B) Esteban C) Richard
D) Javier E) Carlos

9. Cuatro niños tienen 4; 6; 8 y 10 canicas cada uno. Ellos dijeron lo siguiente:

Andrés: *Yo tengo 4 canicas.*
Benito: *Yo tengo 10 canicas.*
Carlos: *Andrés tiene 8 canicas.*
Daniel: *Yo tengo 8 canicas.*

Si solo uno de ellos miente y los otros dicen la verdad, ¿cuánto suman las cantidades que tienen Andrés, Benito y Carlos?

A) 18 B) 20 C) 22
D) 24 E) 26

10. En Villa Lógica viven cuatro hombres: el Sr. Delgado, el Sr. Moreno, el Sr. Franco y el Sr. Rubio. Uno de ellos es delgado, otro moreno, otro franco y otro rubio, pero ninguna de las características corresponde a sus apellidos. Un lógico intenta determinar quién es quién y obtiene la siguiente información:

- El Sr. Delgado es rubio.
- El Sr. Moreno es delgado.
- El Sr. Franco no es rubio.
- El Sr. Rubio no es franco

Se sabe que de las cuatro proposiciones, tres de ellas son falsas. ¿Quién es el moreno?

A) Sr. Delgado
B) Sr. Franco
C) Sr. Rubio
D) Sr. Delgado o el Sr. Franco
E) Sr. Franco o el Sr. Rubio

11. Tres amigos, Andrés, Beto y Simón, comentan lo siguiente:

Andrés: *Beto es mentiroso.*

Beto: *Simón es veraz.*

Simón: *Andrés y Beto son mentirosos.*

Entonces

A) Andrés y Beto son veraces.
B) Andrés es mentiroso.
C) Simón es mentiroso.
D) Andrés y Simón son mentirosos.
E) Beto es veraz.

12. Aldo, Daniel y Edwin son tres amigos; dos de ellos tienen 66 años y siempre mienten, mientras que el otro tiene 48 años y siempre dice la verdad. Si Aldo dijo: *La edad de Daniel no es 66 años*, entonces es cierto que

A) Aldo y Edwin mienten.
B) Aldo dice la verdad.
C) Daniel tiene 48 años.
D) Edwin y Daniel dicen la verdad.
E) Edwin tiene 48 años.

13. En una isla habitan solo dos tipos de personas: los caníbales, que siempre mienten, y los vegetarianos, que siempre dicen la verdad. Un extranjero se encuentra con tres habitantes de dicha isla y pregunta al primero: *De qué tipo es*; como este responde en un idioma desconocido para el extranjero pero no para los nativos de la isla, el segundo indica: *Ha dicho que es caníbal*; a lo que el tercero refuta diciéndole al segundo: *Eres un mentiroso*. ¿De qué tipo eran el segundo y el tercer habitante, respectivamente?

A) caníbal - caníbal
B) vegetariano - vegetariano
C) caníbal - vegetariano
D) vegetariano - caníbal
E) No puede determinarse.

14. Cuatro hermanos son interrogados por su padre, pues uno de ellos rompió el vidrio del estante. Cada uno afirmó lo siguiente:

Francisco: *Yo no rompí el vidrio.*

Carlos: *Álex rompió el vidrio.*

Enrique: *Francisco miente.*

Álex: *Carlos no fue.*

Si solo uno de ellos dice la verdad, ¿quién rompió el vidrio?

A) Francisco
B) Carlos
C) Enrique
D) Álex
E) No puede determinarse.

15. Tres amigos: Martín, Jorge y Víctor tienen la siguiente conversación:

Martín: *Yo soy menor de edad.*

Jorge: *Martín miente.*

Víctor: *Jorge es mayor de edad.*

Se sabe que solo uno miente y el otro es mayor de edad. ¿Quién miente y quién es mayor de edad, respectivamente?

A) Jorge - Víctor
B) Martín - Víctor
C) Jorge - Jorge
D) Víctor - Martín
E) Martín - Jorge

16. Cuatro sospechosos son interrogados porque uno de ellos robó una joya. Cada uno dio dos afirmaciones:

Néstor: *Yo no fui.*
Fue Sergio.

César: *Sergio no fue.*
Fue Néstor.

Sergio: *Yo nó fui.*
Fue Manuel.

Manuel: *César es inocente.*
Sergio y yo somos inocentes.

Si cada uno dijo una verdad y una mentira, ¿quién es el culpable?

A) Néstor
B) Manuel
C) César
D) Sergio
E) No puede determinarse.

17. Aldo es el mayor de tres hermanos. Según se levanten, cada uno decide ese día si se dedicará a decir la verdad siempre o a mentir siempre. Cierto día se establece la siguiente conversación entre ellos:

Hermano A: *Yo soy Carlos. Soy el hermano mayor de los tres.*

Hermano B: *Estás mintiendo. Yo soy Carlos.*

Hermano C: *Carlos soy yo.*

¿Cuál de los tres es Aldo?

A) A
B) B
C) C
D) No puede determinarse.
E) absurdo

18. Cinco sospechosos son interrogados por la policía, pues uno de ellos ha asaltado una bodega.

Mario: *Víctor fue.*

Paulo: *Sergio no fue.*

Juan: *Entre Paulo y Víctor está el culpable.*

Sergio: *Mario fue.*

Víctor: *Paulo fue.*

Si se sabe que uno de ellos dice la verdad, ¿quién es el culpable y quién dice la verdad?

A) Mario - Sergio
B) Víctor - Paulo
C) Paulo - Juan
D) Sergio - Mario
E) Juan - Paulo

NIVEL INTERMEDIO

19. En un pueblo hay dos razas: los honestos, que siempre dicen la verdad, y los ladrones, que siempre mienten. Un día un turista llega de visita y encontró a tres pueblerinos, y al preguntarles por su raza, ellos respondieron lo siguiente:

Primero: *Dos de nosotros somos honestos.*

Segundo: *No es cierto, solo uno de nosotros es honesto.*

Tercero: *Lo que dice el segundo es verdad.*

¿Cuántos honestos hay?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) falta información

20. Cuatro sospechosos de haber cometido un robo hicieron las siguientes afirmaciones cuando fueron interrogados:

Álex: *Ricardo no fue.*
Ricardo: *Elvis fue.*
David: *Yo no fui.*
Elvis: *Ricardo está mintiendo.*

Si solo uno de ellos miente y el culpable dijo la verdad, ¿quién es el inocente mentiroso?

A) Elvis
B) Ricardo
C) Álex
D) David
E) No puede determinarse.

21. En Transilvania solo existen humanos y vampiros; los primeros siempre dicen la verdad, mientras que los segundos siempre mienten. Cierto día se encuentran cinco amigos (A, B, C, D y E) que se conocen muy bien y dicen:

A: *Yo soy humano.*
B: *A es vampiro.*
C: *B es vampiro.*
D: *B es humano.*
E: *C es vampiro.*

Si entre los cinco amigos solo hay dos vampiros, ¿quiénes son?

A) B y D B) B y C C) A y C
D) A y D E) E y D

22. Cinco sospechosos son interrogados, pues uno de ellos robó una joya. Cada uno dio una declaración:

Renato: *Aníbal robó la joya.*
Aníbal: *Claudio es inocente.*
Rafael: *Daniel robó la joya.*
Daniel: *Aníbal es inocente.*
Claudio: *Renato robó la joya.*

Si solo tres de ellos dicen la verdad y el ladrón es mentiroso, ¿quién robó la joya?

A) Renato B) Aníbal C) Rafael
D) Daniel E) Claudio

23. Un juez estaba convencido de que cuatro de los cinco sospechosos (Raúl, Martín, Javier, Manuel y Frank) eran los asesinos de una mujer. Cada sospechoso hizo una afirmación:

Raúl: *Yo no la maté.*
Martín: *Raúl miente.*
Javier: *Martín miente.*
Manuel: *Martín la mató.*
Frank: *Manuel dice la verdad.*

Si solamente una de las afirmaciones es cierta, ¿quién dice la verdad?

A) Raúl B) Martín C) Javier
D) Manuel E) Frank

24. Un examen de cultura general consta de cinco preguntas, en el que solo se puede marcar SÍ o NO. Cuatro estudiantes rindieron dicho examen y respondieron de la siguiente manera:

	1.ª preg.	2.ª preg.	3.ª preg.	4.ª preg.	5.ª preg.
Luis	NO	NO	SÍ	NO	NO
Javier	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ
Mario	SÍ	NO	SÍ	NO	SÍ
Pedro	SÍ	NO	NO	SÍ	NO

Si uno de ellos acertó en todas sus respuestas, otro acertó solo en dos respuestas y otro falló en todas, ¿cuántas respuestas acertadas tuvo el estudiante restante?

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

25. Tres amigas: María, Rocío y Diana rinden un mismo examen de cinco preguntas. Cada pregunta debía ser contestada marcando verdadero (V) o falso (F). El cuadro muestra las respuestas que dio cada una. Se sabe que una contestó correctamente todas las preguntas, otra erró en todas y la restante contestó más correctas que erradas. ¿Quién respondió correctamente las cinco preguntas?

	María	Rocío	Diana
1	F	V	V
2	V	V	F
3	F	F	V
4	V	V	F
5	F	V	V

A) María
B) Rocío
C) Diana
D) Diana o Rocío
E) Rocío o María

26. Cuatro personas desconocidas y totalmente encapuchadas sostienen la siguiente conversación:

Beto: *Yo no tengo cabellos negros.*
Élmer: *Yo no tengo cabellos rubios.*
Mario: *Yo tengo cabellos rubios.*
Luis: *Yo no tengo cabellos castaños.*

Sabiendo que solo uno de ellos tiene cabellos de color negro y los demás tienen cabellos de color rubio, y solo una de las afirmaciones es falsa, ¿quién de ellos tiene cabellos de color negro?

A) Beto
B) Élmer
C) Mario
D) Luis
E) Faltan datos.

27. Andrés miente los días miércoles, jueves y viernes, y dice la verdad el resto de la semana. Pedro miente los domingos, lunes y martes, y dice la verdad los otros días de la semana. Si hoy ambos dicen: *Mañana será un día en el cual yo miento*, ¿qué día es hoy?

A) lunes B) sábado C) martes
D) jueves E) domingo

28. Un nuevo crimen ha ocurrido y cuatro sospechosos son interrogados.

Manco: *Yo no fui. Fue el Sordo.*
Ciego: *El Sordo no fue. Fue el Manco.*
Sordo: *Yo no fui. El mudo es inocente.*
Mudo: ----------

Cada uno de los que hablaron dijo una verdad y una mentira. ¿Quién fue el único culpable?

A) Manco
B) Sordo
C) Ciego
D) Mudo
E) Faltan datos.

29. Aldo miente los días lunes, miércoles y sábados, y dice la verdad el resto de la semana. Beto miente los jueves, sábados y domingos, y dice la verdad los otros días de la semana. Uno de ellos dice: *Ayer ambos dijimos la verdad*, y el otro dice: *Mañana ambos mentiremos*. ¿Qué día es hoy?

A) sábado
B) martes
C) jueves
D) domingo
E) miércoles

30. Aníbal, Víctor, Paúl y José toman una ficha diferente cada uno (las fichas están numeradas del 3 al 6) y dicen lo siguiente:

Aníbal: *Yo tengo la ficha 3.*
Víctor: *El número de mi ficha es el doble que el de José.*
Paúl: *Aníbal no tiene la ficha 3.*
José: *Paúl tiene la ficha 4.*

Si solo uno de ellos miente, ¿cuánto suman las fichas que tienen Víctor y José?

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

31. Cuatro alumnos, acusados de haber ocasionado disturbios en un centro de estudios, son entrevistados por un profesor. Al ser interrogados responden lo siguiente:

Mónica: *Martín participó.*
Martín: *David participó.*
Antonio: *Yo no fui.*
David: *Martín miente.*

Se sabe que tres de ellos mienten y el otro, que dice la verdad, es el único inocente. ¿Quién es el inocente?

A) Antonio
B) David
C) Mónica
D) Martín
E) No puede determinarse.

32. Ha ocurrido un robo y la policía tiene cinco sospechosos: Arturo, Alberto, Carlos, Darío y Eduardo, quienes al ser interrogados sobre el robo afirmaron lo siguiente:

Arturo: *Soy inocente.*
Alberto: *Carlos es culpable.*
Carlos: *Soy inocente.*
Darío: *Carlos es inocente.*
Eduardo: *Arturo es culpable.*

Se sabe que dos de las afirmaciones son verdaderas, además solo uno de ellos es culpable. ¿Quién es el culpable?

A) Arturo B) Alberto C) Carlos
D) Darío E) Eduardo

33. Cinco amigos, cuyas edades diferentes abarcan desde los 17 hasta los 21 años, comentan sobre sus edades:

Antonio: *Tengo 17 años.*
Beto: *Nací antes que Enrique.*
César: *Tengo 18 años.*
Darío: *Soy menor que César.*
Enrique: *Tengo 20 años.*

Si solo uno de ellos mintió, ¿cuántos años suman las edades de Beto y de Enrique?

A) 38 B) 40 C) 41
D) 37 E) 39

34. María repartió cinco monedas entre sus sobrinos. Las monedas son de distintas denominaciones: S/.1; S/.2; S/.5; S/.0,50 y S/.0,20. Ella y sus sobrinos comentan lo siguiente;

Aldo: *Recibí S/.1.*
Braulio: *No recibí S/.2.*
Darío: *Braulio recibió más que yo.*
Gustavo: *Aldo recibió S/.0,50.*
Héctor: *Darío no recibió S/.2.*
María: *Gustavo recibió menos que Aldo.*

Si solo uno de ellos dijo la verdad, ¿cuánto recibió Aldo?

A) S/.1 B) S/.0,50 C) S/.0,20
D) S/.5 E) S/.2

35. Cinco personas fueron interrogadas, pues una de ellas cometió un robo manifestando lo siguiente:

Alberto: *Yo no fui.*
Carlos: *Fue Felipe.*
Felipe: *Juan es inocente.*
Juan: *Fue Carlos.*
David: *Yo no fui.*

Si el ladrón fue el único que mintió, ¿quién es el ladrón?

A) Felipe B) Juan C) David
D) Alberto E) Carlos

36. Un crimen ha sido cometido por una persona y hay cinco sospechosos (la policía ya sabe que el culpable es uno de ellos). Al ser interrogados declaran lo siguiente:

Camilo: *Javier es el culpable.*
Ernesto: *Gerardo es el culpable.*
Gerardo: *Camilo fue.*
Arturo: *Ernesto no fue.*
Javier: *Yo no fui.*

Si el culpable dice la verdad y de los cinco sospechosos exactamente tres personas mienten, ¿quién es el culpable y quién es el inocente que declaró con la verdad?

A) Javier - Camilo
B) Gerardo - Ernesto
C) Ernesto - Javier
D) Arturo - Javier
E) Camilo - Gerardo

37. En una sabana africana, un explorador se encontró con un equipo de tres cazadores y les preguntó qué habían cazado. Las respuestas fueron las siguientes:

Primer cazador: *Cazamos 2 elefantes, 5 leones y una jirafa.*
Segundo cazador: *Cazamos 5 elefantes, 2 leones y 2 jirafas.*
Tercer cazador: *Cazamos un elefante, 2 leones y una jirafa.*

Se sabe que uno de los cazadores siempre dijo la verdad, otro mintió siempre y otro intercaló una verdad y una mentira (o una mentira y una verdad). ¿Qué animales fueron cazados en total?

A) 2 elefantes, 5 leones y una jirafa
B) 5 elefantes, 2 leones y 2 jirafas
C) un elefante, 2 leones y una jirafa
D) una jirafa y 2 leones
E) 5 elefantes y 2 jirafas

Distribuciones numéricas

Capítulo III

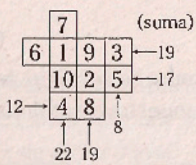
OBJETIVOS

- Reconocer las relaciones existentes en los elementos de un conjunto numérico.
- Aplicar con un sentido lógico diversas formas de distribuir números en las que se cumplan determinadas condiciones.

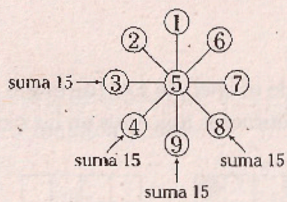
Distribuciones numéricas

En este tipo de problemas se debe distribuir un conjunto de números bajo ciertas condiciones, como por ejemplo:

Condiciones de sumas o productos indicados por las flechas que deben cumplir los números que se ubican en las casillas.



Obtener sumas constantes (a veces mínimas o máximas) completando las casillas y siguiendo un criterio lógico.

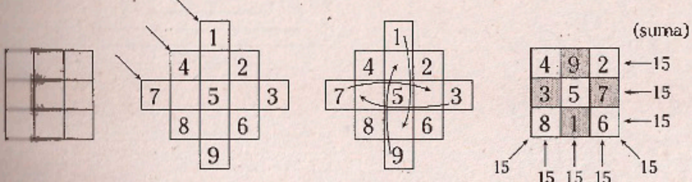


Cuadrados mágicos

Son distribuciones numéricas particulares, en arreglos cuadrados, donde se cumple que la suma de los números ubicados en cada fila, columna y diagonal sea la misma.

CUADRADO MÁGICO DE ORDEN 3

Ubiquemos los números naturales del 1 al 9, de modo que en cada fila, columna o diagonal la suma sea siempre la misma.

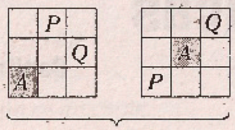


(paso 1) (paso 2) (paso 3)

OBSERVACIÓN

La constante mágica es 15.

Propiedades



$$A=\frac{P+Q}{2}$$

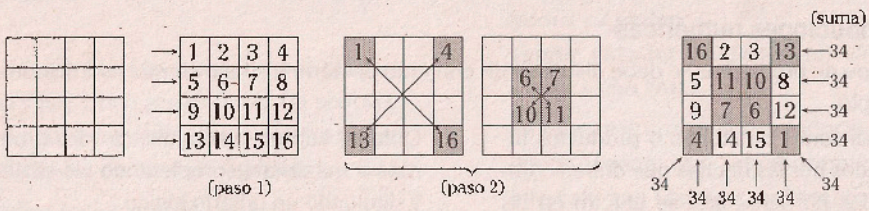
Además

$$\text{constante mágica}=\frac{\text{suma total}}{3}$$

$$\text{número central}=\frac{\text{constante mágica}}{3}$$

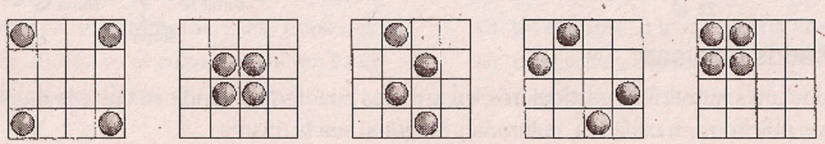
Cuadrado mágico de orden 4

Ubiquemos los números naturales del 1 al 16, de modo que en cada fila, columna o diagonal la suma sea constante.



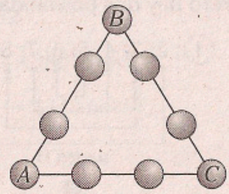
Propiedades

En un cuadrado mágico de 4×4 (de orden 4), la suma constante siempre se consigue también sumando los cuatro números ubicados en las casillas señaladas como se muestra a continuación.

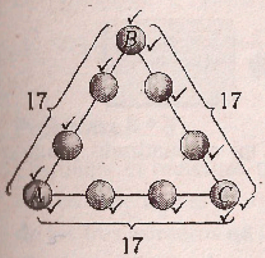


Problema N.º 1

Ubique los números naturales del 1 al 9, de modo que la suma en cada lado del triángulo sea igual a 17. Calcule la suma de los tres números ubicados en los vértices.



Resolución



Hemos sumado los tres lados del triángulo, que nos da un total de 51 unidades, pero para ello hemos tenido que sumar los nueve números de las casillas y, adicionalmente, los tres números de los vértices, es decir

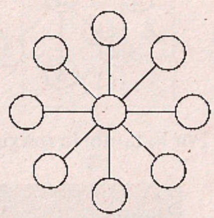
$$3(17)=\overbrace{\bigcirc+\bigcirc+\bigcirc+\bigcirc+\bigcirc+\bigcirc+\bigcirc+\bigcirc+\bigcirc}^{9\text{ números naturales}}+A+B+C$$

$$51=\frac{9(10)}{2}+A+B+C$$

$$\rightarrow A+B+C=6$$

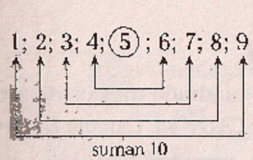
Problema N.º 2

Ubique en las casillas circulares los números naturales del 1 al 9, de modo que la suma en cada línea que une tres casillas sea constante y máxima posible. ¿Cuál es el valor de dicha suma?

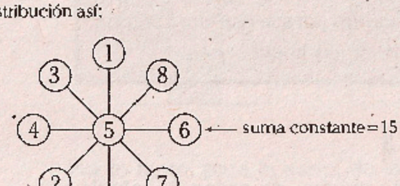


Resolución

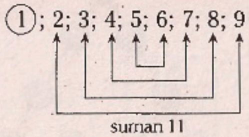
Podemos agrupar los números disponibles del 1 al 9 del siguiente modo:

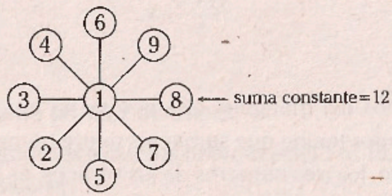


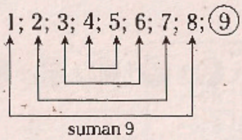
Es decir, hemos formado cuatro parejas que suman 10 y ha quedado un número (el 5) que ubicaremos al centro de la distribución así:

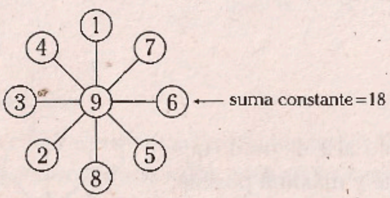


Pero hay dos posibilidades más









Por lo tanto, la máxima suma constante es 18.

> **Nota**
> Luego de observar las distribuciones anteriores, podemos tomar como referencia útil que si queremos la máxima suma constante, trataremos de ubicar el mayor número al centro porque este será común en todas las demás líneas.

Problema N.º 3

En el cuadrado mágico de orden 3, calcule el valor de la constante mágica.

	$3x+1$	
	$5x+3$	$2x-3$
$2x$		

Resolución

Sabemos por propiedad que

	P	
		Q
A		

$$\Rightarrow \quad A=\frac{P+Q}{2}$$

Entonces al aplicarla en el cuadrado mágico dado, tenemos que

$$2x=\frac{(3x+1)+(2x-3)}{2}$$

Despejamos $x=2$

Luego el número en el centro de la casilla es $5(2)+3=13$, además

$$\text{número central}=\frac{\text{constante mágica}}{3}$$

$$13=\frac{\text{constante mágica}}{3}$$

constante mágica$=13\times3=39$

Problema N.º 4

En el siguiente cuadrado mágico de orden 4, se sabe que $A+B+C+D=48$. Calcule $E+F+G+H$.

G	16	A	13
14	B		
		C	F
7	D	E	H

Resolución

Sabemos por propiedad

		A	
	B		
		C	
	D		

G			13
7			*H*

	16		
14			
			F
		E	

$$A+B+C+D=G+H+7+13=E+F+14+16=\underset{\text{(suma constante)}}{\overset{\text{dato}}{48}}$$

$\rightarrow\quad G+H=28\ \wedge\ E+F=18$

$\therefore\quad G+H+E+F=28+18=46$

Problema N.° 5

Complete el recuadro utilizando todos los números enteros del 2 al 10, tal que el producto de los tres números en fila o columna sea igual al número indicado por su respectiva flecha. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas?

		▒	→ 280
▒			→ 144
	▒		→ 90
↓ 216	↓ 60	↓ 280	

Resolución

Paso 1

		7	← necesariamente
▒			→ 144 } no son $\overset{\circ}{7}$
	▒		→ 90 } no son $\overset{\circ}{7}$
↓ 216	↓ 60		

$\underbrace{216\quad 60}_{\text{no son }\overset{\circ}{7}}$

Paso 2

	10	7	→ 280 } sí es $\overset{\circ}{5}$
			→ 144 } no es $\overset{\circ}{5}$
		5	
↓ 216		↓ 280	

$\underbrace{216}_{\text{no es }\overset{\circ}{5}}\qquad \underbrace{280}_{\text{sí es }\overset{\circ}{5}}$

Paso 3

4	10	7
		8
		5
	↓ 60	

Paso 4

4	10	7
	2	8
	3	5
	↓ 60	

o

4	10	7
	3	8
	2	5
	↓ 60	

Finalmente completamos dos productos

4	10	7
9	2	8
6	3	5

4	10	7
6	3	8
9	2	5

Por lo tanto, para la suma de las casillas sombreadas tenemos dos posibilidades: 19 y 15.

NIVEL BÁSICO

1. El gráfico mostrado representa un cuadrado mágico aditivo de orden 4. Calcule el valor de $A+B-C$.

x	C	7	$x-1$
	6		
	5	A	
11	15		B

A) 10
B) 12
C) 6
D) 8
E) 11

2. Complete las casillas vacías de la siguiente cuadrícula con números naturales, de tal manera que se forme un cuadrado mágico. Dé como respuesta la suma de los números que se ubican en las casillas sombreadas.

16	3		
5		11	
9	6		12
	15		1

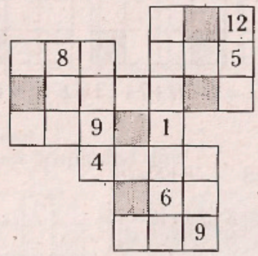
A) 9 B) 13 C) 16
D) 12 E) 14

3. Complete el siguiente recuadro con números enteros distintos, de tal manera que se obtenga un cuadrado mágico. Calcule la suma de los números de una de las diagonales.

	3	4	
6	12		
10		7	13
5		16	

A) 32 B) 34 C) 36
D) 38 E) 40

4. En el gráfico mostrado, cada cuadrado de 3×3 representa un cuadrado mágico. Determine la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.



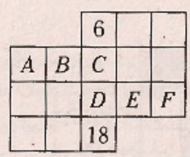
A) 44 B) 41 C) 45
D) 43 E) 53

5. Complete la siguiente cuadrícula con números enteros, de tal manera que la suma de los números ubicados en una misma fila, columna o diagonal sea constante. Dé como respuesta el valor de $x-y+z$.

	x	
15	11	z
y		9

A) 2
B) 5
C) 3
D) 7
E) 1

6. El gráfico muestra dos cuadrados mágicos de 3×3. Calcule $A+B+C-(D+E+F)$.



A) 10 B) 12 C) 14
D) 15 E) 16

7. En el recuadro mostrado, reemplace cada letra diferente por una cifra diferente, de modo que se tenga un cuadrado mágico, cuya constante mágica es 243. Calcule $H+I+F+E$.

$\overline{DE}$	$\overline{HD}$	$\overline{BJ}$
$\overline{AC}$	$\overline{BG}$	$\overline{BA}$
$\overline{AB}$	$\overline{DF}$	$\overline{AI}$

A) 9 B) 10 C) 11
D) 13 E) 14

8. Distribuya números enteros en las casillas, de modo que la suma de los números ubicados en tres casillas consecutivas sea siempre la misma. Calcule $2A+B+3C$.

3	B		C	4				8			A

A) 24 B) 27 C) 29
D) 30 E) 25

9. Distribuya los números enteros en las casillas, tal que la suma de los números ubicados en tres casillas consecutivas sea igual a 20.

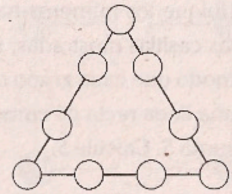
		x		$y-7$		y	$8-x$			

Calcule x.

A) 7 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

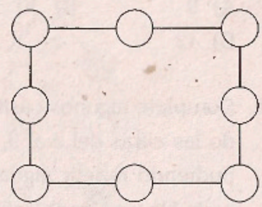
10. Ubique los números naturales del 1 al 9 en las casillas, sin repetir alguno, de modo que al sumar las cuatro casillas de cada lado resulten tres números consecutivos y menores posibles. Halle la suma de cifras del menor de los tres números consecutivos mencionados.

A) 5
B) 6
C) 8
D) 7
E) 9

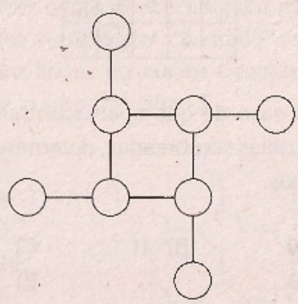


11. Ubique los números naturales del 1 al 8, sin repetir, en las casillas, de modo que al sumar las tres casillas de cada lado resulten cuatro números impares consecutivos y máximos posibles. Halle la suma de cifras del mayor de los cuatro números consecutivos mencionados.

A) 8
B) 7
C) 9
D) 6
E) 4

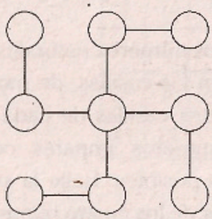


12. Ubique los números naturales del 1 al 8 en las casillas, tal que en cada línea de tres casillas la suma de los números sea siempre la misma y máxima posible; además, dos números consecutivos no deben quedar ubicados en casillas consecutivas. Halle el valor de la suma constante en cada línea.



A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 11

13. Ubique los números naturales del 1 al 9 en las casillas mostradas, sin repetir alguna, de modo que cada grupo de casillas unidas por una línea recta dé como resultado la misma suma S. Calcule S.



A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

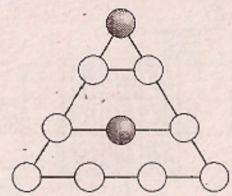
14. Complete algunos casilleros vacíos utilizando las cifras del 0 al 9, una cifra por casilla pudiendo repetir alguna, de modo que en cada fila y en cada columna aparezcan tres cifras distintas, y, además, la cifra que está entre las otras dos sea el promedio de estas dos cifras.

			4	
				5
3	5			
		5	6	
	7			9

En el caso de que aparezcan números en las casillas sombreadas, determine la suma de ellos.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 15

15. Ubique los números naturales del 1 al 10 en las casillas en blanco, de modo que en cada lado del triángulo y en cada línea horizontal la suma de los números que lo conforman sea la misma.

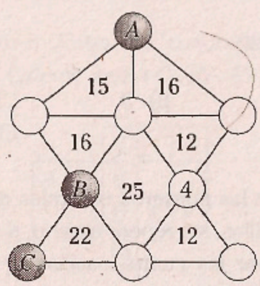


Halle la suma de los números de las casillas sombreadas.

A) 5
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

NIVEL INTERMEDIO

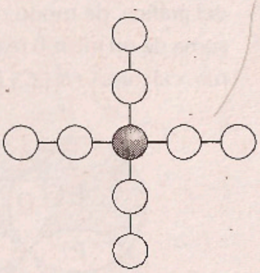
16. Al distribuir los números naturales del 1 al 9, los números ubicados en los vértices de las regiones simples suman la cantidad escrita en el interior de dicha región. Halle la suma de cifras del resultado de $A \times B \times C$.



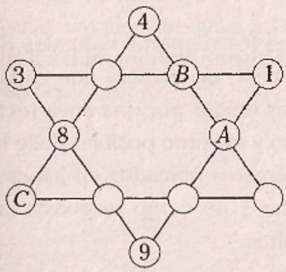
A) 9 B) 6 C) 12
D) 8 E) 10

17. Ubique los números del 1 al 9 en las casillas de la figura, sin repetición, tal que en una de las líneas la suma sea K y en la otra línea sea $2K$. Halle la suma de cifras del máximo valor de K.

A) 9
B) 6
C) 12
D) 8
E) 10



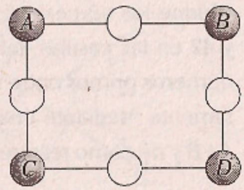
18. Ubique los números naturales del 1 al 12, sin repetir, de modo que cada línea recta formada por cuatro casillas tenga el mismo resultado. Calcule $3A-B+4C$.



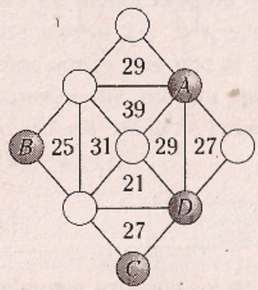
A) 13 B) 12 C) 14
D) 15 E) 11

19. Ubique los números del 1 al 8 en las casillas, sin repetir alguno, tal que la suma de las tres casillas en cada uno de los cuatro lados siempre dé como resultado el mismo número primo. Halle $A+B+C+D$ y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 5
B) 6
C) 8
D) 7
E) 9



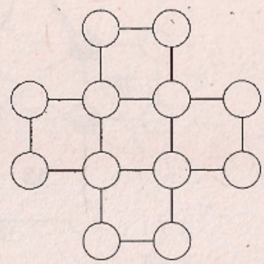
20. Distribuya los nueve primeros números impares en las casillas circulares del siguiente diagrama, de modo que los valores ubicados dentro de cada región simple indiquen la suma de los tres números ubicados en sus vértices. Calcule $A+2B+3C+4D$.



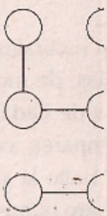
A) 88 B) 84 C) 86
D) 78 E) 82

21. Distribuya los números del 1 al 12 en las casillas sombreadas, de modo que los cuatro vértices de los dos rectángulos mayores, los cuatro vértices del cuadrado central y las cuatro líneas de cuatro círculos sumen S. Halle la suma de cifras S.

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 6



13. Ubique los número
las casillas mostrad
modo que cada gru
una línea recta dé c
suma S. Calcule S.



A) 9 B)
D) 12

14. Complete algunos c
do las cifras del 0 a
pudiendo repetir al
cada fila y en cada
cifras distintas, y, a
entre las otras dos s
dos cifras.

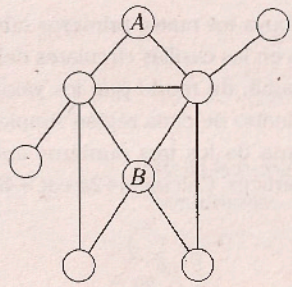
3	5	
		5
	7	

En el caso de que
las casillas sombrea
de ellos.

A) 10 B)
D) 13

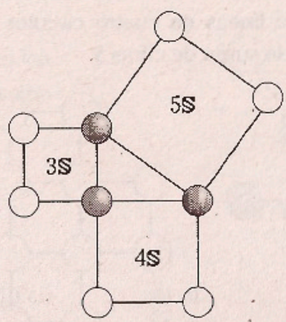
15. Ubique los números
las casillas en blanc

22. Ubique los números 5; 7; 12; 15; 16; 21; 30 y 42 en las casillas, tal que cada pareja de números primos entre sí quede unida directamente mediante una línea recta. Calcule $A+B$ y dé como respuesta la suma de cifras.



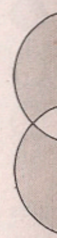
A) 11 B) 8
C) 9
D) 12 E) 10

23. Distribuya los números naturales del 1 al 9, sin repetir, de modo que al sumar los cuatro números que se ubican en los vértices de cada cuadrado se obtenga cantidades proporcionales a 3; 4 y 5. Calcule la suma de los números de las casillas sombreadas y dé como respuesta la suma de sus cifras.



A) 6
D) 15

24. Distribuya lo
8, sin repeti
tras que apa
del gráfico, c
suma dé un
mo, calcule

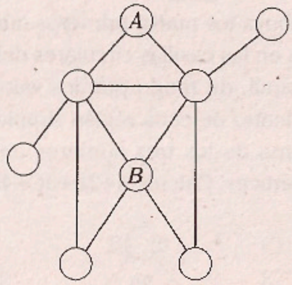


A) 20
D) 30

25. Ubique los
sin repetir, c
casillas unid
mismo y má
los números
breadas y d
sus cifras.

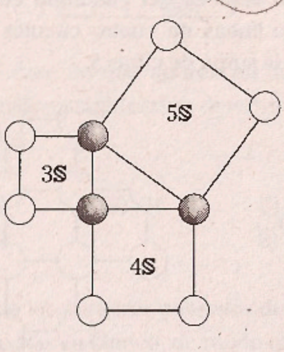
A) 9
D) 12

22. Ubique los números 5; 7; 12; 15; 16; 21; 30 y 42 en las casillas, tal que cada pareja de números primos entre sí quede unida directamente mediante una línea recta. Calcule $A+B$ y dé como respuesta la suma de cifras.



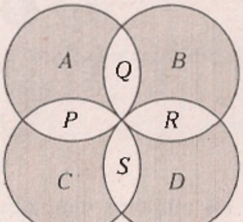
A) 11 B) 8
C) 9
D) 12 E) 10

23. Distribuya los números naturales del 1 al 9, sin repetir, de modo que al sumar los cuatro números que se ubican en los vértices de cada cuadrado se obtenga cantidades proporcionales a 3; 4 y 5. Calcule la suma de los números de las casillas sombreadas y dé como respuesta la suma de sus cifras.



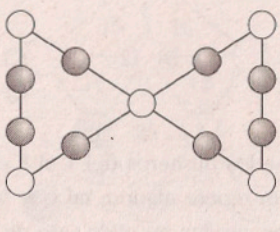
A) 6 B) 9 C) 12
D) 15 E) 10

24. Distribuya los números naturales del 1 al 8, sin repetición, que reemplacen a las letras que aparecen en las regiones simples del gráfico, de modo que en cada círculo la suma dé un mismo resultado k. Si k es mínimo, calcule $A+B+C+D$.



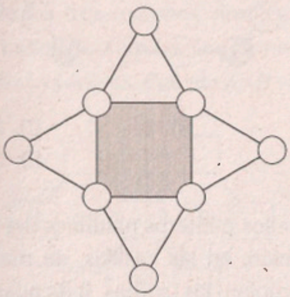
A) 20 B) 24 C) 28
D) 30 E) 32

25. Ubique los números naturales del 1 al 13, sin repetir, de manera que cada grupo de casillas unidas por una línea recta sume lo mismo y máximo posible. Halle la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas y dé como respuesta la suma de sus cifras.



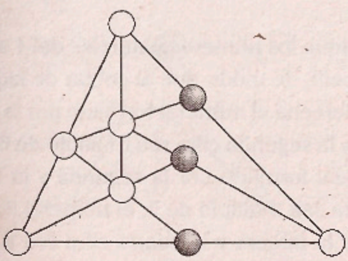
A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

26. Ubique los números naturales del 1 al 8, sin repetir, en las casillas, tal que los cuatro vértices del cuadrado, así como los tres vértices de cada uno de los triángulos, siempre sumen la misma cantidad S. Calcule S.



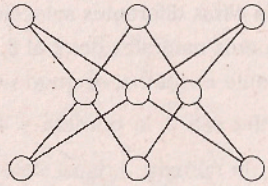
A) 14 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

27. Distribuya los números naturales del 1 al 9, de modo que sin repetir alguno se cumpla que la suma en cada línea recta que une tres casillas sea siempre igual a 14. Halle la suma de los números que van en las casillas sombreadas.



A) 24 B) 25 C) 27
D) 22 E) 23

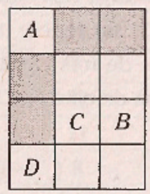
28. Ubique en las casillas los números naturales del 1 al 9, sin repetición, de modo que la suma en cada línea de tres casillas sea S. Halle la suma de cifras de S.



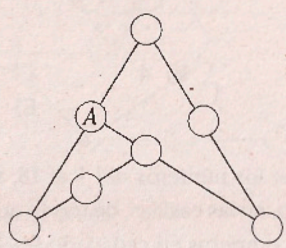
A) 3 B) 6 C) 9
D) 4 E) 5

29. Distribuya los números naturales del 1 al 7 en el centro de cada casilla en blanco, de modo que la línea recta que une al 1 y al 2 sea de menor longitud que la línea recta que une al 2 y 3, y esta a su vez sea menor que la que une al 3 y 4, y así sucesivamente, de manera que la línea que une al 7 y 8 sea la de mayor longitud. Calcule $A\times C+B\times D$.

A) 17
B) 18
C) 20
D) 24
E) 19

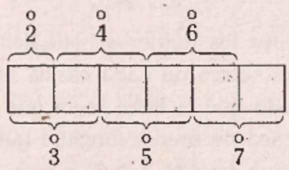


30. Ubique los números naturales del 1 al 7, sin repetir, en las casillas, tal que la suma en cada línea recta que une tres casillas sea siempre la misma. Halle la suma de los valores que puede tomar A.



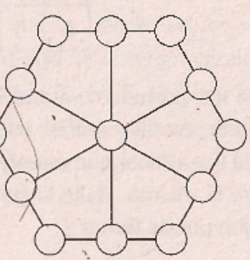
A) 4 B) 5 C) 6
D) 12 E) 8

31. Con seis cifras diferentes seleccionadas de los números naturales del 2 al 8, complete el siguiente esquema, de modo que la primera cifra sea $\overset{\circ}{2}$, la primera y la segunda formen un número $\overset{\circ}{3}$, y así sucesivamente como se indica a continuación. ¿Cuál es la cifra que no se empleará?



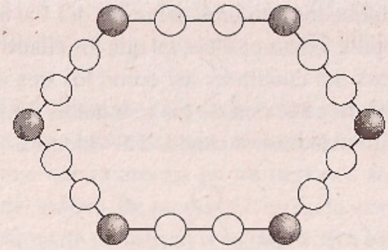
A) 3 B) 4 C) 6
D) 7 E) 8

32. Distribuya los números naturales del 1 al 13, sin repetir, tal que la suma en cada línea de tres casillas sea igual a S. Halle la suma de cifras de S.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

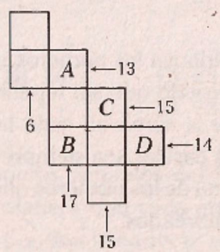
33. Ubique los números del 1 al 18, sin repetir alguno, en las casillas, de modo que la suma de los números en cada lado sea igual a 32. Calcule la suma de los números ubicados en los seis vértices.



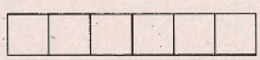
A) 21 B) 24 C) 25
D) 27 E) 30

34. Ubique los números naturales del 1 al 9, sin repetición, en las casillas, de manera que se cumplan las sumas indicadas por las flechas en el esquema siguiente. Calcule $A\times B-C+D$.

A) 23
B) 22
C) 21
D) 20
E) 24

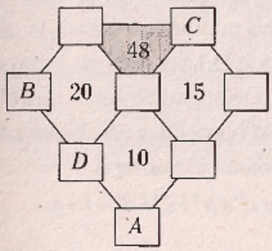


35. Ubique los números naturales del 1 al 6, sin repetir, de modo que al contar de izquierda a derecha el numeral formado por la primera y la segunda cifra sea múltiplo de 6, el numeral formado por la segunda y la tercera cifra sea múltiplo de 5, el numeral formado por la tercera y la cuarta cifra sea múltiplo de 4, y así sucesivamente. ¿Cuántos ordenamientos posibles hay?



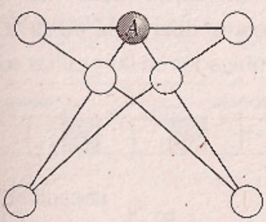
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

36. Distribuya los números naturales del 1 al 8, sin repetir, en las casillas, tal que el número ubicado en la región simple sombreada indique el producto de los números ubicados en sus vértices y el número ubicado en cada una de las tres regiones simples sin sombrear indique la suma de los números ubicados en sus vértices. Calcule $A \times B + C \times D$.



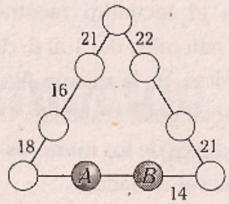
A) 32 B) 36 C) 38
D) 35 E) 40

37. Ubique los números naturales del 1 al 7, de modo que la suma en cada línea de tres casillas sea S. Calcule $S \times A$.



A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

38. Distribuya los números naturales del 6 al 15, sin repetición, en las casillas, de modo que cada par de casillas sume lo que se indique en la línea que las une.

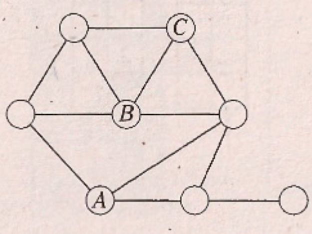


Calcule la suma de cifras de $A+B$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

39. Ubique los números del 1 al 8 en las casillas del gráfico, de manera que las casillas vecinas sumen lo que se indica en la siguiente tabla.

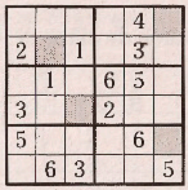
En la casilla	Suma de las casillas vecinas
1	12
2	8
3	13
4	13
5	8
6	16
7	21
8	18



Calcule $A+B+C$.

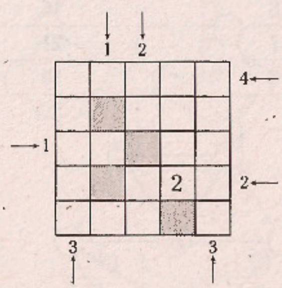
A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 11

40. Complete el recuadro mostrado con los números naturales del 1 al 6, de modo que no se repitan en la misma fila, columna o bloque rectangular resaltado. Dé como respuesta la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.



A) 15 B) 12 C) 16
D) 14 E) 13

41. Complete el recuadro mostrado con los números 1; 2; 3 y 4, tal que los cuatro números aparezcan sin repetir en cada fila y columna. Además, el número que aparece en el borde con una flecha indica el primero de la línea (fila o columna) de números. Pueden quedar algunas casillas vacías.



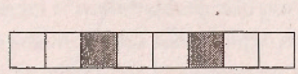
¿Cuál es la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas?

A) 15 B) 9 C) 14
D) 11 E) 10

42. Tenemos el numeral $\overline{abcdefg}$ de 7 cifras no necesariamente diferentes, de modo que a indica la cantidad de veces que el 0 aparece en dicho numeral; b indica la cantidad de veces que el 1 aparece en dicho numeral; c indica la cantidad de veces que el 2 aparece en dicho numeral, y así sucesivamente hasta completar el numeral.
Calcule $a^b+b^a+c^d+d^c+f+g$.

A) 16 B) 18 C) 19
D) 20 E) 21

43. Escriba los números naturales del 1 al 8 en las casillas del gráfico, uno por casilla y sin repetir, de modo que dos números cualesquiera escritos en casillas contiguas se diferencien en no menos de 4. Dé como respuesta la diferencia positiva de los números ubicados en las casillas sombreadas.



A) 2 B) 5 C) 3
D) 4 E) 1

Ordenamiento de información

Capítulo IV

Objetivos

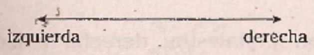
- Aplicar criterios necesarios para la resolución de problemas de ordenamiento de información.
- Afianzar su sentido de análisis teniendo que identificar el orden en que se ubican los datos.
- Ampliar las técnicas de solución de problemas y relacionarlas con la realidad.

Consideraremos tres tipos de ordenamiento:

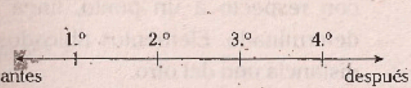
Ordenamiento lineal

En este tipo de ordenamiento, a través de la información brindada, se ubicarán los elementos (personas, animales, objetos, etc.) en un esquema lineal horizontal o vertical. Los siguientes son algunos casos:

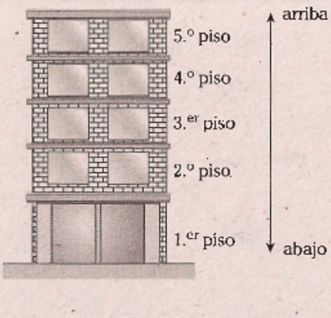
a. Izquierda y derecha



b. Orden de llegada



c. Ascendente y descendente

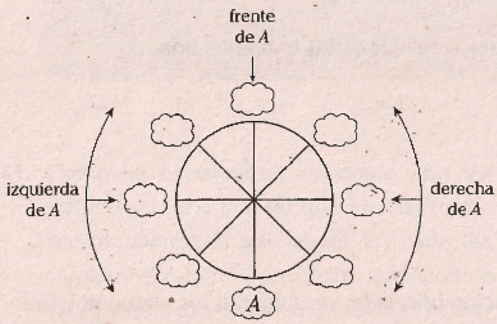


Ordenamiento circular

En este tipo de ordenamiento, a través de la información brindada, se ubicarán los elementos (personas, animales, objetos, etc.) en un esquema cerrado (circular, cuadrado, etc.).

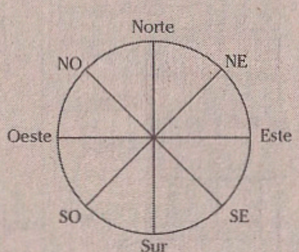
Ejemplo

Si deseamos ubicar a 8 personas en forma simétrica alrededor de una mesa circular, obtendremos lo siguiente:



NOTA

En algunos problemas de ordenamiento, aparecen los puntos cardinales.



Ordenamiento por categorías

En este tipo de problemas, la información se ordena a través de una tabla de categorías. Las categorías (características) pueden ser nombres, apellidos, profesiones, deportes, lugares, entre otros.

Se pueden presentar dos casos:

a. Para dos categorías se emplea una tabla de doble entrada.

	Categoría *B*
Categoría *A*	

b. Para más de dos categorías

Categoría *A*	
Categoría *B*	
Categoría *C*	
⋮	
Categoría *x*	

Glosario

- Adyacente: contiguo, situado junto a otro ente.
- Diestra y siniestra: derecha e izquierda, respectivamente.
- Elementos simétricamente distribuidos: ubicación adecuada de los elementos con respecto a un punto, línea o plano determinado. Elementos ubicados a igual distancia uno del otro.
- Categoría: clase, distinción, condición, característica de algo o alguien.

Problema N.º 1

Cinco amigas hacen una apuesta respecto a las calificaciones de su último simulacro; de estos resultados se conoce lo siguiente:

Bárbara obtuvo mayor nota respecto a Adriana, quien a su vez obtuvo menor puntaje respecto a Dora; esta a su vez obtuvo más puntaje que Carola, quien obtuvo más puntaje que Bárbara. Si Adriana no fue la de menor puntaje y la otra amiga se llama Elena, ¿quién ganó la apuesta?

Resolución

Se tienen los datos

mayor nota ↑	Bárbara	Dora	Dora	Carola
	↓	↓	↓	↓
menor nota	Adriana	Adriana	Carola	Bárbara

Además, Adriana no fue la de menor puntaje y la otra amiga se llama Elena.

Relacionando los datos se obtiene

+ ↑ Dora
Carola
nota Bárbara
Adriana
– Elena

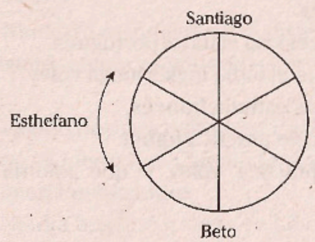
Por lo tanto, Dora ganó la apuesta.

Problema N.º 2

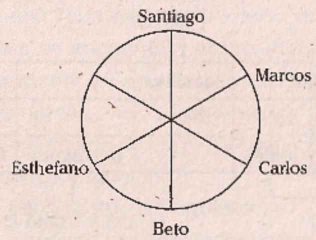
Durante un almuerzo, seis amigos se sientan alrededor de una mesa circular con seis sillas distribuidas simétricamente; además se observa que Santiago está frente a Beto, quien está a la derecha de Esthefano. Si Santiago no está junto a Carlos ni Esthefano, y este se sienta frente a Marcos, ¿quién está junto a la derecha de José, el sexto amigo?

Resolución

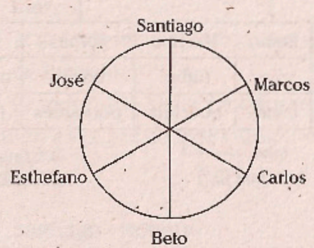
Santiago está frente a Beto, quien está a la derecha de Esthefano.



Santiago no está junto a Carlos ni Esthefano, y este se sienta frente a Marcos.



Finalmente, el sexto amigo es José.



Por lo tanto, junto a la derecha de José está Esthefano.

Problema N.º 3

Cuatro amigos practican un deporte diferente y estudian un idioma distinto cada uno. De ellos se conoce lo siguiente:

- Pedro no estudia quechua y no practica boxeo.
- Tomás no practica natación y no estudia inglés.
- Marcelo no estudia portugués.
- El que estudia inglés juega vóley.
- Carlos estudia francés.
- Marcelo practica fútbol.

¿Quién practica vóley y qué idioma estudia Tomás?

Resolución

Al ser 4 personas y 3 categorías, graficamos una tabla con 4 columnas y 3 filas con espacios en blanco.

del 6.° dato (2.°) — del 5.° dato (4.°)

Nombre		Marcelo		Carlos
Deporte	vóley	fútbol		
Idioma	inglés		portugués	francés

del 4.° dato (1.°) — del 3.^{er} dato (3.°)

solo falta Pedro (7.°) — del 2.° dato (6.°) — del 2.° dato (8.°)

Nombre	Pedro	Marcelo	Tomás	Carlos
Deporte	vóley	fútbol	boxeo	natación
Idioma	inglés	quechua	portugués	francés

falta quechua (5.°) — (9.°) finalmente ubicamos boxeo

Por lo tanto, Pedro practica vóley y Tomás estudia portugués.

Problema N.º 4

Brasil, Colombia, Argentina, Uruguay, Paraguay y Perú inician los partidos de la Copa América. Los periodistas preguntaron a tres aficionados: *¿Cuáles serán los ganadores en los tres partidos?*, y sus respuestas fueron:

- Brasil, Paraguay y Colombia
- Paraguay, Uruguay y Perú
- Colombia, Argentina y Perú

¿Quién juega con Uruguay?

Resolución

Las tres respuestas de los aficionados indican los posibles ganadores de cada encuentro; entonces se entiende que los equipos mencionados en una respuesta no se enfrentan entre sí.

Luego, del primer y del segundo dato podemos saber que Paraguay no se enfrenta con los equipos Brasil, Colombia, Uruguay ni Perú. Entonces Paraguay se enfrenta con Argentina.

Obtendríamos la respuesta analizando de la misma forma el primer y el tercer dato. Colombia no se enfrenta con los equipos Brasil, Paraguay, Argentina ni Perú.

Por lo tanto, Colombia juega con Uruguay.

NIVEL BÁSICO

1. Adriano, Beto, César y Diego practican los siguientes deportes: natación, atletismo, fútbol y tenis, y viven en los distritos de Los Olivos, Breña, San Borja y Miraflores. Se sabe lo siguiente:
   - César no vive en Los Olivos ni en Breña.
   - El atleta vive en Los Olivos.
   - Adriano vive en Miraflores.
   - Diego es futbolista.
   - El nadador nunca ha emigrado de San Borja.

   ¿Qué deporte practica Adriano?

   A) natación
   B) atletismo
   C) fútbol
   D) tenis
   E) baloncesto

2. A una fiesta fueron invitadas tres parejas de esposos, y de ellos se tiene la siguiente información:
   - Hay dos chilenos, dos brasileños y dos peruanos (varón o mujer).
   - Arturo es chileno y la esposa de Manuel es peruana.
   - No hay dos hombres de la misma nacionalidad.
   - No hay una pareja de esposos de la misma nación.

   ¿Qué nacionalidad tiene Manuel y qué nacionalidad tiene la esposa de Ricardo?

   A) peruano - chilena
   B) peruano - brasileña
   C) chileno - brasileña
   D) brasileño - chilena
   E) brasileño - peruana

3. Cinco amigas buscarán trabajo, pero deciden hacerlo en cinco distritos diferentes. Se sabe lo siguiente:
   - Ana irá a La Molina.
   - Las suegras de Claudia y Valeria viven en San Isidro, por lo cual deciden no ir a ese distrito.
   - Valeria vive en Pueblo Libre.
   - Juana vive en Lince y es la única que ha decidido buscar trabajo en su mismo distrito.

   Si a Niurka le es indiferente el distrito donde trabajará, entonces podemos afirmar que

   A) Valeria buscará trabajo en Pueblo Libre.
   B) no es cierto que Claudia buscará trabajo en Pueblo Libre.
   C) Niurka buscará trabajo en Lince.
   D) Niurka buscará trabajo en Pueblo Libre.
   E) no es cierto que Niurka buscará trabajo en Miraflores.

4. En una reunión del directorio de una empresa se encuentran el presidente, el vicepresidente, el secretario y un trabajador de la empresa, cuyos nombres (no necesariamente en ese orden) son Eduardo, Roberto, Santiago e Ignacio.
   De ellos se sabe lo siguiente:
   - Santiago y el trabajador son muy amigos.
   - Roberto es primo del secretario.
   - Eduardo y el vicepresidente no se llevan bien.
   - El presidente y el trabajador son amigos de Ignacio.
   - El secretario se llama Eduardo.

   ¿Quién es el presidente y quién es el trabajador?

   A) Santiago - Roberto
   B) Santiago - Ignacio
   C) Ignacio - Santiago
   D) Ignacio - Roberto
   E) Roberto - Eduardo

5. Tres luchadores practican artes marciales en gimnasios diferentes; uno practica judo, otro karate y el otro kung fu. Además, uno de ellos es cinturón negro, otro es marrón y el otro, naranja. Sus nombres son Wálter, Carlos y Óscar. Se sabe que Wálter y Carlos practicaban karate, pero ahora ya no. El judoka es cinturón naranja, Óscar y el de cinturón marrón no se conocen. Wálter es amigo de los otros dos. Entonces es cierto que

A) Wálter es judoka cinturón negro.
B) el que practica kung fu es cinturón negro.
C) Óscar es cinturón negro.
D) el karateca es Wálter.
E) el judoka es cinturón marrón.

6. Tres parejas de esposos asisten al matrimonio de un amigo. Ellos son José, Alexis y Orlando, y ellas son Rebeca, Melissa y Luisa. Una de ellas fue con un vestido negro, otra con uno de azul y la otra con uno de rojo. La esposa de José fue de negro. Orlando no bailó con Melissa en ningún momento. Rebeca y la del vestido azul fueron al matrimonio de Luisa. Alexis es primo de Luisa. José y el esposo de Luisa siempre se reúnen con el hermano de Alexis. Entonces es cierto que

A) Rebeca fue con José y estuvo vestida de negro.
B) la esposa de Orlando fue de rojo.
C) Melissa y Alexis son esposos.
D) Luisa fue de negro.
E) más de una es cierta.

7. En un programa de televisión de 60 minutos se presentaron un trío, un cantante, un comediante y un bailarín. El cantante se presentó antes que el comediante e inmediatamente después que el bailarín. El trío iba a cerrar con "broche de oro" el programa, pero fue cambiado en último momento. A mitad del programa hubo "comerciales" e inmediatamente después se presentó el bailarín. La actuación del trío duró 30 minutos. ¿En qué orden se presentaron el cantante, el trío, el comediante y el bailarín?

A) cantante - trío - bailarín - comediante
B) trío - bailarín - cantante - comediante
C) cantante - bailarín - comediante - trío
D) trío - cantante - bailarín - comediante
E) comediante - bailarín - cantante - trío

8. Tres hermanas tienen ocupaciones diferentes: una es repostera, otra es costurera y la otra es cosmetóloga; sus edades son 18, 20 y 24 años. Los meses en que celebran sus cumpleaños son febrero, abril y diciembre. Se sabe que Sandra no es la menor. Esther siempre recibe dos regalos juntos por su cumpleaños y por Navidad. La mayor de todas gusta de cortar el cabello a sus otras hermanas. El cumpleaños de la repostera es en febrero. Sandra trabaja con cierto tipo de recetas. Emperatriz es la peluquera de la familia. Entonces es cierto que

A) la costurera tiene 18 años.
B) la mayor de todas nació en febrero.
C) Sandra tiene 18 años.
D) Emperatriz es costurera.
E) más de una es verdadera.

9. En un examen, Renato obtuvo menos puntos que Sandro; Dora, menos puntos que Renato, y Lucio, más puntos que Édgar. Si este obtuvo más puntos que Sandro, ¿quién obtuvo más puntos?

A) Édgar B) Lucio C) Renato
D) Dora E) Sandro

10. Los rieles de un ferrocarril van en línea recta del pueblo A al pueblo B. El pueblo C está justo a la mitad de la vía entre A y B. El pueblo D está tan alejado de A como lo está de C, y C está tan alejado de D como de E. Si hay 20 km de A a D, ¿qué distancia hay de D a B?

A) 10 km B) 35 km C) 20 km
D) 60 km E) 40 km

11. Cuatro estudiantes de 36, 27, 18 y 9 años de edad están dando examen en este momento.

I. Sumando las edades del menor y de Jhon se iguala a la edad de Lucas.
II. Uno de los estudiantes se llama Ronald.
III. El mayor tiene el doble de la edad de Josué.

¿A cuánto es igual la suma de las edades de Jhon y Josué?

A) 63 B) 36 C) 45
D) 54 E) 60

12. Un número está formado por las seis cifras: 1; 3; 4; 6; 7 y 8, pero no en ese orden. El 7 sigue al 1, el 3 y el 4 no son vecinos al 1 ni tampoco al 7. El 4 y el 1 no son vecinos al 8. El 6 está a continuación del 8. De izquierda a derecha, ¿quién ocupa el primer lugar y el cuarto lugar? Dé como respuesta la suma de ellos.

A) 4 B) 7 C) 10
D) 15 E) 14

13. Wilson, Miguel y Armando tienen, cada uno, dos ocupaciones que son chofer, vendedor de gaseosa, músico, carpintero, estilista y peluquero, no necesariamente en ese orden. Se sabe que

- El chofer ofendió al músico riéndose de su cabello largo.
- El músico y el estilista solían ir a pasear con Wilson.
- El carpintero compró al vendedor una botella de gaseosa.
- El chofer cortejaba a la hermana del carpintero.
- Armando venció a Miguel y al carpintero en las cartas.
- Miguel le debe dinero al chofer.

Indique qué ocupaciones tiene Armando.

A) músico y vendedor
B) carpintero y peluquero
C) peluquero y estilista
D) chofer y estilista
E) chofer y carpintero

14. En un examen, César obtuvo 5 puntos menos que Édgar, quien tuvo 2 puntos menos que Jaime, cuyo puntaje es igual a la semisuma de lo obtenido por Édgar y Ausencio. Si este último obtuvo 12 puntos, ¿cuántos puntos obtuvo César?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 8 E) 10

15. Tres hombres se encuentran en la calle: el señor Pardo, el señor Castaño y el señor Blanco. El señor Pardo dice: *Uno de nosotros va vestido de pardo, otro de castaño y el otro de blanco; sin embargo, ninguno lleva el traje del color de su nombre.*
Pues es verdad, dice el hombre de blanco. ¿De qué color es el traje del señor Castaño?

A) pardo B) castaño C) blanco
D) negro E) plomo

16. Michell, Juan, Ricardo, Arthur y Pablo rindieron un examen. Se sabe lo siguiente:
    - Michell obtuvo más puntaje que Arthur pero menos que Pablo.
    - Juan obtuvo más puntaje que Ricardo, quien a su vez tiene más puntaje que Michell.

    Entonces el que obtuvo el menor de los puntajes es

    A) Michell. B) Juan. C) Ricardo.
    D) Arthur. E) Pablo.

17. De cuatro corredores de atletismo se sabe que Claudio ha llegado inmediatamente detrás de Benito, y Daniel ha llegado en medio de Adriano y Claudio. Calcule el orden de llegada según sus iniciales.

    A) ABDC B) BCDA C) BDAC
    D) ABCD E) BACD

18. Tenemos cuatro perros: un galgo, un dogo, un alano y un podenco. Este último come más que el galgo; el alano come más que el galgo y menos que el dogo, pero este come más que el podenco. ¿Cuál de los cuatro será el más barato de alimentar?

    A) el galgo
    B) el dogo
    C) el alano
    D) el podenco
    E) el galgo y el dogo

19. Cinco amigos: Rosa, Joel, Patricio, Aracely y Leandro se sientan en una banca, de modo que se cumple lo siguiente:
    - Dos amigos observan un cuadro, mientras que los otros tres le dan la espalda, los cuales se ubican en los extremos y en el centro.
    - Aracely está junto y a la derecha de Leandro.
    - A la izquierda de Rosa están todos sus amigos y Joel está en el centro.

    ¿Quién se sienta junto y a la izquierda de Patricio?

    A) Rosa B) Joel C) Aracely
    D) Leandro E) ninguno

20. Seis amigas (A, B, C, D, E y F) están escalando una montaña. A está más abajo que B, quien se encuentra un lugar más abajo que C; D está más arriba que A, pero un lugar más abajo que E, quien a su vez se encuentra más abajo que F. Si F se encuentra entre B y E, ¿quién está en el tercer lugar del ascenso?

    A) B B) C C) E
    D) F E) D

21. Hay siete participantes en un concurso de tiro, cuatro de ellos: Andrew, Francisco, Santiago y Junior son expertos y los otros tres: Edwin, Fernando y Greco son novatos. De ellos se sabe lo siguiente:
    - Para que un novato dispare debe ser antecedido y seguido inmediatamente por un experto.
    - Fernando dispara en segundo lugar, mientras que Santiago es el último experto en disparar.
    - Francisco dispara antes que Junior, pero después de Andrew.

    ¿Cuál de las siguientes alternativas no es necesariamente correcta?

    A) Greco dispara después de Fernando.
    B) Santiago dispara después de todos los novatos.
    C) Fernando es el primer novato en disparar.
    D) Edwin dispara antes que Junior.
    E) Junior dispara entre Edwin y Greco.

22. En una mesa circular hay seis asientos distribuidos simétricamente, en los cuales se sientan seis amigos. De ellos se sabe lo siguiente:

- Mario se sienta frente a Norma y junto a Paulino.
- Jorge se sienta frente a Paulino y a la izquierda de Norma.
- Sofía no se sienta junto a Jorge.
- A Rafaela le gusta el curso de Razonamiento Matemático.

¿Quién se sienta junto y a la derecha de Rafaela?

A) Paulino B) Sofía C) Jorge
D) Mario E) Norma

23. Seis amigos se ubican alrededor de una fogata: Tito no está sentado al lado de Noé ni de Pedro, Franco no está sentado al lado de Ricardo ni de Pedro, Noé no está al lado de Ricardo ni de Franco, Guillermo está junto y a la derecha de Noé. ¿Quién está sentado junto y a la izquierda de Franco?

A) Noé B) Tito C) Ricardo
D) Pedro E) Guillermo

24. Cinco amigos (*B*, *C*, *D*, *E* y *F*) se encuentran sentados alrededor de una mesa circular con ocho asientos distribuidos simétricamente. Además se cumple que *D* está sentado frente a *C* y a tres asientos a la derecha de *E*; *B* está sentado a cuatro asientos de *F*. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Hay dos asientos vacíos juntos.
B) *E* se sienta junto a un sitio vacío.
C) *E* se sienta frente a un sitio vacío.
D) *D* se sienta adyacente a dos asientos vacíos.
E) *C* se sienta a la derecha de *B*.

25. Cuatro parejas de esposos se sientan alrededor de una mesa circular con ocho sillas distribuidas simétricamente. Se sabe que

- personas del mismo sexo no se sientan juntas.
- los esposos se sientan juntos con sus esposas.
- Lucero está adyacente a Miguel y a Rodrigo.
- Nicol se sienta al lado del esposo de Érika, y Érika junto a la derecha del esposo de Sara.
- Rodrigo se sienta frente al esposo de Érika.
- los otros dos varones son Celestino y Hugo.

Luego es cierto que
I. Miguel y Nicol se sientan juntos.
II. Érika está frente a Lucero y junto a Rodrigo.
III. el esposo de Sara se llama Rodrigo.

A) II y III B) solo III C) I y II
D) solo I E) ninguno

26. En un comedor, ocho comensales se sientan en una mesa circular. Las ocho personas son estudiantes de diferentes especialidades. Se observa que

- el de Ingeniería está frente al de Educación y entre los de Economía y Farmacia.
- el de Periodismo está a la izquierda del de Educación y frente al de Economía.
- frente al de Farmacia está el de Derecho, quien, a su vez, está a la siniestra del de Arquitectura.

¿Cuál de ellos está entre los estudiantes de Biología y Educación?

A) Ingeniería B) Periodismo
C) Economía
D) Farmacia E) Derecho

NIVEL INTERMEDIO

27. Como reconocimiento a su desempeño en su centro de labores, Miriam, Rita, Andrea y Vilma recibieron un ramo de flores cada una, dichas flores concuerdan con las iniciales de sus nombres, aunque ninguna coincide con el suyo. Si el ramo de rosa lo recibió Andrea, pero ni Rita ni violeta recibieron las azucenas, entonces Vilma recibió

A) rosas.
B) violetas.
C) rosas o margaritas.
D) azucenas.
E) margaritas.

28. Angelo, Carmelo, Jérico y Manolo practican un deporte diferente cada uno, entre básquet, boxeo, fútbol y natación, aunque no necesariamente en ese orden. Se sabe que

- Carmelo y Manolo no gustan del fútbol.
- el mayor de ellos tiene el doble de la edad del menor.
- Jérico invita a Angelo y a Carmelo a presenciar su participación en la competencia de natación.
- el mayor de ellos practica boxeo.
- Carmelo tiene 27 años.

¿Qué deporte practica Manolo?

A) boxeo B) básquet C) fútbol
D) natación E) vóley

29. Tomás, Paolo y Carmelo asisten a una fiesta con sus esposas: Tina, Sonia y Lourdes. Cada una de las parejas tiene un hijo y se llaman Roxana, Mirtha y Robert. Tina dijo que su hija representa a Alicia en el teatro de la escuela. Paolo comentó que su hija representa a Betty, y Tomás afirmó que su hija no es amiga de Mirtha y la esposa de Carmelo no es Sonia.
¿Quién está casada con Paolo y quién es la madre de Robert, respectivamente?

A) Sonia - Sonia
B) Sonia - Lourdes
C) Lourdes - Lourdes
D) Tina - Lourdes
E) Lourdes - Sonia

30. Tres amigos: Jonás, Oswaldo y Arón viven en las casas *A*, *B* y *C* y tienen cada uno un auto azul, verde y rojo, no necesariamente en ese orden. Además se sabe que

- nadie tiene su auto estacionado frente a su casa.
- Arón es dueño del auto verde y de la casa *C*.
- el auto rojo está frente a la casa *B*.
- el auto verde está frente a la casa de Oswaldo.

¿Quién es el dueño del auto que está frente a la casa del dueño del auto azul?

A) Oswaldo
B) Jonás
C) Arón
D) Jaime
E) No puede determinarse.

31. Alexia, Katy, Marissa y Cecilia llevan por segundo nombre Lucía, Karla, Celinda y Jhoana; por apellidos Páucar, Donayre, Porras y Fernández, aunque no necesariamente en ese orden. Sabemos que todas tienen un número diferente de letras en sus nombres y apellidos. Karla no es Alexia ni se apellida Páucar, y Marissa no tiene nombre ni apellido de seis letras. ¿Cuál es el segundo nombre de Katy y su apellido?

A) Celinda Fernández
B) Lucía Fernández
C) Celinda Páucar
D) Lucía Páucar
E) Jhoana Páucar

32. Brandon, Fernando, Israel y Salvador decidieron tomarse cinco fotos. Se sabe que
- En cada foto había, al menos, una persona y cada persona se tomó, al menos, una foto.
- En ninguna foto salieron los cuatro.
- Solo una foto tiene una sola persona y es Brandon.
- Israel no se tomó ninguna foto con Brandon.
- Salvador se tomó dos fotos con Brandon y una con Israel.
- Fernando se tomó tres fotografías en total.
- Brandon se tomó dos fotos con Fernando.
- En las fotos donde sale Israel siempre sale con Fernando.

¿Quién se tomó más fotos?

A) Fernando
B) Israel
C) Salvador
D) Brandon
E) Brandon y Salvador

33. Andrés, Benito, Carlos y Dante son mecánico, electricista, soldador y carpintero; además, llevan uniforme de color blanco, amarillo, rojo y azul (no necesariamente en el orden dado). El mecánico derrotó a Benito en el juego de sapo; Carlos y el soldador juegan a menudo bingo con los de uniformes rojo y azul; Andrés y el carpintero tienen aprecio por el hombre de uniforme azul, quien no es el electricista, pues este usa uniforme de color blanco. ¿Qué oficio tiene Carlos y de qué color es su uniforme?

A) mecánico - azul
B) electricista - rojo
C) electricista - blanco
D) carpintero - amarillo
E) soldador - blanco

34. María es más alta que Mayra y más gorda que Mercedes, quien a su vez es más alta que Margoth y más flaca que Mayra. Si Margoth es más baja que María y más gorda que Mayra, con seguridad, ¿quién es más alta y más flaca que Margoth?

A) María
B) Mayra
C) Mercedes
D) Margoth
E) María y Mayra

35. Cinco amigos rindieron un examen; se sabe que la nota más alta fue 18, además
- Antonio obtuvo la mitad de nota que Mario.
- Pedro obtuvo el promedio de las notas de Dany y de Mario.
- Óscar obtuvo tanto como Dany, pero el triple de nota que Antonio.

Calcule la diferencia entre las notas que obtuvieron Pedro y Antonio.

A) 6 B) 12 C) 3
D) 9 E) 4

36. Cinco autos, numerados del 1 al 5, participaron en una carrera. Se sabe que no hubo empates; además
- la diferencia en la numeración de los dos últimos autos en llegar fue igual a dos.
- el auto 1 llegó en segundo lugar.
- la numeración de los autos no coincide con el orden de su llegada.

De lo anterior podemos afirmar que

I. no es cierto que ganó el auto 5.
II. el auto 5 llegó después que el auto 1.
III. el auto 2 ganó la carrera.

A) solo II B) solo III C) I y II
D) I y III E) solo I

37. Seis amigos se sientan a comer helados alrededor de una mesa circular. De ellos se sabe lo siguiente:

- Johan está al lado de Carmelo y al frente de Aracely.
- David no se sienta nunca al lado de Aracely.

Entonces se puede afirmar que

A) Aracely y Carmelo se sientan juntos.
B) David está a la derecha de Johan.
C) David está a la izquierda de Johan.
D) Aracely y Carmelo están separados por una persona.
E) Aracely está al frente de David.

38. Tres varones (Alberto, Bryan y César) y tres mujeres (Dora, Esther y Fany) se sientan simétricamente alrededor de una mesa circular, de modo que dos personas del mismo sexo no se sientan juntos. Entonces se puede afirmar que

I. Alberto no se sienta frente a Esther.
II. César no se sienta frente a Bryan.
III. Fany no se sienta frente a Dora.

A) solo I B) II y III C) solo II
D) I y III E) solo III

39. Angie, Sofía, Jenny y Mery tienen diferentes ocupaciones. Se sabe que

- Sofía es muy amiga de la peinadora.
- Angie, desde muy joven, se dedica al canto.
- Angie y la enfermera están molestas con Mery.
- la policía es muy amiga de Jenny y de la peinadora.

¿Qué ocupación tienen Mery y Sofía, respectivamente?

A) enfermera - peinadora
B) peinadora - policía
C) cantante - enfermera
D) peinadora - enfermera
E) policía - cantante

40. En un colegio, los profesores se llaman Richard, Jhon, Javier y Manuel, quienes dictan los cursos de Física, Química, Matemática y Anatomía, aunque no necesariamente en ese orden; se sabe que

- el único amigo de Richard es Manuel.
- el profesor de Química nunca ha ido a almorzar con Jhon, ni con el que dicta Anatomía.
- Manuel, el profesor de Anatomía y el profesor de Matemática son muy amigos.

Si los amigos almuerzan juntos ocasionalmente, ¿quién es el profesor de Matemática?

A) Jhon B) Manuel C) Luz
D) Richard E) Javier

41. Brenda, Angela, Carlos y Dayron terminaron sus estudios de Pedagogía, Derecho, Ingeniería y Matemática, una profesión cada uno, aunque no necesariamente en ese orden. De ellos se sabe que

- Brenda no estudia Pedagogía.
- Angela hubiese estudiado Matemática si Carlos hubiera estudiado Derecho.
- Dayron quiere estudiar Matemática.
- Carlos estudiaría Pedagogía si Angela no lo hiciera.
- Brenda estudiaba Matemática, pero se trasladó a Ingeniería.

¿Qué estudian Angela y Dayron, respectivamente?

A) Comunicación - Pedagogía
B) Ingeniería - Derecho
C) Pedagogía - Ingeniería
D) Matemática - Ingeniería
E) Pedagogía - Derecho

42. Se deben realizar cinco tareas: *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. Se sabe que

- *C* debe hacerse después que *B*.
- *E* debe hacerse antes que *B*.
- *D* debe hacerse después que *A*.
- *B* debe hacerse antes que *D*.

Indique la alternativa que presenta secuencia(s) correcta(s).

I. *AEBDC*
II. *AEBCD*
III. *EBADC*

A) solo II B) solo III C) solo I
D) II y III E) I, II y III

43. Se tiene un edificio con cinco pisos y en cada piso vive una familia. La familia Montoya vive un piso más arriba que la familia García. La familia Domínguez vive más arriba que la familia Pérez y la familia Montoya, más abajo que la familia Pérez. ¿En qué piso vive la familia Montoya, si en el último piso vive la familia Poma?

A) 2.° B) 1.° C) 4.°
D) 5.° E) 3.°

44. Razonamiento Matemático, Aritmética, Álgebra y Geometría son cuatro cursos que se dictan en una academia; los profesores que dictan son Andrés, Santiago, Maycol y Jerson, aunque no necesariamente en ese orden. Maycol es amigo del que enseña Álgebra. El profesor de Aritmética no conoce a Santiago ni al que dicta Geometría. Jerson y el profesor de Geometría son amigos en común con el que dicta Álgebra. El único amigo de Andrés es Jerson. ¿Quién dicta Álgebra?

A) Jerson
B) Renato
C) Maycol
D) Andrés
E) Santiago

45. Cuatro amigos se encuentran en la universidad. Estos son Alan, Beto, Cecilio y Donald. Sus ocupaciones son atleta, cocinero, obrero e ingeniero, aunque no necesariamente en ese orden. Se sabe que

I. el atleta, que es el más joven de todos, es primo de Alan y siempre va al teatro con Beto.
II. Cecilio, el mayor de todos, es vecino del cocinero.
III. Alan es dos años menor que el ingeniero, que siempre está ocupado en su trabajo.

¿Quién es el ingeniero?

A) Alan
B) Beto
C) Cecilio
D) Beto o Cecilio
E) Donald

46. Cuatro estudiantes (Beto, Cristhian, Arthur y Diego) se sientan alrededor de una mesa circular. Beto no está sentado frente a Cristhian, Arthur está junto y a la izquierda de Cristhian. Por lo tanto, no es falso que no se puede afirmar que

A) Diego está frente a Cristhian.
B) Beto está frente a Arthur.
C) Cristhian está junto y a la izquierda de Beto.
D) Diego y Beto están juntos.
E) Cristhian está frente a Beto.

47. Abraham, Braulio, César y Dany fueron a cenar en compañía de sus respectivas esposas. En el restaurante, se sentaron alrededor de una mesa circular. Ningún esposo se sentó junto a su esposa; en frente de Abraham, se sentó César; junto a la derecha de la esposa de Abraham, se sentó Beto. ¿Quién está entre Abraham y Dany, si no hay dos varones sentados juntos?

A) la esposa de Dany
B) la esposa de Abraham
C) Beto
D) la esposa de César
E) César

48. Cinco amigos están sentados en una banca en el cine, ubicados uno a continuación de otro. Zoila y Pablo se ubican en forma adyacente. Pablo no está al lado de Sara ni de Jonás. Zoila está a un extremo. Si Sara y Miguel están peleados, ¿quién se sienta al lado de Sara?

A) Pablo B) Jonás C) José
D) Miguel E) Zoila

49. Maritza, Katya, Carola y Johana se sientan alrededor de una mesa circular de seis asientos. Si se sabe que Carola se sienta a la derecha de Maritza y frente a Katya, y Johana no se sienta frente a un lugar vacío, entonces se cumple que

I. Johana se sienta junto a Katya.
II. Maritza está tan alejada de Katya como lo está de un lugar vacío.
III. Carola está junto a Johana.

A) solo II B) solo I C) I y II
D) I y III E) II y III

50. Tres hermanos: Petete, Coto y Perico practicaban tres deportes: fútbol, básquet y vóley (no necesariamente en ese orden). Por fiesta de fin de año, su tío les regaló una pelota equivocada. Se sabe que Petete tiene en su cuarto un póster gigante de M. Jordan; Coto, cuando va por la calle, patea cuanto objeto encuentra por su camino; además, Perico no está conforme con la pelota de básquet que le regalaron. De lo anterior se puede afirmar que

A) a Petete le gusta el básquet, pero recibió la pelota de vóley.
B) a Coto le gusta el fútbol y recibió la pelota de vóley.
C) a Perico le gusta el vóley y recibió la pelota de fútbol.
D) a Petete no le gusta el fútbol, pero recibió la pelota de básquet.
E) todo lo anterior es correcto.

51. Un estudiante, un abogado y un médico comentan que cada uno de ellos ahorra en un banco diferente.

- *Yo ahorro en Interbank*, dice el médico a Werner.
- Miguel comenta: *El banco que más interés paga es el Scotiabank.*
- El abogado dice: *Mi secretaria guarda mi dinero en el BCP.*

Si el tercer personaje se llama Óscar, ¿cómo se llama el estudiante?

A) Werner
B) Miguel
C) Óscar
D) Kevin
E) Cristopher

Lógica proposicional

Capítulo V

OBJETIVOS

- Reconocer la relación existente entre las proposiciones.
- Emplear adecuadamente los lenguajes y los conectivos lógicos.
- Relacionar los valores de verdad en el análisis de proposiciones.

Lógica proposicional

Es la parte de la lógica que estudia las proposiciones y la relación existente entre ellas.

ENUNCIADO

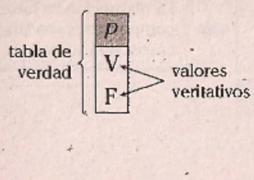
Es una frase u oración que se utiliza en el lenguaje común.

Ejemplos

- Todo hombre es político.
- La Luna es un satélite.
- La Ciudad Heroica es Tacna.

Enunciado cerrado o proposición lógica

Es toda expresión coherente que se caracteriza por el hecho de poseer un valor de verdad (V) o falsedad (F) sin ambigüedad en un determinado contexto. Generalmente, las proposiciones se denotan con letras minúsculas como *p*, *q*, *r*, *s*..., y se pueden analizar en una tabla de verdad.



Ejemplos

p: Lima es la capital del Perú. (V)

q: $6+8=10$ (F)

NOTA

Los mandatos, las preguntas, los deseos y las exclamaciones no son proposiciones lógicas, ya que no se pueden calificar de ser verdaderos (V) o falsos (F).

Ejemplos

- ¿Cuándo empieza el ciclo repaso?
- ¡La hice!
- Haga silencio.
- Sería bueno que estudies.

NOTA

¿Qué es una variable?

Es aquella palabra, letra o símbolo que representa a personas, entes u objetos susceptibles a tomar valores diferentes.

Enunciado abierto o función proposicional

Es todo enunciado en el que intervienen una o más variables con la posibilidad de que se convierta en una proposición lógica cuando cada variable asuma un valor determinado. También es denominado cuasi proposición.

Ejemplo

Él es un escritor peruano.

Es un enunciado abierto [si nos damos cuenta, aún no podemos decir si es verdadero (V) o falso (F)] donde la variable es *Él*. Vamos a darle valores a la variable y observemos qué sucede:

- Cristóbal Colón es un escritor peruano. (F)
- César Vallejo es un escritor peruano. (V)

Se observa que el enunciado abierto se convirtió en una proposición al darle un valor a la variable.

Conectivos lógicos

Son aquellas palabras que enlazan proposiciones o cambian su valor veritativo. Representando dos proposiciones: p y q, podemos establecer el siguiente cuadro:

Símbolo	Operación lógica	Esquema	Significado
$\sim$	negación	$\sim p$	no p
$\wedge$	conjunción	$p \wedge q$	p y q
$\vee$	disyunción	$p \vee q$	p o q
Δ	disyunción exclusiva	$p \Delta q$	o p o q
$\rightarrow$	condicional	$p \rightarrow q$	si p, entonces q
$\leftrightarrow$	bicondicional	$p \leftrightarrow q$	p, si y solo si q

Negación

Ejemplo

$\underbrace{\text{No es cierto que}}_{\sim}\ \underbrace{\text{Juan sea médico.}}_{p}$

p	$\sim p$
V	F
F	V

La negación es una proposición cuyo valor es opuesto al de la proposición original.

> **Nota**
>
> Las palabras *no*, *no es verdad que*, *es falso que*, *no ocurre que*, *no es el caso que*, etc., equivalen al conectivo $\sim$.

Conjunción

Ejemplo

$\underbrace{\text{Juan es futbolista}}_{p}\ \underbrace{\text{y}}_{\wedge}\ \underbrace{\text{Ana es voleybolista.}}_{q}$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La conjunción es verdadera solo si sus componentes son verdaderos; en otros casos, será falsa.

> **Nota**
>
> Las palabras *pero*, *sin embargo*, *además*, *no obstante*, *aunque*, *a la vez*, *también*, etc., equivalen al conectivo $\wedge$.

Disyunción inclusiva o débil

Ejemplo

$\underbrace{\text{Roberto es contador}}_{p}\ \underbrace{\text{o}}_{\vee}\ \underbrace{\text{Roberto es economista.}}_{q}$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción es falsa solo si sus componentes son falsos; en otros casos, será verdadera.

Condicional

Ejemplo

$$\underbrace{\text{Si Juan se esfuerza,}}_{p}\ \underbrace{\text{entonces}}_{\rightarrow}\ \underbrace{\text{ingresará.}}_{q}$$

causa — antecedente

consecuencia — consecuente

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La condicional es falsa solo si su antecendente es verdadero y su consecuente es falso; en otros casos, será verdadera.

NOTA

Las palabras *porque, puesto que, cuando, si, cada vez que*, etc., equivalen al conectivo $\rightarrow$.

Bicondicional

Ejemplo

$$\underbrace{\text{Ana irá a la fiesta,}}_{p}\ \underbrace{\text{si y solo si}}_{\leftrightarrow}\ \underbrace{\text{tiene amigas.}}_{q}$$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La bicondicional es verdadera solo si los valores de sus componentes son iguales; en caso contrario, será falsa.

NOTA

Las palabras *cuando y solo cuando, entonces y solamente entonces*, etc., equivalen al conectivo $\leftrightarrow$.

Disyunción exclusiva o fuerte

Ejemplo

$$\text{O bien } \underbrace{\text{Manuel juega}}_{p}\ \underbrace{\text{o bien}}_{\Delta}\ \underbrace{\text{estudia.}}_{q}$$

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción exclusiva es verdadera solo si sus componentes tienen valores diferentes; caso contrario, será falsa.

NOTA

Generalmente, las proposiciones estarán formadas por varias proposiciones simples generando un esquema proposicional.

Resumen

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \Delta q$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V	F

Ejemplo

Halle la tabla de verdad del esquema proposicional de $[\sim p \vee q] \rightarrow [r \wedge p]$

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$r \wedge p$	$[\sim p \vee q] \rightarrow [r \wedge q]$		
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	F	F

matriz principal

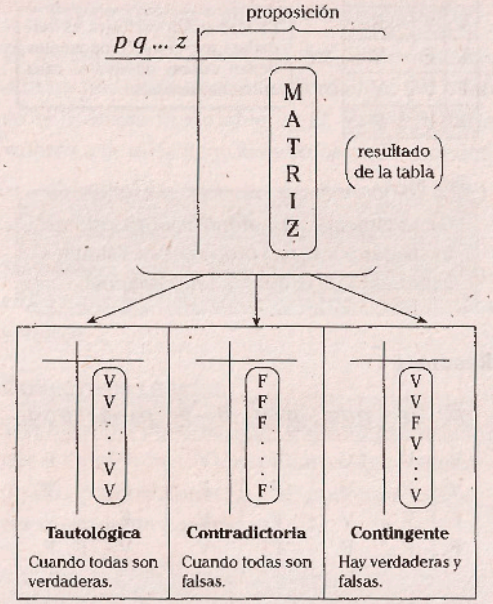
En este caso tiene 3 (V) y 5 (F).

NOTA

El número de combinaciones que se pueden presentar en una tabla de verdad se calcula de la siguiente manera:

n.º de combinaciones $= 2^{\text{n.º de proposiciones}}$

TIPOS DE TABLA DE ACUERDO A LA MATRIZ



LEYES LÓGICAS

Consideremos la proposición
$[(p \to q) \wedge p] \to q$,
cuya tabla de verdad es

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V
		1.^{er} resultado	2.^{o} resultado	3.^{er} resultado (matriz)

La proposición compuesta es V, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones componentes. Se dice entonces que tal proposición es una tautología o ley lógica.

La proposición $p \to p$ es V, cualquiera que sea el valor de verdad de p es otro ejemplo de una ley lógica. En cambio, $p \wedge \sim p$ es F, cualquiera sea el valor de verdad de p, se dice que es una contradicción.

En el cálculo proposicional se utilizan las siguientes leyes o tautologías, cuya demostración se reduce a la confección de la correspondiente tabla de valores de verdad.

a. Involución

$\sim(\sim p) \leftrightarrow p$

no, no p equivale a p

b. Idempotencia

$(p \wedge p) \leftrightarrow p$

$(p \vee p) \leftrightarrow p$

c. Conmutatividad

1. De la disyunción: $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
2. De la conjunción: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

d. Asociatividad

1. De la disyunción: $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
2. De la conjunción: $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

e. Distributividad

1. De la conjunción respecto de la disyunción: $(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
2. De la disyunción respecto de la conjunción: $(p \wedge q) \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

f. De Morgan

1. La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones.
   $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
2. La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones.
   $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

g. Absorción

$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$

$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

$p \wedge (\sim p \vee q) \leftrightarrow p \wedge q$

$p \vee (\sim p \vee q) \leftrightarrow p \vee q$

h. Condicional

$p \to q \leftrightarrow \sim p \vee q$

$p \to q \leftrightarrow \sim q \to \sim p$

Problema N.º 1

¿Cuántos de los siguientes enunciados son proposiciones?

I. El planeta Marte tiene dos satélites.
II. Alfredo Bryce Echenique ganó el Premio Nobel.
III. Juan es doctor.
IV. Hola, ¿cómo estás?
V. ¡No fume!
VI. Ojalá salga el sol.
VII. Solo sé que nada sé.
VIII. Dios existe.
IX. $x < 5$
X. $a+1=10$

Resolución

Para que un enunciado sea proposición, debe afirmar o negar algo. Además, lo que dice la proposición debe ser catalogado como verdadero o falso (sin duda alguna).

I. El planeta Marte tiene dos satélites: Fobos y Deimos. Entonces I es una **proposición verdadera.**
II. Alfredo Bryce Echenique nunca ha ganado el Premio Nobel. Entonces II es una **proposición falsa.**
III. **Sí es una proposición**. Cuando se habla de Juan debemos considerarlo como plenamente identificado, individualizado. No es cualquier Juan, sino un Juan del cual es factible decir si es o no es doctor.
IV. **No es una proposición**. Una pregunta no puede ser catalogada como verdadera o falsa.
V. **No es una proposición**. Es un mandato, y un mandato no es verdadero ni falso.
VI. **No es una proposición.** Es un deseo, y los deseos no son verdades o mentiras.
VII. **No es una proposición**. Es un dicho, o una frase célebre, que no tiene un contenido objetivo.
VIII. **No es una proposición.** A ciencia cierta no se ha demostrado su existencia.
IX. **No es una proposición**, ya que al no conocerse el valor exacto de x, no es posible catalogar dicha información como verdadera o falsa.
X. **No es una proposición**, por la razón anteriormente expuesta.

Por lo tanto, solo hay 3 proposiciones (I, II y III).

Problema N.º 2

Relacione.

I. Ganó la competencia a pesar de estar lesionado.
II. No iré, a menos que tú vayas.
III. Te llevo para que me lleves.
IV. Aprenderás cuando y solo cuando estudies bien.

a. bicondicional
b. conjunción
c. disyunción
d. condicional

Resolución

I. **a pesar** cumple la misma función del conectivo **y**. Es una conjunción.
II. **a menos que** cumple la misma función del conectivo **o**. Es una disyunción.
III. **para que** es una expresión típica de una condicional.
IV. **cuando y solo cuando** tiene el mismo significado de **si y solo si**. Es una bicondicional.

Por lo tanto, la relación correcta es Ib, IIc, IIId, IVa.

Pregunta N.º 3

De

- llegas temprano: p
- te esfuerzas: q
- obtienes buenos resultados: r
- recibes clases especiales: s

simbolice el siguiente enunciado:

Llegas temprano; sin embargo, no te esfuerzas, dado que no obtienes buenos resultados. A menos que recibas clases especiales.

Resolución

$$\underbrace{\text{Llegas temprano}}_{p}\ \underbrace{\text{sin embargo}}_{\wedge}\ \underbrace{\text{no te esfuerzas,}}_{\sim q}$$

$$\text{dado que}\ \underbrace{\text{no obtienes buenos resultados.}}_{\sim r}$$

expresión de condicional

$$\underbrace{\text{A menos que}}_{\vee}\ \underbrace{\text{recibas clases especiales.}}_{s}$$

Luego se simboliza así

$$[\sim r \rightarrow (p \wedge \sim q)] \vee s$$

Problema N.° 4

Halle una expresión equivalente a la siguiente proposición:

Es falso que los impuestos suban y la caja fiscal no se fortalezca.

Resolución

Simbolizamos

$$\underbrace{\text{Es falso que}}_{\sim}\ \underbrace{\text{los impuestos suban}}_{(p}\ \underbrace{\text{y}}_{\wedge}$$

$$\underbrace{\text{la caja fiscal no se fortalezca}}_{\sim q)}$$

Luego tenemos

$$\sim(p \wedge \sim q)$$

Por De Morgan: $\sim(p \wedge \sim q)$

$$\sim p \vee q$$

lo que en palabras significa

$$\underbrace{\text{Los impuestos no suben}}_{\sim p}\ \underbrace{\text{o}}_{\vee}$$

$$\underbrace{\text{la caja fiscal se fortalece}}_{q}$$

Problema N.° 5

Dadas las proposiciones

I. Si te gusta estudiar, entonces te matricularás en Aduni.

II. Si te matriculas en la academia Aduni, aprenderás mucho.

III. Si aprendes mucho, rendirás un buen examen de admisión.

IV. No rindes un buen examen de admisión o eres un cachimbo.

V. Si no serás profesional, entonces no serás cachimbo.

¿qué se puede concluir?

Resolución

Simbolizamos

- te gusta estudiar: p
- te matriculas en Aduni: q
- aprendes mucho: r
- rendirás un buen examen: s
- eres cachimbo: t
- eres profesional: u

y de acuerdo a esto tenemos:

I. $p \rightarrow q$

II. $q \rightarrow r$

III. $r \rightarrow s$

IV. $\sim s \vee t$ equivale a $s \rightarrow t$

V. $\sim u \rightarrow \sim t$ equivale a $t \rightarrow u$

Luego tenemos

$$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow t \rightarrow u$$

Con lo que podemos establecer $p \rightarrow u$ que significa *Si te gusta estudiar, entonces serás un profesional.*

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. La proposición $(p \Delta q) \wedge (p \rightarrow q)$ es verdadera. Halle, respectivamente, los valores de verdad de

I. $q \wedge \sim p$ III. $p \vee q$
II. $\sim p \leftrightarrow q$ IV. $q \rightarrow p$

A) FVFV B) VVVF C) VFVF
D) FVVF E) FVVV

2. La proposición
$[(p \rightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)] \vee [(q \vee r) \wedge (s \rightarrow r)]$
es falsa. Halle los valores de verdad de p, q, r y s, respectivamente.

A) VFVF B) VFFV C) FVVF
D) FFVV E) FVFV

3. Si la proposición
$[(p \vee q) \wedge (\sim q \leftrightarrow p)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee \sim s)]$
es falsa, halle los valores de verdad de p, q, r y s, respectivamente.

A) FVVF B) VFFV C) FVVF
D) FVFV E) FFFV

4. La proposición
$[(p \leftrightarrow q) \wedge (p \Delta r)] \rightarrow [\sim(q \rightarrow r) \vee (r \wedge s)]$
es falsa. Determine los valores de verdad de p, q, r y s, respectivamente.

A) FFVF B) FFVV C) FVVF
D) VFFV E) VFVV

5. Si la proposición
$[(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \Delta r)] \vee [(\sim r \rightarrow s) \rightarrow (q \wedge r)]$
es falsa, halle los valores de verdad de p, q, r y s, respectivamente.

A) FVFF B) FFFV C) FVFV
D) VFFV E) VVFF

6. Si la proposición
$[(p \Delta q) \wedge (q \Delta r)] \rightarrow [(q \vee r) \wedge \sim(\sim p \rightarrow r)]$
es falsa, determine, respectivamente, los valores de verdad de p, q y r.

A) VFF B) VVV C) FVF
D) FFV E) VFV

7. La proposición
$[(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)] \vee [(r \wedge p) \leftrightarrow (s \Delta t)]$
es falsa. Determine, respectivamente, el valor de verdad de p, q, r, s y t.

A) VVFFF B) VVFFV C) FVFFF
D) FVFVV E) FFVVV

8. Si la proposición
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \wedge [(p \vee r) \rightarrow \sim(q \vee r)]$
es verdadera, determine, respectivamente, el valor de verdad de

I. $r \rightarrow p$
II. $p \Delta q$
III. $p \rightarrow r$
IV. $r \leftrightarrow q$

A) FVFV B) FFVV C) VFVF
D) VFVV E) FFVF

9. La siguiente proposición
$[(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)] \rightarrow (q \Delta r)$
es falsa. Halle, respectivamente, los valores de verdad de p, q y r.

A) FVV B) VVF C) VVV
D) VFF E) FFV

10. La proposición
$(p \leftrightarrow q) \wedge (p \vee q)$ es verdadera. Halle, respectivamente, los valores de verdad de

I. $p \vee q$
III. $p \wedge q$
II. $q \rightarrow p$
IV. $q \Delta \sim p$

A) FFVF B) FVFF C) FVVV
D) VFVV E) VVVV

11. La proposición
$[\sim p \vee (q \Delta r)] \vee (q \wedge r)$ es falsa. Halle, respectivamente, los valores de verdad de p, q y r.

A) VVV B) FVV C) VFV
D) VFF E) FVF

12. La proposición
$(\sim p \rightarrow r) \vee [(\sim r \wedge s) \vee (p \leftrightarrow q)]$ es falsa. Halle, respectivamente, los valores de verdad de p, q, r y s.

A) FVFF B) FFVV C) VVFF
D) VVFV E) FVFV

13. Sabiendo que la proposición
$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ es falsa, determine, respectivamente, los valores de verdad de p, q, r y s.

A) VVFV B) VVFF C) VFFF
D) VVVF E) FVFV

14. Si la proposición
$\sim (p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim r \vee s)$ es falsa, determine, respectivamente, los valores de verdad de p, q, r y s.

A) VFFV B) VVFV C) VVVF
D) FFVV E) FVVF

15. Sabiendo que la proposición
$\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim (r \wedge \sim s)$ es falsa, determine los valores de verdad de p, q, r y s, respectivamente.

A) VVVF B) FVVF C) FFVF
D) VFVF E) VFVV

16. Si la proposición
$(p \wedge \sim q) \wedge (q \leftrightarrow \sim r)$ es verdadera, halle el valor de verdad, respectivamente, de

I. $(r \vee q)$
II. $(\sim q \Delta p)$
III. $(r \wedge q)$
IV. $(r \rightarrow \sim p)$

A) VFVF B) VFFF C) VFFV
D) FVFV E) FFVV

17. La proposición
$[(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow q] \Delta [\sim p \rightarrow (r \vee q)]$ es verdadera. Halle, respectivamente, el valor de verdad de

I. $\sim q \Delta r$
II. $\sim q \rightarrow p$
III. $p \vee \sim r$
IV. $p \wedge q$

A) FVVV B) FVVF C) VFVV
D) VFFV E) FVFV

NIVEL INTERMEDIO

18. La proposición *Luis estudia de día y trabaja de noche* es falsa. Entonces es verdadero que

A) Luis estudia de noche y trabaja de día.
B) Luis no estudia de día ni trabaja de noche.
C) Luis no estudia de día o trabaja de noche.
D) Luis no estudia de día o no trabaja de noche.
E) Luis estudia de noche o trabaja de día.

19. La siguiente proposición es falsa:
La moneda se devalúa y encarecen los productos, o la política económica cambia y se incentiva la inversión.
Luego es cierto que

A) La moneda no se devalúa o no encarecen los productos, y la política económica no cambia o no se incentiva la inversión.
B) La moneda no se devalúa o no encarecen los productos, o la política económica no cambia o no se incentiva la inversión.
C) La moneda se devalúa o encarecen los productos, o la política económica cambia y se incentiva la producción.
D) La moneda se devalúa y encarecen los productos, y la política económica cambia y se incentiva la producción.
E) La moneda se devalúa o no encarecen los productos, y la política económica no cambia y no se incentiva la producción.

20. La proposición *Si eres hombre, entonces eres político* equivale a
I. Si no eres hombre, entonces no eres político.
II. Si no eres político, entonces no eres hombre.
III. No eres hombre o eres político.
IV. No eres político o eres hombre.
V. Si eres político, eres hombre.

A) I y V
B) I y III
C) II y IV
D) II y III
E) III y V

21. Niegue la siguiente proposición:
El arte es superfluo o es elitista.

A) El arte no es superfluo y no es elitista.
B) El arte no es superfluo y es elitista.
C) El arte es superfluo y no es elitista.
D) El arte no es superfluo o no es elitista.
E) El arte no es superfluo o es elitista.

22. Niegue la siguiente proposición:
Las arañas son insectos y son nocturnas.

A) Las arañas son insectos o no son nocturnas.
B) Las arañas no son insectos o son nocturnas.
C) Las arañas son insectos o nocturnas.
D) Las arañas no son insectos y no son nocturnas.
E) Las arañas no son insectos o no son nocturnas.

23. Niegue la siguiente proposición:
Juan no es crítico o es fanático.

A) Juan es crítico o es fanático.
B) Juan no es crítico y no es fanático.
C) Juan es crítico y no es fanático.
D) Juan es crítico y es fanático.
E) Juan no es crítico o no es fanático.

24. Niegue la siguiente proposición:
No es bonito ni costoso.

A) Es bonito y costoso.
B) Es bonito o costoso.
C) Es bonito y no es costoso.
D) No es bonito y es costoso.
E) No es bonito o no es costoso.

25. La proposición *Si soy ingeniero, entonces me gustan las matemáticas* equivale a

I. Si me gustan las matemáticas, entonces soy ingeniero.
II. Si no soy ingeniero, entonces no me gustan las matemáticas.
III. No soy ingeniero o me gustan las matemáticas.
IV. Si no me gustan las matemáticas, entonces no soy ingeniero.
V. No me gustan las matemáticas o soy ingeniero.

A) I, II y V
B) II, III y IV
C) III y IV
D) III y V
E) II y IV

26. La proposición *Si toma, no maneje* equivale a

I. No tome o no maneje.
II. Si no toma, entonces maneje.
III. Si maneja, entonces no tome.
IV. Maneje o tome.
V. Maneje y no tome.

A) I y III B) II y III C) I y IV
D) II y IV E) III y V

27. La proposición *Está vivo solo si respira* equivale a

I. No está vivo o respira.
II. No respira o está vivo.
III. Respira dado que está vivo.
IV. No respira solo si no está vivo.

A) I y III B) II y IV C) I, II y IV
D) II y III E) I, III y IV

28. Dadas las premisas

- Si sale el sol, entonces vamos de paseo.
- Si vamos de paseo, nos relajamos.
- Si nos relajamos, entonces estamos de buen ánimo.
- Si estamos de buen ánimo, entonces estudiamos mejor.

se concluye que

I. Si sale el sol, entonces estudiamos mejor.
II. Si no estudiamos mejor, entonces no sale el sol.
III. Si vamos de paseo, entonces estamos de buen ánimo.
IV. Si estamos de buen ánimo, entonces sale el sol.

A) I, II y III
B) I, II, III y IV
C) II y III
D) II, III y IV
E) I y IV

29. Dadas las premisas

- Aumentas tu léxico dado que lees.
- Si no tienes facilidad de palabra, entonces no aumenta tu léxico.
- No tienes facilidad de palabra o tienes capacidad para dirigir.

Se concluye

I. No aumenta tu léxico dado que no lees.
II. Si no lees, entonces no tienes capacidad para dirigir.
III. Si lees, entonces tienes capacidad para dirigir.
IV. No aumenta tu léxico o tienes capacidad para dirigir.

A) II y IV B) I y II C) III y IV
D) I y III E) II y III

30. La proposición *Entenderé a menos que no atienda* equivale a

I. Si no atiendo, entonces no entiendo.
II. Si no entiendo, entonces no atiendo.
III. Entiendo dado que atiendo.
IV. Entiendo solo si atiendo.

A) II y IV B) III y IV C) I, II y III
D) II y III E) I y IV

31. La proposición *Si votas, eres mayor de edad* es falsa. Luego es verdadero que

I. Votas o no eres mayor de edad.
II. Votas y no eres mayor de edad.
III. Eres mayor de edad y no votas.
IV. Si no votas, no eres mayor de edad.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) solo IV E) II y III

32. Dadas las premisas

- Si tiene plumas, entonces es ave.
- Si es ave, entonces vuela.

se concluye que

I. Si tiene plumas, entonces vuela.
II. Si no tiene plumas, entonces no vuela.
III. No tiene plumas o vuela.
IV. No vuela o tiene plumas.

A) solo I
B) II y III
C) I y III
D) II y IV
E) III y IV

33. Dadas las premisas

- Si es pequeño, es oscuro.
- Es cuadrado ya que es rojo.
- Si no es pequeño, entonces no es cuadrado.
- No es oscuro o es opaco.

se concluye que

A) No es opaco o es rojo.
B) No es rojo o es opaco.
C) Si no es cuadrado, es opaco.
D) Si no es oscuro, es rojo.
E) Si es pequeño, es rojo.

34. Sean las proposiciones

p: π es un número racional
q: $x=\sqrt{9}$ si y solo si x tiene dos valores: 3 y -3
s: $8 \geq 3$

Determine el valor de verdad, respectivamente.

I. $(p \vee q) \rightarrow s$
II. $(s \wedge p) \rightarrow \sim q$
III. $p \,\Delta\, (\sim s \rightarrow q)$
IV. $\sim q \,\Delta\, (s \wedge p)$

A) VFFV B) VFVV C) FVFV
D) FFVV E) VVFF

35. Determine, respectivamente, qué tipo de tabla le corresponde a cada uno de los siguientes esquemas moleculares de acuerdo a su matriz.

I. $(\sim q \vee p) \rightarrow (q \leftrightarrow \sim p)$
II. $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)$
III. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$
IV. $(p \,\Delta \sim q) \vee (p \rightarrow q)$

Nota: tautología: T, contradictorio: C y contingente: S

A) STCS B) SCTS C) CSTS
D) TCCT E) SSCT

Lógica inferencial

Capítulo VI

OBJETIVOS

- Reconocer las proposiciones categóricas y las relaciones entre sí.
- Aplicar las reglas de negación a las proposiciones categóricas.
- Identificar las proposiciones típicas y atípicas que involucran cuantificadores lógicos.

Definición

También llamada lógica categórica. Se refiere a proposiciones que relacionan clases.

Conceptos previos

CLASE

Una clase es un conjunto de individuos, objetos o animales que comparten al menos una propiedad en común. Una clase es un conjunto no vacío.

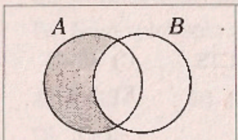
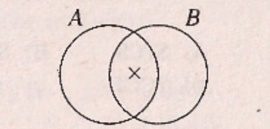
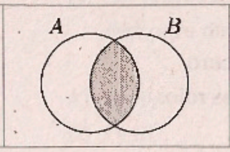
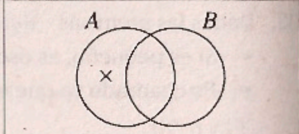
PROPOSICIÓN CATEGÓRICA

Es una proposición que establece una relación de inclusión o exclusión entre clases mediante expresiones llamadas cuantificadores lógicos.

Lógica de clases

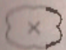
Es aquella rama de la lógica que analiza las relaciones entre una o más proposiciones categóricas.

TIPOS DE PROPOSICIONES CATEGÓRICAS

Universal afirmativa	Particular afirmativa	Universal negativa	Particular negativa
Todo A es B. *Ejemplo* Todo pez es acuático.	**Algún** A es B. *Ejemplo* Algún chofer es prudente.	**Ningún** A es B. *Ejemplo* Ningún arma es letal.	**Algún** A no es B. *Ejemplo* Algún ave no es doméstica.
Representación gráfica			
			

Donde

 región donde no hay elementos (vacía)

 región donde existe al menos un elemento.

 región donde no se puede asegurar la presencia de elemento alguno.

OBSERVACIÓN

Los cuantificadores lógicos tienen sus expresiones equivalentes.

- **Todos** = cualquier, cada, los
  Ejemplo
  Cualquier libro es útil. <>
  Todos los libros son útiles.
- **Ningún** = no hay, no existe, nunca
  Ejemplo
  No hay bien eterno. <>
  Ningún bien es eterno.
- **Algunos** = varios, muchos, existe por lo menos uno, hay, la minoría, casi todos
  Ejemplo
  La mayoría de alumnos estudian. <>
  Algunos alumnos son estudiosos.

NEGACIÓN DE PROPOSICIONES CATEGÓRICAS

La negación de una proposición universal es una particular (y viceversa).

La negación de una proposición afirmativa es una negativa (y viceversa).

Luego

negación

Todos ⟷ Algunos... no

negación

Ninguno ⟷ Alguno

Ejemplos

- La negación de ***Todos** los autos son modernos* es ***Algunos** autos **no** son modernos.*
- La negación de ***Ningún** insecto es carnívoro* es ***Algún** insecto es carnívoro.*

EQUIVALENCIAS ESPECIALES

Caso 1

(cuantificador universal) Los A **no** son B. <>

sale

No (cuantificador universal) los A son B.

Ejemplo

Todos los P **no** son Q. <> **No** todos los P son Q.

Caso 2

(cuantificador universal) Los A son **no** B. <>

se cambia por el otro universal

(otro cuantificador universal) Los A son B.

Ejemplo

Todos los juegos son **no** didácticos. <>

(se cambia por el otro universal)

Ningún juego es didáctico.

Caso 3

$\underbrace{\text{Algún A}}_{\text{c. particular}}$ es **no** B. <> $\underbrace{\text{Algún A}}_{\text{c. particular}}$ **no** es B.

Ejemplo

Algún elemento es no escaso. <>
Algún elemento no es escaso.

INFERENCIA

Es una forma de razonamiento que consiste en obtener una conclusión a partir de una o varias premisas dadas. Los tipos de inferencias son:

Inferencia inmediata

Consiste en obtener una conclusión a partir de una sola premisa, usualmente es una premisa de carácter general con la que se puede hacer conclusiones de carácter particular.

Ejemplo

Dada

Todos los futbolistas son deportistas.

universal afirmativa (Todos)

se puede concluir que

Algún futbolista es deportista.

particular afirmativa (Algún)

Inferencia mediata

Consiste en obtener una conclusión a partir de dos o más premisas.

a. Silogismo

Es una estructura formada por dos premisas y una conclusión.

b. Forma gráfica de un silogismo

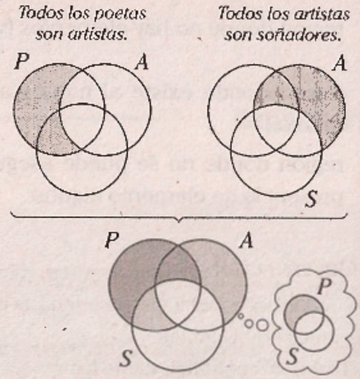
- Se grafican las proposiciones universales, luego las particulares.
- Se relacionan las clases de dos en dos por cada premisa.
- La conclusión se hará con las dos clases que no fueron relacionadas con las premisas.

Ejemplo

Dadas

Todos los poetas son artistas.
Todos los artistas son soñadores.

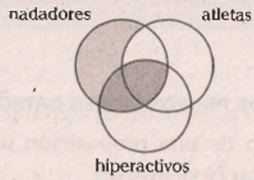
Graficamos



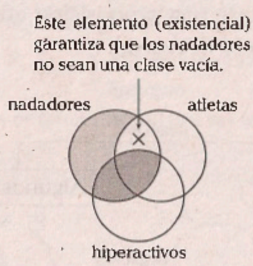
De donde concluimos que *Todos los poetas son soñadores.*

> **NOTA**
>
> **¿Qué es un elemento existencial?**
>
> Es el elemento que hace posible y garantiza que ninguna clase sea vacía.
>
> *Ejemplo*
>
> - Todos los nadadores son atletas.
> - Ningún nadador es hiperactivo.

Se grafica así



Luego



Por lo tanto, la conclusión será *Algunos atletas no son hiperactivos.*

Problema N.º 1

Niegue la proposición *Ninguna dama deja de ser vanidosa.*

Resolución

Ninguna dama deja de ser vanidosa.

significa

Toda dama es vanidosa

y su correspondiente negación es

***Alguna** dama **no** es vanidosa.*

Problema N.º 2

Pedro siempre miente. Si él afirma que *Ningún músico es metódico*, entonces, ¿qué se puede concluir como verdadero?

Resolución

Como lo que Pedro dice es falso, ya que siempre miente, entonces la negación de lo que dice será verdadero.

Pedro dice

***Ningún** músico es metódico.*

su negación será

***Algún** músico es metódico.*

Luego, podríamos concluir como verdadero que

***Muchos** músicos son metódicos.*

Problema N.º 3

Halle una proposición equivalente a *Ningún congresista no es indecente.*

Resolución

*Ningún congresista **no** es indecente.*

(sale)

No es cierto que ningún congresista no es indecente.

negación de ningún

***Algún** congresista es indecente.*

*Algún congresista es **no** decente.*

Por lo tanto, *Algún congresista no es decente.*

Problema N.º 4

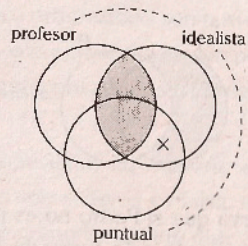
Dadas las proposiciones

- *Ningún profesor es idealista*
- *Algún idealista es puntual*

halle la conclusión válida.

Resolución

Graficamos adecuadamente



Por lo tanto, se puede afirmar que ***Algún** puntual **no** es profesor.*

Problema N.º 5

Dada la premisa

Todos los ingenieros son profesionales

se puede afirmar que

I. Si Jorge es profesional, entonces es ingeniero.

II. Si Pedro no es profesional, entonces no es ingeniero.

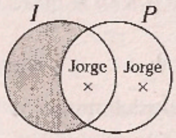
III. Si Julia no es ingeniera, entonces no es profesional.

¿Cuáles son las conclusiones verdaderas?

Resolución

I. **Falsa**

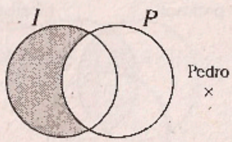
Si Jorge es profesional, entonces es ingeniero.



En el gráfico se observa que si Jorge es profesional, no necesariamente será ingeniero.

II. **Verdadera**

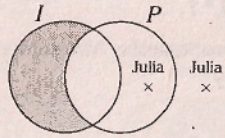
Si Pedro no es profesional, entonces no es ingeniero.



Se observa que si Pedro no es profesional, necesariamente está fuera de la clase de los ingenieros.

III. **Falsa**

Si Julia no es ingeniera, entonces no es profesional.



En el gráfico se observa que si Julia no es ingeniera, podría ser profesional.

Problema N.º 6

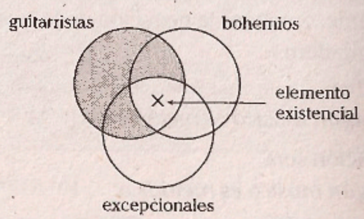
Dadas las proposiciones

- Todos los guitarristas son bohemios.
- Todos los guitarristas son excepcionales,

se concluye

Resolución

Graficamos



Por lo tanto, se concluye que *Algunos bohemios son excepcionales.*

NIVEL BÁSICO

1. ¿Cuál es la negación de *Los cantantes son amables*?

A) Ningún cantante es amable.
B) Algunos cantantes son amables.
C) Varios cantantes no son amables.
D) Todos los cantantes son amables.
E) Ningún cantante es no amable.

2. ¿Cuál es la negación de *Al menos un soñador es millonario*?

A) Algún soñador no es millonario.
B) Algún soñador es no millonario.
C) Todos los millonarios son soñadores.
D) No hay soñador que sea millonario.
E) Todos los soñadores son millonarios.

3. ¿Cuál es la negación de *Es imposible que haya hijo malo*?

A) Todos los hijos son malos.
B) No hay hijo malo.
C) Cualquier hijo es malo.
D) Existen hijos que no son malos.
E) La minoría de hijos son malos.

4. ¿Cuál es la negación de *Muchos comunicadores son críticos*?

A) Ningún comunicador es crítico.
B) Cada comunicador es crítico.
C) Todo comunicador no es crítico.
D) Cualquier crítico es comunicador.
E) La mayoría de comunicadores son críticos.

5. ¿Cuál es la negación de *Cada niño es obediente*?

A) Ningún niño es obediente.
B) Algún niño es obediente.
C) Algunos niños son no obedientes.
D) Todo niño es no obediente.
E) Ningún niño es no obediente.

6. Si la proposición *No hay pensadores progresistas* es falsa, entonces es cierto que

A) Cualquier pensador es progresista.
B) Cada progresista es pensador.
C) Varios progresistas son pensadores.
D) Varios progresistas no son pensadores.
E) Ningún pensador es no progresista.

7. Si la proposición *La mayoría de universitarios no son viajeros* es falsa, entonces se concluye como verdadero que

A) Los universitarios son viajeros.
B) Los universitarios son no viajeros.
C) Los viajeros son universitarios.
D) Ningún universitario es viajero.
E) Algún viajero no es universitario.

8. La proposición *Ningún Estado es independiente* equivale a

A) Todo Estado es independiente.
B) Algún Estado es independiente.
C) Algún Estado es dependiente.
D) Todo Estado es dependiente.
E) Ningún Estado es dependiente.

9. La proposición *Todos los documentos falsificados son inválidos* equivale a

A) No todos los documentos falsificados son válidos.
B) Ningún documento falsificado es inválido.
C) Algún documento falsificado es inválido.
D) Algún documento falsificado es válido.
E) Ningún documento falsificado es válido.

10. ¿A qué equivale la proposición *Los aminoácidos no son solubles?*

A) Ningún aminoácido es soluble.
B) Todos los aminoácidos son no solubles.
C) No todos los aminoácidos son insolubles.
D) No todos los aminoácidos son solubles.
E) Algunos aminoácidos son solubles.

11. La proposición *Cualquier mamífero no es depredador* equivale a

A) Ningún mamífero es depredador.
B) Algunos mamíferos son depredadores.
C) Algunos mamíferos no son depredadores.
D) Todo mamífero es no depredador.
E) Ningún mamífero es no depredador.

12. ¿A qué equivale la proposición *Todos los virus no son inmortales*?

A) No todos los virus son mortales.
B) Algunos virus son inmortales.
C) Algunos virus no son mortales.
D) Algunos virus son mortales.
E) Ningún virus es mortal.

13. La proposición verdadera
No ocurre que algún corrupto es moral
implica necesariamente que

I. Algún corrupto es inmoral.
II. Si x no es moral, entonces es corrupto.
III. Si x no es corrupto, entonces es moral.
IV. Si x es moral, entonces no es corrupto.

A) II y III B) I y III C) I y IV
D) II y IV E) I, II y IV

14. Niegue la proposición
Alguna historia no es real.

A) Ninguna historia es irreal.
B) Toda historia es irreal.
C) Toda historia no es real.
D) Alguna historia es real.
E) Alguna historia es irreal.

15. Dada la proposición verdadera
Todos los cuentos son ficciones
se infiere que

A) Algunas ficciones son cuentos.
B) Algunos cuentos son ficciones.
C) Algunos cuentos no son ficciones.
D) Todas las ficciones son cuentos.
E) Ninguna ficción es cuento.

NIVEL INTERMEDIO

16. Si
Todo alumno es responsable
Todo responsable tiene éxito
se concluye que

A) Algunos alumnos son irresponsables.
B) Algunos alumnos no tienen éxito.
C) Ningún responsable tiene éxito.
D) Todo alumno tiene éxito.
E) Ningún alumno tiene éxito.

17. Si *Todo ingeniero es hábil*
Algunos artistas no son hábiles
se concluye que

A) Algunos artistas no son ingenieros.
B) Algunos artistas son ingenieros.
C) Todo ingeniero es artista.
D) Ningún artista es ingeniero.
E) Todo artista es ingeniero.

18. Si *Todo felino es carnívoro*
Algún felino es doméstico
se concluye que

A) Todo doméstico es carnívoro.
B) Ciertos carnívoros no son domésticos.
C) Ciertos domésticos no son carnívoros.
D) No hay felinos domésticos.
E) Existen carnívoros que son domésticos.

19. Si *Ningún mago es peruano*
Todos los genios son peruanos
entonces se concluye que

A) Algún mago es genio.
B) Todos los magos son genios.
C) Ningún mago es genio.
D) Todos los genios son magos.
E) Algún peruano es genio.

20. Si *Algunos profesores son autodidactas*
Todos los autodidactas son creativos
entonces se concluye que

A) No hay profesor creativo.
B) Cada profesor es creativo.
C) Muchos profesores no son creativos.
D) Varios profesores son creativos.
E) No existen autodidactas que sean profesores.

21. Si *Algún poeta es materialista*
Ningún poeta ama el dinero
entonces se concluye que

A) Algún materialista ama el dinero.
B) Todo materialista ama el dinero.
C) Algún materialista no ama el dinero.
D) Alguno que ama el dinero no es poeta.
E) Todos los que aman el dinero son materialistas.

22. Si *Ningún argentino es limeño*
Todos los limeños son peruanos
entonces se puede concluir que

A) Algunos limeños no son peruanos.
B) Algunos peruanos no son limeños.
C) Ningún argentino es peruano.
D) Algunos peruanos no son argentinos.
E) Algunos argentinos no son peruanos.

23. Si *Todos los estudiantes son empeñosos*
Todos los estudiantes son admirables
entonces se puede concluir que

A) Todos los empeñosos son admirables.
B) Todos los admirables son empeñosos.
C) Algunos empeñosos son admirables.
D) Algunos empeñosos no son admirables.
E) Ningún empeñoso es admirable.

24. Si *Es falso que algún vegetal sea carnívoro*
Es falso que algún carnívoro no es animal
entonces se puede concluir que

A) Algún animal es no vegetal.
B) Algún vegetal es no animal.
C) Algún animal es vegetal.
D) Todo animal es vegetal.
E) Todo vegetal es animal.

25. Si
No es cierto que ningún mamífero es rumiante
Ningún mamífero es no vertebrado
entonces podemos concluir que

A) Algunos rumiantes son invertebrados.
B) Todos los rumiantes son vertebrados.
C) Algunos vertebrados son rumiantes.
D) Algunos vertebrados son mamíferos.
E) Algunos rumiantes son mamíferos.

26. Si *Todos los programas son no instructivos*
Ningún documental no es programa
entonces podemos concluir que

A) Algún documental es instructivo.
B) Algún documental no es instructivo.
C) Todo documental es instructivo.
D) Ningún documental es instructivo.
E) Todo instructivo es documental.

27. Si *Ninguna célula es no procariota*
Todas las células no son fotosintéticas
entonces podemos concluir que

A) Alguna fotosintética es no procariota.
B) Ninguna fotosintética es no procariota.
C) Ninguna procariota no es fotosintética.
D) Todas las procariotas son no fotosintéticas.
E) Todas las procariotas no son fotosintéticas.

28. De la negación de las proposiciones
Alguna piedra es cristal
Alguna joya no es cristal
se puede concluir que

A) Todo cristal es joya.
B) Toda joya es piedra.
C) Toda piedra es joya.
D) Toda piedra es no joya.
E) Algún cristal no es joya.

29. La negación de la conclusión de las siguientes proposiciones
No es cierto que algunos románticos no son carismáticos
Ningún romántico es pesimista
es

A) Algunos carismáticos no son pesimistas.
B) Todos los carismáticos son pesimistas.
C) Ningún pesimista es carismático.
D) Todos los carismáticos no son pesimistas.
E) Ningún carismático es romántico.

30. Si *Algunos alumnos son trabajadores*
Ningún perseverante es obstinado
Todos los alumnos son perseverantes
¿cuál de las siguientes proposiciones se puede concluir?
I. Es falso que ningún perseverante trabaja.
II. Algunos alumnos no son obstinados.
III. Algunos obstinados no trabajan.

A) II y III
B) solo II
C) I y II
D) I, II y III
E) solo I

31. Si
Todas las aves son bípedas
Todas las bípedas son corredoras
Algún doméstico es ave
entonces se concluye que

A) Algún doméstico no es bípedo.
B) Ningún bípedo no es doméstico.
C) Algún corredor es doméstico.
D) Ningún corredor es doméstico
E) Es falso que ningún doméstico no sea corredor.

32. ¿Cuál es la negación de *No es cierto que todos los congresistas no sean imprudentes*?

A) Algunos congresistas no son prudentes.
B) Algunos congresistas son prudentes.
C) Ningún congresista es prudente.
D) Todo congresista es prudente.
E) Todo prudente es congresista.

33. La proposición *No es cierto que ningún alumno no es desatento* equivale a

A) Ningún alumno es atento.
B) Ningún alumno es no atento.
C) Todo alumno es desatento.
D) Todo alumno es atento.
E) Algún alumno es atento.

34. La siguiente proposición verdadera *Todos los hombres son mortales* implica necesariamente que

I. Todos los mortales son hombres.
II. Si x es hombre, entonces es mortal.
III. Si x es mortal, entonces es hombre.

A) I y II B) solo II C) solo III
D) II y III E) solo I

35. La siguiente proposición verdadera *Ningún dialéctico es no creyente* implica necesariamente que

I. Si Juan es dialéctico, entonces es creyente.
II. Si Pedro es creyente, entonces es dialéctico.
III. Si María no es creyente, entonces no es dialéctica.
IV. Si Rosa no es dialéctica, entonces no es creyente.

A) I y III
B) II y III
C) solo II
D) I y II
E) I, III y IV

36. Dadas las proposiciones
No existe A que sea C
Cada A es B
se concluye

A) Cada B es C.
B) Cualquier C es B.
C) Varios C no son B.
D) Al menos un B no es C.
E) Al menos un C es B.

37. Dadas las proposiciones
Es falso que algunos A no sean B
No hay A que sea no C
se concluye

A) Muchos B no son C.
B) Varios C no son B.
C) Todo B es C.
D) Ningún B es C.
E) Es falso que ningún B sea C.

38. Dadas las proposiciones
Todos los metales son preciosos
Algunos diamantes son preciosos
se concluye

A) Algunos metales son diamantes.
B) Algunos diamantes no son metales.
C) Algunos metales no son diamantes.
D) Todo diamante es metal.
E) No se puede concluir válidamente proposición alguna.

Razonamiento inductivo

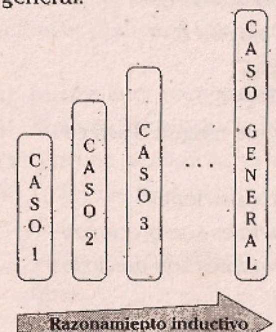
Capítulo VII

Objetivos

- Relacionar de forma acertada situaciones particulares para llegar a plantear conclusiones de carácter general.
- Entender que el paso de lo particular a lo general solo plantea hipótesis que pueden, en algunos casos, ser falibles.
- Comprender que el razonamiento inductivo es una forma de razonamiento que puede utilizarse para ir de lo simple a lo complejo.

Razonamiento inductivo

Es el razonamiento que consiste en el paso de las proposiciones particulares a las proposiciones generales, partiendo de la observación de situaciones sencillas con las mismas características del problema original para formular una conclusión con gran posibilidad de que sea verdadera, llamada caso general.



Nota

El razonamiento inductivo se utiliza como un método de solución, en algunos casos, donde el problema se ha formulado de acuerdo a una característica repetitiva a una ley de formación, o en la que la solución directa resulte muy operativa o abstracta.

Ejemplo

- Pedro es capitán de la Policía y mide más de 1,7 m.
- Luis es coronel de la Policía y mide más de 1,7 m.
- Rodolfo es teniente de la Policía y mide más de 1,7 m.

Casos particulares

Luego, afirmamos

- Todos los oficiales de la Policía miden más de 1,7 m.

Caso general

Razonamiento inductivo

Problema N.° 1

Calcule el valor de E y dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

$$E=(\underbrace{666...666}_{20\text{ cifras}})^2$$

Resolución

Analizamos casos particulares

<u>Suma de cifras</u>

$E_1=(6)^2=36$ $\qquad$ $9=9(1)$

$E_2=(66)^2=4356$ $\qquad$ $18=9(2)$

$E_3=(666)^2=443\ 556$ $\qquad$ $27=9(3)$

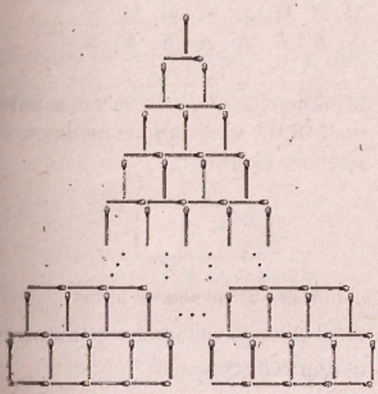
⋮

$E=(\underbrace{66...66}_{20\text{ cifras}})^2=$ ( ) $\qquad$ $=9(20)$

Por lo tanto, la suma de cifras de E es $9(20)=180$.

Problema N.° 2

Halle el número de cerillos empleados en la construcción de la siguiente figura.

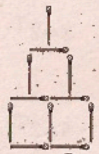


Resolución

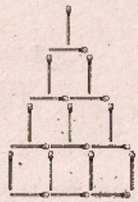
Analizamos casos particulares

<u>N.° de cerillos</u>

1 $\quad$ +1 $\quad$ $5=2^2+1$



1 2 $\quad$ +1 $\quad$ $11=3^2+2$



1 2 3 $\quad$ +1 $\quad$ $19=4^2+3$

Por lo tanto, en la figura pedida, como la numeración de la base va hasta el número 50, el número de cerillos será $51^2+50=2655$.

Pregunta N.° 3

¿De cuántas maneras se puede leer, de forma continua, la palabra COMPENDIO uniendo letras vecinas en el siguiente esquema?

C

O O

M M M

P P P P

E E E E E

N N N N N N

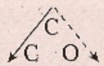
D D D D D D D

I I I I I I I I

O O O O O O O O O

Resolución

Analizamos casos particulares

Cantidad de niveles		N.º de formas de leer
1		$1=2^{0}$
2		$2=2^{1}$
3		$4=2^{2}$
4		$8=2^{3}$

Por lo tanto, el total de formas para leer la palabra COMPENDIO será $2^8=256$.

Pregunta N.º 4

Calcule el valor de la expresión E.

$$E=\sqrt{997\times998\times999\times1000+1}$$

Resolución

Analizamos los casos particulares con el producto de cuatro números consecutivos.

$$E_1=\sqrt{\underbrace{1\times2\times3\times4}_{1\times4}+1}=\sqrt{25}=5 \quad (1\times4)+1$$

$$E_2=\sqrt{\underbrace{2\times3\times4\times5}_{2\times5}+1}=\sqrt{121}=11 \quad (2\times5)+1$$

$$E_3=\sqrt{\underbrace{3\times4\times5\times6}_{3\times6}+1}=\sqrt{361}=19 \quad (3\times6)+1$$

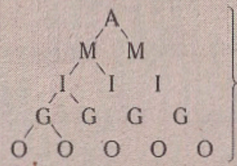
Luego, para el caso pedido

$E=997\times1000+1$

$\therefore\quad E=997\,001$

Observación

- Para arreglos de la siguiente forma



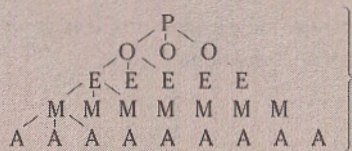
El número de maneras de leer la palabra AMIGO se determina mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{2^{n-1}}$$

n: número de niveles de letras

En el ejemplo, el número de maneras de leer AMIGO será $2^{5-1}=2^4=16$.

- Para arreglos de esta forma



El número de maneras de leer la palabra POEMA se determina mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{3^{n-1}}$$

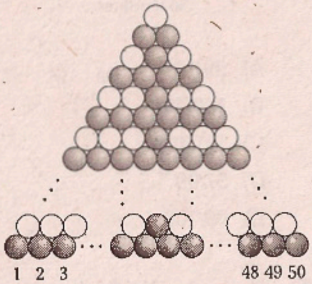
n: número de niveles de letras

En el ejemplo, el número de maneras de leer POEMA será $3^{5-1}=3^4=81$.

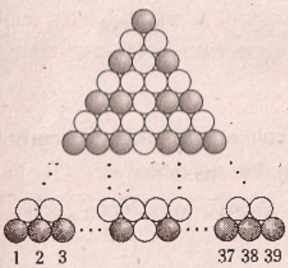
NIVEL BÁSICO

1. Calcule la cantidad de bolitas sombreadas que hay en la siguiente figura.

A) 684
B) 676
C) 674
D) 574
E) 664

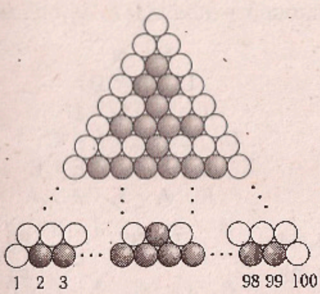


2. Halle la cantidad de bolitas blancas que hay en la siguiente figura.



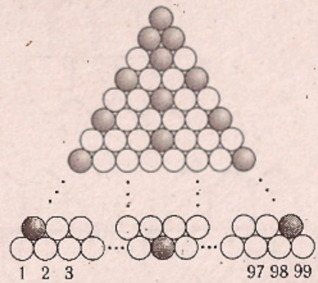
A) 323 B) 399 C) 440
D) 401 E) 442

3. Calcule la cantidad de bolitas blancas que hay en la siguiente figura.



A) 2541 B) 2551 C) 2561
D) 2671 E) 2581

4. Calcule la cantidad de bolitas blancas que hay en la siguiente figura.

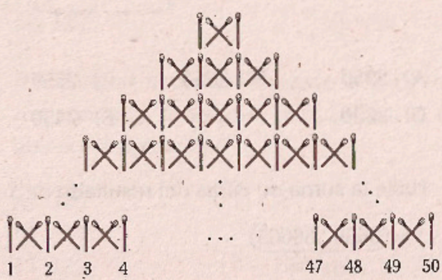


A) 4802 B) 4702 C) 4502
D) 4812 E) 4822

5. Halle la suma de cifras del valor de E.
$E=(111111111)^2$

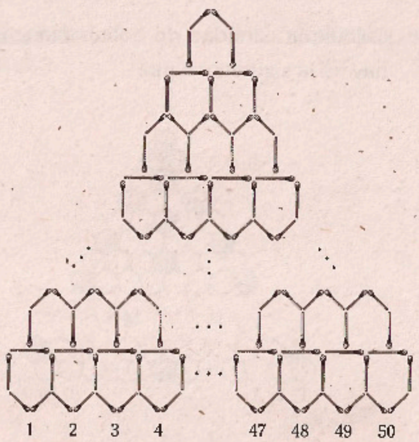
A) 81 B) 64 C) 82
D) 76 E) 85

6. Calcule la cantidad de cerillos que conforman la siguiente figura.



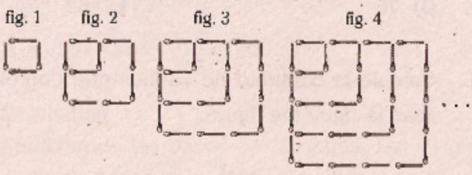
A) 1900 B) 1930 C) 1920
D) 1910 E) 1950

7. Halle la cantidad de cerillos que conforman la siguiente figura.



A) 3375 B) 3325 C) 3355
D) 3225 E) 3275

8. Calcule la cantidad de cerillos que conforman la figura número 47.



A) 2250 B) 2650 C) 2550
D) 2350 E) 2450

9. Halle la suma de cifras del resultado de S.

$$S=(\underbrace{6666...66665}_{50\text{ cifras}})^2$$

A) 313 B) 301 C) 300
D) 295 E) 480

10. Calcule el valor de T.

$$T=\frac{\overbrace{1+5+9+13+...}^{50\text{ términos}}}{\underbrace{3+7+11+15+...}_{50\text{ términos}}}$$

A) 99/101
B) 100/101
C) 101/103
D) 97/99
E) 99/100

11. Halle el valor de E y dé como respuesta la suma de sus cifras.

$$E=\sqrt{9997\times 9998\times 9999\times 10\,000+1}$$

A) 33 B) 34 C) 35
D) 36 E) 37

12. Calcule el valor de E y dé como respuesta la suma de sus cifras.

$$E=\sqrt[3]{9991\times 9992\times 9993+9992}$$

A) 26 B) 27 C) 28
D) 29 E) 30

13. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra INDUCE, de forma continua y uniendo letras vecinas en la distribución siguiente?

I
N N
D D D
U U U U
C C C C C
E E E E E E

A) 64 B) 32 C) 30
D) 28 E) 63

14. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra COMPLETA, de modo continuo y uniendo letras vecinas en la siguiente distribución?

C
O O
M M M
P P P P
L L L L L
E E E E E E
T T T T T T T
A A A A A A

A) 128 B) 124 C) 126
D) 254 E) 253

15. ¿De cuántas maneras se puede leer, de forma continua y uniendo letras vecinas, la palabra LEONEL en el siguiente esquema?

L L L
E E E E
O O O O O
N N N N N N
E E E E E E E
L L L L L L

A) 96 B) 95 C) 92
D) 93 E) 94

16. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra SALSA, de forma continua y uniendo letras vecinas en el siguiente esquema?

S
A A
L L L
S S S S
A A A A A
L L L L L L
S S S S S S S
A A A A A A

A) 80 B) 90 C) 88
D) 76 E) 78

17. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra MÚSICA, de forma continua y uniendo letras consecutivas en el siguiente diagrama?

C I S U M U S I C
A C I S U S I C A
A C I S I C A
A C I C A
A C A

A) 63 B) 62 C) 61
D) 60 E) 59

18. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra ADMISIÓN, de forma continua y uniendo letras consecutivas en el diagrama adjunto?

A
D D
M M M
I I I I
S S S S S
I I I I I I
O O O O O
N N N N N N

A) 128 B) 126 C) 124
D) 122 E) 120

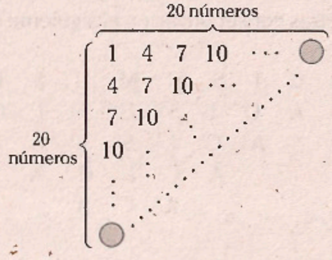
19. ¿De cuántas maneras se puede leer, de forma continua, la palabra REFLEJE en la siguiente distribución?

R
E E
F F F
L L L L
E E E E E
J J J J J J
E E E E E

A) 126
B) 124
C) 128
D) 120
E) 122

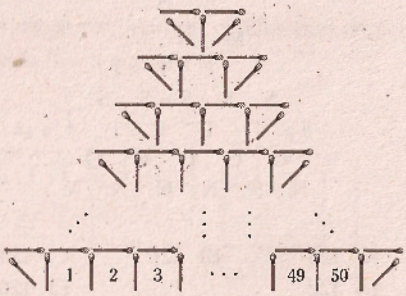
NIVEL INTERMEDIO

20. Calcule la suma de todos los números de la siguiente distribución triangular.



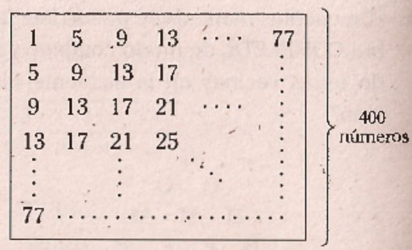
A) 8190 B) 8160 C) 8170
D) 8220 E) 8150

21. Halle el número de cerillos empleados en la siguiente figura.



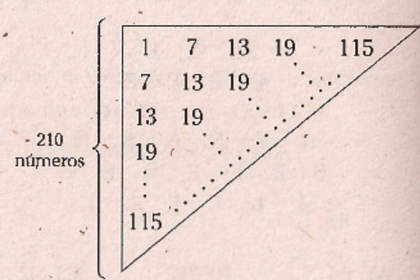
A) 2725
B) 2825
C) 2705
D) 2805
E) 2815

22. Calcule la suma de todos los números de la siguiente distribución numérica cuadrada si consta de 400 números.



A) 32 800
B) 30 800
C) 30 600
D) 32 600
E) 30 400

23. Calcule la suma de todos los números de la siguiente distribución triangular si consta de 210 números.



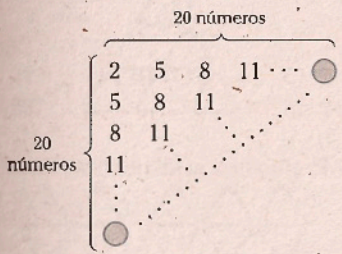
A) 15 280
B) 15 270
C) 16 180
D) 15 170
E) 16 170

24. Halle la suma de cifras del valor de L.

$L=\sqrt{40\times 42\times 44\times 46+16}$

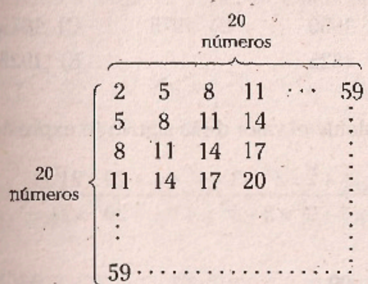
A) 12 B) 11 C) 14
D) 10 E) 13

25. Calcule la suma de todos los números de la siguiente distribución triangular.



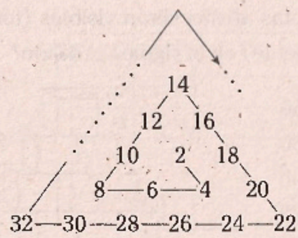
A) 8300 B) 8100 C) 8400
D) 8200 E) 8000

26. Calcule la suma de todos los números de la siguiente distribución cuadrada.



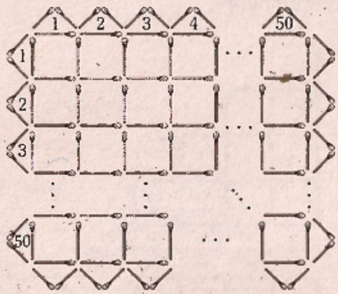
A) 22 600
B) 21 600
C) 23 400
D) 23 800
E) 23 600

27. Si unimos los números con una línea a partir del número 2 (como se muestra en la figura), el primer giro se hará en el número 4, el segundo giro se hará en el número 8, el tercero, en el número 14, y así sucesivamente. ¿En qué número se dará el centésimo giro?



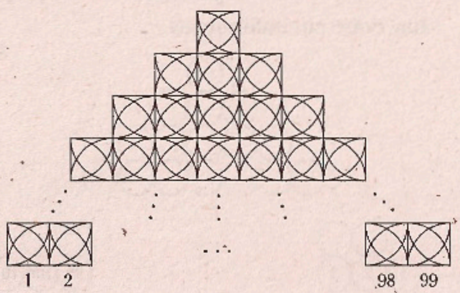
A) 10 104 B) 10 204 C) 10 120
D) 10 102 E) 10 202

28. Halle el número de cerillos en la siguiente figura.



A) 5450 B) 5400 C) 5050
D) 5500 E) 5550

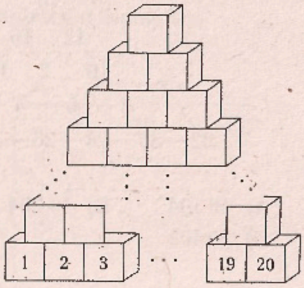
29. ¿Cuántas semicircunferencias hay en la siguiente figura?



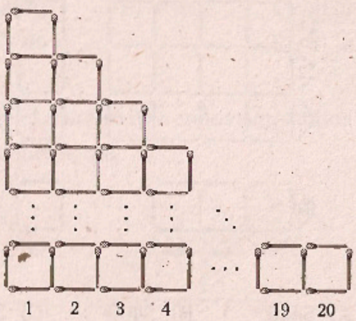
A) 9900 B) 9801 C) 9712
D) 9742 E) 9702

30. ¿Cuántas aristas serán visibles (total o parcialmente) en el siguiente sólido?

A) 750
B) 780
C) 800
D) 720
E) 820

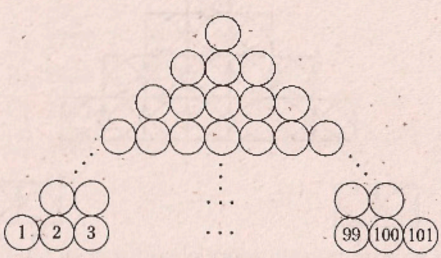


31. Halle el número de cerillos empleados en la siguiente figura.



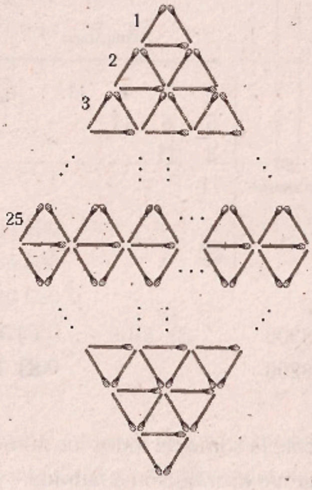
A) 480 B) 460 C) 450
D) 440 E) 430

32. Halle el número de puntos de contacto que hay entre circunferencias.



A) 5250 B) 5150 C) 5100
D) 5050 E) 5200

33. Calcule el número de cerillos en la siguiente figura.



A) 1950 B) 1975 C) 1875
D) 1825 E) 1925

34. Calcule el valor de la siguiente expresión.

$$\frac{1\times 2^2+2\times 3^2+3\times 4^2+...+20\times 21^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+3^2\times 4+...+20^2\times 21}$$

A) $\frac{69}{65}$ B) $\frac{67}{65}$ C) $\frac{65}{63}$

D) $\frac{67}{63}$ E) $\frac{65}{61}$

35. Calcule el valor de la siguiente expresión.

$$\frac{1^2+3^2+5^2+7^2+...+45^2}{2^2+4^2+6^2+8^2+...+46^2}$$

A) $\frac{25}{26}$ B) $\frac{14}{15}$ C) $\frac{15}{16}$

D) $\frac{12}{13}$ E) $\frac{20}{21}$

36. Halle el valor de F y dé como respuesta la suma de sus cifras.

$$F=\underbrace{999...998}_{21\text{ cifras}}\times\underbrace{777...777}_{20\text{ cifras}}$$

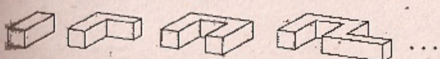
A) 229 B) 239 C) 218
D) 207 E) 240

37. Halle el resultado de la siguiente división.

$$\frac{x^5+x^4-x^2-3x-2}{x^3-x^2+x-2}$$

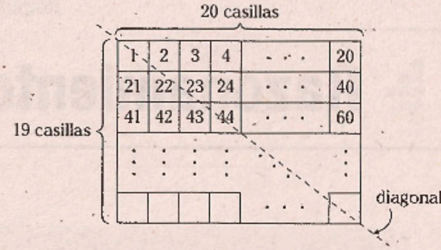
A) x^2+x-1
B) x^2-2x+1
C) x^2+2x-1
D) x^2+2x+1
E) x^2-x+1

38. ¿Cuántos vértices tiene el sólido de la figura 50?



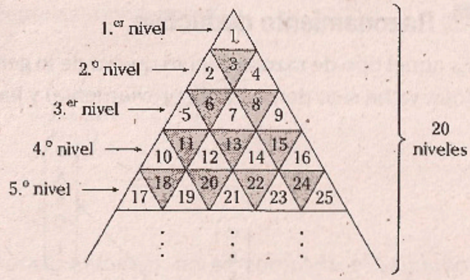
A) 200 B) 204 C) 208
D) 212 E) 196

39. ¿Cuánto suman los números que ocupan las casillas cortadas por la diagonal?



A) 7329 B) 7247 C) 7237
D) 7239 E) 7249

40. ¿Cuánto suman los números ubicados en las casillas blancas del último nivel?



A) 7820 B) 7620 C) 7720
D) 7640 E) 7860

Razonamiento deductivo

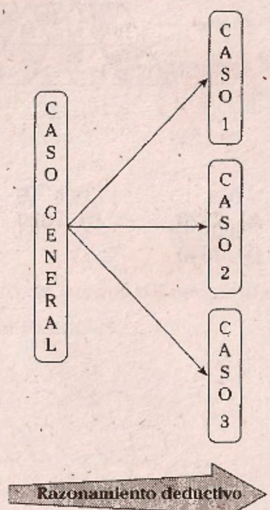
Capítulo VIII

OBJETIVOS

- Reconocer una proposición de carácter general y aplicarla a situaciones particulares.
- Entender que el razonamiento deductivo y el razonamiento inductivo se relacionan en forma cíclica.
- Comprender que la matemática está construida y emplea principalmente el método deductivo para abordar sus problemas.

Razonamiento deductivo

Es aquel tipo de razonamiento que va de lo general a lo particular. Se parte de una afirmación general (que ya ha sido demostrada previamente) y luego se aplica a situaciones particulares.



NOTA

Para resolver un problema mediante el razonamiento deductivo se debe contar con un conocimiento determinado, previo y de carácter general, que guarde relación con el caso específico a analizar.

Ejemplo

- Se sabe que todos los hombres son mortales.
- Se sabe también que Pedro es hombre.

Entonces **se deduce** que Pedro es mortal.

OBSERVACIÓN

Se deduce significa 'lo anterior trae como consecuencia necesaria...'.

Problema N.º 1

Calcule el valor de E.

$$E=\sqrt{\frac{9998\times 10\,002+4}{495\times 505+25}}$$

Resolución

> **Recuerde**
> Diferencia de cuadrados
> $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Luego aplicamos dicha proposición de carácter general al caso específico dado.

$$E=\sqrt{\frac{(10\,000-2)(10\,000+2)+4}{(500-5)(500+5)+25}}$$

$$E=\sqrt{\frac{\left(10\,000^2-\cancel{2^2}\right)+\cancel{4}}{\left(500^2-\cancel{5^2}\right)+\cancel{25}}}$$

$$E=\sqrt{\frac{10\,000^2}{500^2}}$$

$$E=\frac{10\,0\cancel{00}}{5\cancel{00}}$$

$\therefore\ E=20$

Problema N.º 2

Reconstruya la multiplicación mostrada y dé como respuesta la suma de cifras del producto.

```
    3 * * ×
    * 3 *
  -------
    * * 3
  * * * *
  * * *
---------
* * 9 * *
```

Resolución

```
   3 _ a ×
*    3 b
   -------
   _ _ 3
 _ _ _ _
 _ _ _
 ---------
 _ _ 9 _ _
```

En las unidades

$a\times b=3\ \vee\ a\times b=...3$

Además $b<3$, porque el primer producto parcial es menor que el segundo producto parcial.

Luego $a\times b=3$

$a=3\ \wedge\ b=1$

Reemplazando tenemos

```
                  3 n a ×
                  m 3 1
                 -------
menor que 3       3 _ 3
(2 o 1)       _ _ _ 9
              _ _ _
             ---------
              _ _ 9 _ 3
```

Si $m=2$, entonces no se completa el segundo producto parcial.

Luego $m=1$

Entonces reemplazando tenemos

```
      3 4 3 ×
      1 3 1
     -------
      3 4 3
  1 0 2 9
  3 4 3
 -----------
  4 4 9 3 3
  (suman 23)
```

Por lo tanto, la suma de cifras del producto es 23.

Problema N.º 3

Calcule el valor de H.

$$H=\overbrace{\frac{29}{37}+\frac{2929}{3737}+\frac{292929}{373737}+\ldots+\frac{292929\ldots29}{373737\ldots37}}^{111\text{ sumandos}}$$

Resolución

Sabemos que

$$\frac{2929}{3737}=\frac{29(100)+29(1)}{37(100)+37(1)}=\frac{29\cancel{(101)}}{37\cancel{(101)}}=\frac{29}{37}$$

$$\frac{292929}{373737}=\frac{29\cancel{(10101)}}{37\cancel{(10101)}}=\frac{29}{37}$$

Y en general

$$\frac{2929\ldots29}{3737\ldots37}=\frac{29\cancel{(K)}}{37\cancel{(K)}}=\frac{29}{37}$$

Luego aplicamos a cada caso particular

$$H=\underbrace{\frac{29}{37}}+\underbrace{\frac{2929}{3737}}+\underbrace{\frac{292929}{373737}}+\ldots+\underbrace{\frac{2929\ldots29}{3737\ldots37}}$$

$$H=\underbrace{\frac{29}{37}+\frac{29}{37}+\frac{29}{37}+\ldots+\frac{29}{37}}_{111\text{ sumandos}}$$

$$H=\frac{29}{\cancel{37}}\cancel{(111)}=29\times 3$$

$\therefore\quad H=87$

Observación

Última cifra en el resultado de una potenciación

Caso 1

$$\begin{bmatrix}\ldots0\\\ldots1\\\ldots5\\\ldots6\end{bmatrix}^n=\begin{matrix}\ldots0\\\ldots1\\\ldots5\\\ldots6\end{matrix}$$

donde $n\in\mathbb{Z}^+$

Caso 2

$$\begin{bmatrix}\ldots4\\\ldots9\end{bmatrix}^{\text{impar}}=\begin{matrix}\ldots4\\\ldots9\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}\ldots4\\\ldots9\end{bmatrix}^{\text{par}}=\begin{matrix}\ldots6\\\ldots1\end{matrix}$$

Caso 3

$$\begin{bmatrix}\ldots2\\\ldots3\\\ldots7\\\ldots8\end{bmatrix}^{\overset{o}{4}}=\begin{matrix}\ldots2^4\\\ldots3^4\\\ldots7^4\\\ldots8^4\end{matrix}\qquad\begin{bmatrix}\ldots2\\\ldots3\\\ldots7\\\ldots8\end{bmatrix}^{\overset{o}{4}+r}=\begin{matrix}\ldots2^r\\\ldots3^r\\\ldots7^r\\\ldots8^r\end{matrix}$$

$\overset{o}{4}$: significa múltiplo de 4

r: residuo de expresar el exponente en función de un $\overset{o}{4}$

Problema N.º 4

¿En qué cifra termina el resultado final de la expresión A?

$$A=(34^{24}+25^{24}+76^{24})(27^3+36^{11}+215^{14}+1)-3766^{51}$$

Resolución

Solo debemos analizar las últimas cifras de cada sumando o de cada producto.

$$A=[(\ldots4)^{\text{par}}+(\ldots5)^{24}+(\ldots6)^{24}][(\ldots7)^{\overset{o}{4}+3}+(\ldots6)^{11}+(\ldots5)^{11}+1]-(\ldots6)^{51}$$

$$A=[\ \ldots6\ +\ \ldots5\ +\ \ldots6\ ]\quad[\ \ldots3\ +\ \ldots\ +\ 6+\ldots\ +\ 5+1]-\ldots6$$

$$A=(\ldots7)(\ldots5)-\ldots6\ \rightarrow\ A=(\ldots5)-(\ldots6)\ \rightarrow\ A=\ldots9$$

Por lo tanto, la última cifra del resultado de A es igual a 9.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. En la siguiente multiplicación, cada asterisco representa una cifra. Calcule la suma de cifras del producto.

$$\begin{array}{r} * * 7 * \times \\ 6 7 * \\ \hline * * * * * \\ * * * 2 * \\ 8 * * * \\ \hline * * * * * * 0 \end{array}$$

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

2. Reconstruya la siguiente división y calcule la suma de cifras del dividendo.

$$\begin{array}{rl} * 1 6 * * & \underline{|\, * *} \\ \underline{2 * *} & \, * * 2 \\ 3 * * & \\ \underline{* * *} & \\ 1 4 * & \\ \underline{* 4 0} & \\ - - - & \end{array}$$

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

3. Si $\overline{wxyz}+w+x+y+z=2013$, calcule $\overline{zx}+\overline{yw}+\overline{wz}$.

A) 148 B) 136 C) 128
D) 130 E) 132

4. Dada la siguiente adición, las letras iguales tienen la misma cifra.

$$\begin{array}{r} \overline{C\,O\,C\,A} + \\ \overline{C\,O\,L\,A} \\ \hline \overline{L\,A\,T\,A} \end{array}$$

Calcule $C\times O\times L+C+A$.

A) 15 B) 18 C) 12
D) 17 E) 16

5. Dada la siguiente adición, las letras iguales tienen la misma cifra, además $A=3$.

$$\begin{array}{r} \overline{P\,I\,E\,N\,S\,E} + \\ \overline{A\,N\,T\,E\,S} \\ \hline \overline{E\,X\,I\,S\,T\,A} \end{array}$$

Halle $\overline{XE}+\overline{NP}+\overline{ST}+\overline{AI}$.

A) 196 B) 198 C) 188
D) 192 E) 194

6. En la siguiente multiplicación, cada asterisco (*) representa una cifra. Calcule la suma de cifras del producto.

$$\begin{array}{r} 2 * * * \times \\ * * * \\ \hline * * * * \\ * 0 * 1 \\ 9 * 2 * \\ \hline * * * 8 * * 4 \end{array}$$

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

7. En la siguiente adición, las letras A, C, D y E representan números primos diferentes.

$$\begin{array}{r} \overline{A\,E\,C} + \\ \overline{C\,D\,D} \\ \overline{E\,A\,E} \\ \hline \overline{1\,C\,D\,C} \end{array}$$

Calcule el valor de $E\times D+A\times C$.

A) 33 B) 31 C) 29
D) 27 E) 35

8. Halle la suma de cifras del producto luego de reconstruir la siguiente multiplicación. Considere que cada asterisco representa una cifra.

$$\begin{array}{r} 7\,*\,*\,*\,\times \\ *\,* \\ \hline *\,*\,*\,*\,* \\ 1\,*\,*\,*\,6 \\ \hline *\,*\,*\,9\,0\,7 \end{array}$$

A) 26 B) 27 C) 28
D) 29 E) 30

9. De acuerdo con las adiciones indicadas

$\overline{ap}+\overline{bq}+\overline{cr}=253$

$\overline{px}+\overline{qy}+\overline{rz}=138$

$\overline{xa}+\overline{yb}+\overline{zc}=104$

calcule $\overline{rbz}+\overline{qax}+\overline{pcy}$.

A) 1548 B) 1458 C) 1348
D) 1358 E) 1368

10. Dada la adición, las letras iguales tienen la misma cifra.

$$\begin{array}{r} \overline{A\,C\,C\,B\,A}\,+ \\ \overline{G\,E\,A\,F} \\ \hline \overline{B\,G\,F\,C\,G} \end{array}$$

Calcule $A\times F+E\times G$.

A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

11. Dada la adición siguiente, las letras iguales tienen la misma cifra. Calcule $B\times C\times A+D\times F$.

$$\begin{array}{r} \overline{A\,B\,C\,D\,E}\,+ \\ \overline{A\,F\,C\,D\,E} \\ \hline \overline{B\,A\,E\,D\,F\,E} \end{array}$$

A) 90 B) 92 C) 96
D) 98 E) 95

12. Si se cumple que
$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=121$,
calcule $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$.

A) 1331 B) 1321 C) 1221
D) 1231 E) 1111

13. Si se cumple que
$431\times\overline{abcd}=...9536 \ \wedge \ 124\times\overline{abcd}=...8544$,
halle la suma de las cuatro últimas cifras del resultado de $555\times\overline{abcd}$.

A) 16 B) 14 C) 15
D) 17 E) 18

14. Si se cumple que
$35\times\overline{abcd}=...2495 \ \wedge \ 16\times\overline{abcd}=...7712$,
calcule la suma de las cuatro últimas cifras del resultado de $3\times\overline{abcd}$.

A) 12 B) 9 C) 18
D) 6 E) 15

15. Calcule el valor de P y dé como respuesta la suma de sus cifras.

$$P=\overbrace{1\frac{1}{13}+1\frac{101}{1313}+1\frac{10101}{131313}+1\frac{1010101}{13131313}+...}^{26\text{ sumandos}}$$

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

16. En la siguiente multiplicación, cada letra es un dígito. A letras iguales les corresponden dígitos iguales y a letras diferentes, dígitos diferentes. Halle la suma de cifras del producto.

$$\begin{array}{r} \overline{ABBCD}\times \\ 8 \\ \hline \overline{AACBCA} \end{array}$$

A) 15 B) 12 C) 16
D) 10 E) 20

17. En la siguiente multiplicación, las letras iguales tienen la misma cifra. Halle la suma de cifras del producto.

$$\begin{array}{r} \overline{ABCBE}+ \\ A \\ \hline \overline{FCGFA} \end{array}$$

A) 24 B) 25 C) 20
D) 28 E) 22

18. En la siguiente operación, las letras iguales tienen la misma cifra. Halle la suma de cifras del producto.

$$\begin{array}{r} \overline{ABCDE}\times \\ 4 \\ \hline \overline{EDCBA} \end{array}$$

A) 30 B) 21 C) 24
D) 25 E) 27

19. En la siguiente sustracción

$$\begin{array}{r} \overline{abcefg}- \\ \overline{cbagfe} \\ \hline \overline{mnpqrs} \end{array}$$

$a > c \wedge e > g$

Calcule $m+n+p+q+r+s$.

A) 27 B) 30 C) 33
D) 36 E) 45

20. Si se cumple

$\overline{abc}\times 9\times 99\times 999=...516$,

calcule $a+b+c$.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 7

NIVEL INTERMEDIO

21. En la siguiente adición, cada letra reemplaza a una cifra; además, las letras iguales tienen la misma cifra.

$$\begin{array}{r} \overline{BCEFGHI}+ \\ \overline{878888A} \\ \hline \overline{ADFGHIJ} \end{array}$$

Calcule $G\times H+I\times E$.

A) 41 B) 42 C) 43
D) 44 E) 39

22. En la siguiente adición, cada letra es una cifra; además, las letras iguales tienen la misma cifra.

$$\begin{array}{r} \overline{ABCD}+ \\ \overline{ABC} \\ \hline 7477 \end{array}$$

Calcule $A\times C+B\times D$.

A) 105 B) 110 C) 112
D) 120 E) 108

23. En la siguiente adición, a letras iguales les corresponden cifras iguales y a letras diferentes, cifras diferentes.

$$\begin{array}{r} \overline{BAEBD}+ \\ \overline{CAFBE} \\ \hline \overline{GA8B8C} \end{array}$$

Calcule $C\times E+F\times D$.

A) 29 B) 26 C) 25
D) 27 E) 28

24. En la siguiente división, cada asterisco representa un dígito. Halle la suma de cifras del dividendo.

$$\begin{array}{l|l} **5** & ** \\ \cline{2-2} ** & 6*** \\ \hline -*** & \\ \;\;*** & \\ \hline \;\;-*2* & \\ \;\;\;\;*** & \\ \hline \;\;\;\;--- & \end{array}$$

A) 34 B) 35 C) 36
D) 37 E) 33

25. En la siguiente multiplicación, cada asterisco representa un dígito. Halle la suma de cifras del producto.

$$\begin{array}{r} 7**** \times \\ ** \\ \hline ***** \\ 1***6\;\; \\ \hline ***907 \end{array}$$

A) 26 B) 27 C) 30
D) 29 E) 28

26. Si se cumple que $5a-4c-b=0$, además a, b y $c \in \mathbb{R}^+$, calcule el valor de R.

$$R=\left(\frac{a-b}{c-a}\right)^{\left(\frac{b+4c}{2a}\right)}$$

A) 16 B) 32 C) 64
D) 128 E) 8

27. Calcule el valor de A.

$$A=\sqrt{\frac{191\times 209+81}{47\times 53+9}}$$

A) 4 B) 2 C) 8
D) 10 E) 16

28. Calcule el valor de B.

$$B=\sqrt{(230)(270)+(345)(405)+1300+(500)(375)}$$

y dé como resultado la suma de sus cifras.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

29. Si se cumple que

$625^1+625^2+625^3+625^4+...+625^{10}=\overline{...abc}$,

calcule $a+b+c$.

A) 5 B) 3 C) 8
D) 9 E) 12

30. Halle la última cifra del valor de E.

$E=1234^{2337}+1469^{854}+885^{143}+246^{642}+891^{476}$

A) 6 B) 5 C) 8
D) 7 E) 9

31. Halle la última cifra del valor de A.

$A=328^{134}+597^{96}+333^{2013}+8732^{27}$

A) 5 B) 4 C) 7
D) 9 E) 6

32. Si N es el menor número natural que multiplicado por 63 000 da como resultado un cuadrado perfecto, halle la suma de cifras de N.

A) 8 B) 9 C) 16
D) 7 E) 12

33. Si M es el menor número natural que multiplicado por 33 da como resultado un número formado únicamente por cifras 7, halle la suma de cifras de M.

A) 24 B) 27 C) 26
D) 28 E) 25

34. Si D es el menor número natural que al colocarle una cifra 2 por la izquierda (al inicio del número) y una cifra 1 por la derecha (al final del número) el número resultante es igual a $33D$, halle la suma de cifras de D.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 12 E) 18

35. Si se cumple que
$176^1+276^2+376^3+476^4+...+1076^{10}=\overline{...ab}$,
calcule $a+b$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 9 E) 12

36. Reconstruya la siguiente división donde cada asterisco representa una cifra y, además, la última cifra del dividendo es igual a la primera cifra del cociente. Dé como respuesta la suma de cifras del dividendo.

```
* * * * 4 * *  | * *
* * *            * * * * 3
- - * * *
      *
    - - * *
        * *
        * * *
        * * *
        - - 1
```

A) 32 B) 30 C) 29
D) 33 E) 31

37. Reconstruya la siguiente división, donde cada asterisco es una cifra. Halle la suma de cifras del dividendo.

```
* * * * * * *  | * *
* * *            * * 8 * *
- - - * *
      * *
      - * * *
        * * *
        - - 2
```

A) 28 B) 26 C) 23
D) 25 E) 27

38. En las siguientes operaciones, se cumple que letras distintas son cifras diferentes y significativas. ¿Qué cifra no ha sido utilizada?

$$\begin{array}{r} \overline{DAAED}\times \\ D \\ \hline \overline{HDEBDE} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{FHG}+ \\ \overline{EG} \\ \hline \overline{CFD} \end{array}$$

A) 2 B) 5 C) 4
D) 7 E) 9

39. En la siguiente multiplicación, las letras iguales son cifras iguales y las letras diferentes son cifras diferentes.

$$\begin{array}{r} \overline{P1P}\times \\ \overline{2Q} \\ \hline \overline{63R} \\ \overline{T2T} \\ \hline \overline{T8UR} \end{array}$$

Calcule el valor de M.
$M=(P+R+U)-(Q+T)$

A) 6 B) 5 C) 8
D) 7 E) 4

Planteo de ecuaciones

Capítulo IX

OBJETIVOS

- Interpretar adecuadamente los enunciados en forma literal y representarlos de manera simbólica.
- Comprender que lo más importante al tener un conjunto de datos es aprender a relacionarlos adecuadamente.
- Plantear una ecuación y luego resolverla acertadamente.
- Relacionar lo aprendido con las situaciones concretas de la vida diaria.

Planteamiento de una ecuación

Para plantear una ecuación hay sugerencias importantes que podemos seguir.

- Leer el enunciado hasta entender la situación planteada y luego clasificar los datos de acuerdo a la relación que hay entre ellos.
- Identificar aquello que se pide (la incógnita) y suponer algún valor (no dado en los datos) que nos ayudaría a resolver el problema de modo más sencillo. Este valor generalmente será el punto de partida para la solución.
- Asignar una variable (letra) a aquellos valores que nos permitan encontrar otros valores.
- Identificar qué valor en el problema planteado permanece constante (no cambia), para luego formar una igualdad con él.
- Resolver algebraicamente la ecuación.

Veamos algunos enunciados frecuentes:

A* es tanto como *B

Significa que A es igual a B; que A es equivalente a B.

$$\underset{A}{\square}\ \ \underset{B}{\square}\ \begin{cases} \boxed{A=B} \\ \text{o} \\ \boxed{\begin{matrix} A=x \\ B=x \end{matrix}} \end{cases}$$

A* es dos veces *B

$$\underset{\text{mayor}}{A}\ \text{es}\ \underbrace{\text{dos veces}}_{\left(\begin{matrix}\text{... el doble...}\\ \text{... el duplo...}\end{matrix}\right)}\ \underset{\text{menor}}{B}.$$

Significa que A es igual a B multiplicado por dos.

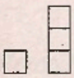
$$\underset{B}{\square}\ \ \underset{A}{\begin{matrix}\square\\ \square\end{matrix}}\ \begin{cases} \boxed{A=2B} \\ \text{o} \\ \boxed{\begin{matrix} B=x \\ A=2x \end{matrix}} \end{cases}$$

A es dos veces más que *B*

$\underset{\text{mayor}}{A}$ es $\underbrace{\text{dos veces más}}_{\substack{\text{(... tres veces...}\\ \text{... el triple...)}}}$ que $\underset{\text{menor}}{B}$.

+1

Significa que *A* está dos veces por encima de *B*.



B A

$\boxed{A=3B}$

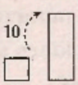
o

$\boxed{\begin{array}{l} B=x \\ A=3x \end{array}}$

A excede a *B* en 10 unidades

$\underset{\text{mayor}}{A}$ $\underbrace{\text{excede a}}_{\substack{\text{(... es mayor...}\\ \text{... que supera a...}\\ \text{... le gana a...)}}}$ $\underset{\text{menor}}{B}$ en $\underbrace{\text{10 unidades.}}_{\text{(exceso o diferencia)}}$

Significa que *A* le lleva a *B* una ventaja de 10 unidades.



10

B A

$\boxed{\begin{array}{l} A-B=10 \\ B+10=A \\ A-10=B \end{array}}$ (formas equivalentes por interpretación)

o

$\boxed{\begin{array}{l} B=x \\ A=x+10 \end{array}}$

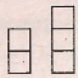
NOTA

- *A* excede a *B* en 10 unidades.
- El exceso de *A* sobre *B* es de 10 unidades.
- *B* es excedido por *A* en 10 unidades.

} significan lo mismo

A y *B* están en la relación de 2 a 3

Significa que por cada 2 unidades que le pongamos a *A*, debemos ponerle 3 unidades a *B*.



A B

$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{A}{B}=\dfrac{2}{3} \\[2mm] \dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{3} \end{array}}$ (formas equivalentes por despeje)

o

$\boxed{\begin{array}{l} A=2K \\ B=3K \end{array}}$

NOTA

El enunciado anterior también se puede formular así:

A es como 2 y *B* es como 3.

OBSERVACIÓN

- Sea el número x

  El doble de un número aumentado en 10

  $2x+10$

  El doble de un número aumentado en 10

  $2(x+10)$

- Sea la cantidad x

  El triple de una cantidad aumentada en 5

  $\underbrace{3(x+5)}$

  la cantidad aumentada

- El triple de una cantidad aumentado en 5

  $\underbrace{3x}+5$

  el triple aumentado

Problemas Resueltos

Problema N.º 1

De tres números pares consecutivos se observa que la suma de los dos mayores es igual al triple del menor, disminuido en 10. Calcule la suma de los tres números.

Resolución

Sea x el menor de ellos, luego los tres números pares serán

$$\underset{\text{menor}}{x}\,;\,\underbrace{x+2\,;\,x+4}_{\text{mayores}}$$

Del dato tenemos

$$\underbrace{(x+2)+(x+4)}_{\text{2 mayores}}=\underbrace{3(x)}_{\text{triple del menor}}\underbrace{-\,10}_{\text{disminuido}}$$

Efectuamos

$2x+6=3x-10$

y despejamos

$x=16$

Los tres números son 16; 18; 20

Por lo tanto, la suma de los tres números será

16+18+20=54.

Problema N.º 2

Al iniciar una reunión, el número de mujeres era igual al doble del número de hombres. Luego llegan tres mujeres más, pero se retiran tres hombres, notándose después de ello que el número de mujeres es igual a tres veces el número de hombres. ¿Cuántos hombres quedaron al final?

Resolución

	Al inicio		Al final
Hombres:	x	$\xrightarrow{\text{se van 3}}$	$x-3$
Mujeres:	$2x$	$\xrightarrow{\text{llegan 3}}$	$2x+3$

Por dato, el número de mujeres es tres veces el número de hombres.

Del dato final planteamos

$$\underbrace{2x+3}_{\text{mujeres}}=\underset{\text{veces}}{3}\underbrace{(x-3)}_{\text{hombres}}$$

Despejamos $x=12$

Por lo tanto, el número de hombres al final será

$12-3=9$.

Problema N.º 3

En un ropero, el número de camisas excede en 10 al número de pantalones. Si se triplicara el número de pantalones y se duplicara el número de camisas, entonces el exceso del número de camisas sobre el número de pantalones sería de 9 unidades. ¿Cuántas camisas hay?

Resolución

	Real		Supuesto
Pantalones:	x	$\xrightarrow{\text{se triplicara}}$	$3(x)$
Camisas:	$x+10$	$\xrightarrow{\text{se duplicara}}$	$2(x+10)$

Exceden en 10 a los pantalones.

Excederían a los pantalones en 9 unidades.

Del dato final planteamos

$$\overbrace{\underbrace{2(x+10)}_{}}^{\text{camisas}} \underset{\text{excederían}}{-} \overbrace{3(x)}^{\text{pantalones}} = 9$$

Despejamos

$x=11$

Por lo tanto, el número de camisas es 11+10=21.

Problema N.º 4

Por la mañana, un comerciante se percata de que la relación del número de manzanas y el de naranjas es de 5 a 4, respectivamente. Durante el día vende 38 manzanas y 15 naranjas cerrando así sus ventas y notando de que le quedan 2 manzanas por cada 3 naranjas. ¿Cuántas manzanas le quedan al final?

Resolución

	Por la mañana		Por la tarde
Manzanas:	$5K$	$\xrightarrow{\text{vende 38}}$	$5K-38$
Naranjas:	$4K$	$\xrightarrow{\text{vende 15}}$	$4K-15$

Por cada 2 manzanas hay 3 naranjas.

Del dato final planteamos

$$\frac{\overbrace{5K-38}^{\text{manzanas}}}{\underbrace{4K-15}_{\text{naranjas}}} = \frac{2}{3}$$

como

como

Despejamos $K=12$

Por lo tanto, al final el número de manzanas es

$5(12)-38=22.$

Problema N.º 5

En una pequeña reunión se va a repartir 180 figuritas entre cierta cantidad de niños de manera equitativa; sin embargo, cuatro de ellos renuncian a su parte, de modo que al repartirse el mismo total entre los niños restantes, se observa que al final cada uno recibe 16 figuritas más de lo que iba a recibir al inicio. ¿Cuántos niños hay en la reunión?

Resolución

	Al inicio	Al final
Total de figuritas:	180	180
Cantidad de niños:	x	$x-4$
Lo que recibe cada niño:	$\frac{180}{x}$	$\frac{180}{x-4}$

+4

Cada uno recibe 4 figuritas más.

Luego, podemos plantear del dato final

$$\overbrace{\frac{180}{x-4}}^{\substack{\text{cada niño}\\ \text{recibe al}\\ \text{final}}} - \overbrace{\frac{180}{x}}^{\substack{\text{cada niño}\\ \text{iba a recibir}\\ \text{al inicio}}} = 16$$

cuánto más recibe

Simplificamos

$$\frac{45}{x-4}-\frac{45}{x}=4$$

Operamos

$$\frac{45x-45(x-4)}{(x-4)(x)}=4$$

$$\cancel{45x}-\cancel{45x}+180=4(x-4)(x)$$

$$45=\underbrace{(x)}_{9}\underbrace{(x-4)}_{5}$$

$\rightarrow \quad x=9$

Por lo tanto, hay 9 niños en la reunión.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. La suma de cinco números consecutivos es igual a 85. Halle la suma de cifras del menor de ellos.

A) 3 B) 6 C) 7
D) 5 E) 4

2. Se tiene un número impar al cual se le suma los dos números pares que le siguen y los dos números impares que le preceden, obteniéndose en total 213 unidades. Halle el mayor de los números y dé como respuesta el producto de sus cifras.

A) 20 B) 14 C) 24
D) 15 E) 18

3. En una reunión en la que asistieron varones, mujeres y niños, se observa que entre varones y mujeres se cuentan 48 personas; entre mujeres y niños, 44 personas, y entre varones y niños, 46 personas. ¿Cuántas personas asistieron a dicha reunión?

A) 66 B) 67 C) 68
D) 69 E) 70

4. En un salón de inicial se observa que siete veces el número de niños más tres veces el número de niñas es igual a 71; en cambio, tres veces el número de niños más siete veces el número de niñas es 59. Calcule el producto del número de niños y de niñas de dicho salón.

A) 36 B) 40 C) 30
D) 42 E) 48

5. Se ha pagado una deuda de S/.265 con monedas de S/.5 y S/.2, y el número de monedas de S/.2 es mayor que el de S/.5 en 17. ¿Cuántas monedas se usaron en total?

A) 73 B) 92 C) 50
D) 65 E) 83

6. Un niño ha dibujado en un papel 40 figuras geométricas entre triángulos y cuadrados. En total hay 138 vértices. ¿Cuántos triángulos más que cuadrados hay?

A) 7
B) 6
C) 4
D) 5
E) 8

7. Un comerciante entra a una tienda de camisas y compra cierto número de ellas pagando S/.15 por cada una. Luego entra a una tienda de pantalones comprando cierto número de ellos y paga S/.25 por cada uno. Si en total compró 50 prendas y en la segunda tienda gastó S/.50 más que en la primera, ¿cuántos pantalones compró?

A) 18 B) 20 C) 16
D) 22 E) 24

8. Ana le dice a Betty: *Si yo te diera S/.6, entonces tendríamos la misma cantidad de dinero.* Betty contesta: *Si yo te diera S/.12, entonces tendrías el triple de lo que me quedaría.* ¿Cuánto tienen Ana y Betty juntas?

A) S/.68 B) S/.76 C) S/.72
D) S/.84 E) S/.80

17. En un estante se tienen 4 libros de Aritmética más que los de Razonamiento Matemático, a su vez estos últimos son 7 libros menos que los de Álgebra, los cuales exceden en 8 al doble de la cantidad de los libros de Geometría. Si en total se cuentan con 35 libros entre los tipos mencionados, ¿cuántos libros son de Aritmética?

A) 9 B) 10 C) 11
D) 13 E) 15

18. Luis tiene el triple de dinero que tiene Sandra, pero cinco veces más de lo que tiene Javier. Si Luis regala cierta cantidad de dinero a Sandra y S/.24 a Javier, los tres tendrían la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos soles tienen entre los tres?

A) 108 B) 99 C) 117
D) 126 E) 90

19. En una granja, por cada gallina hay 3 pavos, y por cada pavo hay 4 patos. Si en total hay 160 patas entre dichos animales, ¿cuántos pavos hay?

A) 12 B) 18 C) 21
D) 15 E) 9

20. Para ganar S/.130 en la rifa de un celular se hacen 100 *tickets*. Si solo se llegara a vender 70 *tickets*, habría una pérdida de S/.20. Calcule el valor del celular.

A) S/.350 B) S/.370 C) S/.420
D) S/.470 E) S/.300

21. Se contrató un ómnibus para una excursión pagando por ello una cantidad fija de dinero. Si hubiera asistido 10 personas más, cada una habría pagado S/.1 menos; pero si hubiera asistido 6 personas menos, cada una habría pagado S/.1 más. ¿Cuántas personas fueron de excursión?

A) 25 B) 29 C) 26
D) 33 E) 30

22. Yamilet fue de compras con cierta cantidad de dinero. En su primera compra gastó 1/5 de lo que tenía, más S/.8. En una segunda compra gastó 1/4 de lo que le quedaba, más S/.3. En la última compra gastó 1/3 del resto, más S/.6. Luego, de lo que le quedaba, pagó con S/.7 el taxi y solo le quedó al final S/.5. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

A) S/.60 B) S/.65 C) S/.70
D) S/.55 E) S/.75

23. Leonel siempre gasta la cuarta parte de todo lo que gana. En cambio Valentino, que gana el doble de lo que gana Leonel, siempre gasta la cuarta parte de lo que no gasta. Si el doble de lo que no gasta Valentino excede al triple de lo que no gasta Leonel en S/.1140, ¿cuántos soles gana Leonel? Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 3 B) 6 C) 2
D) 5 E) 4

24. Dos personas juegan cartas conviniendo de que el que pierde le pagará S/.1 a la otra. Una de ellas empieza con S/.69 y la otra con S/.30, después de cierto número de juegos, la primera persona que ha ganado todas las partidas tiene, en dinero, cinco veces lo que posee la segunda, más S/.3. ¿Cuántas partidas se jugaron?

A) 18 B) 16 C) 12
D) 15 E) 14

25. En un taller hay bicicletas y triciclos en la relación de 3 a 5. Si hubiera 4 vehículos más de cada tipo, entonces las cantidades de bicicletas y de triciclos estarían en la relación de 2 a 3. ¿Cuántos vehículos hay en total? Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

26. El precio de 27 cuadernos equivale al precio de 12 libros. Si por la compra de 2 cuadernos y 5 libros se paga un total de S/.159, ¿cuánto cuestan en total 5 cuadernos y 2 libros?

A) S/.114 B) S/.112 C) S/.116
D) S/.110 E) S/.118

NIVEL INTERMEDIO

27. Un niño tiene en total 68 monedas agrupados en tres montones. En el primer montón solo hay monedas de S/.5, en el segundo montón solo hay monedas de S/.2, y en el tercer montón solo hay monedas de S/.1. Si la cantidad de dinero en cada uno de los tres montones es la misma, ¿cuánto de dinero (en soles) hay en total? Dé como respuesta la suma de cifras de dicho número.

A) 6 B) 9 C) 12
D) 3 E) 15

28. Cuatro primas comparan sus propinas y observan lo siguiente: Carmen tiene la mitad de lo que tiene Ana, pero S/.20 más de lo que tiene Diana; esta última tiene la cuarta parte de lo que tiene Betty. Si entre las cuatro tienen S/.180, ¿cuánto de más dinero tiene Ana respecto de Betty?

A) S/.15 B) S/.20 C) S/.25
D) S/.10 E) S/.30

29. Tres números diferentes suman 200. Si el primero se duplicara, el segundo se dividiera por 3 y el tercero disminuyera en 20 unidades, entonces los números resultarían iguales. Halle el menor de los tres números.

A) 20 B) 30 C) 15
D) 25 E) 24

30. Se tiene una balanza de dos platillos, donde en uno de los brazos hay 60 objetos del tipo A de 20 gramos cada uno, y en el otro, 70 objetos del tipo B de 15 gramos cada uno. ¿Cuántos intercambios de un objeto por otro debe realizarse para que la balanza esté en equilibrio?

A) 24 B) 20 C) 15
D) 10 E) 25

31. Se va a pagar una deuda con monedas de S/.5 y S/.2 (catorce monedas en total), y al momento de pagar se intercambia por equivocación el número de monedas, con lo cual se pagó S/.6 de más. ¿Cuántas monedas de S/.2 se entregó?

A) 4 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

32. A una fiesta asistieron 81 personas en total, y por cierta razón todos los varones fueron los primeros en llegar. Al llegar la primera dama, se dio cuenta que conocía solo a 4 varones; la segunda dama que llegó conocía solo a 7 varones; la tercera, a 10; la cuarta, a 13, y así sucesivamente, hasta que la última dama que llegó se dio cuenta que conocía a todos los varones. ¿A cuántos varones no conocía la tercera dama?

A) 61 B) 58 C) 53
D) 51 E) 49

33. Liliana tenía x billetes de S/.20, $(x+1)$ billetes de S/.10 y $(x-1)$ billetes de S/.50. Si cambió todo su dinero en billetes de S/.100 y ahora tiene exactamente tantos billetes de S/.100 como el número de billetes de S/.50 que tenía inicialmente, ¿cuántos soles tiene Liliana?

A) 600 B) 400 C) 300
D) 200 E) 500

34. En una academia hay 40 trabajadores entre tutores, profesores y administrativos. El pago diario para cada tutor es S/.60, para cada profesor es S/.100, y para cada administrativo es S/.70. Si el jornal diario para todos ellos es S/.3080, y hay tantos administrativos como tutores y profesores juntos, ¿cuántos tutores hay?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 6

35. En una pequeña feria se venden 55 animales entre conejos, patos y pollos por un total de S/.630. Cada conejo se vende a S/.20, cada pollo se vende a S/.6, y cada pato se vende a S/.11. Si se puede contar un total de 80 alas, ¿cuántos pollos hay en la feria?

A) 20 B) 24 C) 21
D) 25 E) 22

36. En un examen de 75 preguntas, un estudiante ha obtenido 5 preguntas correctas por cada 2 preguntas incorrectas. Cada respuesta correcta vale 3 puntos a favor, cada respuesta equivocada vale 1 punto en contra; además, cada pregunta sin contestar vale cero puntos. Se sabe que el alumno obtuvo 104 puntos en total. Halle la suma de cifras del número de preguntas que no contestó.

A) 8 B) 12 C) 11
D) 10 E) 9

37. El producto de dos números impares es 945. Este producto aumenta en 128 unidades si ambos números son reemplazados por sus respectivos impares consecutivos. Halle la diferencia de ambos números impares.

A) 12 B) 4 C) 10
D) 6 E) 8

38. Un cierto número de soldados se disponen en filas y en columnas formando un cuadrado compacto, pero aun así sobran 10 hombres. Si se quisiera que el cuadrado tenga un hombre más por lado, se necesitaría reclutar a 31 soldados adicionales. ¿Cuál es el número de soldados que hay? Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

39. Se ha comprado cierto número de revistas del mismo tipo por un total de S/.240. Si el precio de cada ejemplar hubiera sido de S/.2 menos, se tendría 10 revistas más por la misma cantidad de dinero que hemos gastado. ¿Cuántos ejemplares se compraron?

A) 40 B) 30 C) 24
D) 16 E) 20

40. María siempre compra un paquete de galletas que contiene 120 unidades para repartirlas en partes iguales a sus hijos. Si ella tuviera un hijo más, a cada uno le tendría que tocar 4 galletas menos para que la repartición siga siendo equitativa. ¿Cuántas galletas da María a cada uno de sus hijos? Dé como respuesta la suma de cifras de dicho número.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

41. Por la compra de 18 pelotitas de tenis, pago tantos dólares como el número de pelotitas que recibo por 72 dólares. ¿Cuántas pelotitas puedo comprar con 60 dólares?

A) 30 B) 20 C) 15
D) 10 E) 12

42. Cierto número de monedas del mismo tipo se pueden arreglar en forma de triángulo equilátero compacto colocando una en la primera fila, dos en la segunda, tres en la tercera, y así sucesivamente. Si hubiera una moneda más, se podría formar con todas ellas (sin que sobre o falte monedas) un cuadrado compacto, en cuyo lado habría 4 monedas menos de las que ponen en el triángulo equilátero. ¿Cuántas monedas hay en total? Dé como respuesta la suma de cifras de este número.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 3

43. Un número excede al cuadrado más próximo a él en 14 unidades, pero es excedido por el siguiente cuadrado perfecto en 35 unidades. ¿Cuál es el número?

A) 580
B) 590
C) 610
D) 595
E) 605

44. Mauro, Nico y Pablo tenían entre los tres 490 monedas de un nuevo sol. Mauro gastó la quinta parte de sus monedas, Nico gastó la tercera parte de sus monedas y Pablo gastó la cuarta parte de sus monedas. Ahora los tres tienen la misma cantidad de dinero. ¿Cuántas monedas tenía inicialmente Nico?

A) 150 B) 175 C) 180
D) 210 E) 160

45. Dos recipientes de distintas capacidades contienen agua hasta su mitad. Luego del recipiente más grande se transfieren 4 litros al otro, de modo que si quisiéramos llenar de agua a los dos recipientes para el más grande, se necesitaría el triple de cantidad de agua que para el otro. ¿Cuál es la capacidad de cada recipiente, si la capacidad de uno es de 12 litros más que el otro?

A) 24 y 36 B) 24 y 12 C) 34 y 22
D) 40 y 28 E) 32 y 44

46. La familia Fernández consta de varios niños y niñas. Alguien les preguntó: *¿Cuántos son?*; y la niña mayor dijo que tenía el mismo número de hermanos que de hermanas. En cambio, el niño mayor dijo que tenía tantos hermanos como la mitad del número de hermanas. ¿Cuántos niños hay en total (entre hermanos y hermanas)? Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 7 B) 6 C) 10
D) 9 E) 5

47. Un niño guarda cierto número de canicas en tres cajitas. En la cajita blanca guarda primero 28 canicas y luego la quinta parte de las restantes. Después en la cajita negra guarda 30 canicas y enseguida la mitad del nuevo resto. Finalmente guarda en la cajita azul las que aún quedaban. Si las cajitas blanca y negra tienen la misma cantidad de canicas, ¿cuántas hay en la cajita azul?

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

48. Pepe vendió cierta cantidad de cuadernos y libros en la relación de 7 a 5. Además tiene dos mascotas: un perro y un gato. Por cada 6 cuadernos que vende da 5 galletas a su perro, pero por cada 4 libros que vende da 3 galletas a su gato. Si el perro comió 25 galletas más que el gato, ¿cuántas galletas dio en total a sus mascotas?

A) 105 B) 115 C) 125
D) 135 E) 145

49. A una vara de metal de 260 cm se le ha hecho tres cortes. La longitud de cada trozo es igual a lo que mide el inmediato anterior aumentado en su mitad. ¿Cuánto mide el trozo más pequeño?

A) 24 cm B) 48 cm C) 36 cm
D) 32 cm E) 40 cm

50. Una pequeña pieza rectangular de tela tiene 90 cm de perímetro. Si tuviera 1 cm menos de largo y 5 cm menos de ancho, entonces la tela sería 140 cm^2 más pequeña. ¿Cuál es el área de la tela en cm^2? Dé como respuesta la suma de cifras de este número.

A) 5 B) 6 C) 9
D) 8 E) 3

51. En una granja donde hay cerdos, conejos y pavos, se observa que el número de patas de cerdos es 8/3 del número de cabezas de pavos, y la cantidad de cabezas de conejos es 5/4 de la cantidad de patas de pavos. Si la diferencia entre el número de patas y el número de cabezas es 99, ¿cuántos pavos hay en total?

A) 15 B) 21 C) 24
D) 18 E) 12

52. En una fiesta por cada 9 varones hay 7 mujeres. Si se retiraran hombres y mujeres en la proporción de 6 a 5, no quedaría mujer alguna pero sí 15 varones. ¿Cuántas mujeres hay en la fiesta?

A) 175 B) 185 C) 165
D) 140 E) 210

53. Se tiene una hoja rectangular de papel en la que el largo excede en 5 cm al ancho. Si se cortara una banda de 1 cm en todo el contorno de la hoja, el área del papel disminuiría en 66 cm^2. ¿Cuál es el área del papel?

A) 240 cm^2 B) 300 cm^2 C) 320 cm^2
D) 360 cm^2 E) 210 cm^2

54. En un concurso de becas, los alumnos se encuentran distribuidos en tres salones. Si del primer salón saliera la octava parte de los alumnos para ingresar al segundo, ambos salones resultarían con la misma cantidad; pero si del segundo salón saliera la mitad para ingresar al tercero, en este habría la misma cantidad que en el primero. Si en total hay 190 alumnos, ¿cuántos alumnos hay en el tercer salón?

A) 50 B) 60 C) 55
D) 45 E) 40

55. Una señora entró a una tienda y gastó una cantidad igual a 3/7 de lo que no había gastado. Luego, camino a su casa, pierde una cantidad igual a 5/2 de lo que no pierde, y al llegar a su casa regala a sus hijos una cantidad igual a 1/3 de lo que no regala. Si al final le quedó S/.12, ¿cuántos soles tenía antes de entrar a la tienda? Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 8 B) 9 C) 6
D) 7 E) 5

56. Un comerciante compró lapiceros, unos a S/.20 la docena y otros a S/.15 la docena; además, por cada tres docenas de cualquier precio que pagó le regalaron un lapicero. Si pagó en total S/.1020 y recibió en total 777 lapiceros, ¿cuántas docenas de los de menor precio compró?

A) 48 B) 24 C) 36
D) 15 E) 50

57. Tres profesores: A, B y C juegan a las cartas acordando que en cada partida el perdedor duplicará el dinero que tienen los demás. Cada jugador pierde una partida en el orden indicado inicialmente; y al final cada uno se queda con S/.40. ¿Cuánto tenía A al empezar el juego?

A) S/.60 B) S/.50 C) S/.65
D) S/.55 E) S/.70

58. En un mercado 4 naranjas cuestan lo mismo que 15 plátanos, 10 plátanos lo mismo que 3 manzanas, 12 manzanas lo mismo que una piña. ¿Cuántas naranjas cuestan lo mismo que 3 piñas?

A) 24 B) 32 C) 30
D) 36 E) 28

59. Un soldado recibe la orden de avanzar 6 pasos y retroceder 4, y repetir este proceso en línea recta. El soldado acata la orden, pero se detiene al llegar por primera vez a un punto situado a 28 m de su punto de partida. Si cada uno de sus pasos mide 70 cm, ¿cuántos pasos ha dado?

A) 200 B) 168 C) 196
D) 176 E) 184

60. En un almacén donde hay 200 vehículos para niños entre bicicletas, triciclos y cuatrimotos se observa que por cada 3 triciclos hay 5 bicicletas. Si la mitad de las cuatrimotos se convirtieran en triciclos, habría en total 520 llantas. ¿Cuántas cuatrimotos hay?

A) 32 B) 40 C) 48
D) 56 E) 36

61. Ana tiene cierta cantidad de dinero comprendida entre S/.150 y S/.190 y lo reparte equitativamente entre sus dos hijas, sobrándole S/.1. Betty, que es una de ellas, toma su parte y lo reparte equitativamente entre sus 3 hijas, sobrándole S/.2. Carmen, que es una de ellas, toma su parte y lo distribuye en partes iguales entre sus 4 hijas, sobrándole S/.3. Diana, que es una de ellas, recibe un número entero de soles. ¿Cuánto de dinero, en soles, recibió Carmen? Dé como respuesta el producto de sus cifras.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 8

62. Se tiene un número que irá cambiando sucesivamente de acuerdo a las siguientes operaciones. Al número se le multiplica por 4, se le suma 1, se le extrae la raíz cuadrada, se le triplica, se le resta 5, se le divide por 2, se le suma 3, se le eleva al cuadrado y finalmente se le resta 10. Si el número que se obtuvo después de sacar la raíz cuadrada es igual al número que se obtuvo después de dividir por 2, ¿cuánto suman el número final y el número inicial?

A) 60 B) 48 C) 52
D) 46 E) 54

63. Tres amigos: Javier, Élmer y Jimmy jugaron cuatro partidas de póker bajo las siguientes condiciones: en la primera partida, el que pierda pagará a los otros dos tantos soles como la suma de las cifras del dinero en soles que tiene cada uno de ellos; en la segunda partida, el que pierda pagará a los otros dos tantos soles como el doble de lo que tenga cada uno de ellos; en la tercera partida, el perdedor pagará a los otros dos tanto soles como el triple de lo que tenga cada uno de ellos; en la cuarta partida, el perdedor pagará a los otros dos tantos soles como el cuádruplo de lo que tenga cada uno de ellos. Si después de cada partida el pago se debía hacer efectivo inmediatamente y al final Javier, Élmer y Jimmy terminaron con S/.32, S/.50 y S/.60, respectivamente, ¿cuál es la suma de las cifras del dinero que tenía Jimmy inicialmente? Considere que cada uno de ellos solo cuenta con monedas de S/.1.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 4 E) 3

Ecuaciones diofánticas

Capítulo X

OBJETIVOS

- Plantear una ecuación diofántica básicamente de primer grado y resolverla adecuadamente.
- Entender la utilidad de una ecuación diofántica con relación a otros campos de la matemática elemental.
- Darle un enfoque de la vida cotidiana a la aplicación de las ecuaciones diofánticas.

Ecuaciones diofánticas

Son ecuaciones donde tanto los términos constantes (coeficientes) como las variables son números enteros. Estas ecuaciones pueden ser de dos, tres o más incógnitas de primer, segundo o mayor grado.

Ejemplos

- $3x+4y=43$
- $2x+3y+5z=80$
- $2x^3+5y-3z=120$

NOTA

En el presente capítulo trataremos las ecuaciones diofánticas de primer grado con dos o tres incógnitas, cuyos valores serán números enteros no negativos.

DETERMINACIÓN DE UNA SOLUCIÓN EN LAS ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Criterio de divisibilidad o multiplicidad

Se emplea cuando el resultado es múltiplo de uno de los coeficientes.

Ejemplos

1.

$$\underset{\text{debe ser }\overset{\circ}{3}}{7x}+\overbrace{3y}^{\overset{\circ}{3}}=\overbrace{102}^{\overset{\circ}{3}}$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{(coeficiente de } y) \end{array} +3\left\{\left[\begin{array}{cc} 0 & 24 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 6 & 20 \\ \hline 9 & 13 \\ \hline 12 & 6 \end{array}\right]\right\} -7 \ \text{(coeficiente de } x)$$

2.

$$\underset{\text{debe ser }\overset{\circ}{2}}{3x}-\overbrace{2y}^{\overset{\circ}{2}}=\overbrace{8}^{\overset{\circ}{2}}$$

$$\text{(coeficiente de } y) \ +2\left\{\left[\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ \hline 6 & 5 \\ \hline 8 & 8 \\ \hline 10 & 11 \\ \hline \vdots & \vdots \end{array}\right]\right\} +3 \ \text{(coeficiente de } x)$$

Criterio de las cifras terminales

Se emplea cuando uno de los coeficientes es igual a 5 o termina en cifra 5.

Ejemplo

$$3x+5y=49$$

Multiplicamos por 2 a toda la ecuación

$$\underset{\underset{3}{\downarrow}}{\boxed{6x}}-\underset{\underset{8}{\downarrow}}{\overset{...0}{\overbrace{10y}}}=\overset{...8}{\overbrace{98}}$$

debe terminar en cifra 8

Luego en la ecuación original

$$3x+5y=49$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x & y & \\ \hline & 3 & 8 & \\ +5 & 8 & 5 & -3 \\ & 13 & 2 & \end{array}$$

Criterio de la división

Se pueden expresar todos los términos de la ecuación en función del menor de los coeficientes y luego compararlos con los términos que forman la operación de la división.

dividendo = (divisor)(cociente) + (residuo)

Ejemplo

$$9x+13y=287$$

$$9(x+y)+4y=9(31)+8$$

$\rightarrow\ y=2\ \wedge\ x=29$

En la ecuación original

$$9x+13y=287$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & x & y & \\ \hline & 29 & 2 & \\ -13 & 16 & 11 & +9 \\ & 3 & 20 & \end{array}$$

OBSERVACIÓN

Resolvamos en $\mathbb{Z}^+$ la ecuación

$$\underbrace{ab+2b}+5a=133$$

$$b(a+2)+5a=133$$

$$b(a+2)+5(a+2)=133+10$$

$$(a+2)(b+5)=143$$

$$(a+2)(b+5)=11\times 13$$

Luego tenemos dos posibilidades:

- $a+2=11\ \wedge\ b+5=13$

  $\rightarrow\ \boxed{a=9}\ \wedge\ \boxed{b=8}$

- $a+2=13\ \wedge\ b+5=11$

  $\rightarrow\ \boxed{a=11}\ \wedge\ \boxed{b=6}$

NOTA

En algunos casos aplicar criterios de multiplicidad también ayudan a solucionar algunas ecuaciones.

Ejemplo

$$7a+11b=183$$

Pasamos todos los términos a $\overset{\circ}{7}$

$$7a+11b=183$$

$$\overset{\circ}{7}+(\overset{\circ}{7}+4)b=\overset{\circ}{7}+1$$

$$\overset{\circ}{7}+\overset{\circ}{7}+4b=\overset{\circ}{7}+1$$

$$\underset{\underset{7}{\downarrow}}{4b=\overset{\circ}{7}+1}$$

$\rightarrow\ \boxed{b=2}$

Problema N.º 1

Micaela va a comprar dos tipos de artículos: revistas de S/.15 y libros de S/.24. ¿De cuántas formas distintas puede realizar dicha compra si va a gastar exactamente S/.537?

Resolución

	Cantidad	Precio unitario
revistas:	$x \longrightarrow$	S/.15
libros:	$y \longrightarrow$	S/.24

$x; y \in \mathbb{Z}^+$

Luego planteamos con el gasto total

$$15x+24y=537$$

$$(\div 3) \qquad 5x+8y=179$$

$$(\times 2) \qquad \overbrace{10x}^{...0}+\overbrace{16y}^{...8}=\overbrace{358}^{...8}$$

$$16y \to 3$$

por cifra terminal

Luego en la ecuación original

$$5x + 8y = 173$$

x	y
31	3
23	8
15	13
7	18

-8 (en x), $+5$ (en y)

Por lo tanto, Micaela puede realizar dicha compra de cuatro maneras diferentes.

Problema N.º 2

Disponemos de S/.315 para comprar polos de dos colores. Los polos de color rojo cuestan S/.13 cada uno y los polos de color blanco cuestan S/.7 cada uno. ¿Cuántos polos se comprarán en total si la cantidad de polos blancos es un número primo?

Resolución

	Cantidad	Precio unitario
polos rojos:	$a \longrightarrow$	S/.13
polos blancos:	$b \longrightarrow$	S/.7 (b es primo)

Luego planteamos del gasto

$$\overbrace{13a}^{\overset{\circ}{7}}+\overbrace{7b}^{\overset{\circ}{7}}=\overbrace{315}^{\overset{\circ}{7}}$$

a	b
7	32
14	19 ← es primo ✓
21	6

Luego se compraron 19 polos blancos y 14 polos rojos, es decir 19+14=33 polos en total.

Problema 3

Si al producto de dos números enteros y positivos le sumamos el triple del menor de dichos números, y le sumamos también el mayor de dichos números, se obtiene 74. ¿Cuál es la diferencia positiva entre los números?

Resolución

Sean los números a y b, donde $a > b$

De los datos planteamos

$$ab + 3b + a = 74$$

factorizamos b

$$b(a+3) + a = 74$$

sumamos 3 a la ecuación

$$b(a+3) + (a+3) = 74 + 3$$

factorizamos

$$\underbrace{(a+3)}_{11}\underbrace{(b+1)}_{7} = 77$$

$\rightarrow \quad a=8 \wedge b=6$

Por lo tanto, la diferencia positiva entre los números es $8-6=2$.

Problema N.º 4

Liliana pagó una deuda de S/.35 con monedas de S/.1, S/.2 y S/.5. ¿Cuál es la mínima cantidad de monedas que empleó para el pago de su deuda?

Resolución

Tipo de moneda — Cantidad

de S/.1 $\longrightarrow$ a
de S/.2 $\longrightarrow$ b
de S/.5 $\longrightarrow$ c

$\boxed{a;\, b;\, c \neq 0}$

De los datos planteamos

$$\underset{\textcircled{1}}{\underset{\downarrow}{\overbrace{1a}^{\text{mínimo}}}} + \underset{2}{\underset{\downarrow}{2b}} + \underset{\textcircled{6}}{\underset{\downarrow}{\overbrace{5c}^{\text{máximo}}}} = 35$$

Para emplear la mínima cantidad de monedas, hay que emplear el máximo número de monedas de la mayor denominación.

Por lo tanto, la mínima cantidad de monedas es

$6+2+1=9.$

Problema N.º 5

Un boletín de RM cuesta S/.4 y un boletín de RV cuesta S/.3. Si tengo S/.577 para gastarlos exactamente en boletines de ambos tipos comprando más boletines de RM que de RV, ¿cuántos boletines de RV compraré como máximo?

Resolución

Boletín	Costo de c/u	Cantidad
RM	S/.4	$x+y$
RV	S/.3	x (máximo)

Gasto total

$$4(x+y)+3x=577$$

$$\underset{\text{máximo}}{\underset{\uparrow}{7x}} + \underset{\text{mínimo}}{\underset{\uparrow}{4y}} = 577$$

Pasamos todo a $\overset{\circ}{7}$

$$\underbrace{7x}_{\downarrow} + 4y = \underbrace{577}_{\downarrow}$$

$$7 + 4y = \overset{\circ}{7} + 3$$

$$\underset{\textcircled{6}}{\underset{\downarrow}{4y}} = \overset{\circ}{7} + \underset{21}{\underset{\downarrow}{3}}$$

$\rightarrow\quad y=6$

Luego reemplazamos en

$$7x+4(6)=577$$

$\rightarrow\quad x=79$

Por lo tanto, compraré como máximo 79 boletines de RV.

NIVEL BÁSICO

1. Kenyo desea comprar vasos y copas de S/.3,5 y S/.5,6 la unidad, respectivamente, pero gastando exactamente S/.155,4. ¿De cuántas formas puede realizar su compra?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

2. Un lapicero cuesta S/.8 y un lápiz, S/.5. Si deseo gastar en total S/.96 adquiriendo ambos artículos mencionados, ¿cuál será la diferencia entre el número de lápices y de lapiceros adquiridos, si es la máxima posible?

A) 14 B) 12 C) 13
D) 15 E) 7

3. Mario podría ahorrar S/.20 diarios, pero cada día de la semana gasta o S/.6 en el cine o S/.5 en la cafetería. ¿Al cabo de cuántos días logrará ahorrar S/.176?

A) 11 B) 10 C) 14
D) 12 E) 16

4. Se tienen dos números enteros y positivos, tal que once veces el primero excede a cuatro veces el segundo en 9 unidades. Si la suma de dichos números está comprendida entre 30 y 40, halle la diferencia de los números.

A) 13 B) 15 C) 19
D) 17 E) 11

5. Roberto ha dado un examen de 20 preguntas. La puntuación se calcula sumando 5 por cada respuesta acertada, restando 2 por cada error y no puntuando las preguntas no contestadas. Si su puntaje fue 48, ¿cuál es el máximo número de preguntas que puede haber acertado?

A) 11 B) 12 C) 14
D) 16 E) 10

6. En un barco iban 300 personas y ocurre un naufragio, observándose que 1/8 de los sobrevivientes eran peruanos, y 1/11 de los sobrevivientes, chilenos. También se sabe que 1/9 de los muertos eran peruanos. ¿Cuánto era el número de peruanos que iban en el barco antes del naufragio?

A) 80 B) 45 C) 18
D) 36 E) 37

7. Se dispone de S/.999 para ser gastados en artículos de S/.37 y S/.21 cada uno. ¿Cuántos artículos se adquirieron en total si el dinero alcanzó exactamente?

A) 43 B) 55 C) 47
D) 27 E) 37

8. En una reunión se observa que siete veces el número de mujeres más cuatro veces el número de hombres es igual a 234. ¿Cuántas soluciones existen si se desea saber el número de asistentes de cada género?

A) 12 B) 15 C) 6
D) 7 E) 8

9. Se quiere transportar a 178 personas en dos tipos de vehículos. Uno tiene capacidad para 17 personas sentadas y otro solo para 5. ¿Cuál es el menor número de vehículos que se deben usar si se desea que ninguna persona vaya de pie y ningún asiento quede vacío?

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

10. Javier compró anillos de oro y de plata de S/.40 y S/.35, respectivamente. Si en total gastó S/.1285, ¿cuántos anillos, como máximo, compró en total?

A) 28 B) 35 C) 40
D) 42 E) 36

11. Se quiere comprar juguetes de dos precios diferentes, de S/.5 y de S/.6 cada uno, pero debe comprarse la mayor cantidad posible de juguetes gastando exactamente un total de S/.107. ¿Cuántos juguetes se comprarán?

A) 21 B) 14 C) 16
D) 32 E) 19

12. Un libro tiene, aparte del prólogo, 213 páginas, y está dividido en 12 capítulos. Algunos de estos tienen 25 páginas, otros tienen 20, y los restantes, 16. ¿Cuántos capítulos tienen 25 páginas?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

13. Una persona compró pelotas a S/.21 cada una, medias a S/.15 la unidad, y gorras a S/.35 la unidad. Si gastó en total S/.196, ¿cuántos artículos compró?

A) 9 B) 11 C) 12
D) 8 E) 10

14. Se dispone de S/.100 para comprar 36 productos que cuestan S/.1, S/.4 y S/.12, comprándose por lo menos tres productos de cada precio. ¿Cuántos productos de S/.4 se comprarán?

A) 3 B) 9 C) 10
D) 5 E) 8

15. Se dispone de S/.150 para comprar un total de 60 artículos, cuyos precios por unidad son S/.2, S/.5 y S/.9, comprándose por lo menos uno de cada precio. ¿Cuántos artículos de S/.2 se comprarán?

A) 52 B) 53 C) 54
D) 55 E) 56

NIVEL INTERMEDIO

16. En los países de Oriente, la unidad monetaria es el denario. Cierto día un poblador va a la tienda y compra un camello que cuesta 39 denarios y paga solo con monedas de 8 denarios, y el tendero le da su vuelto utilizando solo monedas de 7 denarios. ¿Cuántas monedas, como mínimo, hubo en dicha transacción?

A) 21 B) 16 C) 18
D) 19 E) 17

17. En una fiesta hay 9 niños más que niñas; sin embargo, a cada niña se le reparte 4 juguetes más que a cada niño. Si se entregaron en total 150 juguetes, ¿cuántos juguetes recibió cada niña?

A) 12 B) 10 C) 11
D) 13 E) 14

18. Si al número que representa el área de un rectángulo (de dimensiones enteras) se le resta el triple del número que representa su perímetro, se obtiene 5. ¿Cuál es la diferencia de las dimensiones del rectángulo?

A) 25 B) 40 C) 24
D) 41 E) 38

19. Halle un número de dos cifras, tal que al sumarse con la suma y el producto de sus cifras resulte 111. Dé como respuesta la diferencia positiva de las cifras del número.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

20. Araceli tiene 20 monedas en su cartera; algunas son de 10 céntimos, otras de 20 céntimos y el resto de 50 céntimos. Si el total del dinero que tiene en su cartera es S/.5 y tiene más monedas de 50 céntimos que de 10 céntimos, ¿cuántas de 20 céntimos tiene?

A) 14 B) 11 C) 12
D) 15 E) 10

21. En una fiesta hay 180 personas entre hombres, mujeres y niños. En un determinado momento se observa que el número total de niños es igual a la sexta parte del número de mujeres que bailaban, y el número de hombres que no bailaban era igual a la octava parte del total de mujeres. ¿Cuántas mujeres no bailaban en dicho instante?

A) 54 B) 48 C) 56
D) 52 E) 50

22. Una persona decide comprarse ropa de invierno en una tienda que estaba de liquidación, donde cada pantalón costaba S/.45 y cada chompa, S/.28. ¿Cuántos artículos compró si gastó en total S/.1001 y el número de chompas adquirido fue el mínimo posible?

A) 19 B) 22 C) 24
D) 20 E) 23

23. Tres hermanas fueron a vender pollos vivos al mercado y al mismo precio. Una llevó 11 pollos, otra 12 y la tercera 10. Llegado el mediodía, cada una tenía aún algunos pollos por vender, por ello, todas decidieron bajar en S/.2 el precio de cada pollo. Al llegar la noche, las hermanas habían vendido todos sus pollos y cada una había recaudado S/.52. ¿Cuál fue el precio de cada pollo hasta el mediodía?

A) S/.4 B) S/.5 C) S/.6
D) S/.7 E) S/.3

24. Se le pregunta a un pequeño comerciante sobre el dinero que había recaudado en los tres primeros meses de actividad comercial y este respondió lo siguiente: *En cada mes recaudé un número entero de soles. El primer mes solo recaudé S/.399; el segundo mes, la décima parte del total de mi dinero, y el tercer mes, varios séptimos del total de mi dinero*. Halle el número total de soles que recaudó el comerciante y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

25. Una profesora tiene la mínima cantidad de caramelos que le permite dividirlos de siete maneras distintas en dos grupos, de modo que un grupo lo reparta equitativamente entre sus 6 alumnas y el otro grupo lo reparta también equitativamente entre sus 7 alumnos. Al final decide repartirlos de una de dichas maneras, de modo que cada uno reciba un número primo de caramelos. ¿Cuántos caramelos recibirá cada alumna? Dé como respuesta la suma de cifras de dicha cantidad.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 9 E) 8

26. A una fiesta ingresan más damas que caballeros, y más niños que damas; sin embargo, la diferencia entre el número de damas y el de caballeros es mínima, y la diferencia entre el número de damas y el de niños también es mínima. Si cada caballero pagó por derecho de entrada S/.8, cada dama S/.3 y cada niño S/.5, y se recaudó por todos los asistentes S/.768, ¿cuántos caballeros asistieron a la fiesta?

A) 55 B) 44 C) 54
D) 45 E) 46

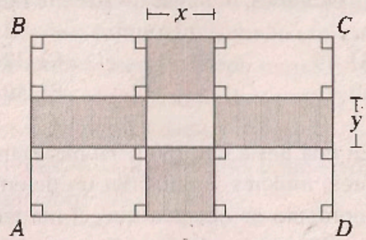
27. La edad de Jaime es el doble de la suma de las edades de sus dos hijos, aumentado en 6. Si suma 51 veces la edad de uno de ellos tantas veces como dicha edad, y luego suma 47 veces la edad de su otro hijo tantas veces como esta otra edad, al final obtiene dos resultados que suman un total de 7403. Halle la suma de cifras de la edad de Jaime.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

28. Entre Ana y Betty tienen S/.230 en monedas de S/.1. Ana toma una parte del dinero y lo reparte entre todos sus hijos procurando darle a cada quien la mayor cantidad posible, dicha cantidad fue de S/.12 para cada uno. Betty toma el dinero restante y lo reparte con la misma idea entre sus hijos, tocándole a cada uno S/.15. Al final de la repartición, a Ana le sobra S/.5 y a Betty S/.6. ¿Cuántos hijos tienen entre las dos?

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

29. En la siguiente figura rectangular, el área de la región sombreada es 190 cm^2. Si $AB=16$ cm y $BC=20$ cm, además x e y representan unidades enteras en cm, calcule el máximo perímetro de dicha región sombreada.



A) 108 cm B) 104 cm C) 100 cm
D) 112 cm E) 116 cm

30. Armando quiere darle S/.38 a Alejandro en monedas de S/.5; S/.2; S/.0,5; S/.0,2 y S/.0,1. Si piensa entregarle por lo menos dos monedas de cada tipo, ¿cuál es la menor cantidad de monedas que entregará?

A) 19 B) 18 C) 17
D) 16 E) 15

Amor a Sofía

Problemas sobre edades

Capítulo XI

Objetivos

- Relacionar correctamente las edades de una o más personas en el transcurso del tiempo.
- Orientar y desarrollar las formas de resolución del planteo de ecuaciones en la aplicación de problemas sobre edades.
- Usar adecuada y convenientemente el cuadro de doble entrada en el proceso de ordenamiento y relación de los datos.

Continuando con el desarrollo del tema "planteo de ecuaciones", veremos a continuación su aplicación a los problemas sobre edades, entendiendo que para su correcta solución generalmente se ordenan y relacionan los datos y se plantea la ecuación para su posterior resolución. Evidentemente que, en cuanto sea posible anteponer criterios lógicos, practicaremos formas sencillas de resolución en comparación con los métodos tradicionales.

Veremos en este capítulo dos tipos de problemas sobre edades:

Cuando interviene la edad de un solo sujeto

En este tipo de problemas se debe tener en cuenta que solo participa una persona; pero debemos identificar los tiempos que intervienen y la diferencia de años entre dichos tiempos.

Observemos el siguiente caso:

Sea la edad actual de una persona n años, entonces dentro de a años tendrá $n+a$ años, y hace b años tenía $n-b$ años.

$$\begin{array}{lccc} & \text{pasado} \xleftarrow{-b} & \text{presente} \xrightarrow{+a} & \text{futuro} \\ \text{edad:} & n-b & n & n+a \end{array}$$

Cuando intervienen las edades de dos o más sujetos

Para resolver estos tipos de problemas se sugiere el uso de un cuadro de doble entrada con el propósito de ordenar y relacionar convenientemente los datos.

Con el propósito de ubicar correctamente los datos en el cuadro de doble entrada, veamos el cuadro siguiente.

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	tenía tuve	tengo	tendré tenga
Tú	tenías tuviste	tienes	tendrás tengas
Él	tenía tuvo	tiene	tendrá tenga

Veamos ahora una observación muy importante. Asumimos que las edades de tres personas en el pasado, en el presente y en el futuro sean:

8 años 12 años

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	10	18	30
Tú	14	22	34
Él	20	28	40

La diferencia de edades de dos personas en el transcurso del tiempo es constante.

Ejemplos

- $14-10=22-18=34-30$
- $20-14=28-22=40-34$
- $20-10=28-18=40-30$

Se concluyó que la suma en aspas (de valores ubicados simétricamente) es constante.

Ejemplos

- $10+22=14+18$
- $18+34=22+30$
- $10+28=20+18$
- $14+28=20+22$
- $10+40=20+30$
- $14+40=20+34$

⋮

Para toda persona se cumple que la relación de su edad actual, su año de nacimiento y el año actual es la siguiente:

$$\begin{pmatrix}\text{año de}\\ \text{nacimiento}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{edad}\\ \text{actual}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{año}\\ \text{actual}\end{pmatrix}$$

Siempre y cuando la persona ya cumplió años en el presente año.

$$\begin{pmatrix}\text{año de}\\ \text{nacimiento}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{edad}\\ \text{actual}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{año}\\ \text{anterior}\end{pmatrix}$$

Siempre y cuando la persona todavía no cumple años en el presente año.

NOTA

- A veces asumiremos como año actual al año en que nos remite como referencia las condiciones de un problema.
- año anterior=año actual−1.
- Sea mi edad actual: x
  - Si hubiera nacido m años antes, tendría: $x+m$.
  - Si hubiera nacido n años después, tendría: $x-n$.

Problema N.º 1

Dentro de 5 años tendré el quíntuplo de la edad que tenía hace 5 años, menos 50 años. ¿Qué edad tendré dentro de 2 años?

Resolución

Sea mi edad x.

hace 5 años — dentro de 5 años

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	$x-5$	x	$x+5$

Del enunciado de problema

$x+5=5(x-5)-50$

$x+5=5x-25-50$

$80=4x \rightarrow x=20$

Por lo tanto, dentro de 2 años tendré 22 años.

Problema N.º 2

Alfredo cuenta que, cuando cumplió años en el 2012, descubrió que su edad era igual a la suma de las cifras del año de su nacimiento. ¿Cuántos años tenía en el 2000?

Resolución

De los datos, se tiene

nació

	$\overline{19ab}$	2000	2012
Alfredo	0	x	$1+9+a+b$

$\rightarrow \; 1+9+a+b=2012-\overline{19ab}$

$a+b+10=112-\overline{ab}$

$a+b=102-(10a+b)$

$\underset{8}{11a}+\underset{7}{2b}=102$

En consecuencia nació en 1987.

Por lo tanto, en el año 2000 tenía

$2000-1987=13$ años.

Problema N.º 3

Hace 5 años Pedro tenía el doble de la edad que tenía Juan. ¿Cuál es la edad actual de Juan, sabiendo que dentro de 5 años se cumplirá que la edad de Juan será los 2/3 de la que tenga Pedro?

Resolución

De los datos

5 — 5

	Pasado	Presente	Futuro
Pedro	2( )		3( )
Juan	1( )		2( )

diferencia de edades constante

10

5 — 5

	Pasado	Presente	Futuro
Pedro	2(10)	25	3(10)
Juan	1(10)	15	2(10)

1(10)

Por lo tanto, la edad actual de Juan es 15 años.

Problema N.º 4

Tú tienes 16 años; cuando tengas el triple de lo que yo tengo, entonces mi edad será el doble de lo que actualmente tienes. ¿Dentro de cuántos años cumpliré 40 años?

Resolución

De los datos

	Presente	Futuro
Yo	x	2(16)
Tú	16	$3x$

Por la suma en aspas

$x+3x=16+32 \rightarrow 4x=48 \rightarrow x=12$

Por lo tanto, cumpliré 40 años dentro de

$40-12=28$ años.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Dayanne al ser interrogada por su edad responde: *La suma de mi edad actual y de la edad que tendré dentro de 4 años es igual al triple de mi edad hace 3 años*. ¿Qué edad tiene Dayanne?

A) 10 años B) 13 años C) 12 años
D) 15 años E) 18 años

2. Hace x^2 años tenía 11 años y dentro de $3x^2$ años tendré 47. Si J es mi edad actual, ¿cuántas veces más es respecto a 10?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Hace 15 años mi edad era los 16/3 de tu edad; pero si contamos 45 años a partir de hoy, sucederá que tú tendrás 15/28 de la edad que yo tenga. ¿Hace cuántos años mi edad fue el séxtuplo de tu edad en ese entonces?

A) 15 B) 16 C) 20
D) 17 E) 18

4. Andrew le dice a Nicolás: *Dentro de 2 años, yo tendré el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tendrás en ese entonces*. Si actualmente la suma de sus edades es 21 años, ¿qué edad tenía Nicolás hace 2 años?

A) 5 años B) 8 años C) 6 años
D) 10 años E) 7 años

5. Cristopher le dijo a Kevin: *Tengo el doble de la edad que tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes; pero cuando tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 63 años*. Halle la suma de sus edades actuales.

A) 50 B) 79 C) 81
D) 49 E) 45

6. Hace 8 años las edades de Luis y de Robert estaban en la relación de 4 a 5. Si actualmente sus edades suman 52 años, ¿hace cuántos años Robert tenía el doble de la edad de Luis?

A) 15 B) 10 C) 40
D) 25 E) 20

7. Estando reunidas Marisella, Silvia y Liz, se escucha la siguiente conversación:
Silvia: *Mi edad es la misma que tenía Marisella cuando Liz nació.*
Marisella: *Así es, y en ese entonces nuestras edades sumaban 36 años.*
Liz: *Mi edad actual es la misma que tenía Silvia cuando yo nací.*
¿Cuál será la edad que tendrá Marisella cuando Liz tenga la edad que tiene Silvia?

A) 48 años B) 36 años C) 24 años
D) 52 años E) 40 años

8. La suma de las edades de una pareja de esposos, cuando nació su primer hijo, era la tercera parte de la suma de sus edades actuales. Si ahora el hijo tiene 35 años, ¿qué edad tenía cuando la edad de los tres sumaban 74?

A) 11 años B) 13 años C) 12 años
D) 15 años E) 14 años

9. Cuando Arthur nació, Alexis tenía 7 años. Si actualmente las edades de los dos suman 47 años, ¿cuántos años tendrá Alexis dentro de 16 años?

A) 27 B) 36 C) 40
D) 43 E) 45

10. Arturo cuenta que cuando cumplió años en 1994 descubrió que su edad era igual a la suma de cifras del año de su nacimiento. ¿Cuántos años tenía en 1990?

A) 21 B) 22 C) 25
D) 28 E) 18

11. Tomemos la edad que tendré dentro de x años tantas veces como años tendré, y restémosle los años que tuve hace x años tantas veces como años tuve y obtendremos 24 veces mi edad actual. ¿Cuál es el valor de x?

A) 4 B) 6 C) 5
D) 7 E) 3

12. Hace 6 años mi edad era a tu edad como 1 a 5. ¿Cuánto tiempo tendrá que transcurrir para que nuestras edades estén en la relación de 2 a 5, si dentro de 6 años mi edad será la mitad de la que ahora tienes?

A) 2 años B) 3 años C) 5 años
D) 4 años E) 6 años

13. Estando reunidos un grupo de alumnos procedieron a sumar los años de nacimiento de cada uno y a esta suma le agregaron la suma de las edades de cada uno, dando como resultando 40 255. ¿Cuántos alumnos todavía no cumplieron años? Considere año actual: 2013.

A) 10 B) 15 C) 5
D) 20 E) 25

14. Un hijo le dice a su padre: *La diferencia entre el cuadrado de mi edad y el cuadrado de la edad de mi hermano es 95.* El padre le contesta: *Es la misma diferencia de los cuadrados de mi edad y la de tu madre.* ¿Qué edad tenía el padre cuando nació su hijo mayor?

A) 12 años B) 15 años C) 24 años
D) 28 años E) 36 años

15. Le preguntan a Melissa por su edad y ella contesta: *Mi edad, más el duplo de ella, más el triple de ella, y así sucesivamente, hasta tantas veces mi edad, suman en total 4200.* ¿Cuál es la edad de Melissa?

A) 20 años B) 25 años C) 30 años
D) 15 años E) 10 años

16. Anthony pensó al ver a su hijo recién nacido: *Cuando tenga la mitad de mi edad, yo tendré el triple de su edad.* Si dentro de 30 años sus edades sumarán 84 años, ¿qué edad tiene actualmente Anthony?

A) 12 años B) 24 años C) 36 años
D) 18 años E) 64 años

17. José tuvo hace 11 años una edad igual a la raíz cuadrada del año en que nació. ¿Qué edad tiene actualmente?

A) 45 años B) 50 años C) 55 años
D) 60 años E) 65 años

18. Mi edad es dos veces mayor que la edad de mi sobrina Cristina; pero hace 5 años, mi edad era tres veces mayor que la edad que tenía ella. ¿Cuántos años tiene Cristina?

A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

19. Óscar le dice a Werner: *Tengo el doble de la edad que tenías cuando yo tenía la edad que tienes, y cuando tengas la edad que tengo, la suma de nuestras edades será 54 años.* ¿Cuál es la edad de Werner?

A) 16 años B) 18 años C) 20 años
D) 22 años E) 24 años

20. Jorge, que nació en la primera mitad del siglo XIX, tenía x años en el año x^2. ¿En qué año nació?

A) 1806 B) 1843 C) 1849
D) 1836 E) 1936

21. Dentro de 20 años tendré dos veces más que la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tendría actualmente si hubiese nacido 3 años antes?

A) 22 años B) 25 años C) 28 años
D) 29 años E) 30 años

NIVEL INTERMEDIO

22. Hace 10 años la edad que tenía era la raíz cuadrada de la edad que tendré dentro de 10 años. ¿Cuántos años me faltan para cumplir la mayoría de edad?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

23. Hace tantos años como la mitad de los años que tendré tenía tantos años como los que deben pasar para tener los años que te dije que tendría. Si la suma de los años que tenía y tendré suman 80 años, ¿cuántos años tengo?

A) 42 B) 45 C) 47
D) 48 E) 50

24. Si hubiera nacido 15 años antes, entonces lo que me faltaría actualmente para cumplir 78 años sería los 5/3 de la edad que tendría si hubiese nacido 7 años después. ¿Qué edad tendré dentro de 5 años?

A) 31 años B) 33 años C) 34 años
D) 35 años E) 38 años

25. Tú tienes 22 años, pero cuando tengas la edad que yo tengo, la suma de nuestras edades será 50 años. ¿Qué edad tenías cuando yo tenía tu edad?

A) 22 años
B) 24 años
C) 18 años
D) 16 años
E) 20 años

26. Tú tienes cuatro veces más la edad que yo tenía cuando tú tenías la edad que yo tengo. Si dentro de 10 años nuestras edades sumarán 100 años, ¿qué edad tengo?

A) 10 años B) 30 años C) 50 años
D) 40 años E) 35 años

27. Yo tengo 30 años y mi edad es los 3/5 de la edad que tú tendrás cuando yo tenga la edad que tú tienes. ¿Cuántos años tendrías si hubieras nacido 5 años antes?

A) 30 B) 35 C) 40
D) 45 E) 50

28. Yo tengo el cuádruple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes y cuando tú tengas la edad que yo tengo nuestras edades sumarán 95 años. ¿Cuántos años tenías cuando yo cumplí 20 años?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 10

29. Cuando transcurran a partir de hoy $(a+b)$ años, tendré el doble de la edad que tenía hace $(a-b)$ años. ¿Cuántos años tendré dentro de b años?

A) b B) $3a$ C) $3b$
D) $3a-b$ E) $3a+b$

30. Dentro de $2x$ años tendré tres veces más los años que tuve hace x años. Si los años que tuve, tengo y tendré suman 84 años, ¿qué edad tengo?

A) 12 años B) 24 años C) 36 años
D) 40 años E) 42 años

31. Juan al ser consultado por su edad respondió: *Si al doble de mi edad le restan 13 años, se obtendrá lo que me falta para tener 38 años.* ¿Cuál es la edad de Juan?

A) 17 años B) 18 años C) 19 años
D) 20 años E) 21 años

32. Yo tengo el triple de la edad que tenías cuando yo tenía el cuádruple de la edad que tuviste cuando mi edad era el triple de la edad que tenías en ese entonces. Y cuando tú tengas mi edad, nuestras edades sumarán 28 años. ¿Qué edad tengo?

A) 12 años B) 14 años C) 16 años
D) 17 años E) 18 años

33. Ana le dice a Sandra: *Mi edad es los 3/4 de la tuya; además, yo tengo la edad que tú tenías cuando mi padre tenía la edad actual de tu padre. Cuando tu padre tenga la edad de mi padre, mi edad será la mitad de la edad que tu padre tenía hace 10 años y tu edad será la mitad de la edad que mi padre tenía hace 5 años.* Halle la suma de las edades de Ana y de Sandra.

A) 21 B) 28 C) 49
D) 35 E) 42

34. De tres hermanos, el segundo es mayor en 3 años que el menor, y el mayor tiene el doble de la edad del menor. Si la suma de edades de los tres es 43 y el primer hijo nació cuando el padre tenía 24 años, ¿qué edad tenía el padre cuando nació el tercer hijo?

A) 24 años B) 26 años C) 31 años
D) 34 años E) 42 años

35. María tuvo su primer hijo a los 27 años y 4 años después tuvo a su segundo hijo. Si en el 2013 las edades de los tres suman 53 años, ¿en qué año nació María?

A) 1972 B) 1980 C) 1974
D) 1978 E) 1976

36. La suma de las edades de Freddy y de David es 48 años. Al acercarse Mario, Freddy le dice: *Cuando tú naciste, yo tenía 4 años; pero cuando David nació, tú tenías 2 años.* ¿Cuál es la edad de Mario?

A) 18 años B) 20 años C) 21 años
D) 23 años E) 27 años

37. Las edades de un padre y su hijo se diferencian en 20 años. Si dentro de 5 años la edad del padre será el doble de la edad del hijo, calcule la edad actual del hijo.

A) 10 años B) 15 años C) 16 años
D) 20 años E) 25 años

38. Hace 6 años Héctor era cuatro veces mayor que Vilma. Halle la edad de Héctor, sabiendo que dentro de 4 años la edad de este solo será dos veces mayor que Vilma.

A) 40 años B) 46 años C) 52 años
D) 56 años E) 60 años

39. Liz al ser preguntada por su edad respondió: *Multipliquen mi edad por los años que tendré dentro de 4 años y réstenle el triple de los años que tendré dentro de 48 años y obtendrán precisamente los años que tengo.* ¿Qué edad tendrá Liz dentro de 8 años?

A) 14 años B) 18 años C) 20 años
D) 24 años E) 28 años

40. En el año 2001, la edad de Lucía era cuatro veces la edad de Alexandra; en el 2009, la edad de una de ellas era el doble de la otra. ¿Qué edad tiene Lucía en el 2013?

A) 20 años B) 24 años C) 26 años
D) 28 años E) 32 años

41. Hace 11 años, yo tuve la tercera parte de la edad que tendré dentro de 7 años. Si tú naciste cuando yo tenía 8 años, ¿qué edad tendrás cuando yo tenga el doble de los años que tuve hace 3 años?

A) 32 años B) 26 años C) 28 años
D) 30 años E) 24 años

42. Hace 5 años, las edades de Miguel y de Sandra estaban en la relación de 7 a 4, y dentro de 7 años sus edades estarán en la relación de 3 a 2. ¿Cuál será la suma de las edades de ambos dentro de tantos años como tenía Miguel cuando nació Sandra?

A) 112 B) 118 C) 122
D) 120 E) 108

43. Josué le preguntó a Lucas por su edad y este respondió: *Yo tengo el doble de la edad que tenías cuando Mirko tenía tantos años como la mitad de años que tienes, y cuando él tenga mi edad actual, yo tendré el triple de la edad que tenías en el pasado mencionado y tú tendrás 42 años.* ¿Cuál es la suma de las edades actuales de Josué y de Lucas?

A) 66 B) 70 C) 60
D) 56 E) 48

44. El 20 de julio de 2005 le preguntaron al señor Montalvo sobre su edad y este comentó: *Aún no tengo 90 años y el año en que tuve tantos años como la suma de cifras del año de mi nacimiento representa un cuadrado perfecto.* ¿Qué edad tendría el señor Montalvo en el año 2005 si hubiera nacido 4 años antes?

A) 86 años
B) 84 años
C) 85 años
D) 88 años
E) 87 años

45. En una reunión realizada a fines del mes de setiembre del año 2010, se les pidió a los 19 asistentes que sumen los años que nacieron con sus edades en dicha fecha y obtuvieron como resultado 38 183. ¿Cuántos aún no cumplen años hasta ese momento en dicho año?

A) 10 B) 9 C) 11
D) 7 E) 8

Problemas sobre móviles

Capítulo XII

OBJETIVOS

- Comprender y aplicar correctamente la relación existente entre las magnitudes e, v y t, componentes de un movimiento uniforme, principalmente.
- Esclarecer y manejar convenientemente los conceptos y los criterios acerca de los problemas sobre móviles.
- Aplicar métodos prácticos manejando los conceptos de razones y proporciones en la solución de problemas sobre móviles.

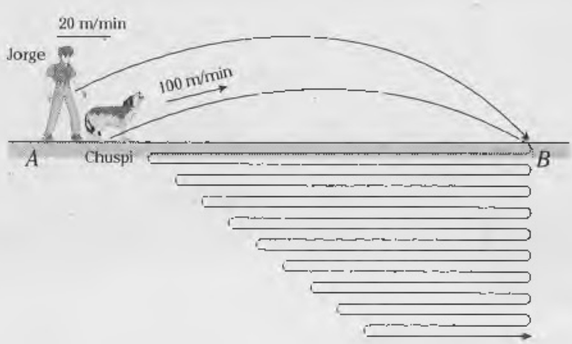
Partiendo de que ningún cuerpo está realmente en reposo, entonces vemos la importancia de comprender y manejar correctamente las relaciones que existen entre las magnitudes que intervienen cuando un cuerpo está en movimiento. Este capítulo tiene como finalidad afianzar al estudiante en el aprendizaje de los conceptos ya mencionados. Recuerde que el arte de plantear ecuaciones es también una herramienta importante a usar, pero en lo posible trataremos de anteponer criterios lógicos matemáticos buscando una solución más directa y entendible.

Ejemplo

Sabemos que tanto el niño como su perro parten en simultáneo de A hacia B.

$d(AB)=400$ m

¿Cuál es la medida del recorrido total del perro Chuspi hasta el momento en que Jorge llega al punto B?



Consideraciones previas

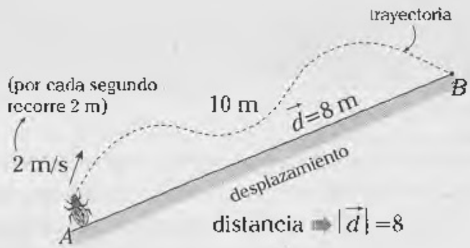
Llamamos velocidad $(\vec{v})$ a aquella magnitud vectorial cuyo módulo v nos indica la rapidez con que se mueve un cuerpo de un lugar a otro. Cuando la rapidez es constante, el movimiento es uniforme.

Por ejemplo, si un móvil recorre una trayectoria cualquiera con una rapidez constante de 10 m/s, entonces quiere decir que en cada segundo de su movimiento recorre 10 m.

NOTA

En este capítulo, veremos principalmente aquellos problemas que involucren el movimiento uniforme.

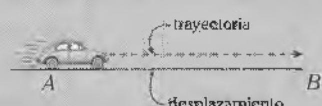
En el gráfico, un insecto recorre del punto A hacia B con rapidez constante (2 m/s).



NOTA

Cuando el movimiento es en línea recta, entonces el desplazamiento y la trayectoria coinciden, lo que implica que la distancia y el recorrido son numéricamente iguales.

En el gráfico se muestra un automóvil que parte de A hacia B con un movimiento rectilíneo.



Tengamos presente

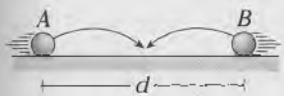
$$\boxed{e = v \times t}$$

De donde $\boxed{v = \dfrac{e}{t} \quad \text{y} \quad t = \dfrac{e}{v}}$

Además consideremos los siguientes casos.

Tiempo de encuentro (t_e)

suma de los recorridos de los móviles en simultáneo

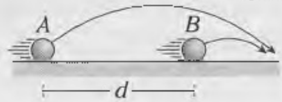


$$t_E = \frac{d}{v_A + v_B}$$

A y B parten en simultáneo.

Tiempo de alcance (t_a)

diferencia de recorridos de los dos móviles en simultáneo

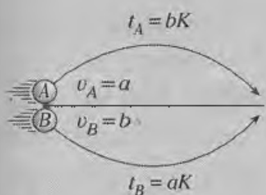


$$t_A = \frac{d}{v_A - v_B}$$

A y B parten en simultáneo.

Observación

Para dos móviles que tienen un mismo recorrido se cumple que la relación de rapidez de los móviles es inversa a la relación de tiempos empleados.

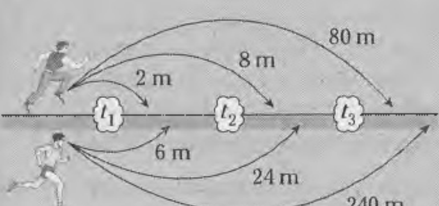


$$v_A \times t_A = v_B \times t_B$$

→ (rapidez) IP (tiempo)

Para dos móviles se cumple que, para un mismo tiempo, la relación de sus recorridos permanece constante.

Ejemplo

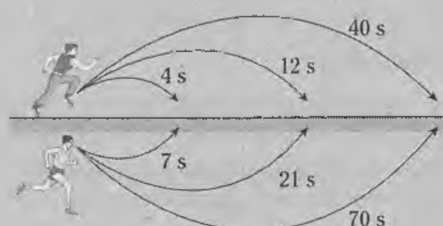


$$\overset{t_1}{\frac{2}{6}} = \overset{t_2}{\frac{8}{24}} = \overset{t_3}{\frac{80}{240}} = \text{cte.}$$

→ (rapidez) DP (recorrido)

Para dos móviles en movimiento se cumple que la relación de sus tiempos empleados para un mismo recorrido permanece constante.

Ejemplo



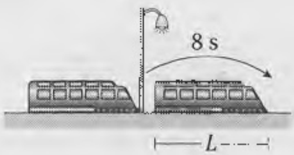
$$\frac{4}{7} = \frac{12}{21} = \frac{40}{70} = \text{cte.}$$

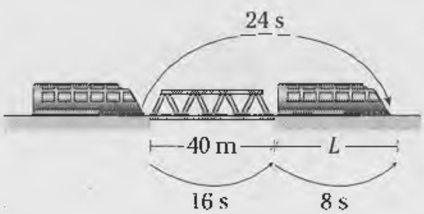
PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

Un tren demora 8 s en pasar delante de un poste y el triple de tiempo en cruzar un puente de 40 m de largo. ¿Cuál es su longitud?

Resolución





Por regla de tres

$40\text{ m} \longrightarrow 16\text{ s}$

$L \longrightarrow 8\text{ s}$

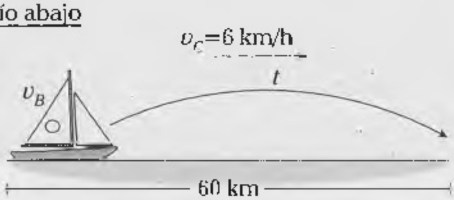
Por lo tanto, la longitud del tren es 20 m.

Problema N.º 2

Élmer rema 60 km río abajo empleando el mismo tiempo que emplea en remar 20 km río arriba. Halle la velocidad del bote en aguas tranquilas, si la velocidad de la corriente es de 6 km/h.

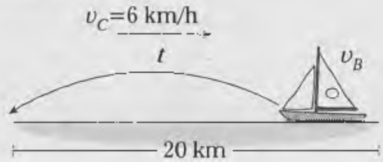
Resolución

Río abajo



$$t=\frac{60}{v_B+6} \qquad \text{(I)}$$

Río arriba



$$t=\frac{20}{v_B-6} \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$t=\frac{\cancel{60}^{\,3}}{v_B+6}=\frac{\cancel{20}^{\,1}}{v_B-6}$$

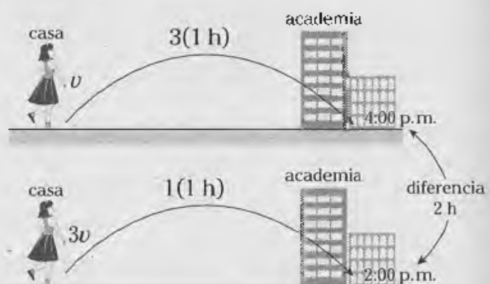
$$3v_B-18=v_B+6 \;\rightarrow\; 2v_B=24$$

$$\therefore \quad v_B=12\text{ km/h}$$

Problema N.º 3

Midory sale todos los días de su casa a la misma hora y llega a la academia a las 4:00 p. m. Un día se traslada a triple velocidad y llega a la academia a las 2:00 p. m. ¿A qué hora sale siempre de su casa?

Resolución



Para un mismo recorrido: (rapidez) IP (tiempo)

Rapidez: en la relación de 1 a 3 ($v \times 3v$)

Tiempos: en la relación de 3 a 1 $(\underbrace{3\text{ h} \times 1\text{ h}}_{\text{dif.: 2 h}})$

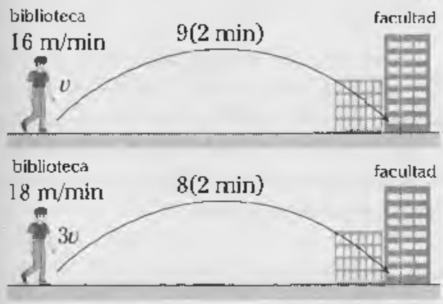
Por lo tanto, Midory siempre sale de su casa a las

4:00 p. m. – 3 h=**1:00 p. m.**

Problema N.º 4

Giancarlo desea calcular la distancia de la biblioteca a su facultad. Observa que caminando a razón de 16 m/min tarda 2 min más que caminando a 18 m/min. ¿Cuál es la distancia mencionada?

Resolución



Para un mismo recorrido: (rapidez) IP (tiempo)

Rapidez: relación de 8 a 9 (16 m/min y 18 m/min)

Tiempos: relación de 9 a 8 $(\underbrace{18\text{ min y }16\text{ min}}_{\text{dif.: 2 min}})$

Por lo tanto, la distancia mencionada es

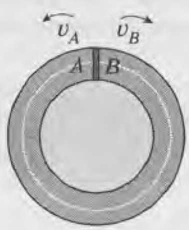
$(16\text{ m/min})\times(18\text{ min})=288\text{ m}$

Problema N.º 5

Dos atletas corren en una pista circular. Si corren en sentidos opuestos, se encuentran cada 6 min; pero si lo hacen en el mismo sentido, uno alcanza al otro cada 10 min. ¿Cuántos minutos demora uno más que el otro en dar una vuelta completa?

Resolución

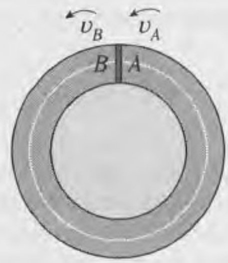
Cuando van en sentidos opuestos, empleamos tiempo de encuentro.



Sea la distancia de la pista circular: d

$$\rightarrow\quad 6=\frac{d}{v_A+v_B}\qquad\text{(I)}$$

Cuando van en el mismo sentido, empleamos tiempo de alcance.



$$\rightarrow\quad 10=\frac{d}{v_A-v_B}\qquad\text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$6(v_A+v_B)=10(v_A-v_B)$$

$$6v_A+6v_B=10v_A-10v_B$$

$$16v_B=4v_A$$

$$4v_B=v_A$$

$$\frac{v_B}{v_A}=\frac{1K}{4K}$$

Reemplazamos en (I)

$$6=\frac{d}{4K+K}\quad\rightarrow\quad d=30K$$

Luego

- A demora en dar una vuelta

$$\frac{d}{v_A}=\frac{30K}{4K}=7{,}5\text{ min}$$

- B demora en dar una vuelta

$$\frac{d}{v_B}=\frac{30K}{K}=30\text{ min}$$

Por lo tanto, uno demora $30-7{,}5=22{,}5$ min más que el otro.

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Para ir de un punto a otro, una persona camina a razón de 8 km/h y para volver al punto de partida lo hace a razón de 5 km/h. ¿Cuál es la distancia que hay entre los puntos, sabiendo que en el viaje de ida y vuelta ha empleado en total 13 h?

A) 18 km B) 36 km C) 40 km
D) 80 km E) 60 km

2. Dos móviles están distantes 200 km y salen al encuentro desde dos puntos: A y B con velocidades de 60 km/h y 40 km/h. ¿En qué tiempo se encontrarán y a qué distancia de A?

A) 2 h; 120 km
B) 3 h; 80 km
C) 2 h; 100 km
D) 4 h; 60 km
E) 4 h; 120 km

3. Dos atletas están separados 150 m. Si corren al encuentro, este se produce al cabo de 10 s; pero si corren el uno en pos del otro, el encuentro se produce a los 30 s. Halle la velocidad del más veloz.

A) 5 m/s B) 10 m/s C) 15 m/s
D) 20 m/s E) 12,5 m/s

4. Un ciclista viajando de A hacia B a 80 km/h retorna por el mismo camino a 70 km/h. Si hace el recorrido en forma continua y en un tiempo total de 6 horas, ¿qué distancia hay de A hasta B?

A) 280 km B) 560 km C) 140 km
D) 448 km E) 224 km

5. Un autobús recorre su ruta en tres etapas iguales, usando en las dos últimas el doble de la velocidad que en la etapa anterior y demorando en total 21 h. Cierto día observó que 2/5 de lo recorrido es igual a los 7/5 de lo que falta recorrer. ¿Cuántas horas ha viajado hasta el momento?

A) 17 h B) 19 h C) 18 h
D) 15 h E) 20 h

6. Un alumno de Aduni viajando en ómnibus a razón de 40 km/h llega a tiempo; sin embargo, un día llegó 10 min de retraso debido a que el vehículo solo pudo desarrollar 30 km/h. ¿A qué distancia de Aduni el alumno toma el ómnibus?

A) 10 km B) 20 km C) 30 km
D) 40 km E) 50 km

7. Un estudiante aborda todos los días un microbús para llegar a su clase a las 8:00 a.m., pero hoy perdió el microbús, y el otro pasó 10 min después del primero y arribó en el doble del tiempo normal, llegando a las 8:24 a.m. ¿A qué hora partió?

A) 7:24 a.m.
B) 7:32 a.m.
C) 7:56 a.m.
D) 8:02 a.m.
E) 7:48 a.m.

8. Dos atletas están separados por una distancia de 1030 m; los dos corren al encuentro con velocidades de 65 m/min y 85 m/min. Si el primero salió 2 min antes que el segundo y si el encuentro se produjo a las 12 m., ¿a qué hora se puso a correr el segundo atleta?

A) 11:28 a.m.
B) 11:54 a.m.
C) 11:30 a.m.
D) 11:45 a.m.
E) 11:56 a.m.

9. Raúl recorrió una distancia de 50 km a una cierta velocidad y seguidamente recorre 300 km a una velocidad tres veces mayor. Calcule la relación del tiempo empleado en el segundo tramo respecto al primero.

A) 1/2 B) 4/3 C) 5/4
D) 3/2 E) 2/1

10. De una estación parte un tren a una velocidad de 20 km/h. Poco tiempo después de la mima estación en una vía paralela parte otro tren en el mismo sentido pero a una velocidad de 68 km/h. ¿Cuál es la longitud del segundo tren, si un observador situado en el primer tren observa que demora 18 s en pasar?

A) 24 km B) 120 m C) 240 m
D) 1200 m E) 480 m

11. Un tren tardó 6 s en pasar delante de un semáforo y 24 s en atravesar un túnel de 240 m de longitud. ¿Cuánto tardará en cruzar una estación de 160 m de longitud?

A) 18 s B) 16 s C) 20 s
D) 14 s E) 22 s

12. Un comerciante sale de su casa todos los días a la misma hora y llega a su centro de trabajo a la hora exacta. Un día salió atrasado 25 min por lo cual duplicó su velocidad, aun así llegó atrasado 10 min. ¿Cuánto tiempo demora en llegar a su trabajo normalmente?

A) 20 min
B) 15 min
C) 25 min
D) 30 min
E) 10 min

13. Dos móviles (A y B) están separados una distancia de 200 m, B delante de A; ambos se mueven con velocidades de v_B=5 m/s y v_A=3 m/s. Si delante de B a 300 m se encuentra un poste, ¿después de qué tiempo de haber partido simultáneamente en el mismo sentido estos dos móviles equidistan del poste?

A) 1 min 40 s
B) 1 min 50 s
C) 3 min
D) 2 min
E) 2 min 30 s

14. Una persona sale de su casa y llega a su trabajo en 30 min a una velocidad constante. Un día salió normalmente de su casa y a mitad de su trayecto se detiene por un intervalo de 20 min, luego renueva su movimiento duplicando su velocidad hasta llegar a su centro de trabajo. ¿Con cuánto tiempo de retraso llega a su trabajo?

A) 12 min
B) 12,5 min
C) 14 min
D) 15,5 min
E) 16 min

15. Una persona se encuentra delante de una pared y efectúa un disparo, y luego de 10 s escucha el impacto; pero si hubiera estado 340 m más cerca de la pared, ¿al cabo de qué tiempo escucharía el impacto?
Datos: v_{sonido}=340 m/s; v_{bala}=8 m/s

A) 4 s
B) 6 s
C) 8 s
D) 7 s
E) 5 s

16. Navegando a favor de la corriente, un barco alcanza los 20 km/h; navegando en contra, solo 15 km/h. En ir desde el embarcadero de Chimbote hasta el embarcadero del Callao tarda 5 h menos que en el viaje de regreso. ¿Qué distancia hay entre estos dos embarcaderos?

A) 300 km B) 400 km C) 450 km
D) 200 km E) 250 km

17. Melissa recorre 34 km, una parte a 4 km/h y otra parte a 6 km/h. Si hubiera recorrido a 6 km/h cuando recorría a 4 km/h y viceversa, hubiera recorrido 2 km más en el mismo tiempo. ¿Cuánto tiempo duró su recorrido?

A) 7 h B) 8 h C) 9 h
D) 6 h E) 12 h

18. Una lancha va río abajo una distancia de 10 km y después río arriba 6 km; la velocidad de la corriente es igual a 1 km/h. Calcule la velocidad de la lancha, sabiendo que todo el viaje duró 4 h.

A) 3 km/h
B) 3,5 km/h
C) 4 km/h
D) 5 km/h
E) 6 km/h

19. María Sofía se dirige desde su casa a la academia en bicicleta empleando un tiempo de 30 min; para volver, aumenta su velocidad inicial en 4 m/min, demorándose esta vez 6 min menos. ¿Qué distancia viajó en total?

A) 480 m B) 420 m C) 500 m
D) 600 m E) 640 m

20. Una persona camina a razón de 7 km en 5 h; 8 h después sale de la misma ciudad otra persona que recorre 5 km en 3 h. ¿Cuánto habrá recorrido la primera al ser alcanzada por la segunda?

A) 28 km
B) 35 km
C) 32 km
D) 42 km
E) 36 km

21. Un tren pasa por delante de un observador inmóvil y demora 7 s, y al pasar por una estación de 360 m demora 22 s. Halle su velocidad.

A) 24 m/s B) 28 m/s C) 32 m/s
D) 36 m/s E) 40 m/s

NIVEL INTERMEDIO

22. Un carro sale de A hacia B a 80 km/h y regresa a 50 km/h después de 16 h. Si el carro se detuvo en B por 2 h y se detuvo 1 h en el camino de regreso, determine la distancia $\overline{AB}$.

A) 400 km
B) 500 km
C) 800 km
D) 160 km
E) 130 km

23. Una persona parte para andar 3 km y piensa llegar a su destino a cierta hora. Después de andar 1 km se detuvo 10 min, y resultó que tenía que andar 1 km por hora más de prisa para llegar a su destino. Halle su velocidad inicial.

A) 2 km/h B) 3 km/h C) 4 km/h
D) 5 km/h E) 6 km/h

24. Desde A parten dos peatones con velocidades de 10 km/h y 15 km/h con dirección a B, al mismo tiempo parte un ciclista desde B con dirección hacia A con velocidad constante. Si este se cruza con uno de los peatones 2 h después de que se cruzó con el otro, halle la velocidad del ciclista, si la distancia de A a B es 420 km.

A) 40 km/h
B) 20 km/h
C) 24 km/h
D) 25 km/h
E) 30 km/h

25. Dos automóviles parten simultáneamente y van al encuentro. Si originalmente están a 792 km y se encuentran al cabo de 9 h, ¿cuál es el espacio recorrido por el más lento en dicho tiempo, si uno de ellos viajó a 8 km/h más rápido que el otro?

A) 300 km B) 480 km C) 360 km
D) 400 km E) 520 km

26. Si un tren disminuyese su velocidad en 5 km/h, demoraría 2 h más en recorrer 300 km. Halle la velocidad del tren.

A) 30 km/h B) 38 km/h C) 20 km/h
D) 42 km/h E) 35 km/h

27. Para cubrir una distancia de 3200 km, un camión (común) emplea, además de sus llantas normales, 10 llantas de repuesto. ¿Cuál es el recorrido promedio de cada llanta?

A) 3200 km
B) 12 000 km
C) 1200 km
D) 2400 km
E) 1000 km

28. Un camión emplea 8 s en pasar delante de un observador y 38 s en recorrer un túnel de 120 m de longitud. Halle la longitud del camión.

A) 28 m B) 30 m C) 32 m
D) 45 m E) 60 m

29. De mi casa al mercado voy a 3 m/s y de regreso a 2 m/s. Si en el viaje de ida y vuelta demoro 5 minutos, ¿qué distancia separa mi casa del mercado?

A) 320 m B) 360 m C) 420 m
D) 280 m E) 400 m

30. Dos automóviles (A y B) están separados por 2 km y parten al encuentro en simultáneo con rapidez de 8 m/s y 12 m/s, respectivamente. ¿Luego de cuánto tiempo estarán separados 400 m por segunda vez?

A) 4 min
B) 2 min
C) 3 1/2 min
D) 6 min
E) 2 1/2 min

31. Un automovilista razona: *Si voy a 60 km/h, llegaré a mi destino una hora más tarde que si marchara a 80 km/h*. ¿En qué tiempo llegará si viaja a 40 km/h?

A) 5 h B) 5,5 h C) 4 h
D) 6 h E) 7 h

32. Un tren demora 8 s en pasar delante de un observador y 24 s en atravesar un túnel de 160 m. ¿Cuánto tiempo demorará en cruzar un puente de 200 m de longitud?

A) 20 s B) 26 s C) 28 s
D) 30 s E) 32 s

33. Dos autos partieron al encuentro, en forma simultánea, de dos ciudades (A y B) llegando a las ciudades hacia donde se dirigen; el primero 18 h después del encuentro y el segundo 8 h después de dicho encuentro. ¿Cuánto tiempo tardaron en encontrarse?

A) 9 h B) 10 h C) 11 h
D) 12 h E) 14 h

34. En una carrera de 50 m, si Daniel le da 5 m de ventaja a Gerardo, ambos llegan a la meta juntos. En una carrera de 200 m, si Gerardo le da 20 m de ventaja a Marcelo, llegan juntos a la meta. ¿Cuántos metros de ventaja deberá darle Daniel a Marcelo para que lleguen juntos a la meta en una carrera de 100 m?
Dato: Todos se desplazan con rapidez constante.

A) 10 B) 12 C) 15
D) 19 E) 25

35. Un conejo es perseguido por un perro. El conejo lleva una ventaja de 50 de sus saltos. Además, el conejo da 5 saltos, mientras el perro da 2, pero el perro en 3 saltos avanza tanto como el conejo en 8 saltos. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar al conejo?

A) 150 B) 200 C) 250
D) 300 E) 400

36. Al ir de mi casa al trabajo, me doy cuenta que si voy a 6 km/h, demoro 10 minutos más que si fuera a 8 km/h. ¿Cuál es la distancia entre mi casa y el trabajo?

A) 5 km B) 6 km C) 8 km
D) 4 km E) 3 km

37. Un cazador disparó una bala con una rapidez de 170 m/s y escucha que llega al blanco 6 s después de haber realizado el disparo. ¿A qué distancia del cazador se encuentra el blanco? Considere que la rapidez del sonido es igual a 340 m/s.

A) 680 m B) 510 m C) 425,5 m
D) 1020 m E) 340 m

38. Un balsero tarda en total 24 horas en ir y volver hasta un puerto que dista 90 km. Si el tiempo que emplea en recorrer 20 km a favor de la corriente es el mismo que emplea en recorrer 12 km contra la corriente, ¿cuál es la rapidez de la corriente del río en km/h?

A) 3 B) 4 C) 2
D) 1 E) 1,5

39. Dos trenes marchan en sentido contrario y sobre vías paralelas con velocidades de 18 y 30 km/h, respectivamente. Un pasajero del segundo tren calculó que el primero demoró en pasar 9 s. ¿Cuál es la longitud de este último tren?

A) 100 m B) 80 m C) 480 m
D) 120 m E) 180 m

40. Dos corredores: x y z parten al mismo tiempo del vértice A del triángulo equilátero ABC, uno por el lado AC y otro por el lado AB. Cuando se cruzan por primera vez están por el lado BC a 10 m del vértice B. Cuando se cruzan por segunda vez están a la mitad del lado AC. Cuando se crucen por tercera vez, ¿a qué distancia se encontrarán del punto de partida?

A) 20 m B) 30 m C) 40 m
D) 50 m E) 60 m

Amor a Sofía

Cronometría

Capítulo XIII

Objetivos

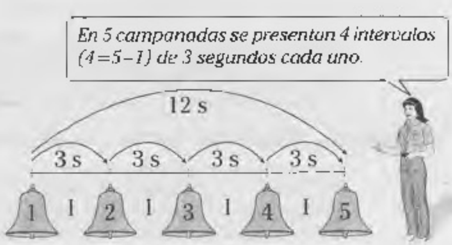
- Resolver los problemas sobre cronometría.
- Reforzar la capacidad de abstracción adquirida en el capítulo de planteo de ecuaciones.
- Diferenciar los diferentes tipos de problemas y su particular forma de resolverlos.

Para un mejor aprendizaje de este capítulo, clasificaremos los problemas de la siguiente manera:

- Problemas sobre campanadas
- Problemas sobre tiempo transcurrido y tiempo que falta transcurrir
- Problemas sobre adelantos y atrasos

Problemas sobre campanadas

En estos problemas, el tiempo se mide por intervalos. Por ejemplo, si se escuchan cinco campanadas en 8 s, tendríamos lo siguiente:



Donde I es el intervalo o tiempo que hay de campanada a campanada.

Podemos concluir que

$$\text{tiempo total} = \left(\begin{matrix}\text{n.º de}\\ \text{intervalos}\end{matrix}\right) \times \left(\begin{matrix}\text{duración de}\\ \text{cada intervalo}\end{matrix}\right)$$

En problemas sobre campanadas se cumple lo siguiente:

$$\text{n.º de intervalos} = \left(\begin{matrix}\text{n.º de}\\ \text{campanadas}\end{matrix}\right) - 1$$

Además

$$\text{tiempo total (DP) n.º de intervalos}$$

Todo ello se resume en una tabla

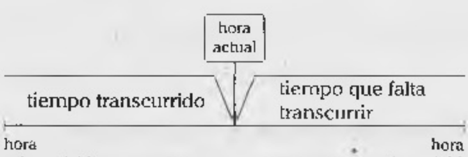
N.º de campanadas	N.º de intervalos	Tiempo total
5	4	12
10	9	27
12	11	33

De la tabla

$$\frac{4}{12} = \frac{9}{27} = \frac{11}{33} = \text{cte.}$$

Problemas sobre tiempo transcurrido y tiempo que falta transcurrir

En este tipo de ejercicios se considera el siguiente esquema:



Si las horas de referencia son de 0 h a 24 h, es decir, un día, se cumple

$$\left(\begin{matrix}\text{hora}\\ \text{actual}\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{tiempo}\\ \text{transcurrido}\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}\text{tiempo}\\ \text{transcurrido}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{tiempo por}\\ \text{transcurrir}\end{matrix}\right) = 24\text{ h}$$

Problemas sobre adelantos y atrasos

Para calcular el adelanto o atraso ocurrido en un cierto intervalo utilizaremos la razón de adelanto o atraso, respectivamente.

Ejemplos

1. Si se atrasa 4 min, cada hora tendremos

en	se atrasa
1 h	4 min
2 h	8 min
3 h	12 min

2. Si se adelanta 3 min, cada hora tendremos

en	se adelanta
1 h	3 min
2 h	6 min
3 h	9 min

Observación

Para que un reloj que se adelanta o atrasa vuelva a marcar la hora correcta por primera vez, debe adelantarse o atrasarse, según sea el caso, 12 horas <> 720 minutos.

Para relojes que se adelantan se cumple

$$\left(\begin{matrix}\text{hora}\\ \text{marcada}\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{hora}\\ \text{real}\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}\text{adelanto}\\ \text{total}\end{matrix}\right)$$

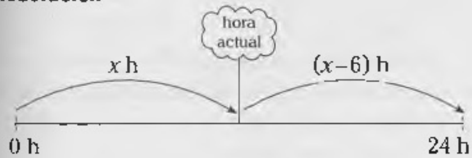
Asimismo, para relojes que se atrasan se cumple

$$\left(\begin{matrix}\text{hora}\\ \text{marcada}\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{hora}\\ \text{real}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{atraso}\\ \text{total}\end{matrix}\right)$$

Problema N.º 1

Consultando por la hora una persona contesta: *Las horas que quedan del día son menores en 6 que las horas transcurridas*. ¿Qué hora será dentro de 3 1/2 horas?

Resolución



$\rightarrow \quad x+x-6=24$

$x=15$

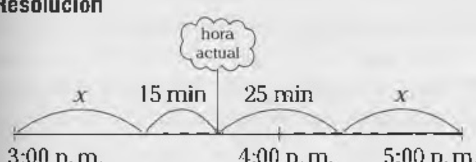
hora actual: 15 h <> 3 p. m.

Por lo tanto, dentro de 3 1/2 horas será 6:30 p. m.

Problema N.º 2

Ya pasaron las 3 sin ser las 4 de esta tarde. Si hubiera pasado 25 min más, faltarían para las 5:00 p. m. los mismos minutos que pasaron desde las 3:00 p. m. hasta hace 15 min. ¿Qué hora es?

Resolución



$\rightarrow \quad 2x+40=120$

$x=40$ min

Por lo tanto, la hora actual es

3 p. m. + x + 15 min = 3:55 p. m.

Problema N.º 3

Un campanario tarda 3 s en tocar 4 campanadas. ¿Cuánto tiempo tardará para tocar 8 y 14 campanadas, respectivamente?

Resolución

N.º de campanadas	N.º de intervalos	Tiempo entre C y C	Tiempo total
4	3	1	3 s
8	7	1	7 s
14	13	1	13 s

Por lo tanto, tardará 7 s para tocar 8 campanadas y 13 s para tocar 14 campanadas.

Problema N.º 4

Siendo las 8:00 a. m. empieza a adelantarse un reloj a razón de 5 min por cada hora. ¿Qué hora estará marcando este reloj cuando en realidad sean las 10:00 p. m. del mismo día?

Resolución

Desde las 8 a. m. hasta las 10 p. m. son 14 h que va adelantándose dicho reloj.

en	se adelanta
1 h	5 min
14 h	70 min <> 1 h 10 min

Entonces el reloj tiene 1 h 10 min de adelanto.

Por lo tanto, el reloj estará marcando

10 p. m. + 1 h 10 min = 11:10 p. m.

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Un campanario emplea 6 s para tocar 4 campanadas. ¿Cuánto tiempo empleará en tocar 8 campanadas?

A) 10 s B) 12 s C) 14 s
D) 16 s E) 20 s

2. Si un campanario toca 10 campanadas en 27 s, ¿cuántas campanadas tocará en 1 min?

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

3. Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 5:00 a.m. demora 6 s, ¿cuánto demorará para indicar las 12:00 p.m.?

A) 12 s B) 14 s C) 16 s
D) 16,5 s E) 18 s

4. Un reloj demora (m^2-1) s en tocar $(m+2)$ campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en 1 s?

A) $\frac{m}{m-1}$ B) $\frac{m}{m+1}$ C) $\frac{m^2-1}{m}$

D) $\frac{2m+1}{m}$ E) $\frac{m^2+1}{m-1}$

5. Un reloj señala la hora con igual número de campanadas. Si para indicar las 12:00 p.m. demoró 22 s, ¿cuánto demorará en indicar las 4:00 pm?

A) 4 s B) 6 s C) 9 s
D) 11 s E) 12 s

6. Un reloj señala la hora con el triple de campanadas con que señalaría un reloj normal. Si para indicar las 4:00 a.m. demoró 44 s, ¿cuánto demorará para indicar las 21:00 h?

A) 104 B) 108 C) 110
D) 231 E) 252

7. Un campanario emplea (m^2-1) s en tocar m campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en 1 s?

A) $\frac{m+1}{m-1}$ B) $\frac{m}{m+1}$ C) $\frac{m-1}{m}$

D) $\frac{m+2}{m+1}$ E) $\frac{m+2}{m-1}$

8. Son más de las 2 p.m. sin ser las 3 p.m., pero dentro de 40 min faltará para las 4 p.m. el mismo tiempo que ha transcurrido desde la 1 p.m. hasta hace 40 min. ¿Qué hora es?

A) 2:40 p.m. B) 2:50 p.m. C) 2:45 p.m.
D) 2:30 p.m. E) 2:20 p.m.

9. Si la mitad del tiempo transcurrido del día es igual a la cuarta parte del tiempo que falta transcurrir para que termine el día, ¿qué hora es?

A) 6 a.m. B) 7 a.m. C) 8 a.m.
D) 9 a.m. E) 12 p.m.

10. Si lo que falta para las 6 p.m. de hoy es igual a la mitad de lo que faltará para las 6 a.m. de mañana dentro de 6 h, ¿qué hora es?

A) 8 a.m. B) 9 a.m. C) 10 a.m.
D) 11 a.m. E) 12 p.m.

11. Son más de las 7 p.m. pero aún no son las 9 p.m. Si el tiempo transcurrido desde las 7 p.m. hasta hace 15 min es igual a 1/5 del tiempo que faltará para las 9 p.m. dentro de 15 min, ¿qué hora es?

A) 7:15 p.m. B) 7:20 p.m. C) 7:30 p.m.
D) 7:40 p.m. E) 8:30 p.m.

12. Son más de las 2 p.m., pero aún no son las 5 p.m. Si los minutos transcurridos desde las 2 p.m. son la cuarta parte de los minutos que faltan para las 5 p.m., ¿qué hora es?

A) 2:36 p.m. B) 3:20 p.m. C) 3:24 p.m.
D) 3:36 p.m. E) 3:44 p.m.

13. Si el duplo de las horas transcurridas en un día es igual al cuádruplo de las que faltan para terminar el día, ¿qué hora será dentro de 4 h?

A) 4 p.m. B) 6 p.m. C) 8 p.m.
D) 10 p.m. E) 12 p.m.

14. Son más de las 9 a.m. sin ser las 11 a.m. y, hace 30 min, los minutos que habían transcurrido desde las 9 a.m. eran iguales a 1/5 del tiempo que faltará transcurrir hasta las 11 a.m. dentro de 30 min. ¿Qué hora es?

A) 9:30 a.m. B) 10:30 a.m. C) 9:50 a.m.
D) 9:40 a.m. E) 10:00 a.m.

15. Si fueran 3 h más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día 5/7 de lo que faltaría si es que fuera 3 h más temprano. ¿Qué hora es?

A) 3 a.m. B) 6 a.m. C) 9 a.m.
D) 5 a.m. E) 7 a.m.

16. Se le preguntó la hora a un profesor y él respondió: *Queda del día, en horas, la suma de las dos cifras que forman el número de las horas transcurridas*. ¿Qué hora es?

A) 7 p.m. B) 11 p.m. C) 12 p.m.
D) 10 p.m. E) 9 p.m.

17. En el 2012, antes del mediodía, Diego se dio cuenta de que las horas transcurridas del año eran excedidas en 800 h por las horas que faltaban transcurrir. Indique la fecha y la hora en que Diego hizo dicha observación.

A) 10 junio; 4 p.m.
B) 14 junio; 8 a.m.
C) 15 junio; 8 p.m.
D) 15 junio; 8 a.m.
E) 15 julio; 8 a.m.

18. Un reloj se adelanta 2 min cada 3 h. ¿Qué hora será en realidad cuando marque las 10:15 a.m., si hace 30 horas que va adelantándose?

A) 9:50 a.m. B) 9:55 a.m. C) 10:00 a.m.
D) 10:05 a.m. E) 10:10 a.m.

NIVEL INTERMEDIO

19. El martes a las 4 p.m. Kevin observó que su reloj estaba 1 min adelantado. El jueves a las 12 p.m. advirtió que dicho reloj estaba atrasado 3 min. ¿Qué día y a qué hora habrá marcado la hora correcta?

A) miércoles; 3 a.m.
B) jueves; 3 a.m.
C) miércoles; 11 a.m.
D) martes; 11 p.m.
E) miércoles; 3 p.m.

20. Un reloj se adelanta 6 min por hora y otro se atrasa 2 min por hora. Si ambos empiezan a fallar el martes 1 de enero a las 12:00 p.m., exactamente, ¿qué fecha y a qué hora volverán a señalar la misma hora?

A) miércoles 2 enero; 8 a.m.
B) jueves 3 enero; 6 a.m.
C) viernes 4 enero; 8 a.m.
D) sábado 5 enero; 6 a.m.
E) domingo 6 enero; 8 a.m.

21. Un reloj se atrasa 10 min por cada hora. Si marcó la hora exacta por última vez un 6 de marzo al mediodía, ¿en qué fecha marcará la hora correcta nuevamente?

A) 7 marzo B) 8 marzo C) 9 marzo
D) 10 marzo E) 11 marzo

22. Un reloj se adelanta a razón de 4 min por hora y se pone a la hora a las 2 p.m. En la mañana del día siguiente, se observa que dicho reloj está marcando las 6 en punto. ¿Cuál es la hora correcta en ese momento?

A) 4 a.m. B) 5 a.m. C) 6 a.m.
D) 7 a.m. E) 5:30 a.m.

23. Siendo las 6 p.m., un reloj empezó a adelantarse a razón de 6 min, por hora. ¿Dentro de cuántas horas volverá a marcar la hora correcta por primera vez?

A) 60 B) 80 C) 100
D) 120 E) 160

24. Un reloj se adelanta 2 min cada 3 h. ¿A qué hora empezó a adelantarse si a las once y cuarto de la noche señala 11:27 p.m.?

A) 5:15 a.m. B) 5:15 p.m. C) 5:27 a.m.
D) 5:27 p.m. E) 5:12 p.m.

25. Sabiendo que el tiempo transcurrido del día es excedido en 8 h por el tiempo que falta transcurrir, ¿qué hora será dentro de 3 h?

A) 8 a.m. B) 9 a.m. C) 10 a.m.
D) 11 a.m. E) 11 p.m.

26. Hace 20 min el tiempo que faltaba para las 4 p.m. era el triple de lo que faltará para dicha hora pero dentro de 10 min. ¿Qué hora es?

A) 3:30 p.m. B) 3:32 p.m. C) 3:35 p.m.
D) 3:55 p.m. E) 3:45 p.m.

27. ¿Qué hora es? Para saberlo basta con sumar la mitad del tiempo que falta para las 12 p.m. más los 2/3 del tiempo transcurrido desde las 12 a.m.

A) 5:30 a.m.
B) 7:12 a.m.
C) 7:20 a.m.
D) 9:10 a.m.
E) 10:30 a.m.

28. Un reloj se adelanta 1 min cada 15 min. Si ahora marca las 4:20 y hace 8 h se adelantó, ¿cuál es la hora correcta?

A) 3:16 B) 3:30 C) 3:42
D) 3:48 E) 4:12

29. Un reloj que se atrasa 5 min cada hora marca la hora correcta hoy al mediodía. ¿Cuántos días, como mínimo, deberán transcurrir para que vuelva a marcar la hora correcta?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

30. Un reloj se atrasa 15 min por hora y otro se atrasa 9 min por hora. Si en este instante ambos marcan la hora correcta, ¿dentro de cuántos días marcarán la hora correcta simultáneamente?

A) 10 B) 11 C) 12
D) 14 E) 15

31. A las 12 p.m., un reloj comienza a atrasarse a razón de 3 min por hora y otro reloj empieza a adelantarse a razón de 2 min por hora. ¿Después de cuántos días ambos relojes estarán marcando la misma hora por primera vez?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

32. Hace 5 min faltaba para terminar el día los mismos minutos que pasarán del día hasta dentro de 15 min. ¿Qué hora es?

A) 11:50 a.m. B) 11:55 a.m. C) 12:00 p.m.
D) 12:05 p.m. E) 12:10 p.m.

33. Cuando son las 12 a.m., un reloj empieza a atrasarse a razón de 3 min cada hora. Cuando realmente sean las 2:20 p.m. de ese mismo día, ¿qué hora marcará este reloj?

A) 1:27 p.m. B) 1:37 p.m. C) 2:20 p.m.
D) 2:23 p.m. E) 2:37 p.m.

34. Dos relojes se sincronizan a las 8 a.m.; uno de ellos se adelanta 15 s cada cuarto de hora y el otro se atrasa 45 s cada hora. ¿Cuántos minutos estarán separados a las 8 p.m.?

A) 18 B) 21 C) 23
D) 32 E) 42

35. Un reloj en 3 h se adelanta 5 min y otro reloj en 5 h se adelanta 3 min. Si en este momento son las 10 a.m. y los relojes están indicando la hora correcta, ¿qué hora será realmente cuando ambos relojes indiquen la misma hora por primera vez?

A) 12 p.m. B) 1 p.m. C) 1:30 p.m.
D) 3:30 p.m. E) 4 p.m

36. Un reloj estuvo tocando durante 18 segundos. Si tocó tantas campanadas como cinco veces el tiempo en segundos que demoró entre campanada y campanada, ¿cuánto tiempo demoró de la quinta a la penúltima campanada?

A) 6 s B) 8 s C) 10 s
D) 12 s E) 14 s

37. Dentro de x minutos faltará para las 5 p.m. la misma cantidad de minutos que pasaron desde las 4 p.m. hasta hace x minutos. ¿Qué hora será dentro de 10 min?

A) 4:10 p.m. B) 4:50 p.m. C) 4:40 p.m.
D) 4:20 p.m. E) 4:30 p.m.

38. Moisés le pregunta a Jorge por la hora y este observando su reloj le responde: *El tiempo que faltaría para las 11 a.m. dentro de 10 min es excedido en 6 min por los 3/5 del tiempo transcurrido del día.* Si el reloj de Jorge está adelantado 5 min, ¿qué hora es realmente?

A) 6:50 a.m.
B) 6:55 a.m.
C) 6:35 a.m.
D) 7:00 a.m.
E) 6:45 a.m.

Amor a Sofía

Operaciones matemáticas

Capítulo XIV

Objetivos

- Dar una interpretación adecuada a los diversos procedimientos que se entienden como una operación matemática.
- Entender que las operaciones matemáticas universalmente definidas sirven de base para la creación de nuevas operaciones con sus propias características.
- Resolver acertadamente ejercicios que involucren el desarrollo de operaciones matemáticas.

Definición

Es aquel procedimiento que transforma una o más cantidades en otra cantidad que se denomina resultado, bajo ciertas reglas.

Toda operación debe tener un símbolo o signo que la represente, denominado operador matemático.

$$\overbrace{x \underset{\text{operador matemático}}{*} y = \underbrace{x^2+2y}_{\text{regla de definición}}}^{\text{operación matemática}}$$

Tipos de operaciones matemáticas

Operaciones matemáticas con regla de definición explícita

Son aquellas en las que la regla de definición utiliza de manera directa los componentes de la operación en función de las operaciones universales.

Ejemplos

- $2b^2 * a^4 = b^3 + a^2$
- $\boxed{x+5} = 4x+7$

Operaciones matemáticas con regla de definición implícita

La regla de definición aparece en función de la misma operación matemática, es decir, en la que no se puede hacer un reemplazo directo del valor de los componentes de la operación, sino que es necesario hacer un despeje previo para conseguir una operación con regla de definición explícita o, a veces, asignar valores que nos permitan conseguir lo pedido sin obtener previamente la regla de definición explícita.

Ejemplos

- $x \Delta y = 2(y \Delta x) + x$
- $x+3 = x + 2x$

Operaciones matemáticas definidas en tablas de doble entrada

Dada una tabla de este tipo, los resultados al operar los elementos los podemos hallar en el cuerpo de la tabla.

Ejemplo

fila de entrada

#	3	5	7
3	5	7	3
5	7	3	5
7	3	5	7

columna de entrada

cuerpo de la tabla

Problema N.° 1

Se define la siguiente operación en $\mathbb{R}$
$2a^3 * (3b+1)=a^2+b^3$.

Calcule el valor de E.
$E=128 * 7$

Resolución

- 128 puede ser expresado como $2(4)^3$ y
- 7 puede ser expresado como $3(2)+1$

Luego

$$E=128*7$$
$$E=2(4)^3*(3(2)+1)$$
$$E=4^2+2^3 \quad \boxed{\begin{matrix} a=4 \\ b=2 \end{matrix}}$$
$$\therefore \quad E=24$$

Problema N.° 2

Se define la siguiente operación matemática
$x\Delta y=2(y\Delta x)-3x$.
Calcule el valor de R.
$R=5\Delta 8$

Resolución

La operación está definida de manera implícita; entonces buscaremos la forma de poder definirla de manera explícita.

Veamos lo siguiente:

- El dato es $\quad x\Delta y=2(y\Delta x)-3x \qquad$ (I)
- Y por analogía: $\quad y\Delta x=2(x\Delta y)-3y \qquad$ (II)

Luego reemplazamos en (I)

$$y\Delta x=2(x\Delta y)-3y$$

y tendríamos $\quad x\Delta y=2[2(x\Delta y)-3y]-3x$

Operamos $\quad x\Delta y=4(x\Delta y)-6y-3x$

y despejamos $x\Delta y=x+2y$

Ahora ya tenemos la operación de manera explícita y como nos piden

$$R=5\Delta 8$$
$$R=5+2(8)$$
$$\therefore \quad R=21$$

Problema N.° 3

Se define la siguiente operación matemática

$$(n+1)=\frac{2}{n+2}\times(n).$$

Además $(1)=15$.

Calcule (4).

Resolución

Asignamos valores adecuados en la regla de definición.

$$n=1 \rightarrow \quad (2)=\frac{2}{3}\times(1)$$
$$n=2 \rightarrow \quad (3)=\frac{2}{4}\times(2)$$
$$n=3 \rightarrow \quad (4)=\frac{2}{5}\times(3)$$

multiplicamos miembro a miembro

$$\cancel{(2)}\times\cancel{(3)}\times(4)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{5}\times(1)\times\cancel{(2)}\times\cancel{(3)}$$

$$(4)=\frac{\cancel{2}}{3}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}}\times\frac{2}{5}\times 15$$

Simplificamos

$$(4)=2$$

Problema N.° 4

Se define la siguiente operación matemática

$\boxed{x+2}=3x+11$.

Además $\boxed{\triangle x+1}=12x+14$.

Calcule $\triangle 2$.

Resolución

A partir de $\boxed{x+2}=3x+11$

deducimos que $\boxed{} \xrightarrow{\times 3+5}$ =resultado

Luego aplicamos dicha idea de la operación al dato siguiente:

$$\boxed{\triangle\,x+1} \xrightarrow{\times 3+5} =3\,\triangle\,x+1+5$$

por dato $\rightarrow$ $12x+14=3\,\triangle\,x+1+5$

Despejando tenemos

$$\triangle\,x+1=4x+9$$

y deducimos que $\triangle\, \xrightarrow{\times 4+5}$ =resultado

Finalmente nos piden

$$\triangle\!\triangle\,2 \xrightarrow{\times 4+5} = \triangle\,13 \xrightarrow{\times 4+5} = 57$$

$\therefore$ $\triangle\!\triangle\,2=57$

Problema N.º 5

Se define $(x)=ax+b$.

Además

$(((x)))=27x+10.$

Calcule

$(2a+b)$.

Resolución

De la regla de definición $() \xrightarrow{\times a+b}$ =

$$(((x)))=27x+13$$

$$a(a(ax+b)+b)+b=27x+13$$

Operamos

$$a^3x+a^2b+ab+b=27x+13$$

$$a^3=27 \rightarrow a=3$$

$$9b+3b+b=13 \rightarrow b=1$$

$\rightarrow$ $(x)=3x+1$

$\therefore$ $(2a+b)=(7)=3(7)+1=22$

NIVEL BÁSICO

1. Se define
$a\,\Omega\, b=2a+3b$.
Calcule $5\,\Omega\, 8$.

A) 32 B) 34 C) 36
D) 30 E) 38

2. Dada la operación matemática
$2a\,\Delta\,(b+1)=a^2+b^2$,
calcule $8\,\Delta\, 8$.

A) 64 B) 63 C) 61
D) 66 E) 65

3. De acuerdo a
$x^y * y^x=5x+2y$,
calcule $3^4 * 4^3$.

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

4. Se define
$a^{a+1}\,\Delta\, b^{a-1}=(a+b)^2$.
Calcule $1024\,\Delta\, 512$.

A) 121 B) 144 C) 100
D) 169 E) 196

5. De acuerdo a
$\boxed{a+b} - \boxed{b+c} - \boxed{a+c}=2abc$,
calcule $\boxed{7} - \boxed{8} - \boxed{9}$.

A) 120 B) 100 C) 110
D) 130 E) 150

6. De acuerdo a
$\frac{2a+3b}{a-b}=5a+4b$,
calcule $\frac{29}{2}$.

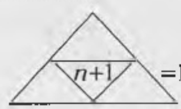
A) 50 B) 52 C) 55
D) 53 E) 54

7. Se define
$n = 2\; n-1 +3; \quad \forall\, n>1$.
Además $1=4$.
Calcule 3.

A) 24 B) 27 C) 28
D) 25 E) 20

8. Dada la operación matemática
$\boxed{x}=2x+1$,
además $\boxed{x}=6x+5$,
calcule $7+4$.

A) 33 B) 35 C) 36
D) 37 E) 34

9. Se define
$n+2 = 3n+10$.
Además

$=12n+25$.
Calcule $2 + 5$.

A) 34 B) 35 C) 36
D) 32 E) 33

10. Se define
$\boxed{3x+4}=15x+18$.
Además
$\boxed{x+1}-3x = \boxed{2x-1}+2x+20$.
Calcule 2.

A) 32 B) 40 C) 39
D) 37 E) 36

11. Dada la operación matemática

$$\triangle(n-1)=\frac{n^2-1}{2}; \quad n>0,$$

además $\triangle(\triangle(11-x))=84.$

Halle la suma de cifras de $\triangle(x)$.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 4 E) 5

12. Se define

$$\boxed{n^2-2n+1}=n^2+2n+1; \quad n>0.$$

Además $\boxed{\boxed{\boxed{3a+1}}}=225.$

Calcule la suma de cifras de a.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

13. De acuerdo a

$$(x^2+x)=x^2+5x+6; \quad x>0,$$

además $(((n)))=56,$

halle la suma de cifras de n.

A) 3 B) 4 C) 2
D) 5 E) 6

14. Dada la operación matemática en $\mathbb{R}$

$$3(2n+1)=\boxed{n+3}-5 \quad \wedge$$

$$\boxed{m+5}=2(3m+2)+12,$$

calcule (11).

A) 14 B) 8 C) 10
D) 7 E) 5

15. Se definen en $\mathbb{R}$

$$2\,\triangle(3a+1)=3\boxed{6a}+5 \quad \wedge$$

$$\boxed{4b+4}=\triangle(2b+3)-4$$

Calcule $\triangle(13)+\boxed{36}$.

A) 11 B) 10 C) 13
D) 12 E) 15

16. De acuerdo a

$a*b=2(b*a)-3a,$

calcule $7*9$.

A) 24 B) 23 C) 27
D) 26 E) 25

17. Se define

$$\boxed{x}=\frac{x^3+27}{x^2-3x+9}.$$

Calcule el valor de $\underbrace{\boxed{\cdots\boxed{\boxed{1}}\cdots}}_{\text{20 operadores}}$.

A) 61 B) 64 C) 67
D) 58 E) 60

18. Dada la operación matemática

$$R\square S=\frac{3RS+3R+4S+4}{2S+2}.$$

calcule

$16\square(15\square(...(5\square(4\square(3\square(2\square1))))...)).$

A) 24 B) 20 C) 32
D) 26 E) 28

19. De acuerdo a

$$a\#b=\overbrace{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b-1}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b-2}\right)\ldots}^{b\text{ factores}},$$

calcule $3\#10$.

A) 1 B) −1 C) 0
D) 2 E) −2

20. Dada la operación matemática

$$M_{(n)}=\left[\ldots\left[\left[(n-1)^{(n-4)}\right]^{(n-7)}\right]^{(n-10)\cdots}\right]^{(n-37)},$$

calcule $M_{(22)}$.

A) 1 B) −1 C) 0
D) 21 E) 22

21. Se definen

$(a)=2a+1$,

$\boxed{3b}=2b+3$ ∧

$\langle 2c-1\rangle=3c+8$.

Calcule la suma de cifras del valor de F.

$F=\left\langle\boxed{(7)}\right\rangle$

A) 10 B) 11 C) 12
D) 9 E) 8

22. Se define en ℕ la operación matemática de acuerdo a la siguiente tabla.

$\underline{\Delta}$	1	2	3	4
3	14	19	24	29
4	17	22	27	32
5	20	25	30	35
6	23	28	33	38

Calcule $(10\,\underline{\Delta}\,15)+(21\,\underline{\Delta}\,12)$.

A) 226 B) 221 C) 228
D) 223 E) 225

NIVEL INTERMEDIO

23. Dada la operación matemática en ℝ

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\oplus\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=2(a+b),$$

calcule $1\oplus2+3\oplus4+5\oplus6+\ldots+99\oplus100$.

A) 5200 B) 5150 C) 5100
D) 5050 E) 5060

24. Se define en ℝ

$$\left(m^2n+1\right)\nabla\left(mn^2+1\right)=m^3n^3+m^2n+mn^2.$$

Calcule $(1\nabla2)+(2\nabla3)+(3\nabla4)+\ldots+(20\nabla21)$.

A) 3080 B) 3060 C) 3040
D) 3160 E) 3050

25. Dada la operación matemática en ℝ

$(x+y)\,\psi\,(x-y)=4xy$,

calcule

$13\,\psi\,12+12\,\psi\,11+11\,\psi\,10+\ldots+4\,\psi\,3$.

A) 170 B) 156 C) 164
D) 160 E) 158

26. Se define en ℝ

$(a+b)\Delta ab=a^2+4ab+b^2$.

Calcule

$1\Delta1+2\Delta2+3\Delta3+\ldots+10\Delta10$.

A) 497 B) 495 C) 485
D) 475 E) 477

27. Dada la operación matemática en ℝ

$x\otimes y=x^2+y^2+2(x+y)+2$,

calcule

$$\left(\sqrt{1}^3-1\right)\otimes\left(\sqrt{2}^3-1\right)+\left(\sqrt{3}^3-1\right)\otimes\left(\sqrt{4}^3-1\right)+$$
$$+\left(\sqrt{5}^3-1\right)\otimes\left(\sqrt{6}^3-1\right)+\ldots+\left(\sqrt{19}^3-1\right)\otimes\left(\sqrt{20}^3-1\right)$$

A) 44 200 B) 44 400 C) 44 100
D) 41 400 E) 41 100

28. Se define en ℝ

$\phi(a^2+2)=a^4+4a^2+5$.

Calcule

$\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\ldots+\phi(20)$.

A) 2870 B) 2770 C) 2890
D) 2860 E) 2970

29. De acuerdo a

$\langle n \rangle = xn+y; \quad x>0,$

además $\langle\langle n \rangle + xn + 2y \rangle = 18n+20,$

calcule $\langle 15 \rangle + \langle 5 \rangle$.

A) 62 B) 64 C) 54
D) 58 E) 60

30. Se define

$\boxed{x} = x^2+1; \qquad x>0.$

Halle la suma de cifras de n.

$\boxed{\boxed{\boxed{2n-25}}} = 26$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

31. Dada la operación matemática

$n = n^n+1; \qquad n \in \mathbb{Z},$

además $2x-5 = 3126,$

calcule la suma de cifras de x.

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

32. De acuerdo a

$\boxed{x} = ax+b; \quad a>0,$

además $\boxed{\boxed{x}} = 9x+20,$

calcule $\boxed{10}$.

A) 30 B) 35 C) 40
D) 36 E) 32

33. Se define

$x = mx+n; \qquad m>0.$

Además $x = 8x-21.$

Calcule 7.

A) 10 B) 13 C) 14
D) 11 E) 12

34. Dada la operación matemática

$\triangle x = a(x+1) - b(x-1); \qquad a>b,$

además $\triangle\triangle x = 16x+50,$

calcule $\triangle a \cdot b$.

A) 80 B) 85 C) 90
D) 75 E) 84

35. Se define en $\mathbb{R}$

$2a*b = 3(2b*a) - ab.$

Calcule $10*6$.

A) 60 B) 30 C) 20
D) 15 E) 40

36. Se define en $\mathbb{R}$

$(m \oplus n)^2 = \dfrac{(n \oplus m)^3}{5}; \qquad m \oplus n > 0.$

Calcule $10 \oplus 11$.

A) 10 B) 11 C) 21
D) 25 E) 5

37. De acuerdo a

$x*y = \sqrt{y*x} + \sqrt{x*y}; \qquad x*y>0,$

calcule

$1*2+2*3+3*4+4*5+5*6.$

A) 10 B) 12 C) 16
D) 20 E) 24

38. Se define

$4(3a\,\theta\,4b) = (6b\,\theta\,2a) + 7a + b.$

Calcule $18\,\theta\,12$.

A) 12 B) 18 C) 24
D) 15 E) 21

39. Dada la operación matemática

$F_{(x)}=2x^2-3$,

calcule $\underbrace{F\left(F\left(...\left(F\left(F\left(F_{(1)}\right)\right)\right)...\right)\right)}_{\text{50 operadores}}$.

A) 1 B) 0 C) −1
D) 2 E) −2

40. Se define

$\phi_{(a)}=\dfrac{3a+1}{a-3}$.

Calcule $\underbrace{\phi\left(\phi\left(...\left(\phi\left(\phi_{(5)}\right)\right)...\right)\right)}_{\text{21 operadores}}$.

A) 5 B) −5 C) −8
D) 21 E) 8

41. Dada la operación matemática

$\triangle\!\left(x^2+x\right)=x^4+x^2+4$,

calcule el valor de $\triangle\!\left(-1\right)$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

42. De acuerdo a

$x\,\theta\,y=\dfrac{y(y+x-1)-x}{y-1}$; $y\neq 1$,

calcule el valor de A.

$A=\left(1^2\theta 2^2\right)+\left(3^2\theta 4^2\right)+\left(5^2\theta 6^2\right)+\left(7^2\theta 8^2\right)+\left(9^2\theta 10^2\right)$

A) 385 B) 375 C) 355
D) 365 E) 395

43. Se define una operación matemática para los conjuntos

$A=\{1; 4; 9; 16; 25...\}$ y

$B=\{1; 3; 6; 10; 15...\}$

como se muestra a continuación:

Δ	1	3	6	10
1	1	2	3	4
4	2	4	6	8
9	3	6	9	12
16	4	8	12	16

Calcule $81\,\Delta\,120+196\,\Delta\,55$.

A) 255 B) 265 C) 275
D) 270 E) 280

44. De acuerdo a

$\left(\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x+1}\right)=x^2+x+1$,

calcule el valor de M.

$M=(3)+(7)+(13)+(21)+(31)$

A) $\dfrac{8}{9}$ B) $\dfrac{9}{10}$ C) $\dfrac{6}{7}$

D) $\dfrac{5}{6}$ E) $\dfrac{4}{5}$

45. Dada la operación matemática

$(3a-2)*(2b+3)=\dfrac{a-1}{2}-\dfrac{b+1}{3}$,

calcule el valor de N.

$N=\left(13^2*12^2\right)+\left(12^2*11^2\right)+\left(11^2*10^2\right)+...+\left(2^2*1^2\right)$

A) 28 B) 24 C) 30
D) 26 E) 32

46. Se define

$\boxed{2x^2+4x}=\left(2x^2+5x-5\right)(2x+4)$.

Calcule el valor de $\boxed{5}$.

A) 4 B) 1 C) 0
D) 5 E) 6

47. Se define

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^2+\frac{1}{a^2};\qquad a\in\mathbb{R}^+.$$

Calcule el valor de P.

$$P=\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\ldots+\sqrt{12}$$

A) 50 B) 52 C) 54
D) 55 E) 60

48. Dada la operación matemática

$$\triangle x=\frac{1}{x}+\frac{12-x}{13-x};\qquad x\in\mathbb{R}^+-\{13\},$$

calcule el valor de T.

$$T=\triangle 4+\triangle 5+\triangle 6+\triangle 7+\triangle 8+\triangle 9$$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 9 E) 12

49. De acuerdo a

$$\boxed{\frac{3x}{x-1}}=x;\qquad x\in\mathbb{R}^+-\{1\},$$

calcule el valor de A.

$$A=\boxed{5}\times\boxed{8}\times\boxed{11}\times\boxed{14}$$

A) 4 B) 5 C) 8,5
D) 9,5 E) 7,5

50. Dada la operación matemática

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)=\frac{3a+b}{a+3b};\qquad a\neq b,$$

calcule el valor de S.

$$S=2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7$$

A) 6 B) 4 C) 7
D) 5 E) 8

51. De acuerdo a

$$\boxed{\frac{x^2+1}{2x^2-1}}=x^2;\qquad x^2\neq\frac{1}{2},$$

calcule el valor de D.

$$D=\boxed{3}\times\boxed{4}\times\boxed{6}\times\boxed{10}\times\boxed{18}$$

A) $\frac{4}{35}$ B) $\frac{4}{37}$ C) $\frac{3}{35}$
D) $\frac{3}{37}$ E) $\frac{5}{37}$

52. Dada la operación matemática

$$\left\langle\frac{x+5}{x+1}\right\rangle=\frac{4}{x+1}+3;\qquad x\in\mathbb{R}\ \wedge\ x\neq-1,$$

calcule la suma de cifras del valor de H.

$$H=\langle -1\rangle+\langle 1\rangle+\langle 3\rangle+\langle 5\rangle+\langle 7\rangle$$

A) 8 B) 9 C) 6
D) 5 E) 7

53. Se definen

$\boxed{x}=3x+2\ \wedge\ \boxed{x}=3x+8$.

Además $\boxed{\boxed{n}}=\triangle n$.

Calcule $\triangle\boxed{1}$.

A) 68 B) 71 C) 74
D) 77 E) 80

54. Dada la operación matemática

$(m+n)\,\theta\,(m^2+n^2)=2m+3n;\qquad m>n>1,$

además $(3x+2)\,\theta\,(5x^2+6x+2)=12\,\theta\,104$,

calcule x.

A) 5 B) 6 C) 4
D) 3 E) 2

55. Se define

$\alpha_{(A)}=3A(A+1)+1.$

Además

$\alpha_{(4)}+\alpha_{(5)}+\alpha_{(6)}+\alpha_{(7)}+...+\alpha_{(N)}=7936.$

Calcule la suma de cifras de N.

A) 10 B) 11 C) 9
D) 12 E) 13

56. De acuerdo a

$\triangle(n+1)=3\triangle(n)+2n;\qquad \forall\, n>0,$

además $\triangle(1)=1$,

calcule $\triangle(4)$.

A) 63 B) 64 C) 65
D) 66 E) 67

57. Se define

$\boxed{n}-\boxed{n-1}=n^2;\qquad \forall\, n>0.$

Además $\boxed{0}=3$.

Calcule $\boxed{7}$.

A) 133 B) 136 C) 139
D) 142 E) 143

58. De acuerdo a

$\boxed{2n+1}=\boxed{2n-1}+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)};\qquad \forall\, n\geq 1,$

además $\boxed{1}=\dfrac{20}{39}$,

calcule $\boxed{39}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

59. Se define la operación Δ

$(b\Delta a)^2=a(a\Delta b);\quad a\Delta b>0.$

Calcule $R=54\Delta 2$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

60. Se define para $n\in\mathbb{Z}^+$

$\boxed{x}=\dfrac{x(x-1)}{2}$.

Calcule el valor de $a+b$ ($a\in\mathbb{N}$) en

$\boxed{4a^2+\dfrac{75}{a}}=6555;\ \boxed{\boxed{b}}=105.$

A) 9 B) 11 C) 12
D) 15 E) 18

61. Si

$a*b=b\#a,$

además

$\boxed{x}=mx+n\ \wedge$

$\boxed{\boxed{\boxed{n\#m}}}=8(m*n)+21,$

calcule $\boxed{5}$.

A) 12
B) 14
C) 15
D) 16
E) 13

62. Si

$\boxed{n}=\dfrac{\boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3}+\boxed{4}+...+\boxed{n}}{n},$

además $\boxed{1}=2012$,

calcule M.

$M=\boxed{\boxed{1}}+\boxed{\boxed{2}}+\boxed{\boxed{3}}+...+\boxed{\boxed{2011}}$

A) 0
B) 1
C) 2010
D) 2011
E) 2012

Comparación de magnitudes

Capítulo XV

Objetivos

- Conocer el concepto de magnitud y la relación de comparación que se puede establecer entre dos o más magnitudes.
- Aprender que el concepto de magnitud lo podemos apreciar en todas las cosas que nos rodean.
- Utilizar métodos prácticos para resolver problemas que involucren magnitudes.

Magnitud

Es todo aquello susceptible a sufrir variación, ya sea de aumento o disminución, y puede ser medido.

Ejemplo

Peso	40 kg, 25 g, 10 lb
Tiempo	10 días, 25 h, 3 min
Rapidez	20 m/s, 50 km/h, 15 millas/h
N.º de obreros	8, 12, 27...
Eficiencia	100%, 75%, 25%...
⋮	⋮

En el caso planteado en la introducción observamos que están involucrados dos magnitudes: rapidez y tiempo, y al variar una de ellas (rapidez), la otra (tiempo) también varía.

De acuerdo a la forma como se da la variación, las magnitudes se clasifican en dos: magnitudes directamente proporcionales (DP) y magnitudes inversamente proporcionales (IP).

Magnitudes directamente proporcionales (DP)

Analicemos la siguiente situación:

En una carpintería 6 obreros pueden fabricar 12 mesas.

N.º de obreros		N.º de mesas (obra)	
6		12	
12	×2	24	×2
18	×3	36	×3
3	÷2	6	÷2
⋮		⋮	

Se observa que si el valor de una magnitud (n.º de obreros) aumenta, el valor correspondiente en la otra magnitud (n.º de mesas) también aumenta; o si uno disminuye, el otro también disminuye pero de manera proporcional.

Entonces podemos decir que el número de obreros y el número de mesas son DP, es decir, el número de obreros es directamente proporcional al número de mesas.

$$\left(\begin{array}{c}\text{n.º de}\\ \text{obreros}\end{array}\right) \text{ DP } \left(\begin{array}{c}\text{n.º de}\\ \text{mesas}\end{array}\right)$$

También

$$\frac{\text{n.º de obreros}}{\text{n.º de mesas}} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24} = \frac{18}{36} = \frac{3}{6} = \ldots = \text{cte.}$$

El cociente en cada pareja de valores correspondientes es el mismo, es decir, el cociente es constante.

Por lo tanto, si dos magnitudes son directamente proporcionales, entonces el cociente entre sus valores numéricos correspondientes es constante. Es decir

$$\text{Si} \quad A \text{ DP } B \;\rightarrow\; \frac{A}{B} = K$$

Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Analicemos el siguiente caso:

Un automóvil que viaja a 20 km/h demora 24 min para llegar a su destino.

Rapidez (km/h)		Tiempo (min)	
20		24	
40	×2	12	÷2
80	×4	6	÷4
10	÷2	48	×2
⋮		⋮	

Se observa que si el valor numérico de una magnitud (rapidez) aumenta, el valor correspondiente en la otra disminuye; o si el primero disminuye, el otro (tiempo) aumenta pero de manera inversamente proporcional.

Entonces podemos decir que la rapidez y el tiempo son IP, es decir, la rapidez es inversamente proporcional al tiempo.

(rapidez) IP (tiempo)

Además

$$(\text{rapidez})\times(\text{tiempo}) = 20\times24 = 40\times12$$
$$= 80\times6 = 10\times48 = \ldots = \text{cte.}$$

El producto en cada pareja de valores correspondientes es el mismo, es decir, el producto es constante (cte.)

Por lo tanto, si dos magnitudes son inversamente proporcionales, entonces el producto entre sus valores numéricos correspondientes es constante. Es decir

Si $A \text{ IP } B \rightarrow A \times B = K$

De acuerdo a la cantidad de magnitudes que intervienen en un problema, haremos la siguiente clasificación:

Comparación simple

Cuando en el problema intervienen solo dos magnitudes.

Comparación compuesta

Cuando en el problema intervienen más de dos magnitudes.

Para resolver un problema de comparación compuesta usaremos el siguiente método:

- Comparar la magnitud donde se encuentra la incógnita con cada una de las otras magnitudes.
- Aplicar, según sea el caso (DP o IP), los criterios aprendidos.

Ejemplos

1. Comparar las siguientes magnitudes:

   (n.º de días) IP (n.º de obreros)

   (n.º de días) DP (obra)

   (n.º de días) IP (eficiencia)

   (n.º de días) IP (n.º de horas diarias)

   Respecto a sus valores

$$\boxed{\frac{(\text{n.º días})(\text{n.º obreros})(\text{eficiencia})(\text{horas/diarias})}{(\text{obra})(\text{dificultad})} = \text{cte.}}$$

2. Comparar las siguientes magnitudes:

   (ganancia) DP (capital)

   (ganancia) DP (tiempo)

   Respecto a sus valores

$$\boxed{\frac{\text{ganancia}}{(\text{capital})(\text{tiempo})} = \text{cte.}}$$

3. Una cuadrilla de 15 obreros de igual rendimiento se compromete a construir cierta obra en 24 días; pero al cabo de 18 días solo se ha hecho 5/11 de la obra. ¿Cuántos obreros con igual rendimiento a los anteriores tendrán que reforzar a la cuadrilla para terminar en el tiempo fijado?

   Resolución

   De las magnitudes que intervienen, se tiene

$$\frac{(\text{n.º de obreros})(\text{n.º de días})}{(\text{obra})} = \text{cte.}$$

   De los datos

   - plazo fijado: 24 días
   - la obra: $11K$

   Entonces

$$\frac{15 \times \overset{3}{\cancel{18}}}{\cancel{5}K} = \frac{(15+\overset{\text{n.º de obreros que reforzarán}}{x})\cancel{6}}{6K}$$

$$54 = 15 + x$$

$$\therefore \; x = 39$$

4. Una cuadrilla de 23 obreros puede hacer una obra en 18 días. Si luego de 6 días de trabajo se les pide que terminen la obra en 6 días, ¿cuántos obreros más deben contratarse para cumplir con el pedido?

Resolución

De las magnitudes que intervienen, se tiene

(n.º de obreros) · (n.º de días)=cte.

De los datos

Obra:

23 obreros 18 días

obreros a contratar

Obra:

23 obreros 6 días	(23+x) obreros 6 días

$\rightarrow\ 23\times\overset{3}{\cancel{18}}=23\cdot\cancel{6}+(23+x)\cancel{6}$

$69=23+23+x$

$\therefore\ x=23$

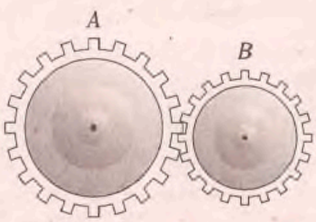
OBSERVACIÓN

Si en un problema participan dos tipos de obreros y no indican sus eficiencias, se considera que es la misma (algo similar con la dificultad de la obra).

APLICACIÓN EN LOS SISTEMAS DE ENGRANAJES

Caso 1

Cuando están en contacto (engranados).



(n.º de dientes) IP (n.º de vueltas)

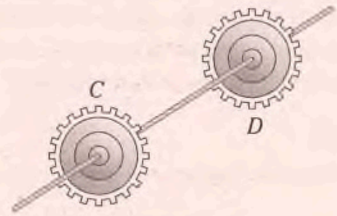
Entonces

$$\boxed{(\#\,d_A)\times(\#\,V_A)=(\#\,d_B)\times(\#\,V_B)}$$

- $\#\,d_A$: número de dientes de A
- $\#\,V_A$: número de vueltas de A

Caso 2

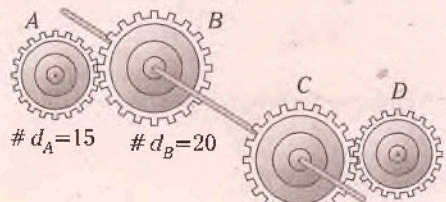
Cuando están unidos por un eje común.



$$\boxed{\#\,V_C=\#\,V_D}$$

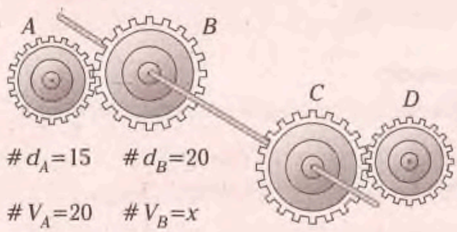
Ejemplo

En el siguiente sistema de engranajes, sabemos que A dio 20 vueltas. Calcule el número de vueltas que dio D.



$\#\,d_A=15$ $\quad\#\,d_B=20$ $\quad\#\,d_C=40$ $\quad\#\,d_D=10$

Resolución



$\#\,d_A=15$ $\quad\#\,d_B=20$

$\#\,V_A=20$ $\quad\#\,V_B=x$

$15\times20=x(20)$

$x=15$

$\#\,d_C=40$ $\quad\#\,d_D=10$

$\#\,V_C=x=15$ $\quad\#\,V_D=¿?$

$40\times15=10\times\#\,V_D$

$\#\,V_D=60$

Por lo tanto, el número de vueltas que se dio D es 60.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

Para abrir una zanja de 200 m de largo se contrató a cierto número de obreros. Si la zanja fuese 150 m más larga, se necesitarían 9 obreros más. ¿Cuántos obreros se contrataron?

Resolución

Observamos las magnitudes que intervienen

$$(\text{obra})\ \text{DP}\ (\text{n.º de obreros}) \rightarrow \frac{\text{obra}}{\text{n.º de obreros}}=\text{cte.}$$

$$\rightarrow \quad \frac{200}{x}=\frac{350}{x+9}$$

$$200x+1800=350x$$

$$1800=150x$$

$$x=12$$

Por lo tanto, se contrataron 12 obreros.

Problema N.º 2

Un grupo de caballos tienen alimentos para 15 días, pero si hubiesen 2 caballos más, los alimentos solo durarían 12 días. ¿Cuántos caballos hay?

Resolución

Observamos las magnitudes que intervienen

$$\begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{caballos}\end{pmatrix}\ \text{IP}\ \begin{pmatrix}\text{n.º de días que}\\ \text{duran los alimentos}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{caballos}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{días}\end{pmatrix}=\text{cte.}$$

$$\rightarrow \quad x\cdot 15=(x+2)12$$

$$15x=12x+24$$

$$3x=24$$

$$x=8$$

Por lo tanto, hay 8 caballos.

Problema N.º 3

Con 8 obreros se puede hacer una obra en 20 días. Con 10 obreros, cuatro veces más rápidos que los anteriores, ¿en cuántos días harán una obra cuya dificultad es cuatro veces la anterior?

Resolución

Observamos las magnitudes que intervienen

$$(\text{n.º de obreros}) \overset{\text{IP}}{\frown} (\text{n.º de días}) \overset{\text{IP}}{\frown} (\text{eficiencia}) \overset{\text{DP}}{\frown} (\text{dificultad})$$

$$\rightarrow \frac{(\text{n.º de obreros})\times(\text{n.º de días})-(\text{eficiencia})}{(\text{dificultad})}=\text{cte.}$$

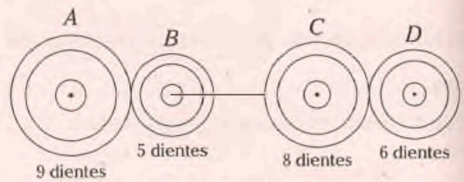
$$\rightarrow \quad \frac{8\cdot 20\cdot 1}{1}=\frac{10\cdot x\cdot 5}{10}$$

$$x=32$$

Por lo tanto, harán la obra en 32 días.

Problema N.º 4

Si la rueda A gira 5 vueltas por minuto, ¿cuántas vueltas gira la rueda D en 5 min?



Resolución

Del gráfico

	A	B	C	D	
n.º de dientes:	9	5	8	6	
n.º de vueltas:	5	9	9	x	$\rightarrow\ 8\cdot 9=6\cdot x$
					$x=12$

unidas por un eje común

ruedas engranadas (n.º de vueltas) IP (n.º de dientes)

ruedas engranadas

Entonces D en 1 min gira 12 vueltas.

Por lo tanto, D en 5 min gira $12\cdot 5=60$ vueltas.

NIVEL BÁSICO

1. Se sabe que x varía en razón directa a y e inversa a z. Si $x=10$ cuando $y=4$ y $z=14$, entonces cuando $y=8$ y $z=7$, x será igual a

A) 40. B) 30. C) 32.
D) 36. E) 48.

2. Se ha calculado que 750 m de zanja pueden ser excavados en 10 días. Si 7 obreros hicieron 350 m y seguidamente con 5 ayudantes más concluyen la obra en el plazo fijado, los días trabajados por los ayudantes son

A) 3. B) 4. C) 5.
D) 6. E) 8.

3. Sea A el doble de eficiente que B. Si juntos pueden hacer un trabajo en 12 días, ¿cuánto tiempo le tomaría a A hacerlo solo?

A) 36 días B) 9 días C) 18 días
D) 12 días E) 24 días

4. Una cuadrilla de 120 obreros inician una obra que pueden culminar en 36 días. Al cabo del vigésimo quinto día se retira la doceava parte de la cuadrilla. Para finalizar la obra, ¿cuántos días más se necesitan?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

5. Un trabajador demora 5 h y 20 min para construir una pared. Cuando ya ha construido hasta los 3/5 de dicha pared, el trabajador se lesiona y su rendimiento disminuye a 1/3. ¿Cuánto tiempo tardará para hacer toda la pared?

A) 384 h
B) 320 h
C) 448 h
D) 576 h
E) 512 h

6. Un granjero tiene 300 cerdos para los cuales tiene alimentos para 30 días. Decide vender cierto número de ellos y a los que quedan proporcionarles los 3/5 de la ración que les correspondía, para que los alimentos duren 3 meses más. Halle el número de cerdos que se vendieron.

A) 225 B) 250 C) 75
D) 125 E) 175

7. Cinco orfebres hacen 12 anillos en 15 días. Si se desean hacer 60 anillos en 25 días, ¿cuántos orfebres doblemente rápidos se deben contratar, además de los que se tienen?

A) 10 B) 15 C) 5
D) 4 E) 3

8. Un hombre y dos mujeres pueden hacer el trabajo en 6 días. Determine el tiempo necesario para que dos hombres y una mujer puedan hacer un trabajo que es el cuádruple del anterior, sabiendo que el trabajo de dos hombres es equivalente al de tres mujeres.

A) 12 días B) 21 días C) 36 días
D) 18 días E) 25 días

9. La rueda A de 50 dientes engrana con la B de 40 dientes. Fija al eje de B está la rueda C de 15 dientes, que engrana con la rueda D de 25 dientes. Si la rueda A da 120 RPM, ¿cuánto tiempo demora la rueda D en dar 9900 revoluciones?

A) 2 h
B) 1 h 30 min
C) 1 h 45 min
D) 1 h 15 min
E) 1 h 50 min

10. Un niño se demora 8 h en hacer con arena un cubo de 3 dm de arista. Habiendo avanzado la mitad de su trabajo se le pide que el cubo sea de 27 dm de arista. Si continúa trabajando durante 104 h más, ¿qué parte del nuevo cubo habrá construido?

A) 1/27　B) 1/32　C) 1/48
D) 1/54　E) 1/60

11. Doce obreros inicialmente pensaban en hacer una obra en N días. Después de haber realizado la mitad del obra, ocho de los obreros aumentaron su rendimiento un 25%, con lo cual el tiempo total del trabajo fue de 13 días. Halle el valor de N.

A) 12　B) 14　C) 15
D) 18　E) 16

12. Un grupo de 12 obreros puede hacer una obra en 28 días. El jefe de personal, queriendo que la obra se haga en 8 días menos, ofrece un incentivo a sus trabajadores; sin embargo, solo N de ellos aumentaron su rendimiento en 60%, pero aun así se logra terminar la obra en el tiempo deseado por el jefe. Halle el valor de N.

A) 4　B) 6　C) 8
D) 10　E) 12

13. Doce costureras pueden hacer un tejido en 23 días trabajando 3 horas por día, después de 5 días se retiran dos costureras y 6 días después se contratan N costureras adicionales para terminar a tiempo. Halle el valor de N.

A) 1　B) 2　C) 3
D) 4　E) 6

14. Una cuadrilla de 21 obreros puede terminar un trabajo en 30 días. Al cabo de 18 días de labor se retiran 10 de los obreros y 6 días más tarde se le comunica al contratista para que entregue el trabajo en la fecha fijada previamente. ¿Cuántos obreros adicionales tendrá que tomar para cumplir?

A) 20　B) 21　C) 22
D) 18　E) 24

15. Tres brigadas de obreros pueden hacer una zanja: la primera en 9 días, la segunda en 10 días y la tercera en 12 días. Si se emplea a la vez 1/4 de la primera, 1/3 de la segunda y 3/5 de la tercera, ¿en cuánto tiempo se haría la zanja?

A) 8 días
B) 9 días
C) 10 días
D) 12 días
E) 15 días

16. Un grupo de 36 hombres puede hacer una obra en 40 días trabajando 8 h/d. Luego de hacer 1/5 de la obra se aumenta en 4 el número de hombres trabajando todos a razón de 9 h/d durante 8 días, al término de los cuales se incrementa nuevamente en 4 el número de hombres, quienes trabajarán también 9 horas diarias y terminan la obra. ¿Cuál es el tiempo total que se emplea en hacer la obra?

A) 16 días B) 24 días C) 36 días
D) 32 días E) 48 días

17. Un pozo de 8 m de diámetro y 18 m de profundidad fue hecho por 30 obreros en 28 días. Se requiere aumentar en 2 m el radio del pozo y el trabajo será hecho por 14 hombres. ¿Cuánto tiempo demorarán?

A) 25 días B) 75 días C) 50 días
D) 60 días E) 70 días

18. Durante 20 días, 10 obreros han trabajado 3 h/d con 15 obreros que han trabajado 2 h/d, realizando 1/3 de una obra. ¿Cuántos obreros que trabajan 3 h/d se necesitarán para que, trabajando junto a 10 obreros que trabajan 2 h/d, culminen lo que falta de la obra en 30 días?

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

19. Cuatro soldados tienen víveres para 20 días, pero aumentaron dos soldados más y los víveres se terminaron 6 días antes. ¿Cuánto tiempo permanecieron los dos soldados?

A) 9 días B) 12 días C) 15 días
D) 18 días E) 16 días

20. Si m obreros pueden hacer una obra en a días, ¿cuántos obreros más serían necesarios para poder hacer dicha obra en b días menos?

A) $\frac{ma}{a-b}$ B) $\frac{ab}{a-b}$ C) $\frac{mb}{a-b}$
D) $\frac{a-b}{mb}$ E) $\frac{a-b}{ma}$

21. Un caño llena un lavadero en 6 min. ¿En cuánto tiempo se llenará el lavadero con otro caño 50% más eficiente?

A) 4 min B) 3 min C) 6 min
D) 8 min E) 5 min

NIVEL INTERMEDIO

22. Trabajando durante 10 horas diarias durante 15 días, 5 hornos consumen 50 toneladas de carbón. ¿Cuántas toneladas de carbón serían necesarias para mantener trabajando 3 hornos más 9 horas diarias durante 85 días?

A) 340 t
B) 372 t
C) 400 t
D) 360 t
E) 408 t

23. El transporte de 12 canastas de pescado en mototaxi a 40 km, pesando cada una 44 kg, ha costado S/.130. ¿A qué distancia se habrá transportado 15 canastas de 50 kg cada una, costando el transporte S/.162,5?

A) 36 km
B) 35,2 km
C) 28 km
D) 32 km
E) 40,6 km

24. Cuatro jardineros siembran 40 árboles alrededor de un terreno en forma de triángulo equilátero de 20 m de lado, en 3 días. ¿En qué tiempo dos jardineros sembrarán 50 árboles alrededor de un terreno circular de 80 m de perímetro, que es el doble de duro que el primero?

A) 20 días B) 24 días C) 28 días
D) 32 días E) 36 días

25. Una cuadrilla de 15 hombres se compromete a terminar en 14 días cierta obra. Al cabo de 9 días solo han hecho los 3/7 de la obra. ¿Con cuántos hombres tendrán que ser reforzados para terminar la obra en el plazo fijado?

A) 18 B) 20 C) 24
D) 21 E) 16

26. Un grupo de obreros puede terminar una obra en 20 días trabajando 8 horas diarias. Al final del octavo día se retiran ocho de los obreros y 4 días más tarde se conmina al contratista a entregar la obra en el plazo fijado previamente. ¿Cuántos obreros más se deberán contratar para cumplir con tal exigencia?

A) 9 B) 12 C) 10
D) 15 E) 16

27. Wálter contrata $2N$ obreros para construir su casa y a partir del segundo día despide 2 obreros cada día; por suerte, se terminó de construir la casa un día jueves, porque si seguía con esa actitud, el viernes se quedaba sin obreros. Halle N sabiendo que si hubiesen trabajado N obreros sin despido alguno, terminarían la obra en 20 días.

A) 16 B) 18 C) 19
D) 21 E) 24

28. Una brigada de obreros se compromete a construir un puente, y faltando 30 días para culminar la obra, 4 de los obreros se retiran y no son reemplazados hasta dentro de 10 días. ¿Cuántos obreros se contrataron para reemplazarlos si se terminó la obra en el plazo establecido?

A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

29. Un ganadero tiene 420 ovejas que puede alimentar durante 80 días. Después de x días vende 70 ovejas y los alimentos duran 12 días más de lo que iban a durar. Halle x.

A) 20 B) 22 C) 24
D) 18 E) 16

30. Se hacen disolver 240 g de azúcar en 5 L de agua. ¿Cuántos litros de agua deberán añadirse a esta mezcla para que 1 L de la misma tenga solo 8 g de azúcar?

A) 20 B) 25 C) 24
D) 28 E) 32

31. Una rueda de 13 dientes está engranada con otra de 39 dientes. ¿Cuántas vueltas dará en 3 min la pequeña si la grande da 8 vueltas en 1 min?

A) 64 B) 70 C) 76
D) 72 E) 48

32. Se contratan cinco artesanos que hacen 12 chompas en 15 días. Se pretende tener 60 chompas en 25 días. ¿Cuántos artesanos doblemente rápidos se deben contratar, además de los ya contratados?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

33. Veinte hombres se comprometen en hacer una obra de 800 m^2 en 10 días. Al cabo del cuarto día se les comunica que en realidad la obra era de 1000 m^2 y deben acabarla un día antes de lo establecido. ¿Cuántos obreros de la misma capacidad deben ser contratados?

A) 16 B) 20 C) 14
D) 15 E) 18

34. Quince obreros se comprometen a realizar una obra en 25 días trabajando 8 h/d. Al cabo del quinto día se les pidió que entreguen la obra 5 días antes de lo pactado; razón por la cual deciden trabajar 10 h/d y contratar más obreros. ¿Cuántos obreros más tuvieron que contratar?

A) 1 B) 3 C) 7
D) 8 E) 16

35. Un pozo de 6 m de diámetro y 15 m de profundidad fue cavado por 18 hombres en 25 días. Se quiere aumentar el radio a 4 m. Habiéndose despedido a cuatro obreros, ¿cuánto tiempo demoraron los restantes en culminar el trabajo?

A) 18 días B) 20 días C) 21 días
D) 24 días E) 25 días

36. Una obra puede ser realizada por 40 obreros durante 20 días a razón de 6 h/d. Cuando había pasado 6 días de iniciada, 10 obreros se retiraron y luego de 4 días se contrataron N obreros; a partir de ese momento todos trabajaron 8 h/d. Halle N si el trabajo se entregó con 5 días de anticipación.

A) 1350 B) 38 C) 40
D) 1800 E) 36

37. Se sabe que 40 obreros pueden hacer 10 000 camisas en un mes. Si se les hace un pedido de 18 000 camisas para que sea entregado en un mes, ¿cuántos obreros más hay que contratar si estos trabajan al 80% de rendimiento de los anteriores?

A) 25 B) 35 C) 30
D) 40 E) 38

38. Se sabe que 25 hombres pueden hacer una obra de 800 m trabajando 25 días, 8 horas diarias. Determine cuántos metros podrán hacer 5 obreros menos trabajando 25% menos de horas al día durante 5 días menos.

A) 324 B) 360 C) 384
D) 420 E) 560

39. Cuatro obreros pintan una pared de 80 m de largo y 4 m de altura en 3 días trabajando 6 h/d. ¿Cuántos obreros harán falta para pintar una pared de 200 m de largo y 5 m de altura, si estos son tres veces más eficientes, la obra es tres veces más difícil que la anterior y disponen de 9 días de 5 h/d de trabajo?

A) 2 B) 5 C) 8
D) 10 E) 15

40. Una obra puede concluirse con 28 obreros en cierto tiempo. ¿Cuántos obreros se necesitarán aumentar para hacer 1/4 de la obra en un tiempo igual a 2/7 del anterior trabajando la mitad de horas diarias?

A) 18 B) 21 C) 22
D) 24 E) 23

Fracciones

Capítulo XVI

OBJETIVOS

- Esclarecer y profundizar el concepto de fracciones dentro del campo de los números racionales.
- Potenciar el manejo adecuado de una fracción como expresión de comparación de dos cantidades.
- Desarrollar la habilidad y la destreza en el manejo de fracciones en la solución de problemas usando el artificio de partir a un todo (entero) en forma de fracciones.

El concepto de fracciones se maneja desde hace muchos siglos atrás, pero debido a su ligero manejo, se toman conceptos alejados de lo real. Nos corresponde entonces esclarecer dichos conceptos y criterios un tanto errados, manejando, por supuesto, las experiencias que afrontamos a diario, como por ejemplo cuando indicamos la hora (10 1/4 h) o cuando adquirimos en el mercado 3/4 kg de arroz y nos cobran por ese producto S/.1,50.

Nociones previas

NÚMERO RACIONAL

Es aquel que está representado por una división indicada de dos números enteros, donde el entero que hace de divisor es diferente de cero. Los números racionales forman el conjunto de los números racionales (Q).

NOTA

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\Big/ a\in\mathbb{Z} \wedge b\in\mathbb{Z}-\{0\}\right\}$$

Al conjunto de los números enteros que excluye el cero se le denota $\mathbb{Z}$.

9/7, −3/4, 5, 12/15, 0/9, 1/2, 1/10, 12/1 . . .

Números racionales (Q)

$\sqrt{2}/2$, $\pi/3$, $\sqrt{4}/\sqrt{5}$, 4/0, $\sqrt{8}$ . . .

Números irracionales (Q')

Fracción

Se denomina así a todos los números racionales que cumplen las siguientes condiciones:

$$\text{Fracción: } \frac{a}{b} \quad \begin{matrix} a \to \text{numerador} \\ b \to \text{denominador} \end{matrix}$$

Donde

- a y $b \in \mathbb{Z}^+$
- $a \neq \overset{o}{b}$

Ejemplo

Identifique cuáles de las siguientes expresiones representan a una fracción.

$$\frac{2}{5};\ \frac{3}{-5};\ \frac{-2}{7};\ \frac{\sqrt{2}}{5};\ \frac{1}{1};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{5}{5};\ \frac{5}{4};\ \frac{1/2}{4};\ \frac{1/3}{2/5}$$

Respuesta: $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{4}$

Representación gráfica de una fracción

Para representar gráficamente a una fracción consideremos lo siguiente:

$$F: \frac{a}{b}$$

$a \rightarrow$ n.º de partes iguales que se consideran

$b \rightarrow$ n.º de partes iguales en que se divide la unidad

La unidad es la totalidad de una cantidad referencial.

Ejemplo 1

3 partes iguales

$F: \frac{3}{5} \Rightarrow$

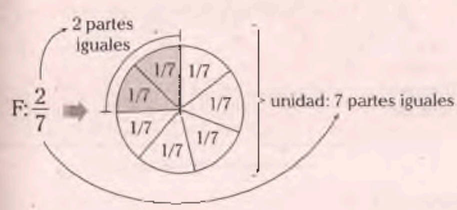
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

5 partes iguales

> **Nota**
> unidad <> 5 partes iguales

Ejemplo 2

$F: \frac{2}{7} \Rightarrow$



> **Nota**
> Para graficar una fracción en la cual el numerador es mayor que el denominador, es necesario considerar la unidad varias veces.

	unidad (1)			unidad (1)			1/3		
$\frac{7}{3} \Rightarrow$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\frac{7}{3} <> 2\frac{1}{3}$ número mixto {consta de una parte entera y una parte fraccionaria}

Principales tipos de fracciones

Fracción propia

Es aquella en la cual el numerador es menor que el denominador. Al hacer la división correspondiente, el resultado es menor que la unidad.

$$F: \frac{a}{b} \rightarrow a < b$$

Ejemplos

5/9; 3/11; 1/20; 8/14...

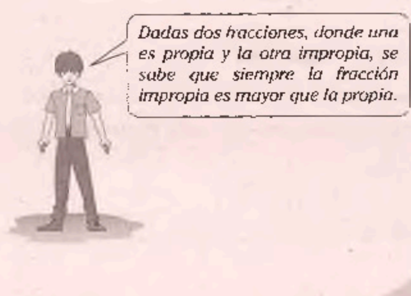
Fracción impropia

Es aquella en la cual el numerador es mayor que el denominador. Al hacer la división correspondiente, el resultado es mayor que la unidad.

$$F: \frac{a}{b} \rightarrow a > b$$

Ejemplos

7/2; 16/12; 21/5; 15/4...



$$(\text{FP})\ \frac{2}{5} < \frac{3}{2}\ (\text{FI})$$

$$(\text{FI})\ \frac{110}{100} > \frac{100}{110}\ (\text{FP})$$

$$(\text{FP})\ \frac{40}{41} < \frac{41}{40}\ (\text{FI})$$

$$(\text{FP})\ \frac{1234\,567}{1234\,568} < \frac{43\,211}{43\,210}\ (\text{FI})$$

NOTA

Cuando dos fracciones poseen la misma característica, entonces para compararlas pueden multiplicarse en aspa.

Ejemplo

¿Cuál es mayor: $\frac{5}{8}$ o $\frac{3}{5}$?

Multiplicación en aspa

$$\begin{matrix} 25 & > & 24 \\ \frac{5}{8} & \times & \frac{3}{5} \end{matrix}$$

Luego $\frac{5}{8} > \frac{3}{5}$

Fracción reductible

Su numerador y su denominador poseen factores en común (no son primos entre sí).

Ejemplos

$$\frac{3}{6};\ \frac{20}{18};\ \frac{100}{10\,002};\ \frac{6}{10}$$

Fracción irreductible

Su numerador y su denominador no poseen factores en común (son primos entre sí).

Ejemplos

$$\frac{3}{5};\ \frac{7}{2};\ \frac{4}{9};\ \frac{21}{101}$$

Fracciones homogéneas

Es un conjunto de fracciones que tienen igual denominador.

Ejemplos

$$\frac{3}{7};\ \frac{5}{7};\ \frac{1}{7};\ \frac{101}{7}$$

Fracciones heterogéneas

Es un conjunto de fracciones que tienen diferente denominador.

Ejemplos

$$\frac{3}{5};\ \frac{4}{9};\ \frac{2}{8};\ \frac{3}{6};\ \frac{4}{10}$$

Fracciones equivalentes

Son aquellas fracciones que utilizando términos diferentes expresan una misma parte de la unidad.

$$\frac{1}{2} <> \frac{2}{4} <> \frac{4}{8}$$

NOTA

Las tres fracciones representadas expresan la mitad del todo.

Luego, también podemos notar que

$$\frac{3}{5} <> \frac{6}{10} <> \frac{9}{15} <> \frac{12}{20} <> \dots <> \frac{3K}{5K}$$

×2 ×3 ×4 ×K

fracción canónica (fracción irreductible)

fracciones equivalentes a 3/5

Donde $K \in \mathbb{Z}^+$

Problemas Resueltos

Problema N.º 1

Halle la fracción propia e irreductible cuya suma de términos sea 14, si el doble del numerador es mayor que el denominador.

Resolución

Sea la fracción propia e irreductible $\frac{a}{b}$.

Donde $a < b$; además, a y b no tienen factores comunes (son PESI).

Por dato

$$a+b=14$$
$$2a > b$$

$$\begin{array}{ccll}
\downarrow & \downarrow & & \\
5 & 9 & \checkmark & \\
6 & 8 & \times & \multirow{2}{*}{\Big\}\ \text{no son PESI}} \\
7 & 7 & \times & \\
8 & 6 & \times & (a>b) \\
\vdots & \vdots & &
\end{array}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{5}{9}$$

Problema N.º 2

Halle la fracción equivalente a $\frac{21}{9}$, si la diferencia de sus términos es 36. Dé como respuesta la suma de términos.

Resolución

Por ser una fracción equivalente a $\frac{21}{9}$ la denotaremos como $\frac{21K}{9K}$

Por dato

$$21K-9K=36$$
$$12K=36$$
$$K=3$$

$$\therefore\quad 21K+9K=30K=90$$

Problema N.º 3

De un grupo de postulantes, ingresan a la universidad $\frac{3}{4}$ de los que no ingresan. ¿Qué parte de los postulantes ingresan?

Resolución

De los datos

$$(\text{ingresan})=\frac{3}{4}(\text{no ingresan})$$

$$\frac{(\text{ingresan})}{(\text{no ingresan})}=\frac{3}{4}$$

Observamos que el total es como 7, entonces ingresan 3 de 7

$$\therefore\quad (\text{ingresan})=\frac{3}{7}\begin{pmatrix}\text{total de}\\ \text{postulantes}\end{pmatrix}$$

Problema N.º 4

Una persona que tenía S/.480 pierde y gana alternadamente en cinco juegos: $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5}$ y $\frac{3}{8}$ de lo que le iba quedando. ¿Cuánto dinero le quedó al final?

Resolución

Analizaremos cuánto va quedando luego de cada juego.

$$\overbrace{\frac{\cancel{5}}{8}}^{\text{pierde } \frac{3}{8}} \times \underbrace{\frac{9}{\cancel{5}}}_{\text{gana } \frac{4}{5}} \times \overbrace{\frac{5}{\cancel{7}}}^{\text{pierde } \frac{2}{7}} \times \underbrace{\frac{\cancel{7}}{4}}_{\text{gana } \frac{3}{4}} \times \overbrace{\frac{2}{3}}^{\text{pierde } \frac{1}{3}} \times 480$$

$$\frac{9\times 5\times 2}{8\times 4\times 3}\times 480$$

$$\frac{90}{\cancel{96}}\times \overset{5}{\cancel{480}}$$

Por lo tanto, le quedó S/.450.

Problema N.º 5

Un albañil puede construir una casa en 20 días, pero con la ayuda de su hijo puede construirla en 15 días. Si el hijo trabajara solo, ¿en cuántos días construirá la misma casa?

UNMSM 2009-I

Resolución

Sea x el número de días que tarda el hijo en construir la casa. Se cumple

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}$$

Por lo tanto, al resolver, obtenemos $x=60$.

Otra forma

En algunos problemas, resulta operativo y engorroso resolver ecuaciones de este tipo. Podemos proceder del siguiente modo: hacemos que la construcción de la casa (obra) sea MCM (20; 15)=60.

Luego planteamos

		Tiempo	Obra	
albañil e hijo	:	15 días	60	(I)
albañil	:	20 días	60	(II)
De (I) albañil e hijo:		1 día	4	(–)
De (II) albañil	:	1 día	3	
→ hijo	:	1 día	1	

Pero la obra equivale a 60. Por lo tanto, le tardaría al hijo 60 días construir la casa.

Problema N.º 6

El doble de mi edad aumentado en su mitad, en sus 3/5, en sus 7/10 y en 10 suman 124 años. ¿Cuántos años tengo?

Resolución

Asignamos convenientemente un valor a la edad.

Sea mi edad $10K$.

Por dato

$$2(10K)+\frac{1}{2}(10K)+\frac{3}{5}(10K)+\frac{7}{10}(10K)+10=124$$

$$20K+5K+6K+7K+10=124$$

$$38K=114$$

$$K=3$$

Por lo tanto, mi edad es $10K=30$ años.

Problema N.º 7

En una reunión, la cuarta parte de asistentes provenían de África; la mitad, de Asia; la sexta parte, de Oceanía, y la dieciochava parte, de Europa. Finalmente, se observaron 36 americanos en dicha reunión. Halle el total de asistentes.

Resolución

Asignamos por conveniencia un valor al número de asistentes.

Sea el número de asistentes $36K$.

Por dato

$$\overbrace{\frac{1}{4}(36K)}^{\text{África}}+\overbrace{\frac{1}{2}(36K)}^{\text{Asia}}+\overbrace{\frac{1}{6}(36K)}^{\text{Oceanía}}+\overbrace{\frac{1}{18}(36K)}^{\text{Europa}}+\overbrace{36}^{\text{América}}=\overbrace{36K}^{\text{n.º total de asistentes}}$$

$$\rightarrow\quad 9K+18K+6K+2K+36=36K$$

$$35K+36=36K$$

$$36=K$$

Por lo tanto, el total de asistentes es $36K=1296$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Halle el número que aumentado en $3\frac{1}{4}$ nos da un resultado igual al que se obtiene si lo dividimos por $\frac{4}{11}$. Dé como respuesta los $\frac{14}{13}$ del número.

A) 13 B) 2 C) 3
D) 7 E) 4

2. Los 4/6 de lo tuyo es lo de ella y los 9/12 de lo de ella es lo mío. ¿Qué parte de lo tuyo es lo mío?

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/3
D) 2/3 E) 3/5

3. Durante los 7/9 de un día se consume los 14/27 de la carga de una batería. ¿En cuánto tiempo se consume la mitad de la carga?

A) 3/4 día
B) 1/2 día
C) 2/3 día
D) 3/5 día
E) 1/3 día

4. Jorge tiene cierto número de gallinas. Al ser víctima de un robo pierde 2/9 del total, menos 5 gallinas. Por otro lado, compra 37 gallinas y se percata que el número primitivo quedó aumentado en 1/6. ¿Cuántas gallinas le robaron?

A) 15 B) 16 C) 17
D) 19 E) 20

5. Se reparte cierta cantidad de dinero entre tres personas, recibiendo la primera los 5/7 de lo que recibió la segunda, y la tercera 1/18 menos de lo que recibieron las dos primeras personas. Siendo esta suma igual a la mitad del total disminuido en S/.20, halle dicha cantidad.

A) S/.1000
B) S/.1400
C) S/.1200
D) S/.1500
E) S/.1600

6. José tenía cierta cantidad de dinero, luego gastó 1/2 de lo que no gastó; después no regaló 1/3 de lo que regaló. Finalmente pagó una deuda de S/.50 y le quedó S/.30. ¿Cuánto tenía al inicio?

A) S/.320 B) S/.360 C) S/.400
D) S/.440 E) S/.480

7. En un recipiente lleno se tiene una mezcla de 20 L de agua con 30 L de vino. Si se extrae 1/3 del contenido y se vuelve a llenar con agua y finalmente se extrae 1/5 del contenido y se llena con agua, ¿cuántos litros de vino quedan finalmente y qué cantidad de vino contiene 1 L de esta mezcla?

A) 16; $\frac{8}{25}$ B) 8; $\frac{16}{25}$ C) 25; $\frac{8}{50}$
D) 34; $\frac{16}{50}$ E) 16; $\frac{16}{25}$

8. Los $\frac{2}{3}$ de los profesores de un colegio son mujeres y 12 de los varones son solteros, mientras que los 3/5 de los profesores hombres son casados. El número total de profesores en este colegio es

A) 50. B) 60. C) 80.
D) 120. E) 90.

9. Un fabricante vende a un comerciante los 11/15 de una pieza de tela a S/.30 el metro, con la condición de admitirle los metros que no pudiera vender. El comerciante vende a S/.7140 los 20/21 de la tela que compró, obteniendo una ganancia de S/.210 más el importe de los metros sobrantes que devolvió. Halle la ganancia total del comerciante.

A) S/.480 B) S/.540 C) S/.600
D) S/.640 E) S/.720

10. Los obreros A y B pueden hacer una obra en 6 días; B y C, en 4 días, y A y C harían la misma obra en 3 días. ¿En qué tiempo haría la obra C solo?

A) 4,5 días
B) 5,4 días
C) 5,5 días
D) 4,8 días
E) 4,2 días

11. El obrero A puede hacer un trabajo en 10 días, B puede hacerlo en 12 días, y C, en 15 días. El primer día A solo inicia el trabajo; el tercer día se le une B; luego en el sexto día se les une C y trabajan los tres hasta terminar la obra. ¿Cuántos días demora la obra?

A) 4 B) 6 C) 5
D) 8 E) 12

12. Un recipiente que contiene vino no está lleno 2/5 de lo que está lleno; después se extrae 2/3 de lo que no se extrae. Luego, no se elimina 1/3 de lo que se elimina. ¿Qué fracción de lo que había inicialmente quedó con vino?

A) 7/20 B) 3/10 C) 3/20
D) 3/15 E) 7/10

13. Un grifo puede llenar un estanque en 8 horas y otro en 12 horas; mientras que un tubo de desagüe lo vacía en 15 horas. Cuando el tanque está lleno hasta 1/3 de su altura, se abren los dos grifos y el desagüe durante 1 hora. ¿Qué fracción del depósito quedará al final sin llenar?

A) 21/40 B) 19/40 C) 17/40
D) 39/80 E) 37/80

14. Una persona gasta su dinero de la siguiente manera: los 2/3 en alimentos, los 3/7 del resto en pasajes, los 8/35 en ropa, y lo que queda, que es S/.54, los ahorra. Determine qué cantidad de su dinero destina para los alimentos.

A) S/.247 B) S/.245 C) S/.250
D) S/.232 E) S/.244

15. Tengo un vaso lleno de vino, bebo la sexta parte; luego bebo 1/4 de lo que queda. ¿Qué fracción de lo que queda debo volver a beber para que aún sobre los 3/8 del vaso?

A) 3/5 B) 2/5 C) 1/5
D) 4/5 E) 5/8

16. Alonso compra vasos: la tercera parte a 4 por S/.6, la mitad a 6 por S/.7 y el resto a 3 por S/.4. Vende los 2/3 a 3 por S/.5 y los demás a 6 por S/.9. Si gana en total S/.110, ¿qué número de vasos vendió?

A) 220 B) 240 C) 360
D) 320 E) 480

17. El grosor de una varilla de acero es 11/16 de pulgada. El diseñador dice que la varilla es 3/8 de pulgada más gruesa que la que él diseñó. ¿Cual es el grosor de la varilla original?

A) 5/16 pulgadas
B) 7/16 pulgadas
C) 9/16 pulgadas
D) 11/16 pulgadas
E) 13/16 pulgadas

18. Restar 1/3 de 1/2, 1/4 de 1/3 y 1/5 de 1/4; sumar las diferencias; multiplicar las mismas; dividir la suma por el producto; hallar la tercera parte del cociente y extraer la raíz cuadrada del resultado. Entonces se obtiene

A) 8. B) 9. C) 10.
D) 12. E) 7.

NIVEL INTERMEDIO

19. Los 3/8 de un poste están pintados de rojo; 3/5 del resto, de blanco, y lo que queda, de azul. ¿Cuál es la altura del poste, si dos metros están pintados de azul?

A) 8 m B) 9 m C) 10 m
D) 5 m E) 16 m

20. ¿Cuánto le debemos quitar a los 2/3 de los 5/7 de los 6/5 de los 3/4 de 21 para que sea igual a la mitad de 1/3 de 2/5 de 3/4 de 140?

A) $\frac{7}{10}$ B) $\frac{9}{10}$ C) 1

D) 2 E) $\frac{1}{2}$

21. Édgar va de compras con cierta cantidad de dinero. En su primera compra gastó 1/5 de lo que tenía, más S/.8; en su segunda compra gastó 1/4 de lo que le quedaba, más S/.3; en la última compra gastó 1/3 del resto, más S/.6. Luego, con S/.5, pagó el taxi y llegó a casa con solo S/.7. ¿Cuánto dinero tenía al inicio?

A) S/.60 B) S/.40 C) S/.48
D) S/.36 E) S/.72

22. Un granjero reparte sus gallinas entre sus cuatro hijos. El primero recibe la mitad de las gallinas; el segundo, la cuarta parte; el tercero, la quinta parte, y el cuarto, las siete restantes. ¿Cuántas fueron las gallinas repartidas?

A) 120 B) 130 C) 140
D) 150 E) 145

23. Los 3/4 de un barril más 7 L son de agua, y 1/3 menos 20 L son de vino. Si se saca 39 L de la mezcla, ¿cuál es la diferencia de los volúmenes que quedan de agua y de vino, respectivamente?

A) 60 B) 69 C) 72
D) 80 E) 71

24. Un depósito contiene 75 L de alcohol puro, del cual se extrae 1/3 de su contenido y se reemplaza por agua; enseguida se extrae 1/5 de la mezcla y también se reemplaza por agua, y por último se extrae 1/4 de la nueva mezcla y también se reemplaza por agua. ¿Qué relación de alcohol puro y agua queda en el depósito?

A) 2/3 B) 3/4 C) 4/5
D) 3/5 E) 1/2

25. Un grifo puede llenar un estanque vacío en 8 h y otro grifo demoraría 12 h, mientras que una llave de desagüe puede retirar todo el contenido en 6 h. Cuando el estanque está lleno hasta los 15/160 de su capacidad se abre el primer grifo; 2 h después, el segundo; 1 h después, el desagüe, y luego de un tiempo se cierran las tres llaves quedando vacío 1/8 del tanque. ¿Qué tiempo funcionó el primer grifo?

A) 7 h 45 min
B) 7 h 15 min
C) 8 h 45 min
D) 9 h 45 min
E) 10 h 45 min

26. Una tela, al lavarse, se encoge 1/3 de su longitud y se estira su ancho 1/5. ¿Cuántos metros deben comprarse para que después de lavada se disponga de 240 m^2, sabiendo que el ancho original es de 5 m?

A) 6 m B) 60 m C) 36 m
D) 40 m E) 4 m

27. Lucía va al mercado y gasta 2/5 de lo que no gasta; luego pierde 1/4 de lo que no pierde. Si al final regala 2/3 de lo que no regala y le queda aún S/.24, ¿cuántos soles gastó Lucía?

A) 36 B) 24 C) 46
D) 20 E) 70

28. El tiempo máximo que debe tardarse en resolver este problema se descompone del modo siguiente: 1/25 del total en leerlo, 1/4 en plantearlo, 41/100 en resolverlo, y minuto y medio en comprobarlo. Si se cumplen estas condiciones, ¿qué tiempo tardaría, como máximo, en resolver este problema?

A) 3 min B) 5 min C) 8 min
D) 2 min E) 6 min

29. Una persona gana y pierde alternadamente de la siguiente forma: $\frac{1}{5}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; ...$ (fracción del dinero en cada juego). Si después de 15 jugadas sucesivas la persona termina con S/.48, ¿cuánto tenía al inicio?

A) S/.150 B) S/.120 C) S/.75
D) S/.60 E) S/.96

30. En un tanque se conectaron 2 caños, uno en el fondo y el otro a media altura. El primero puede vaciar el tanque en 9 h y el otro, en ese mismo tiempo, puede vaciar el contenido sobre él. ¿En cuántas horas quedará vacío dicho tanque si se abren los 2 caños simultáneamente, estando el tanque lleno?

A) 7,5 B) 6 C) 12
D) 9 E) 8

31. Cuatro hermanos desean comprar cada uno una radio de S/.190, para lo cual empiezan a ahorrar. Cierto día notan que lo que le falta a cada uno para comprarla es los $\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$ y $\frac{6}{7}$ de lo que ya tienen ahorrado sus hermanos. ¿Cuánto le falta para comprar la radio al que ha ahorrado más?

A) S/.100 B) S/.90 C) S/.70
D) S/.60 E) S/.114

32. Tres grifos: A, B y C pueden llenar un reservorio en 60 h, 48 h y 80 h, respectivamente. Si está vacío el recipiente y se abren los grifos A, B y C, en ese orden, con intervalos de 4 h (se abre un grifo y están cerrados los otros dos), ¿en cuántas horas podrán llenar todo el reservorio?

A) 85 h 30 min
B) 76 h
C) 64 h
D) 48 h 30 min
E) 60 h

33. Hubert tiene cierta cantidad de canicas; en el primer juego pierde 2/5 del total, en el segundo gana 1/9 del resto, en el tercer juego pierde 3/4 de lo que tenía, y en el cuarto juego gana una cantidad igual al último resto, quedándose únicamente con 50 canicas. ¿Cuántas canicas tenía Hubert al iniciar el juego?

A) 100 B) 120 C) 180
D) 200 E) 150

34. Una piscina está llena hasta sus 2/3 partes. Si se sacaran 2100 L, quedaría llena sus 3/8 partes. ¿Cuántos litros faltan para llenarla?

A) 2200 B) 2400 C) 2440
D) 4500 E) 3600

35. Un vagón lleno de arena pesa 26 toneladas, y lleno hasta sus 2/5 partes pesa los 5/4 del peso del vagón vacío. ¿Cuál es el peso del vagón vacío?

A) 15 toneladas
B) 16 toneladas
C) 17 toneladas
D) 13 toneladas
E) 20 toneladas

36. Dos grifos: A y B llenan juntos un depósito vacío en 30 h. Si el grifo B fuese de desagüe, se tardaría en llenar el depósito 60 h. ¿En cuánto tiempo llenaría el grifo A, estando el tanque vacío?

A) 44 h B) 50 h C) 40 h
D) 42 h E) 54 h

37. Dos botellas de igual volumen se llenan con una solución de agua y ácido. Las razones de los volúmenes de agua a ácido en cada botella son 2 a 1 y 4 a 1, respectivamente. Si vertimos el contenido de ambas botellas en una más grande, la razón de agua a ácido será igual a

A) 3 a 1. B) 6 a 1. C) 8 a 1.
D) 5 a 1. E) 11 a 4.

38. Un obrero A se demora en hacer la mitad de una obra tanto como otro obrero B se demora en hacer los 5/6 de la misma obra. ¿Cuánto se demora A en hacer la obra solo, si entre los dos tardarían 15 días?

A) 20 días B) 24 días C) 36 días
D) 42 días E) 40 días

39. Jeremy compra cierto número de naranjas; la mitad del total a 5 por S/.6 y la otra mitad a 6 por S/.7. Luego vende los 3/5 del total a 3 por S/.5 y las restantes a 4 por S/.7. Si ganó en total S/.1085, ¿cuántas naranjas compró?

A) 2100 B) 2400 C) 2200
D) 1800 E) 1600

Tanto por cuanto

Capítulo XVII

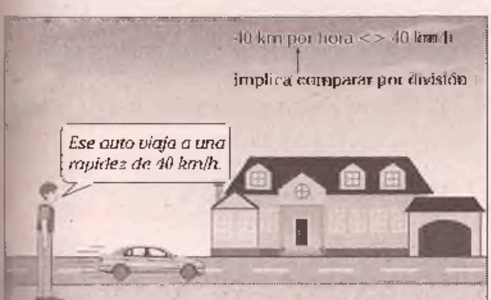
Objetivos

- Utilizar el concepto de porcentaje como una forma de comparación.
- Analizar la aplicación del concepto de porcentaje en las actividades cotidianas.
- Descubrir métodos prácticos en las aplicaciones del concepto de porcentaje.

Por muchos años, al desarrollar las actividades, principalmente comerciales, se utilizaron formas abreviadas de expresar una comparación o relación de cantidades, especialmente en la comparación respecto de 100 unidades. Es así que interviene y aparece el concepto de porcentaje o tanto por ciento, teniendo hoy en día una amplia aplicación. Por ejemplo, como una forma de medir el alza en el costo de vida (incremento de la inflación en 20%), en los aumentos y los descuentos porcentuales en ciertos negocios, en las variaciones de dimensiones (espacio, tiempo, etc.).

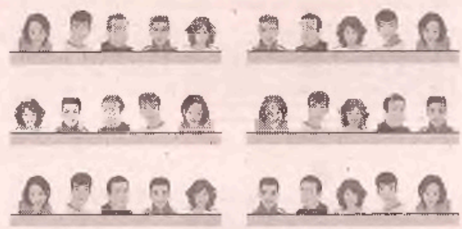
Comencemos a desarrollar uno de los conceptos matemáticos de mayor aplicación en nuestra actividades diarias.

Regla del tanto por cuanto



Ejemplo

ACADEMIA ADUNI

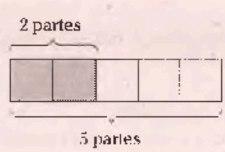


En una de las aulas de la academia Aduni se observa que en cada carpeta:
2 de cada 5 alumnos son mujeres.

<> el 2 por 5 de los alumnos son mujeres

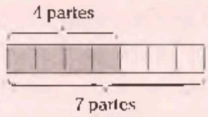
<> $\frac{2}{5}$ (alumnos) son mujeres.

En consecuencia, el enunciado **el 2 por 5** equivale a la fracción $\frac{2}{5}$ y su gráfico es

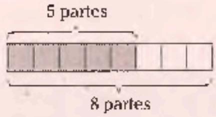


Luego, también se da que

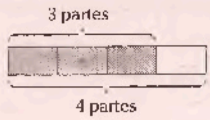
- El 4 por 7 < > $\frac{4}{7}$ ➠



- El 5 por 8 < > $\frac{5}{8}$ ➠



- El 3 por 4 < > $\frac{3}{4}$ ➠



En general, si tuviéramos una cantidad dividida en n partes iguales y tomáramos m de sus partes:

$$\text{El } \underbrace{m}_{\text{tanto}} \text{ por } \underbrace{n}_{\text{cuanto}} < > \frac{m}{n}$$

entonces

- El 40 por 50 < > $\frac{40}{50}$
- El 35 por 200 < > $\frac{35}{200}$
- El 300 por 1000 < > $\frac{300}{1000}$

NOTA

El tanto por mil < > el tanto ‰.

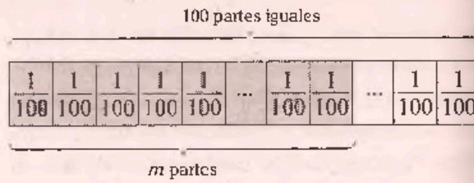
Ejemplo

El 40 por mil < > 40‰.

En resumen, el **tanto por cuanto** o **tanto por n** es el número de partes iguales (tanto) que se toma de una cantidad total (llamado cuanto) dividido en n partes iguales. Un caso particular se da cuando el cuanto (la unidad o cantidad total) se divide en 100 partes iguales, denominándose a este caso como el tanto por ciento.

Regla del tanto por ciento

Es el número de partes iguales que se toman de una cantidad total (unidad) dividida en 100 partes iguales.



$$\text{El } m \underbrace{\text{por ciento}}_{\%}$$

$$< > \text{ El } m\% < > \frac{m}{100}$$

Ejemplos

- El 4 por ciento <> 4% < > $\frac{4}{100}$
- El 25 por ciento <> 25% < > $\frac{25}{100}$
- El 108 por ciento <> 108% < > $\frac{108}{100}$
- El 0,5 por ciento < > 0,5% < > $\frac{0,5}{100}$
- El x^2 por ciento <> $(x^2)\%$ < > $\frac{x^2}{100}$

EQUIVALENCIAS

- $1\% <> \dfrac{1}{100}$
- $2\% <> \dfrac{1}{50}$
- $4\% <> \dfrac{1}{25}$
- $5\% <> \dfrac{1}{20}$
- $10\% <> \dfrac{1}{10}$
- $20\% <> \dfrac{1}{5}$
- $25\% <> \dfrac{1}{4}$
- $50\% <> \dfrac{1}{2}$
- $75\% <> \dfrac{3}{4}$
- $\boxed{100\% <> 1}$

El todo representa a la unidad y como tal equivale al 100%

Luego, podemos convertir

- $\dfrac{3}{5} <> \dfrac{3}{5}(1) <> \dfrac{3}{5}(100\%) <> 60\%$
- $\dfrac{7}{25} <> \dfrac{7}{25}(1) <> \dfrac{7}{25}(100\%) <> 28\%$
- $\dfrac{1}{3} <> \dfrac{1}{3}(1) <> \dfrac{1}{3}(100\%) <> 33,3\%$
- $0,35 <> 0,35(1) <> 0,35(100\%) <> 35\%$
- $0,02 <> 0,02(1) <> 0,02(100\%) <> 2\%$

$$\boxed{N <> (1)\times N <> 100\%\,N}$$

NOTA

Toda cantidad representa el 100% respecto de sí misma.

Aplicación del tanto por ciento

$$\boxed{\text{El } a\% \text{ de } b = \frac{a}{100}\times b}$$

Ejemplos

- El 20% de 200 $= \dfrac{20}{100}(200) = 40$
- El 35% de 1000 $= \dfrac{35}{100}(1000) = 350$
- El 5% de 40 $= \dfrac{5}{100}(40) = 2$
- 14% de 80 $= \dfrac{14}{100}(80) = 11,2$
- El 20% del 40% de 900 $= \dfrac{20}{100}\times\dfrac{40}{100}\times 900 = 72$
- El 4 por 5 del 50 por 10 de

  $60 = \dfrac{4}{5}\times\dfrac{50}{10}\times 60 = 240$

OPERACIONES CON EL TANTO POR CIENTO

Es posible operar aritméticamente mediante la adición y la sustracción cuando los porcentajes a operarse están referidos a las mismas cantidades.

Ejemplos

- $40\%M + 22\%M = 62\%M$
- $25\%M - 10\%M = 15\%M$
- $\underbrace{M}_{100\%M} + 25\%M = 125\%M$
- $\underbrace{M}_{100\%M} - 48\%M = 52\%M$
- $30\%x + 20\%y$ (no se puede)
- $25\%A + \underbrace{\dfrac{3}{5}A}_{60\%A} - \underbrace{\dfrac{1}{2}A}_{50\%A} = 35\%A$
- $\underbrace{40\%M}_{100\%(40\%M)} + 20\%(40\%M) = 120\%(40\%M)$

Relación parte-todo

Para expresar en porcentaje una comparación parte-todo, basta multiplicarle por 100%, es decir

$$\frac{\text{lo que hace de parte}}{\text{lo que hace de todo}}\times 100\%$$

Ejemplos

- ¿Qué tanto por ciento respecto de 40 es 30?

  $\frac{30}{40}\times 100\% = 75\%$

- ¿Qué tanto por ciento representa 80 respecto de 50?

  $\frac{80}{50}\times 100\% = 160\%$

- ¿Qué porcentaje de 28 es 7?

  $\frac{7}{28}\times 100\% = 25\%$

- ¿Qué porcentaje de A es B?

  $\frac{B}{A}\times 100\%$

- ¿Qué porcentaje más representa 60 respecto de 40?

  Primero averiguamos el porcentaje que representa

  $\frac{60}{40}\times 100\% = 150\%$

  Por lo tanto, el porcentaje demás es

  150%–100%=50%.

- ¿Qué porcentaje menor representa 32 respecto de 40?

  Primero averiguamos el porcentaje que representa

  $\frac{32}{40}\times 100\% = 80\%$

  Por lo tanto, el porcentaje menor es

  100%–80%=20%

Ganancias y pérdidas

Respecto de una cantidad asumida como el 100%

Saco o pierdo	Queda
10%	90%
20%	80%
0,5%	99,5%
13%	87%
m%	$(100-m)$%
50%	50%

Gano o agrego	Resulta
10%	110%
20%	120%
0,5%	100,5%
83%	183%
m%	$(100+m)$%
50%	150%

NOTA

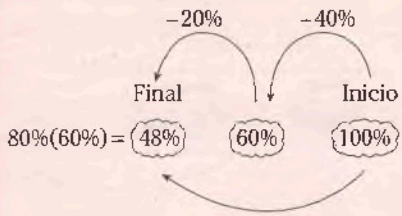
Denotamos (+) cuando nos referimos a aumentos y con (–) cuando nos referimos a descuentos, también consideramos que cada variación porcentual se realizó tomando como referencia al 100%.

Aumentos y descuentos sucesivos

Ejemplos

1. ¿A qué descuento único equivalen dos descuentos sucesivos del 40% y 20%?

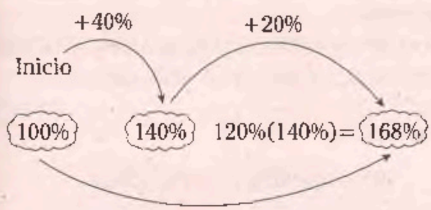
Resolución



$\therefore\ D_{\text{único}}=100\%-48\%=52\%$

2. ¿A qué aumento único equivale dos aumentos sucesivos del 40% y 20%?

Resolución



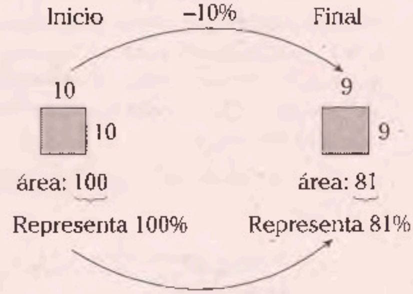
$\therefore\ A_{\text{único}}=168\%-100\%=68\%$

Variación porcentual

Ejemplos

1. Si el lado de un cuadrado disminuye en 10%, ¿en qué tanto por ciento disminuye su área?

Resolución



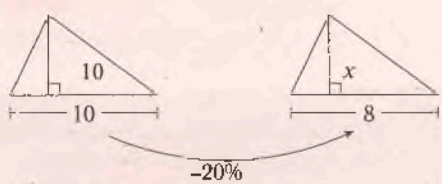
Por lo tanto, el área disminuye 19%.

NOTA

Asumimos como lado inicial=10 μ por comodidad, debido a que es más fácil en el manejo del tanto por ciento.

2. La base de un triángulo disminuye en 20%. ¿En qué tanto por ciento debe aumentar su altura para que su área no varíe?

Resolución



área: 100 área: $8x$

Por dato: $100=8x \ \rightarrow\ x=12{,}5$

Altura inicial — Altura final

$10 <> 100\%$ — $12{,}5 <> 125\%$

Por lo tanto, la altura aumenta 25%.

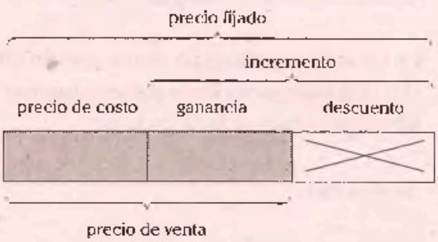
NOTA

- En variación porcentual no interesan aquellos valores que permanecen constante, solamente se analizan aquellos que varían. Por ese motivo, en el ejemplo anterior se ha asumido el área del triángulo como $b\times h$.
- Otra forma de hallar la variación porcentual (V_p) es

$$V_p=\frac{\text{aumento o disminución}}{\text{valor inicial}}\times 100\%$$

Aplicación comercial

Generalmente en un negocio o transacción intervienen el precio de costo, el precio de venta, la ganancia, etc.; tal es así que



NOTA

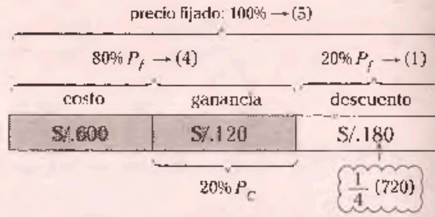
- El precio fijado es llamado también precio de lista o precio de venta al público.
- El incremento representa la ganancia que inicialmente se pensaba obtener sin considerar descuento.
- A no ser que se diga otra cosa, el tanto por ciento de ganancia se toma con respecto del precio de costo, así también el tanto por ciento de descuento se toma con respecto al precio fijado.

Ejemplo

Un artículo que costó S/.600 se vendió haciendo un descuento del 20% y aún así se ganó el 20%. Halle el precio fijado.

Resolución

Planteamos el siguiente esquema:



$\therefore\quad P_f=600+120+180=900$

OBSERVACIÓN

- Las palabras **de**, **del** y **de los** representan, en forma práctica, una multiplicación.
- Las palabras **es**, **son** y **será** representan, en forma práctica, una igualdad.

Ejemplo

Si el 10% del 40% del 60% de A es igual al 50% del 80% de B, además $A+B=424$, calcule A.

Resolución

$$10\%\cdot 40\cancel{\%}\cdot 60\cancel{\%}\cdot A=50\cancel{\%}\cdot 80\cancel{\%}\cdot B$$

$$\cancel{10\%}\cdot\cancel{40}\cdot\cancel{60}\cdot A=50\cdot\overset{2}{\cancel{80}}\cdot B$$

$$6A=100B$$

$$3A=50B$$

$$\frac{A}{B}=\frac{50K}{3K}$$

$$A+B=53K=424$$

$$K=8$$

$\therefore\quad A=50K=400$

Problema N.º 1

Álex entra a un casino y decide jugar a las cartas; en el primer juego pierde el 20% de lo que llevaba y en el segundo juego pierde el 60% de lo que le quedaba. Si al final tiene S/.320, ¿con cuánto empezó a jugar?

Resolución

De los datos, por ganancias y pérdidas, veamos cuánto tiene al final.

Sea su dinero inicial x.

Al final le queda

$$40\%\times 80\% x = 320$$

$$\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}x = 320 \rightarrow x = 1000$$

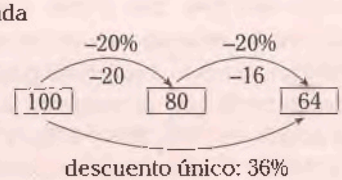
Por lo tanto, empezó con S/.1000.

Problema N.º 2

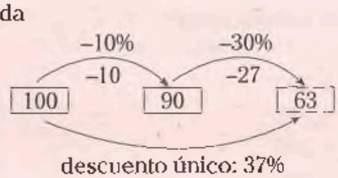
Un mismo artículo es vendido en dos tiendas; en la primera ofrecen un descuento del 20% más 20% y en la segunda, un descuento del 10% más 30%. ¿Cuál de las dos tiendas vende más barato?

Resolución

1.ª tienda



2.ª tienda

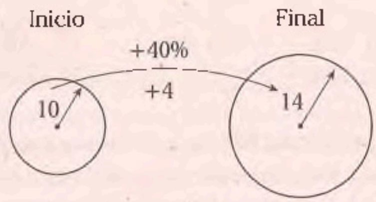


Por lo tanto, la segunda tienda vende más barato.

Problema N.º 3

Si el radio de un círculo aumenta en 40%, ¿en qué tanto por ciento aumenta su área?

Resolución



área: $10^2 = 100$ área: $14^2 = 196$

$$V_p = \frac{196-100}{100}\times 100\% = 96\%$$

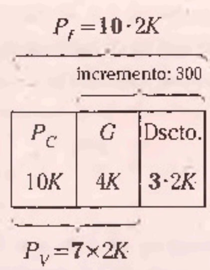
Por lo tanto, su área aumenta en 96%.

Problema N.º 4

Para fijar el precio de un artículo se aumentó su costo en S/.300, pero en el momento de realizar la venta se rebajó en 30% y aún así se ganó el 40% del costo. ¿Cuál es el costo del artículo?

Resolución

Se plantea el esquema



$$\rightarrow \quad 4K + 6K = 300$$

$$K = 30$$

$$\therefore \quad P_C = 10K = 300$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Si yo tuviera 25% más de lo que tengo, lo que tendría y lo que tú tienes estarían en la relación de 5 a 2. ¿Qué tanto por ciento más de lo que tienes es lo que yo tengo?

A) 25% B) 50% C) 100%
D) 75% E) 20%

2. Si el 50% del 20% de x, el 5% de y más el 25% de y y el cuatro por veinte del cinco por siete de la mitad de z son proporcionales a 8, 6 y 2, ¿qué porcentaje de $x+y$ es z?

A) 28% B) 24% C) 25%
D) 36% E) 48%

3. En una jaula se encuentran 80 perros y 120 gatos. ¿Cuántos gatos escaparon si el porcentaje de perros aumentó en 40%?

A) 20 B) 80 C) 60
D) 100 E) 40

4. En un recipiente hay una cantidad desconocida de esferitas, de las cuales el 75% son de color rojo y las demás son blancas. Si se triplican las blancas y se disminuye en 20% las rojas, ¿cuál es el porcentaje de las blancas respecto al total inicial?

A) 25% B) 30% C) 50%
D) 60% E) 75%

5. En una reunión, el 40% son hombres y el resto son mujeres. Después ingresan 70 hombres y salen 20 mujeres, entonces el número de hombres es el 60% del nuevo total. ¿Qué porcentaje del nuevo total de damas son las personas que ingresaron después?

A) 70% B) 30% C) 40%
D) 60% E) 50%

6. De los animales que tiene el señor Franco, el 40% son cerdos; el 30%, ovejas, y el resto, otros animales. Si vendiera el 30% de los cerdos y el 70% de las ovejas, ¿en qué porcentaje disminuiría sus animales?.

A) 30%
B) 33%
C) $33,\widehat{3}$%
D) $66,\widehat{6}$%
E) 60%

7. Si al 40% del número de artículos que tengo le incremento el 40% de su precio, gano S/.192. ¿Cuánto ganaría si al 60% del número de artículos le incremento el 60% de su precio?

A) 216 B) 192 C) 384
D) 432 E) 362

8. Una secretaria quiere comprar un equipo de sonido valorizado en S/.950. El vendedor le comunica que le hará un descuento sucesivo del 10%, 20% y 25%. Como su sueldo no le alcanzaba en ese momento, solicitó un aumento a su jefe, el cual le fue otorgado; se le hizo un aumento sucesivo a su sueldo del 10%, 20% y 25%, pero aún así le faltó S/.18 para comprar el equipo de sonido. ¿Cuál era el sueldo de la secretaria antes del aumento?

A) S/.300
B) S/.250
C) S/.200
D) S/.500
E) S/.400

9. Una tela al lavarse se encoge el 10% en el ancho y el 20% en el largo. Si se sabe que la tela tiene 20 m de ancho, ¿qué longitud debe comprarse, si se necesitan 720 m^2 de tela después de lavada?

A) 25 m
B) 20 m
C) 30 m
D) 18 m
E) 16 m

10. Una persona demora en llegar de un pueblo hacia su casa 4 días; el primer día recorre el 20% más 100 m, el segundo día recorre la cuarta parte del resto más 125 m y el último día recorre el 25% del día anterior. Halle el recorrido total, si el tercer día avanzó 800 m.

A) 1500 m
B) 2000 m
C) 1800 m
D) 2200 m
E) 2500 m

11. La base de un triángulo disminuye en 50%. ¿En qué tanto por ciento debe aumentar su altura para que su área no varíe?

A) 100% B) 50% C) 20%
D) 200% E) 150%

12. Eddy vende dos libros en S/.700 cada uno, ganando en uno de ellos 10 por 60 de su costo y en el otro perdiendo el 10 por P de su costo. Si en aquella venta no gana ni pierde, ¿cuál era el valor de P?

A) 50
B) 60
C) 70
D) 75
E) 80

13. Tengo cierta cantidad de dinero. Si el primer día gasto el 43%, ¿qué porcentaje de lo que me queda debo gastar el segundo día para que me quede el 28,5% del dinero original?

A) 60% B) $66,\widehat{6}\%$ C) 50%
D) 30% E) 25%

14. Si admitimos que un camión de carga sufre una depreciación del 7 por 70 cada año, de uso, respecto al precio que tuvo al comenzar cada año, y al cabo de 3 años su precio es S/.72 900, entonces el costo original del camión fue

A) S/.100 000.
B) S/.90 000.
C) S/.81 000.
D) S/.243 000.
E) S/.270 000.

15. Si se incrementa en un 60% la profundidad de una piscina circular, ¿cuál sería el porcentaje que hay que aumentar al radio de la piscina para que su volumen aumente en 150%?

A) 30% B) 50% C) 75%
D) 25% E) 33,3%

16. Si el área de la superficie de una masa esférica disminuye en un 19%, ¿en qué porcentaje disminuirá su volumen?

A) 27,1% B) 28,2% C) 29,3%
D) 30% E) 25%

17. Si 20 L de agua contiene 15% de sal, ¿cuánto de agua se debe evaporar para que la nueva solución contenga 20% de sal?

A) 3 L B) 4 L C) 5 L
D) 6 L E) 7 L

18. A 80 L de alcohol de 60° se le agrega 40 L de agua. ¿Cuántos litros con alcohol de 100° se deben agregar a esta mezcla para obtener la concentración inicial?

A) 60 B) 30 C) 50
D) 80 E) 40

NIVEL INTERMEDIO

19. Se tienen tres mezclas alcohólicas; la segunda y la tercera en cantidades iguales y con 60% y 20% de pureza, respectivamente. Si el agua y el alcohol de la primera lo vertimos en la segunda y en la tercera, respectivamente, estas dos últimas resultarían con 50% de pureza. Entonces el porcentaje de pureza de la primera es

A) 25%. B) 50%. C) 60%.
D) 75%. E) 80%.

20. De la mesa de un laboratorio se toma un recipiente que contiene 40 L de alcohol al 10% y se vierte todo el contenido en un segundo recipiente que contenía 10 L de alcohol al 20%. Si luego se agrega 38 L de alcohol puro, ¿qué tanto por ciento de la mezcla final no es alcohol puro?

A) 10% B) 20% C) 25%
D) 50% E) 75%

21. Dos recipientes: *A* y *B* contienen vino. El recipiente *A* está lleno en su mitad y el *B* en un tercio de su volumen. Se completan las capacidades de *A* y *B* con agua, vertiéndose las mezclas en un tercer recipiente *C*. Sabiendo que la capacidad de *B* es el triple que la de *A*, calcule el porcentaje de vino que contiene la mezcla en *C*.

A) 30% B) 37,5% C) 25%
D) 75% E) 50%

22. En una tienda se venden bolsas de caramelos. El 20% se vendió perdiendo el 50%, la tercera parte ganando el 20% y en lo que resta no ganó ni perdió. Al final se perdió S/.50. ¿Cuánto costaron todas las bolsas de caramelos?

A) S/.1200 B) S/.1400 C) S/.1500
D) S/.1600 E) S/.1800

23. Un artículo se vendió previo descuento del 25%, pero aún así se ganó el 20% del costo. Si el costo hubiera sido el 20% menos y se hubiera fijado para la venta al público el precio de lista anterior, ¿qué descuento se tendría que aplicar si se quisiera obtener la misma ganancia?

A) 25% B) 30% C) $33,\hat{3}$%
D) 35% E) 37,5%

24. Guillermo apuesta en cuatro juegos consecutivos, perdiendo y ganando alternadamente el 20%, 25% 50% y 20%, siempre de lo que le iba quedando. Si al inicio tenía S/.2000, ¿ganó o perdió, y cuánto?

A) Perdió S/.800.
B) Ganó S/.1200.
C) Ganó S/.500.
D) Perdió S/.1200.
E) Ganó S/.800.

25. Si se vende un artículo haciendo un descuento del 30%, se perdería el 16% del costo. ¿En qué tanto por ciento se debe incrementar el precio fijado para que al hacer un descuento sobre él esta vez se gane la misma cantidad que se perdía anteriormente? El nuevo descuento es el cuádruple de la ganancia.

A) 25% B) 100% C) 60%
D) 50% E) 80%

26. El 40% de los $\frac{3}{4}$ del 6% de 48 es los 0,012 de los $\frac{2}{3}$ de una cantidad. Halle el 25% de dicha cantidad.

A) 27 B) 25 C) 30
D) 32 E) 24

27. En un corral hay pavos y gallinas. Si el 30% de gallinas es el 20% del número de pavos, ¿qué porcentaje del 80% del total es el número de pavos?

A) 50% B) 60% C) 75%
D) 80% E) 90%

28. Si el radio de un círculo se aumenta en 100%, el área aumenta en

A) 300%. B) 200%. C) 100%.
D) 50%. E) $33,\widehat{3}$%.

29. La cantidad de onzas de agua que debe añadirse a 9 onzas de una mezcla de alcohol y agua al 50%, para que resulte una concentración al 30% de alcohol, es

A) 5 onzas. B) 6 onzas. C) 4 onzas.
D) 10 onzas. E) 8 onzas.

30. Un trabajador recibe un descuento del 20% de salario; entonces él puede recibir su salarió original si obtiene un aumento del

A) 20%. B) 50%. C) 75%.
D) 25%. E) 60%.

31. Se vende 2/5 de un lote de cemento ganando el 25% de su precio de costo. El resto se vende con una pérdida del 10% de su precio de costo. ¿Qué tanto por ciento del costo total se ganó o perdió al final?

A) Perdió 5%. B) Ganó 10%. C) Ganó 5%.
D) Perdió 4%. E) Ganó 4%.

32. Se tiene la misma cantidad de limones de dos clases distintas, que venden a 2 por un sol las de primera y 3 por un sol las de segunda. Si vendieran todos los limones a 5 por dos soles, ¿se ganará o perderá y en qué porcentaje?

A) Perderá 5%.
B) Perderá 10%.
C) Ganará 5%.
D) Perderá 4%.
E) Ganará 4%.

33. Se vende un objeto en 10 dólares, ganando el 5% del precio de costo. ¿Qué tanto por ciento se hubiera ganado si se hubiese vendido en 12 dólares?

A) 26% B) 25% C) 24%
D) 42% E) 20%

34. Un descuento de 10% en el precio de las entradas a un cine hizo que la cantidad de espectadores aumente en 20%. ¿En qué tanto por ciento varió la recaudación?

A) Aumentó en 8%.
B) Aumentó en 10%.
C) Disminuyó en 8%.
D) Disminuyó en 10%.
E) No varió.

35. En una fiesta se observa que los hombres que están bailando son el 20% de los que no están bailando, y las mujeres que están bailando son el 25% de las que no lo hacen. Si los hombres que no bailan exceden en 12 a las mujeres que no bailan, ¿cuántas personas son en total?

A) 124 B) 132 C) 140
D) 80 E) 240

Sucesiones

Capítulo XVIII

Objetivos

- Tener clara la idea de una sucesión y su aplicación en diversas situaciones numéricas.
- Encontrar la manera de construir sucesiones utilizando criterios inductivos o deductivos.
- Resolver ejercicios concretos sobre sucesiones numéricas diversas.

Concepto

Es un conjunto de elementos (números, letras, figuras, etc.) que se suceden unos a otros, de tal modo que cada elemento ocupa un lugar establecido distinguiéndose al primero, al segundo, al tercero, etc., de acuerdo a una ley de formación, criterio de orden, o fórmula de recurrencia.

Ejemplos

- △; □; ⬠; ⬡... (sucesión gráfica)
- *A*; *D*; *I*; *O*... (sucesión literal)
- 1; 3; 6; 10... (sucesión numérica)

Existen sucesiones numéricas muy conocidas entre ellas tenemos la sucesión de los números...

- Naturales: 1; 2; 3; 4; ... ; n
- Pares: 2; 4; 6; 8; ... ; $2n$
- Impares: 1; 3; 5; 7; ... ; $(2n-1)$
- Cuadrados: 1; 4; 9; 16; ... ; n^2
- Cubos: 1; 8; 27; 64; ... ; n^3
- Triangulares: 1; 3; 6; 10; ... ; $\dfrac{n(n+1)}{2}$
- Primos: 2; 3; 5; 7...
- De Fibonacci: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13...

Sucesiones notables

Sucesiones polinomiales

Entre las más frecuentes tenemos:

Sucesión lineal o de primer orden

También se le conoce como progresión aritmética (P.A.) y es de la siguiente forma:

$$\text{P.A.}: t_0;\ \overbrace{t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4;\ \ldots;\ t_n}^{n\ \text{términos}}$$
$$+r\quad +r\quad +r\quad +r$$

Su término general es un polinomio de primer grado y se calcula así:

$$\boxed{t_n=(r)n+t_0}$$

donde

t_n: término de lugar n (o término n ésimo)
t_0: término anterior al primero
r: razón aritmética
n: lugar del término

Además

$$\boxed{n=\frac{t_n-t_1}{r}+1}$$

Propiedad

Si en P.A. hay una cantidad impar de términos, se cumple que

$$\boxed{\text{término central}=\frac{\text{suma de extremos}}{2}}$$

Y si no hay término central, se cumple que

$$\boxed{\text{La suma de extremos es constante.}}$$

Sucesión cuadrática o de segundo orden

Es una sucesión cuya forma presenta la siguiente secuencia:

$$\begin{array}{rl} & \qquad\quad \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n\text{ términos}} \\ c = & t_0;\ t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4;\ \dots;\ t_n \\ a+b = & \quad m_0 \quad m_1 \quad m_2 \quad m_3 \\ 2a = & \qquad +r \quad +r \quad +r \leftarrow \text{constante} \end{array}$$

Su término general se calcula así:

$$\boxed{t_n=an^2+bn+c}$$

donde

- t_n: término de lugar n o término n ésimo
- n: lugar del término
- a; b; c: valores que debemos conseguir a partir del esquema mostrado líneas arriba

SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Es llamada también progresión geométrica (P.G.). La forma de esta progresión es la siguiente:

$$\text{P.G.}=\overbrace{t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4;\ \dots;\ t_n}^{n\text{ términos}}$$
$$\times q \quad \times q \quad \times q$$

Su término general se calcula así:

$$\boxed{t_n=t_1\times q^{n-1}}$$

donde

- t_n: término n ésimo (o término de lugar n)
- n: lugar del término
- t_1: primer término
- r: razón geométrica

Propiedad

Si una P.G. tiene una cantidad impar de términos, entonces se cumple que

$$\boxed{(\text{término central})^2=\begin{pmatrix}\text{producto}\\ \text{de términos}\\ \text{extremos}\end{pmatrix}}$$

Cuando hay término central, observamos que

término central

1; 2; 4; 8; 16; 32; 64

4×16

2×32

1×64

$$\underbrace{8^2}_{\substack{\text{término}\\ \text{central}}} = \underbrace{1\times64=2\times32=4\times16}_{\substack{\text{producto de}\\ \text{extremos}}}$$

Y cuando no hay término central en la P.G., se cumple solamente que

$$\boxed{\text{El producto de extremos es constante.}}$$

Veamos

1; 3; 9; 27; 81; 243

9×27

3×81

1×243

Por lo tanto, el producto de extremos (constante) es 1×243=3×81=9×27.

Problema N.º 1

¿Cuántos términos posee la siguiente sucesión si su término central y su penúltimo término están en la relación de 7 a 11?

41; 45; 49; 53...

Resolución

Es una progresión aritmética en la que se cumple la siguiente propiedad:

propiedad central — penúltimo — último término

$$41;\ 45;\ 49;\ \ldots;\ \frac{x+41}{2}\ \ldots\ (x-4);\ \ldots\ (x)$$

$$\underbrace{41;45}_{4}\ \underbrace{45;49}_{4} \qquad \underbrace{(x-4);\ldots(x)}_{4} \qquad \div 2$$

suma de extremos $=x+41$

Luego, por dato tenemos

$$\frac{\text{término central}}{\text{penúltimo término}}=\frac{\dfrac{x+41}{2}}{x-4}=\frac{7}{11}$$

Despejamos $x=169$

Luego nos piden el número de términos de la sucesión; por ello, debemos recordar que

$$\boxed{\text{n.º de términos}=\frac{\text{último}-\text{primero}}{\text{razón}}+1}$$

$$\rightarrow\ \text{n.º de términos}=\frac{169-41}{4}+1=33$$

Por lo tanto, la sucesión tiene 33 términos.

Problema N.º 2

En la siguiente sucesión, ¿cuál es el último término de tres cifras?

11; 17; 25; 35; 47...

Resolución

Es una sucesión cuadrática o de segundo orden.

n términos

$$\begin{array}{rl} c= & 7;\ 11;\ 17;\ 25;\ 35;\ \ldots\boxed{\bigcirc;\bigcirc\ldots(t_n)}\leq 999 \\ a+b= & 4\quad 6\quad 8\quad 10 \\ 2a= & 2\quad 2\quad 2 \end{array}$$

términos de tres cifras

Entonces tenemos que hallar el mayor valor de n, que haga que el término de lugar n sea menor o igual que 999.

Hallamos el término n ésimo $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=7 \end{cases}$

Y como

$$t_n \leq 999$$
$$\downarrow$$
$$\rightarrow\quad an^2+bn+c \leq 999$$
$$n^2+3n+7 \leq 999$$

Buscamos el máximo valor de n

$$n(n+3) \leq 999$$
$$\downarrow\quad\downarrow$$
$$(30)\ (33)$$

Por lo tanto, el último término de tres cifras será

$$t_{30}=30^2+3(30)+7=997.$$

Problema N.º 3

Calcule el valor de $a+b$ en la siguiente P.G.

$(m-1)$; $\bigcirc$; $3m$; $\overline{ab}$; $\overline{mm}+m$; $\bigcirc$...

Resolución

Sabemos por propiedad del término central:

$$\boxed{(\text{central})^2=\text{producto de extremos}}$$

$$\begin{gathered} \underbrace{m-1}_{\downarrow};\ \_\_\ ;\ \overline{3m};\ \_\_\ ;\ \underbrace{\overline{mm}+m}_{=(10m+m)+m=12m} \\ \downarrow (\ )^2 \end{gathered}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{producto de}\\ \text{extremos}\end{array}\right)=(m-1)(\overline{mm}+m)$$

$$\overbrace{(m-1)(\overline{mm}+m)}^{\text{extremos}}=\overbrace{(3m)^2}^{\text{central}}$$

$$(m-1)(12\cancel{m})=9m^{\cancel{2}}$$

Despejamos $m=4$

Luego la progresión queda así

$$\underbrace{3;\ \bigcirc}_{\times 2};\ \underbrace{12}_{\times 2};\ \underbrace{\overline{ab}}_{\times 2};\ \underbrace{48;\ \bigcirc}_{\times 2}...$$

de donde $\overline{ab}=24$

$\therefore\quad a+b=6$

Problema N.º 4

Sean las siguientes sucesiones aritméticas

S_1: 7; 10; 13; 16...

S_2: 1; 5; 9; 13...

Calcule el décimo término común de ambas sucesiones.

Resolución

De acuerdo a lo mostrado, el primer término común es 13; entonces debemos ubicar el segundo término común y ver de cuánto en cuánto se van a separar los términos comunes.

$$7;\ 10;\ \overbrace{13;\ 16;\ 19;\ 22;}^{12}\ \overbrace{25;\ 28;\ 31;\ 34;}^{12}\ 37...$$

$$\text{(razón } 3\text{: } 3\quad 3\quad 3\quad 3)$$

$$1;\ 5;\ 9;\ \overbrace{13;\ 17;\ 21;}^{12}\ \overbrace{25;\ 29;\ 33;}^{12}\ 37...$$

$$\text{(razón } 4\text{: } 4\quad 4\quad 4)$$

Se observa que los términos comunes forman una P.A. de razón 12. Nos piden el décimo término de esta progresión.

$$1;\ \overbrace{13;\ 25;\ 37;\ ...;\ t_{10}}^{10\ \text{términos}}$$

$$\quad 12\quad 12\quad 12$$

$$t_n=12n+1$$

$\rightarrow\quad t_{10}=12(10)+1=121$

Por lo tanto, el décimo término común es 121.

Problema N.º 5

Dada la siguiente sucesión lineal

$\overline{8d};\ \overline{8a};\ \overline{ab};\ \overline{1dc}...,$

calcule el término que ocupa el lugar $a+b+c+d$.

Resolución

Se observa que la progresión aritmética es creciente y, además, la razón es menor que 10.

$$\overline{8d};\ \overline{8\underbrace{a}_{9}};\ \overline{\underbrace{a}_{9}b};\ \overline{1dc}$$

$\rightarrow\quad a=9$

Entonces completamos la secuencia

$$\overline{8d};\ 89;\ \overline{9b};\ \overline{1dc}$$

$$d=0\qquad b=8\qquad d=0\quad c=7$$

Nos piden el término de lugar

$$a+b+c+d=9+8+7+0=24$$

$$\begin{array}{cccccc} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & ...\ t_{24} \\ 71; & 80; & 89; & 98; & 107... & ? \end{array}$$

$$\quad 9\quad 9$$

$$t_{24}=9(24)+71$$

$\therefore\quad t_{24}=287$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Los términos séptimo y décimo de una progresión aritmética son 37 y 52, respectivamente. Calcule el primer término.

A) 5 B) 7 C) 6
D) 8 E) 9

2. En una progresión aritmética de razón 5, el cuarto término es 22. Calcule la suma de los términos de lugares catorce y dieciséis.

A) 152 B) 154 C) 156
D) 158 E) 150

3. En una progresión aritmética de razón 9, el primer término es la cuarta parte del quinto término. Halle el término de lugar veinte.

A) 193 B) 173 C) 185
D) 183 E) 187

4. A continuación se dan los tres primeros términos de una P.A.
$(m+1); (3m-4); (3m-1)$...
Calcule la suma de los términos quinto y décimo.

A) 47 B) 48 C) 49
D) 50 E) 51

5. Sean los tres primeros términos de una progresión aritmética creciente
$(a+3); (3a-1); (a^2-1)$
Calcule el vigésimo término.

A) 81 B) 84 C) 83
D) 85 E) 80

6. Dados los tres primeros términos de una progresión aritmética creciente
$(a+b+3); \overline{ab}; (4a+3b+2)$,
halle el término de lugar $\overline{ba}$.

A) 309 B) 315 C) 303
D) 297 E) 291

7. ¿Cuántos términos tiene la siguiente sucesión?
9; 12; 15; 16; 21; 20; ...; 64

A) 24 B) 26 C) 28
D) 29 E) 30

8. En la siguiente sucesión, los cinco últimos términos suman 340. ¿Cuántos términos tiene la sucesión completa?
8; 11; 14; 17...

A) 21 B) 25 C) 24
D) 23 E) 26

9. ¿Cuántos términos hay en la siguiente progresión aritmética?
$\overline{3d}; 39; \overline{c3}; ...; \overline{1dc7}$

A) 378 B) 381 C) 379
D) 375 E) 383

10. En la siguiente progresión aritmética, calcule el número de términos.
$\overline{ab}; \overline{a(a-1)}; \overline{dc(c+4)}; ...; \overline{b(8-d)b}$

A) 33 B) 32 C) 31
D) 30 E) 35

11. ¿Cuántos términos tiene la siguiente P.A.?
$\overline{AB4}; \overline{B03}; \overline{B3C}; \overline{BAD}; ...; \overline{DDAB}$

A) 16 B) 20 C) 21
D) 18 E) 23

12. En la siguiente P.A.

$\overline{A2B}$; $\overline{A3B}$; $\overline{A4B}$; $\overline{A5B}$; ...,

el duplo del cuarto término es igual a $\overline{C7C2}$. Calcule la suma de cifras del término de lugar $A+B+C$.

A) 20 B) 16 C) 15
D) 12 E) 18

13. La suma de tres números en P.A. es 45 y su producto es 2640. ¿Cuál es la razón positiva de la progresión?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

14. Siete términos en progresión aritmética creciente suman 217. Si la diferencia de los cuadrados del último y del primer término es 1488, halle la razón de progresión.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

15. Se tiene siete términos en progresión aritmética creciente cuya suma es 210. La relación entre el quinto término y la suma del segundo con el tercer término es de 7 a 9. Halle el primer término.

A) 15 B) 16 C) 12
D) 18 E) 19

16. Los tres términos mostrados forman una progresión aritmética creciente.

$\overline{aab}$; $\overline{ab1}$; $\overline{ac0}$...

Calcule $a+b+c$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

17. En una P.A., la suma de sus dos términos centrales: el segundo y el penúltimo término es 146. Además, el último término excede al primer término en 57 unidades. Halle la suma de cifras del último término.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

18. Karina es una boxeadora que inició su entrenamiento el lunes 7 de junio realizando 8 planchas; el martes 8 de junio realizó 11 planchas; el miércoles 9 de junio realizó 14 planchas, y así sucesivamente iba aumentando la cantidad de planchas a razón constante. El último día de entrenamiento se dio cuando realizó tantas planchas como el doble de las que realizó el décimo segundo día, aumentado en 7. ¿Qué día finalizó su entrenamiento?

A) 4 de julio B) 5 de julio C) 3 de julio
D) 6 de julio E) 2 de julio

19. Se depositó un grupo de bacterias en un tubo de ensayo para examinar diariamente su comportamiento reproductivo, observándose que cada día que pasaba el número de bacterias aumentaba en 4. El examen duró hasta que cierto día el número de bacterias que había era exactamente igual al quíntuplo del número de días que las había venido estudiando. Si el número de bacterias del primer y del último día suman 130, ¿cuál fue el último día de observación si el primer día fue un 3 de enero?

A) 24 de enero
B) 23 de enero
C) 21 de enero
D) 22 de enero
E) 25 de enero

20. En la siguiente P.A.

    1; 9; 17...,

    la suma de sus tres términos centrales es 339. Calcule la suma de cifras del último término de la sucesión.

    A) 7 B) 9 C) 8
    D) 10 E) 6

21. Dadas las P.A.

    33; 37; 41; 45...

    4; 7; 10; 13...

    el número de términos que tiene la segunda sucesión es el doble del número de términos que tiene la primera sucesión; sin embargo, sus últimos términos son iguales. Halle la suma de cifras de este último término.

    A) 12 B) 13 C) 14
    D) 15 E) 11

22. Una profesora reparte lápices a un grupo de alumnos en cantidades que forman una progresión aritmética. Al quinto niño le tocó el triple de lo que le tocó al segundo, y al último niño le tocó siete veces de lo que le tocó al tercer niño. ¿Cuántos niños son?

    A) 16 B) 17 C) 15
    D) 18 E) 19

23. En una P.G. se sabe que el término de lugar 8 es 3^{180}, y el término de lugar 38 es 3^{330}. Calcule la razón geométrica.

    A) 245
    B) 243
    C) 81
    D) 9^3
    E) 3^7

24. Tres números están en progresión geométrica creciente. La suma de ellos es 19 y su producto es 216. Calcule la suma de los cuadrados de los tres números.

    A) 111 B) 144 C) 155
    D) 122 E) 133

25. Se tienen tres términos en progresión geométrica de razón 2. Si el tercer término disminuyera en 4 unidades, se convertiría en una progresión aritmética. Halle la suma de cifras del tercer término de la progresión geométrica.

    A) 7 B) 8 C) 9
    D) 10 E) 6

26. Se tienen tres números ordenados en progresión aritmética cuya suma es 36. Si se agregan tres unidades al primero y al último término, se formaría una progresión geométrica. Halle la razón de la progresión aritmética.

    A) 4 B) 9 C) 6
    D) 5 E) 3

NIVEL INTERMEDIO

27. Halle el vigésimo término en la siguiente progresión geométrica.

    2; 6; 18; 54...

    A) $3^{21}-1$
    B) $3^{20}-1$
    C) $3^{22}-1$
    D) $3^{19}-1$
    E) $3^{20}-3$

28. Halle el número de términos de la siguiente progresión geométrica.

$\frac{3}{8}; \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; ...; 6144$

A) 13 B) 14 C) 12
D) 15 E) 16

29. En una progresión geométrica, el cuarto término es 135 y el primer término es 5. Halle la suma de los tres primeros términos que ocupan lugares pares.

A) 1355 B) 1255 C) 1265
D) 1345 E) 1365

30. Sea la progresión geométrica creciente

$(x-3); (2x-2); (5x+1)...$

Halle la suma de cifras del quinto término de la progresión.

A) 10 B) 6 C) 9
D) 15 E) 12

31. Calcule el valor de x en la siguiente sucesión.

$(c^3+b^9); (c^5+b^{13}); (c^7+b^{17}); ...; (c^{3x+4}+b^{8x-7})$

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

32. Sean las siguientes progresiones aritméticas

11; 14; 17; 20...

6; 8; 10; 12...

Calcule el décimo término común de ambas sucesiones y dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 10 B) 14 C) 12
D) 8 E) 15

33. ¿Cuántos términos no comunes presentan ambas sucesiones?

6; 10; 14; 18; ...; 98

2; 7; 12; 17; ...; 97

A) 34 B) 36 C) 30
D) 32 E) 38

34. Halle la suma de cifras del primer término común de ambas sucesiones aritméticas.

14; 25; 36...

18; 31; 44...

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

35. Dada la progresión aritmética decreciente

$\overline{ab3}; \overline{ac6}; \overline{aa(a+2)}$,

halle el tercer término negativo y el lugar que ocupa en la progresión.

A) –19; 118°. B) –11; 117°. C) –19; 117°.
D) –12; 118°. E) –13; 115°.

36. ¿Cuántos términos de la siguiente progresión aritmética terminan en cifra 4?

3; 10; 17; ...; 353

A) 3 B) 5 C) 4
D) 6 E) 7

37. Se define la sucesión $\{A_n\}$

$A_{n+2}=2_{n+1}-A_n; n \in \mathbb{Z}^+;$

además $A_1=2 \wedge A_{23}=156$.

Calcule A_4+A_{35}.

A) 337 B) 300 C) 226
D) 263 E) 189

38. Considere las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dadas por $a_n=3n+2$ y $b_n=2n-1$.

Si $\{c_n\}$ es una sucesión dada por $c_n=b_{a_n}$, entonces la fórmula general de $\{c_n\}$ en función de n es

A) $6n+3$. B) $6n+4$. C) $6n-3$.
D) $6n$. E) $2n-1$.

39. Calcule el vigésimo término de la siguiente sucesión.
6; 17; 34; 57...

A) 1241 B) 1243 C) 1245
D) 1237 E) 1239

40. Calcule el vigésimo término de la siguiente sucesión.
6; 11; 20; 33...

A) 780 B) 782 C) 788
D) 785 E) 787

41. Halle el vigésimo término de la siguiente sucesión.
3; 7; 13; 21...

A) 430 B) 431 C) 411
D) 420 E) 421

42. Calcule el vigésimo término de la siguiente sucesión.
5; 13; 25; 41...

A) 881 B) 861 C) 841
D) 851 E) 831

43. Halle el vigésimo término de la siguiente sucesión.
4; 10; 18; 28...

A) 460 B) 420 C) 450
D) 430 E) 400

44. Halle el término vigésimo en la siguiente sucesión.
3; 10; 21; 36...

A) 800 B) 780 C) 840
D) 810 E) 820

45. Calcule el vigésimo término en la siguiente sucesión.
1; 3; 6; 10; 15...

A) 230 B) 210 C) 200
D) 240 E) 220

46. Héctor se dedica a la venta de revistas. El primer día vende 6, el segundo día vende 9, el tercer día vende 14, el cuarto día vende 21, y así sucesivamente hasta que el último día vendió 630 revistas. ¿Cuántos días vendió en total?

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

47. Un investigador empieza a observar el mismo día a dos tipos de hormigas que viven separadas. Las de tipo *A* son el primer día 3, el segundo día son 6, el tercer día son 11, y el cuarto día son 18, y así sucesivamente. Las de tipo *B* son el primer día 10, el segundo día son 11, el tercer día son 13, el cuarto día son 16, y así sucesivamente. ¿En qué día se observa que las de tipo *A* son tantas como el doble de las de tipo *B*?

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

48. Dada la progresión geométrica

$\overline{A3}; \overline{DC}; \overline{AB7}...,$

calcule el producto de cifras del cuarto término de la progresión.

A) 24 B) 9 C) 12
D) 15 E) 18

49. Dada la P.G.

$A; \overline{B2}; \overline{BA}...,$

halle el producto de cifras del cuarto término de la progresión.

A) 12 B) 16 C) 14
D) 18 E) 15

50. Se tiene una P.G. de 11 términos, en la que el término central es 2. Calcule la suma de cifras del producto de los 11 términos de la progresión.

A) 8 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

51. Una P.A. y una P.G. tienen por primer término al 3. Si sus terceros términos son iguales y la diferencia entre el segundo término de la P.A. y el segundo término de la P.G. es igual a 6, halle el segundo término de la P.G.

A) 8 B) 6 C) 10
D) 12 E) 9

52. En la P.A.

$47; 56; 65; ... ; \overline{15a}; ...; \overline{ba7},$

calcule $a \times b$.

A) 40 B) 42 C) 30
D) 20 E) 35

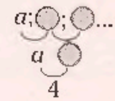
53. En la progresión aritmética creciente, hay n términos y la razón es m.

$\overline{mn}; ...; \overline{nm}$

Calcule $m+n$.

A) 10 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

54. En la sucesión cuadrática creciente mostrada, el quinto término es 54.



Calcule el vigésimo término de la sucesión.

A) 808 B) 812 C) 800
D) 804 E) 806

55. En la siguiente distribución numérica, halle el término central de la fila 20.

Fila 1 →				2			
Fila 2 →			3	4	5		
Fila 3 →		6	7	8	9	10	
Fila 4 →	11	12	13	14	15	16	17
	⋰			⋮			⋱

A) 380 B) 382 C) 384
D) 386 E) 388

56. En la siguiente distribución numérica, la suma de todos los números que conforman la última fila es igual a 671. ¿Cuántas filas hay?

Fila 1 →				1			
Fila 2 →			2	1	3		
Fila 3 →		3	1	4	1	5	
Fila 4 →	4	1	5	1	6	1	7
	⋰			⋮			⋱

A) 20 B) 22 C) 24
D) 18 E) 21

57. Dada la sucesión cuadrática creciente de números naturales, halle la suma de cifras del sexto término, si se sabe que el quinto término es 41.

$$a;\ \bigcirc;\ \bigcirc\ldots$$
$$+b\quad \bigcirc$$
$$+a$$

A) 11 B) 13 C) 14
D) 12 E) 15

58. Se tienen tres sucesiones cuadráticas: $\{A_n\}$; $\{B_n\}$; $\{C_n\}$ definidas por

$A_n=4n^2-2n+1$

$B_n=4n^2+2n+1$

Además, los primeros términos de $\{A_n\}$ son los primeros términos de lugares impares de $\{C_n\}$ y los primeros términos de $\{B_n\}$ son los primeros términos de lugar impar de $\{C_n\}$. Entonces $\{C_n\}$ está definida por

A) n^2-n+1. B) n^2+n-1. C) n^2+n+1.
D) n^2-n-1. E) n^2+2n+1.

59. En el siguiente arreglo, halle el vigésimo término de la sucesión creciente formada por los números señalados en las casillas sombreadas.

$$\boxed{1}\ \ 3$$
$$5\ \ 7\ \ \boxed{9}\ \ 11\ \ 13$$
$$15\ \ 17\ \ 19\ \ 21\ \ \boxed{23}\ \ 25\ \ 27\ \ 29$$
$$31\ \ 33\ \ 35\ \ 37\ \ 39\ \ 41\ \ \boxed{43}\ \ 45\ \ 47\ \ 49\ \ 51$$
$$\vdots$$

A) 1179 B) 1169 C) 1053
D) 1193 E) 1155

60. Halle el término que continúa en

20; 15; 10; 6; 6; 16; 47; 117; (?)

A) 245 B) 255 C) 260
D) 250 E) 265

61. Halle la suma de cifras del término que continúa en

1; 6; 26; 81; 166; (?)

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 6

62. Halle el par de letras que continúan en

AB; *AC*; *BE*; *CG*; *EK*; *HM*; (?)

A) *NP* B) *MQ* C) *ÑQ*
D) *ÑR* E) *MP*

Series

Capítulo XIX

OBJETIVOS

- Afianzar los conocimientos previos estudiados en el capítulo de sucesiones.
- Reconocer y resolver sumas indicadas que provienen de sucesiones notables.

Definición

Es la adición indicada de los términos de una sucesión dada.

Principales tipos de series

SERIE ARITMÉTICA

En general, dada una serie aritmética

$$S_n = \overbrace{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots + t_n}^{n \text{ términos}}$$

$$+r \quad +r \quad +r$$

El valor de la serie es

$$\boxed{S_n = \left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) n}$$

Y si la cantidad de términos es impar, se cumple

$$S_n = \overbrace{\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)}^{t_c} n$$

donde

S_n: suma de los n primeros términos

t_1: primer término

t_n: último término

n: número de términos

t_c: término central

SERIE GEOMÉTRICA

Es la adición indicada de los términos de una sucesión geométrica.

Serie geométrica finita

En general, dada una serie geométrica

$$S_n = \overbrace{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \dots + t_n}^{n \text{ términos}}$$

$$\times q \quad \times q \quad \times q$$

El valor de la serie es

$$\boxed{S_n = t_1\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)}$$

donde

S_n: suma de los n primeros términos

t_1: primer término

q: razón geométrica

n: número de términos

Serie geométrica decreciente infinita

En general, dada una serie geométrica

$$S=\underbrace{t_1+t_2}_{\times q}+\underbrace{t_3}_{\times q}+\underbrace{t_4}_{\times q}+\ldots \quad \text{donde } -1<q<1;\ q\neq 0$$

$$\boxed{S=\frac{t_1}{1-q}} \text{ (suma límite)}$$

donde

S: suma de los infinitos términos

t_1: primer término

q: razón geométrica

Series notables

Son aquellas adiciones cuyos términos son los elementos de sucesiones notables, como por ejemplo la de los números naturales, cuadrados, cubos, triangulares, entre otros.

Serie de los n primeros números naturales

$$\underbrace{1+2+3+4+\ldots+n}_{n \text{ sumandos}}=\frac{n(n+1)}{2}$$

Serie de los n primeros cuadrados perfectos

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2}_{n \text{ sumandos}}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Serie de los n primeros cubos perfectos

$$\underbrace{1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3}_{n \text{ sumandos}}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Serie de los primeros productos binarios

$$\underbrace{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\ldots+n(n+1)}_{n \text{ sumandos}}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Serie de los primeros productos ternarios

$$\underbrace{1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots+n(n+1)(n+2)}_{n \text{ sumandos}}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Serie polinomial

Dada una serie polinomial, por ejemplo una serie de grado 3 (cúbica), cuyo término general o n ésimo es

$$t_{n^2}=an^3+bn^2+cn+d$$

La suma de sus n primeros términos será

$$\left.\begin{array}{l}
t_1=a(1)^3+b(1)^3+c(1)+d\\
t_2=a(2)^3+b(2)^2+c(2)+d\\
t_3=a(3)^3+b(3)^2+c(3)+d\\
t_4=a(4)^3+b(4)^2+c(4)+d\\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots\\
t_n=a(n)^3+b(n)^2+c(n)+4
\end{array}\right\}(+)$$

y se calculará mediante la siguiente expresión

$$\underbrace{S_n}_{\substack{\text{suma de}\\ \text{los } n \text{ primeros}\\ \text{términos}}}=a\underbrace{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{\substack{\text{suma de}\\ \text{cubos}}}+b\underbrace{\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)}_{\substack{\text{suma de}\\ \text{cuadrados}}}+$$

$$+c\underbrace{\left[\frac{(n)(n+1)}{2}\right]}_{\substack{\text{suma de}\\ \text{naturales}}}+\underbrace{d(n)}_{\substack{\text{suma}\\ \text{de la}\\ \text{constante}}}$$

Problema N.º 1

Halle el valor de P.

$P=0{,}01+0{,}02+0{,}03+0{,}04+...+4$

Resolución

Multiplicamos por 100 a ambos miembros de la ecuación

$$100P=1+2+3+4+...+400$$

$$100P=\frac{400\times 401}{2}$$

$\therefore \quad P=802$

Problema N.º 2

Halle el valor de la siguiente serie geométrica

$$S=\overbrace{2+6+18+54+...}^{20\text{ términos}}$$

Resolución

Tenemos todos los elementos para aplicar la fórmula: el primer término, el número de términos y la razón.

$$S=2\left(\frac{3^{20}-1}{3-1}\right)$$

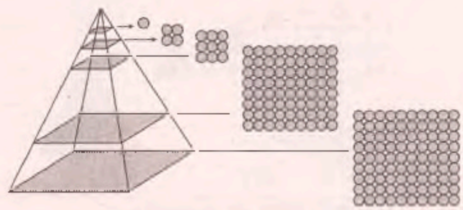
$\therefore \quad S=30^{20}-1$

Problema N.º 3

Halle el número total de naranjas que se necesitan para construir una pirámide de base cuadrada de 10 niveles.

Resolución

Algunas veces estas distribuciones lo hacen los vendedores de fruta con sus naranjas, colocando una en la parte superior, en el siguiente nivel cuatro (de modo que el espacio entre las cuatro naranjas es donde se apoya la primera), luego nueve (porque entre ellas se generan 4 espacios), y así sucesivamente.



Como es una base cuadrada, los niveles de la pirámide estarán conformados por un número cuadrado perfecto (de naranjas).

Sea S el total de naranjas.

$$S=\overbrace{1^2+2^2+3^2+...+10^2}^{10\text{ niveles}}$$

$$S=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$$

Por lo tanto, se necesitarán 385 naranjas.

Problema N.º 4

Halle el número total de naranjas que se necesitan para construir una pirámide de base triangular de 10 niveles.

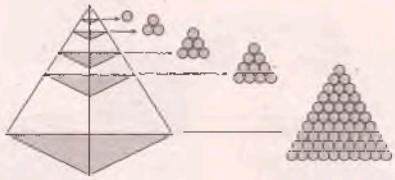
Resolución

Los números que forman distribuciones triangulares son los números 1; 3; 6; 10, estudiados en el capítulo de sucesiones y llamados números triangulares.

Recordemos que su forma general es

$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Dichos números serán los que conformen los niveles de nuestra pirámide de base triangular.



Sea S el número total de naranjas.

$$S=\overbrace{1\ +\ 3\ +\ 6\ +...}^{10\text{ niveles}}$$

$$S=\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+...+\frac{10\times11}{2}$$

$$S=\frac{1}{2}(1\times2+2\times3+3\times4+...+10\times11)$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times12}{3}\right)=220$$

Por lo tanto, se necesitan 220 naranjas.

Problema N.° 5

Halle el valor de la siguiente serie.

$$S=8+4+2+1+\frac{1}{2}+...$$

Resolución

En este caso para la aplicación de la fórmula hay que hallar la razón geométrica constante.

$$q=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=...\ \rightarrow\ q=\frac{1}{2}$$

Y cumple que $-1<q<1$, luego

$$S=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}$$

$\therefore\ \ S=16$

Problema N.° 6

Calcule la suma de los números de la siguiente distribución numérica.

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+...+14^2+15^2$$
$$2^2+3^2+4^2+5^2+...+14^2+15^2$$
$$3^2+4^2+5^2+...+14^2+15^2$$
$$4^2+5^2+...+14^2+15^2$$
$$5^2+...+14^2+15^2$$
$$\vdots$$
$$14^2+15^2$$
$$15^2$$

Resolución

La primera posibilidad es de ir sumando fila por fila. En la primera fila se puede aplicar la fórmula de cuadrados, no es difícil. En la segunda fila habría que restarle 1^2 a la suma de cuadrados; a la tercera fila le restaríamos 1^2+2^2, a medida que vamos avanzado habría que ir restando más números, lo cual va complicando la cuenta cada vez más. Hay otra posibilidad: agrupar los números iguales y sumarlos.

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+...+14^2+15^2$$
$$2^2+3^2+4^2+5^2+...+14^2+15^2$$
$$3^2+4^2+5^2+...+14^2+15^2$$
$$4^2+5^2+...+14^2+15^2$$
$$5^2+...+14^2+15^2$$
$$\vdots$$
$$14^2+15^2$$
$$15^2$$

Sea S la suma de todos los números. Sumando en diagonal tenemos

$$S=1(1^2)+2(2^2)+3(3^2)+4(4^2)+...+15(15^2)$$

$$S=1^3+2^3+3^3+...+15^3$$

$$S=\left(\frac{15\times16}{2}\right)^2$$

$\therefore\ \ S=14\,400$

Problema N.° 7

Calcule la suma de todos los números

$2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+...+20\times21$

$3\times4+4\times5+5\times6+...+20\times21$

$4\times5+5\times6+...+20\times21$

$5\times6+...+20\times21$

$\vdots$

20×21

Resolución

Al igual que en el ejemplo anterior, la idea es agrupar los números iguales

$2\times3+3\times4+4\times5+5\times6+...+20\times21$

$3\times4+4\times5+5\times6+...+20\times21$

$4\times5+5\times6+...+20\times21$

$5\times6+...+20\times21$

$\vdots$

20×21

Sea S el valor de la suma

$$S=1(2\times3)+2(3\times4)+3(4\times5)+4(5\times6)+ +...+19(20\times21)$$

$$S=1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+4\times5\times6+ +...+19\times20\times21$$

$$S=\frac{19\times20\times21\times22}{4}$$

$\therefore \quad S=43\,890$

Problema N.° 8

Calcule la suma de los 10 primeros términos de una sucesión cuyo término general es

$t_n=2n^3+3n^2+5n$

Resolución

A este tipo de series se le llama **serie polinomial**, debido a que su término general tiene la forma de un polinomio, en este caso de tercer grado.

Los primeros términos se consiguen reemplazando el valor de n por 1; 2; 3 hasta 10, pero lo haremos de una manera especial. Así:

sumamos los términos por columnas

$$\begin{array}{llllll}
t_1 = & 2(1)^3 & + & 3(1)^2 & + & 5(1)\\
t_2 = & 2(2)^3 & + & 3(2)^2 & + & 5(2)\\
t_3 = & 2(3)^3 & + & 3(3)^2 & + & 5(3)\\
 & & \vdots & & & \\
t_{10} = & 2(10)^3 & + & 3(10)^2 & + & 5(10)
\end{array}$$

$$S_{10}=2\left(\frac{10\times11}{2}\right)^2+3\left(\frac{10\times11\times21}{6}\right)+5\left(\frac{10\times11}{2}\right)$$

$\therefore \quad S=7380$

Problema N.° 9

Calcule la suma de los 20 primeros términos de la siguiente serie.

$4+12+26+46+...$

Resolución

$$\begin{array}{cccccccccc}
2; & & 4; & & 12; & & 26; & & 46... \\
 & 2 & & 8 & & 14 & & 20 & \\
 & & 6 & & 6 & & 6 & &
\end{array}$$

Las líneas de diferencias muestran una sucesión de segundo orden, cuyo término general es

$$t_n=3n^2-n+2$$

Luego procediendo de forma análoga en el ejemplo anterior tendremos que

$$S_{20}=3\left(\frac{20\times21\times41}{6}\right)-1\left(\frac{20\times21}{2}\right)+2(20)$$

$\therefore \quad S_{20}=8440$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Calcule el valor de n.

$n+(n+3)+(n+6)+(n+9)+...+(7n-3)=1365$

A) 12 B) 10 C) 15
D) 13 E) 11

2. Calcule el valor de x.

$(x+1)+(x+5)+(x+9)+(x+13)+...+(5x+1)=408$

A) 9 B) 11 C) 12
D) 14 E) 16

3. Halle el valor de m.

$$\overbrace{(2m+1)+(2m+4)+(2m+7)+(2m+10)+...}^{(m-1)\text{ términos}}=707$$

A) 12 B) 14 C) 15
D) 16 E) 18

4. Calcule el valor de S.

$$S=\overbrace{-1-2+3+4-5-6+7+8-9-10+11+12-...}^{80\text{ términos}}$$

A) 80 B) 60 C) 100
D) 70 E) 76

5. Calcule el valor de M.

$$M=\overbrace{1-2+3+4-5+6+7-8+9+...}^{60\text{ términos}}$$

A) 620 B) 630 C) 590
D) 600 E) 610

6. Halle el valor de N.

$$N=\underbrace{-1+1^2-5+3^2-9+5^2-13+7^2-...}_{30\text{ términos}}$$

A) 4040 B) 4060 C) 4050
D) 4160 E) 4120

7. Halle el valor de S.

$$S=\underbrace{-1\times2+2\times3-3\times4+4\times5-5\times6+6\times7-...}_{30\text{ sumandos}}$$

A) 460 B) 440 C) 420
D) 480 E) 520

8. Calcule el valor de A.

$$A=\underbrace{1\times3-2\times4+3\times5-4\times6+5\times7-6\times8+...}_{40\text{ sumandos}}$$

A) −820 B) −840 C) −860
D) −880 E) −800

9. ¿Cuántos términos debe considerarse en la siguiente serie para que la suma de ellos sea igual a 1365?

$5+11+17+23+...$

A) 20 B) 21 C) 25
D) 30 E) 27

10. Halle la suma de cifras del valor de n.

$$\overbrace{41+44+47+50+...}^{n\text{ términos}}=\overbrace{11+18+25+32+...}^{n\text{ términos}}$$

A) 5 B) 4 C) 7
D) 8 E) 6

11. La suma de los números naturales consecutivos desde $\overline{ab}$ hasta 44 es igual a 690. Halle $a+b$.

A) 6 B) 5 C) 8
D) 7 E) 9

12. En una P.A. de 20 términos, los tres primeros términos suman 27 y los tres últimos suman 282. Calcule la suma de los 20 términos de la progresión.

A) 1230 B) 1120 C) 1020
D) 1130 E) 1030

13. La suma de 21 números impares consecutivos ordenados de manera creciente es igual a 49 veces el menor de los sumandos. Halle la suma de cifras del número central.

A) 6 B) 9 C) 7
D) 10 E) 8

14. Rosa y Vilma son dos amigas que leen, coincidentemente, la misma obra. Rosa lee 19 páginas diarias; en cambio, Vilma lee 1 página el primer día, 4 páginas el segundo día, 7 páginas el tercero, 10 el cuarto día, y así sucesivamente. Ambas empezaron a leer la obra simultáneamente el 26 de abril, hasta que en cierto día (después de que cada una terminó con su lectura diaria) se percataron de que habían leído hasta el momento la misma cantidad de páginas de la obra. ¿Qué día fue ese?

A) 7 de mayo
B) 8 de mayo
C) 9 de mayo
D) 10 de mayo
E) 11 de mayo

15. Una persona debe de pagar una deuda total de S/.2800. El pago lo va a realizar de la siguiente manera: el primer mes S/.50, el segundo mes S/.80, el tercer mes S/.110, el cuarto mes S/.140, y así sucesivamente. Después de un año de pago aún le quedará un pequeño saldo por pagar. ¿Cuánto es dicho saldo?

A) S/.210
B) S/.230
C) S/.240
D) S/.220
E) S/.250

16. La suma de 10 números naturales consecutivos es igual a P. Calcule la suma de los siguientes 10 números naturales consecutivos.

A) $P+10$ B) $2P$ C) $P+100$
D) $2P+100$ E) $P+50$

17. La suma de 10 números impares consecutivos es igual a M. Halle la suma de los 20 números impares siguientes.

A) $M+600$ B) $2M+600$ C) $2M+1000$
D) $2M+400$ E) $M+400$

18. La suma de 20 números consecutivos (donde el menor es par) es S. Calcule la suma de los 20 números pares consecutivos anteriores a los mencionados inicialmente.

A) $S-400$ B) $S-420$ C) $S-600$
D) $S-610$ E) $S-480$

NIVEL INTERMEDIO

19. En la siguiente serie aritmética, calcule $a+b$.

$$\overbrace{7+11+15+\ldots+\left(2a^2+15\right)}^{(3b-1)\text{ términos}}=2625$$

A) 21 B) 19 C) 18
D) 20 E) 22

20. En una progresión aritmética, el término central es 52 y los términos sexto y decimocuarto equidistan de aquel. Calcule la suma de todos los términos de la progresión.

A) 978 B) 968 C) 988
D) 1040 E) 1140

21. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética está definida por $S_n=2n^2+3n$. Halle la suma de los términos de lugar 10 y 20 de la progresión.

A) 124 B) 122 C) 132
D) 116 E) 118

22. En una progresión aritmética, la suma de sus n primeros términos está definida por $S_n=2n^2-n$. Halle la suma de los términos comprendidos entre el décimo y el vigesimoprimer término de la progresión.

A) 580 B) 570 C) 610
D) 708 E) 590

23. Halle el valor de la siguiente serie.
$M=2^4+2^7+2^{10}+2^{13}+...+2^{61}$

A) $\frac{2^{62}-15}{7}$ B) $\frac{2^{62}-16}{7}$ C) $\frac{2^{64}-16}{7}$
D) $\frac{2^{64}-2}{7}$ E) $\frac{2^{64}-1}{7}$

24. Halle el valor de la siguiente serie.
$N=2^2+4^2+8^2+16^2+...+1024^2$

A) $\frac{2^{21}-4}{3}$ B) $2^{22}-4$ C) $\frac{2^{22}-2}{3}$
D) $\frac{4^{12}-4}{3}$ E) $\frac{4^{11}-4}{3}$

25. Los números (a); $(a+4)$; $(a+16)$ son los primeros términos de una progresión geométrica. Calcule la suma de sus diez primeros términos.

A) 59 049 B) 57 046 C) 59 048
D) 59 047 E) 58 048

26. Los números
$(x-5)$; $(x+1)$; $(x+13)$
son los tres primeros términos de una progresión geométrica. Calcule la suma de los $x+9$ primeros términos.

A) $3\times2^{20}-6$ B) $3^{19}-6$ C) $3^{20}-6$
D) $3\times2^{21}-6$ E) $3\times2^{22}-6$

27. Calcule el valor de la siguiente serie.
$S=2+6+18+54+162+486+1458+$
$+4374+13\,122$

A) 19 672 B) 18 682 C) 19 682
D) 19 622 E) 19 652

28. Calcule el valor de la siguiente serie.
$S=0,5+1+2+4+8+16+32+64+128+256+$
$+512+1024+2048$

A) 4096 B) 4095 C) 4094
D) 4093,5 E) 4095,5

29. Halle el valor de E.
$E=5^1+5^2+5^3+5^4+...+5^{30}$

A) $\frac{5^{31}-5}{4}$ B) $\frac{5^{31}-1}{4}$ C) $\frac{5^{30}+5}{4}$
D) $\frac{5^{31}+5}{4}$ E) $\frac{5^{32}-5}{4}$

30. Calcule el valor de la serie mostrada a continuación.
$A=3^1+3^3+3^5+3^7+...+3^{99}$

A) $\frac{3^{104}-3}{8}$ B) $\frac{3^{101}-1}{8}$ C) $\frac{3^{101}-3}{8}$
D) $\frac{3^{100}-3}{8}$ E) $\frac{3^{100}-1}{8}$

31. Halle el valor de la serie mostrada

$$S=\overbrace{3+5+9+17+\ldots}^{18\text{ términos}}$$

A) $2^{19}+2^3$ B) $2^{18}+2^6$ C) $2^{19}+2^4$
D) $2^{19}+2^5$ E) $2^{18}+2^5$

32. Calcule el valor de la siguiente serie.

$$E=\overbrace{11+102+1003+10\,004+\ldots}^{20\text{ términos}}$$

A) $\dfrac{10^{21}+1880}{9}$

B) $\dfrac{10^{21}+1980}{9}$

C) $\dfrac{10^{21}+1860}{9}$

D) $\dfrac{10^{21}+1780}{9}$

E) $\dfrac{10^{21}+1890}{9}$

33. Calcule el valor de la siguiente serie.

$$S=\overbrace{ab+a^2b^3+a^3b^5+a^4b^7+\ldots}^{ab\text{ términos}}$$

A) $\dfrac{ab\left(a^{ab}\cdot b^{2ab}-1\right)}{(ab)^2-1}$

B) $\dfrac{a^{ab+1}\cdot b^{2ab+1}-ab}{ab^2-1}$

C) $\dfrac{a^{ab+1}\cdot b^{2ab+1}-ab}{(ab)^2-1}$

D) $\dfrac{ab\left(a^{ab}\cdot b^{2ab}+1\right)}{ab^2-1}$

E) $\dfrac{ab^2\left(a^{ab}\cdot b^{2ab}-1\right)}{ab^2-1}$

34. Halle el valor de la siguiente serie.
$A=4+2+1+0{,}5+\ldots$

A) 8 B) 9 C) 16
D) 10 E) 12

35. Los números
$(x-5)$; $(x+7)$ y $(7x+1)$
son el segundo, el cuarto y el sexto término de una progresión geométrica creciente. Halle la suma de los 20 primeros términos de la progresión.

A) 8^7-1 B) 8^7-2 C) 8^8-1
D) 8^6-2 E) 8^6-1

36. Si $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ es una progresión geométrica creciente, además
$a_5=96$
$a_9=1536$
calcule el valor de $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{20}$.

A) $3(4^{10}-1)$ B) $6(16^5-1)$ C) $6(2^{19}-1)$
D) $2(2^{20}-1)$ E) $3^{20}-1$

37. Un sacerdote le confiesa un grave pecado a su sacristán que poco prudente se lo cuenta a un grupo de fieles. Cada uno de estos fieles le cuenta el pecado a otros dos fieles al cabo de 1 hora, y así sucesivamente se va transmitiendo el secreto. Si al cabo de 12 horas lo saben 12 285 fieles, ¿a cuántos fieles se lo contó inicialmente el sacristán?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

38. Calcule el valor de la siguiente serie.
$A=27+18+12+8+\ldots$

A) 69 B) 72 C) 81
D) 90 E) 84

39. Halle el valor de $A-B$.

$$A=\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{4}{5^4}+\frac{5}{5^5}+...$$

$$B=\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\frac{4}{5^5}+...$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

40. Calcule el valor de N.

$$N=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+...$$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{8}$

41. Halle el valor de A.

$A=0{,}1+0{,}02+0{,}003+0{,}0004+...$

A) $\frac{11}{80}$ B) $\frac{13}{80}$ C) $\frac{9}{80}$

D) $\frac{11}{81}$ E) $\frac{10}{81}$

42. Calcule el valor de la siguiente serie.

$$N=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...$$

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{6}{5}$

43. Halle el valor de E.

$$E=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+...$$

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

44. Calcule el valor de la serie dada a continuación.

$$S=\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{9}{4^3}+\frac{27}{4^4}+...$$

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$

D) 1 E) $\frac{4}{3}$

45. Halle el valor de la siguiente serie.

$$M=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}-\frac{1}{54}+...$$

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{16}$

D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{7}{8}$

46. La suma de los números de la última fila del triángulo numérico es 1010. Calcule la suma de todos los números del triángulo.

1.er nivel $\longrightarrow$	2
2.º nivel $\longrightarrow$	4 6
3.er nivel $\longrightarrow$	8 10 12
4.º nivel $\longrightarrow$	14 16 18 20
	⋮ ⋮ ⋮ ⋮

A) 3080 B) 3180 C) 3060

D) 3160 E) 3800

47. Halle el valor de D.

$D=1+3+6+10+15+...+190$

A) 1310 B) 1330 C) 1320

D) 1230 E) 1340

48. Calcule el valor de la siguiente expresión.

$$A=\underbrace{2+3+10+15+26+35+...}_{20\text{ sumandos}}$$

A) 2860 B) 2850 C) 2880

D) 2870 E) 2780

49. En la siguiente distribución numérica, halle la suma de los 20 primeros números ubicados en la línea diagonal señalada.

diagonal

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 18 19 20 21 22 23 24 25
⋰ ⋮ ⋱

A) 2890 B) 2900 C) 2870
D) 2930 E) 2910

50. En la siguiente distribución numérica, halle la suma de los 20 primeros números ubicados en la línea diagonal señalada.

diagonal

2
4 6
8 10 12
14 16 18 20
22 24 26 28 30
⋰ ⋮ ⋱

A) 3500 B) 3600 C) 3400
D) 3550 E) 3650

51. En el siguiente triángulo numérico, la suma de los números ubicados en el último nivel es 1331. Calcule la suma de todos los números del triángulo.

1.er nivel ⟶ 1
2.º nivel ⟶ 3 5
3.er nivel ⟶ 7 8 9
4.º nivel ⟶ 13 15 17 19
⋰ ⋮ ⋮ ⋱

A) 4376 B) 4256 C) 4366
D) 4266 E) 4356

52. Calcule el valor de la siguiente serie.

$$S=\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots+\frac{1}{18\times 19}+\frac{1}{19\times 20}$$

A) $\frac{9}{10}$ B) $\frac{11}{20}$ C) $\frac{9}{20}$
D) $\frac{11}{10}$ E) $\frac{13}{20}$

53. Halle el valor de la siguiente serie.

$$A=\frac{3}{5\times 8}+\frac{3}{8\times 11}+\frac{3}{11\times 14}+\ldots+\frac{3}{32\times 35}$$

A) $\frac{6}{35}$ B) $\frac{8}{35}$ C) $\frac{4}{35}$
D) $\frac{11}{35}$ E) $\frac{9}{35}$

54. Calcule el valor de la siguiente serie.

$$M=\frac{1}{3\times 7}+\frac{1}{7\times 11}+\frac{1}{11\times 15}+\ldots+\frac{1}{47\times 51}$$

A) $\frac{8}{51}$ B) $\frac{2}{51}$ C) $\frac{7}{51}$
D) $\frac{5}{51}$ E) $\frac{4}{51}$

55. Halle el valor de la siguiente serie.

$$N=\frac{9}{4\times 5}-\frac{11}{5\times 6}+\frac{13}{6\times 7}-\frac{15}{7\times 8}+\ldots-\frac{39}{19\times 20}$$

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{17}{20}$ E) $\frac{19}{20}$

56. Calcule el valor de la siguiente serie.

$$E=\frac{1}{2\times 10}+\frac{1}{5\times 16}+\frac{1}{8\times 22}+...+\frac{1}{29\times 64}$$

A) $\frac{7}{64}$ B) $\frac{5}{64}$ C) $\frac{3}{64}$

D) $\frac{1}{32}$ E) $\frac{3}{32}$

57. Halle la suma de todos los números de la distribución numérica mostrada.

A) 2760
B) 2640
C) 2620
D) 2720
E) 2780

$$\begin{array}{r|l} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{15 números}} \\ & 4\quad 6\quad 8\quad 10\ \cdots\ m \\ & 6\quad 8\quad 10\ \cdots\ m \\ \text{15} & 8\quad 10\ \cdots\ m \\ \text{números} & 10\qquad m \\ & \vdots\quad \iddots \\ & m \end{array}$$

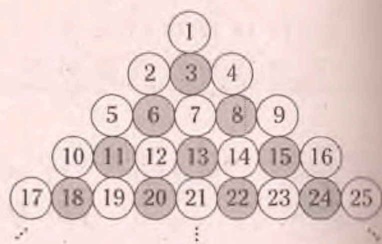
58. Calcule la suma de todos los números de la distribución numérica mostrada.

$$\begin{array}{l} \qquad\ 1\times 3\quad 2\times 4\quad 3\times 5\quad 4\times 6\ \ldots\ 9\times 11 \\ 1\times 3\quad 2\times 4\quad 3\times 5\quad 4\times 6\ \ldots\ 9\times 11 \\ 2\times 4\quad 3\times 5\quad 4\times 6\ \ldots\ 9\times 11 \\ 3\times 5\quad 4\times 6\ \ldots\ 9\times 11 \\ 4\times 6\ \ldots\ 9\times 11 \\ \ \vdots\qquad \iddots \\ 9\times 11 \end{array}$$

A) 2610 B) 2970 C) 2680

D) 2950 E) 2960

59. Halle la suma de todos los números ubicados en los círculos sombreados, si la figura presenta 14 niveles horizontales.



A) 8473 B) 8363 C) 8461

D) 8463 E) 8465

60. A una fiesta asisten los números enteros del 1 al 10 y se van saludando de dos en dos todos contra todos. Cada saludo vale el producto de los números intervinientes; por ejemplo, si se saludan el 2 y el 5, su saludo vale $2\times 5=10$. ¿Cuánto suman todos los saludos?

A) 2640 B) 2660 C) 2620

D) 2680 E) 2650

Conteo de figuras

Capítulo XX

OBJETIVOS

- Establecer un adecuado orden al momento de clasificar figuras y formas.
- Establecer una forma de contar, de manera práctica y certera, formas y objetos.
- Recurrir rápidamente a la inspección o al razonamiento inductivo y/o deductivo para el análisis de diversas figuras compuestas.

Métodos de conteo

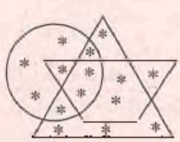
CONTEO DIRECTO

Por simple inspección

En este caso, la búsqueda de los elementos no se realiza con método especial alguno, sino se hace a simple vista, mirando lo que nos interesa y dejando de mirar lo que no queremos contar.

Ejemplo

¿Cuántos asteriscos pertenecen exactamente a dos figuras?

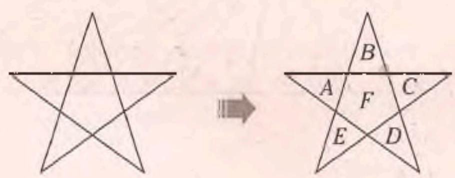


Por combinación

En este caso se asigna una letra a cada región y se toman individualmente o agrupadas para formar las figuras que queremos contar.

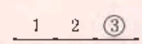
Ejemplo

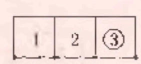
¿Cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura?

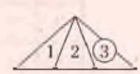


CONTEO POR INDUCCIÓN

Se realiza cuando la figura presenta cierta secuencia de repetición.

n.º de segmentos 

n.º de cuadriláteros 

n.º de triángulos 

n.º de sectores circulares 

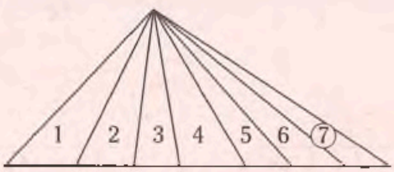
n.º de ángulos 

En las figuras mostradas, la numeración solo se ha hecho para ③. En el caso de que la numeración sea hasta n, el total de figuras indicadas estará dada por la expresión.

$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Ejemplo

El número de triángulos que hay en el siguiente gráfico



es $\dfrac{7\times 8}{2}=28$

A partir del conteo por inducción se llega a establecer el conteo para los siguientes gráficos.

Conteo de cuadriláteros

1	2	3	...		ⓐ
2			...		
3			...		
⋮			⋮ ⋮		
ⓑ			...		

$$\text{n.º de cuadriláteros}=\left(\frac{a(a+1)}{2}\times\frac{b(b+1)}{2}\right)$$

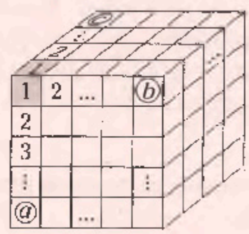
Conteo de cuadrados

1	2	3	4	...	ⓐ
2				...	
3				...	
⋮				⋮ ⋮	
ⓑ					

$$\text{n.º de cuadrados}=\left(\begin{array}{c} ⓐ\times ⓑ \\ (a-1)\times(b-1) \\ (a-2)\times(b-2) \\ (a-3)\times(b-3) \\ \vdots \end{array}\right)+$$

Hasta que uno de los factores sea igual a 1.

Conteo de paralelepípedos y cubos



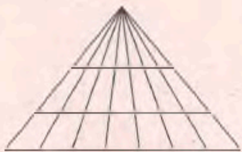
$$\text{n.º de paralelepípedos}=\left(\frac{a(a+1)}{2}\times\frac{b(b+1)}{2}\times\frac{c(c+1)}{2}\right)$$

$$\text{n.º de cubos}=\left(\begin{array}{c} ⓐ\times ⓑ\times ⓒ \\ (a-1)\times(b-1)\times(c-1) \\ (a-2)\times(b-2)\times(c-2) \\ \vdots\qquad\vdots\qquad\vdots \end{array}\right)+$$

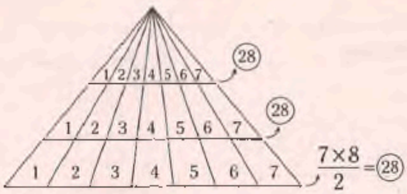
Hasta que uno de los factores sea igual a 1.

Problema N.° 1

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución



Por lo tanto, el total de triángulos será 28×3=84.

Problema N.° 2

¿Cuántos cuadriláteros que tengan por lo menos un asterisco hay en la siguiente figura?

	*		*	
*		*		*
	*		*	
	*		*	

Resolución

Primero hallaremos el total de cuadriláteros y luego le quitaremos el número de cuadriláteros que no tienen asterisco alguno, de esta manera nos quedarán los que tienen por lo menos un asterisco.

1	2	3	4	5
2				
3				
4				

$$\left(\begin{matrix}\text{total de}\\ \text{cuadriláteros}\end{matrix}\right)=\left(\frac{4\times 5}{2}\right)\left(\frac{5\times 6}{2}\right)=150$$

Contemos los cuadriláteros que no tienen asterisco, de manera directa.

$$\left(\begin{matrix}\text{cuadriláteros}\\ \text{sin asterisco}\end{matrix}\right)=1+1+1+1+1+3+3+3$$

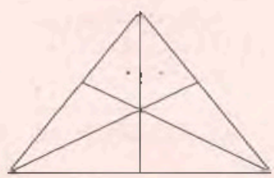
$$\left(\begin{matrix}\text{cuadriláteros}\\ \text{sin asterisco}\end{matrix}\right)=14$$

Por lo tanto, el número de cuadriláteros que tienen por lo menos un asterisco es igual a

150−14=136.

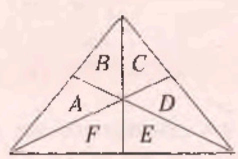
Problema N.° 3

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Resolución

Aplicaremos el conteo directo, específicamente haremos el conteo combinando regiones. Así:



Triángulos de...

1 región: (A); (B); (C); (D); (E); (F) ——— 6

2 regiones: (AB); (CD); (EF) ——— 3

3 regiones: (ABC); (BCD); (CDE);
(DEF); (EFA); (FAB) ——— 6

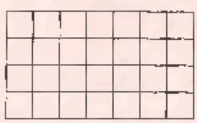
6 regiones: $(ABCDEF)$ ——— 1

total: 16

Por lo tanto, hay 16 triángulos en total.

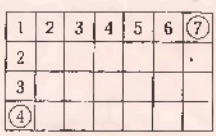
Problema N.º 4

¿Cuántos cuadriláteros que no son cuadrados hay en la siguiente figura?



Resolución

Primero contaremos cuántos cuadriláteros hay en total y luego le restaremos el número de cuadrados existentes, de esta forma tendremos los cuadriláteros que no son cuadrados.



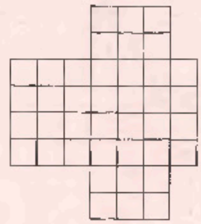
$$\text{n.º de cuadriláteros}=\left[\frac{4\times 5}{2}\right]\left[\frac{7\times 8}{2}\right]=280$$

$$\text{n.º de cuadrados}=\left[\begin{array}{l}7\times 4=28\\ 6\times 3=18\\ 5\times 2=10\\ 4\times 1=4\end{array}\right]+ \quad 60$$

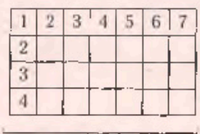
Por lo tanto, los cuadriláteros que no son cuadrados son 280−60=220.

Problema N.º 5

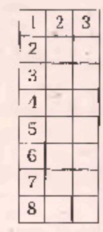
Calcule el número de cuadriláteros en el siguiente gráfico.



Resolución



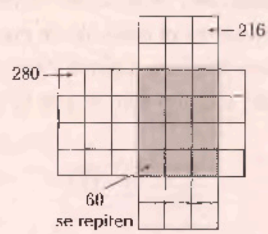
$$\left(\frac{4\times 5}{2}\right)\left(\frac{7\times 8}{2}\right)=280$$



$$\left(\frac{(8)(9)}{2}\right)\left(\frac{3\times 4}{2}\right)=216$$

$$\left(\frac{3\times 4}{2}\right)\left(\frac{4\times 5}{2}\right)=60$$

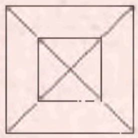
Luego, hacemos el conteo en el gráfico original



∴ n.º de cuadriláteros=280+216−60=436

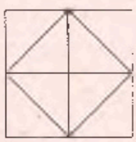
NIVEL BÁSICO

1. Halle el número de cuadriláteros en la siguiente figura.



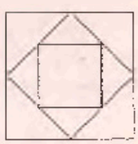
A) 12
B) 10
C) 14
D) 16
E) 18

2. Calcule el número de cuadriláteros en el siguiente gráfico.



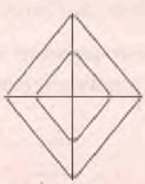
A) 16 B) 17 C) 20
D) 18 E) 14

3. Halle el número de pentágonos en el siguiente gráfico.



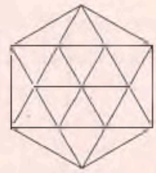
A) 32
B) 30
C) 28
D) 36
E) 40

4. Calcule el número de hexágonos en la siguiente figura.



A) 22 B) 24 C) 28
D) 32 E) 30

5. Calcule el número de triángulos en la siguiente figura.

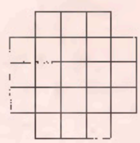


A) 40
B) 44
C) 46
D) 48
E) 52

6. Halle el número de pentágonos en la siguiente figura.

A) 57 B) 55 C) 54
D) 56 E) 59

7. ¿Cuántos cuadriláteros hay en el siguiente gráfico?

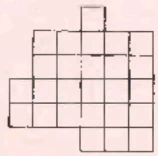


A) 140 B) 146 C) 160
D) 144 E) 136

8. ¿Cuántos cuadriláteros hay en el siguiente gráfico?

A) 70 B) 72 C) 76
D) 80 E) 75

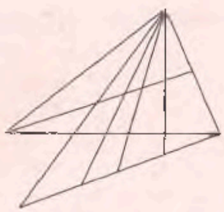
9. Determine cuántos cuadrados hay en la siguiente figura.



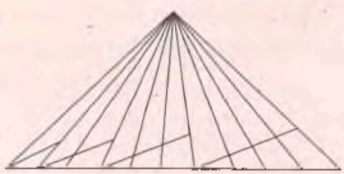
A) 48 B) 47 C) 46
D) 50 E) 52

10. Calcule el número de triángulos en el siguiente gráfico.

A) 47
B) 48
C) 49
D) 50
E) 51

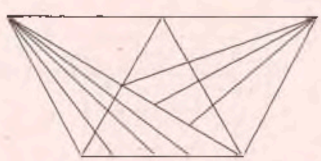


11. Calcule el número de triángulos en la siguiente figura.



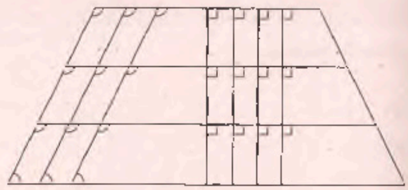
A) 80 B) 85 C) 84
D) 90 E) 95

12. Calcule el número de triángulos en la siguiente figura.



A) 55 B) 58 C) 59
D) 56 E) 57

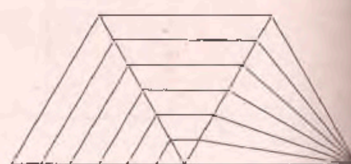
13. ¿Cuántos trapecios hay en el siguiente gráfico?



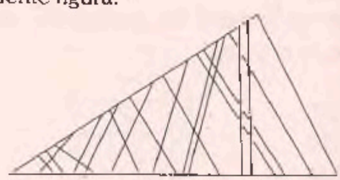
A) 112 B) 116 C) 118
D) 114 E) 120

14. ¿Cuántos cuadriláteros hay en la siguiente figura?

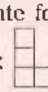
A) 44
B) 40
C) 52
D) 56
E) 48



15. Determine cuántos triángulos hay en la siguiente figura.



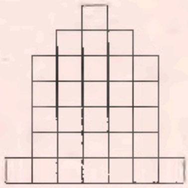
A) 63 B) 60 C) 61
D) 62 E) 65

16. ¿Cuántas figuras de la siguiente forma, tamaño y en cualquier posición:  (es formada por cuatro regiones simples) hay en el gráfico dado a continuación?

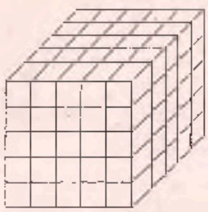
A) 68
B) 64
C) 62
D) 72
E) 70

17. ¿Cuántos octógonos formados por cuatro regiones simples se pueden contar en la siguiente figura?

A) 62
B) 63
C) 65
D) 64
E) 67



18. A un cubo de madera se le pinta de color blanco y después se le hacen marcas como se muestra a continuación. Luego se efectúan cortes por dichas marcas, obteniéndose pequeños cubitos de igual medida.

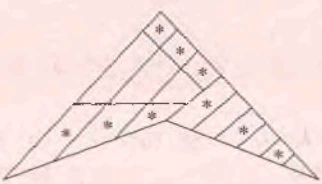


Si
A = número de cubitos que no tienen pintada de blanco cara alguna
B = número de cubitos que tienen exactamente dos caras pintadas de blanco
calcule $B-A$.

A) 7 B) 6 C) 9
D) 8 E) 10

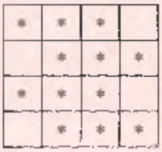
NIVEL INTERMEDIO

19. ¿Cuántos cuadriláteros tienen por lo menos un asterisco en la siguiente figura?



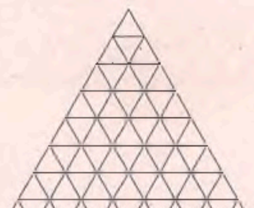
A) 44 B) 45 C) 46
D) 47 E) 48

20. ¿Cuántos cuadriláteros tienen por lo menos dos asteriscos en el siguiente gráfico?



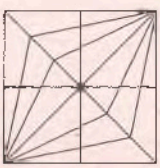
A) 72 B) 74 C) 76
D) 78 E) 80

21. ¿Cuántas figuras de la siguiente forma, tamaño y en cualquier posición:  (es decir, formada por cinco regiones simples) hay en el siguiente gráfico?



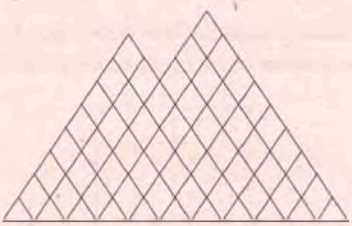
A) 114 B) 120 C) 108
D) 132 E) 126

22. Halle el número de triángulos en la siguiente figura.



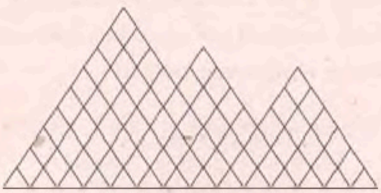
A) 72 B) 76 C) 80
D) 88 E) 84

23. Halle el número de triángulos en el siguiente gráfico.



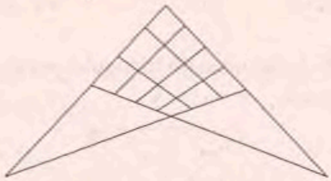
A) 62 B) 60 C) 58
D) 66 E) 64

24. Calcule el número de triángulos en el siguiente gráfico.



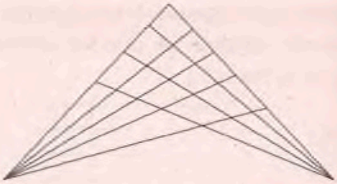
A) 76 B) 75 C) 74
D) 73 E) 71

25. Calcule el número de cuadriláteros en la siguiente figura.



A) 60 B) 61 C) 62
D) 63 E) 64

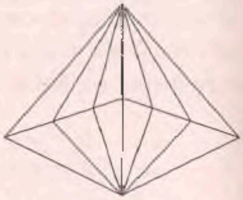
26. Calcule el número de cuadriláteros cóncavos en la siguiente figura?



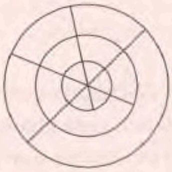
A) 55 B) 50 C) 64
D) 60 E) 65

27. Calcule el número de cuadriláteros en la siguiente figura.

A) 45
B) 42
C) 48
D) 51
E) 39



28. Calcule el número de sectores circulares en el siguiente gráfico.

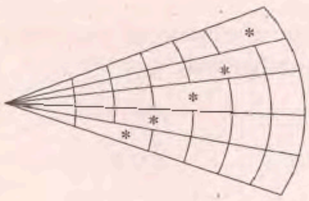


A) 64 B) 58 C) 56
D) 62 E) 60

29. Calcule el número de sectores circulares que tengan por lo menos un asterisco.

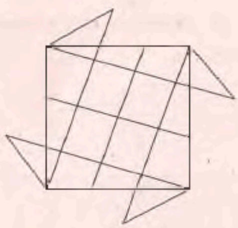
A) 103 B) 104 C) 102
D) 105 E) 106

30. Calcule el número de sectores circulares que tengan por lo menos un asterisco.



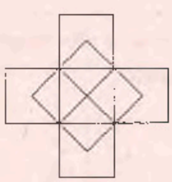
A) 30 B) 35 C) 40
D) 32 E) 36

31. Calcule el número de cuadriláteros en el siguiente gráfico.



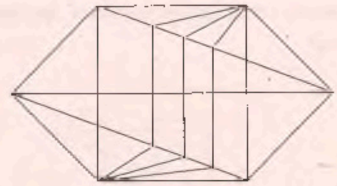
A) 92 B) 90 C) 94
D) 88 E) 86

32. Calcule el número de pentágonos en el siguiente gráfico.



A) 36 B) 32 C) 34
D) 30 E) 28

33. Calcule el número de triángulos en el siguiente gráfico.



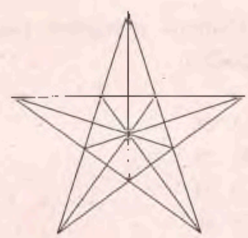
A) 48 B) 54 C) 52
D) 50 E) 46

34. Calcule el número de cuadriláteros en el siguiente gráfico.

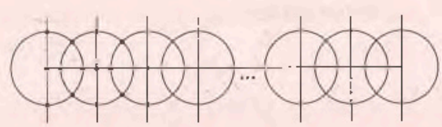
A) 126 B) 124 C) 120
D) 132 E) 142

35. Halle el número de segmentos del siguiente gráfico.

A) 100
B) 70
C) 60
D) 90
E) 80

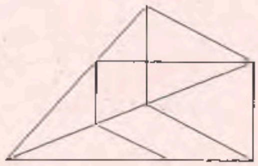


36. Calcule el número de puntos de corte (intersección), si hay 21 circunferencias.



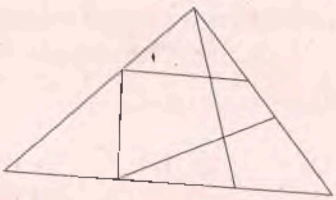
A) 140 B) 143 C) 146
D) 147 E) 150

37. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



A) 13 B) 12 C) 14
D) 15 E) 16

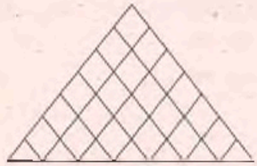
38. ¿Cuántos cuadriláteros hay en el siguiente gráfico?



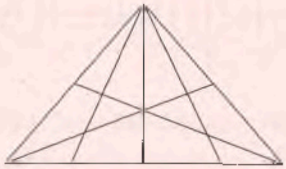
A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

39. ¿Cuántos triángulos hay en el siguiente gráfico?

A) 26
B) 28
C) 24
D) 30
E) 32

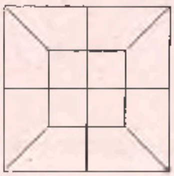


40. Calcule el número de triángulos en el siguiente gráfico.



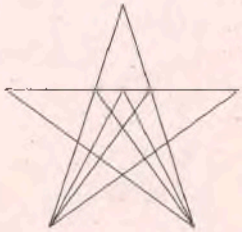
A) 41 B) 42 C) 40
D) 43 E) 45

41. Calcule el número de cuadriláteros en el siguiente gráfico.



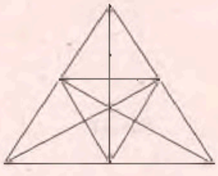
A) 28 B) 30 C) 29
D) 32 E) 31

42. Calcule el número de triángulos en la siguiente figura.



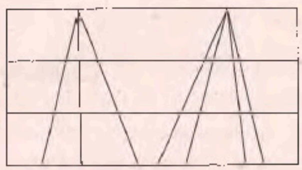
A) 55 B) 54 C) 53
D) 52 E) 51

43. Halle el número de cuadriláteros en el siguiente gráfico.



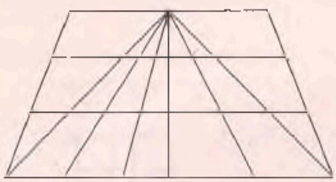
A) 36 B) 33 C) 24
D) 30 E) 27

44. Calcule el número de cuadriláteros en el siguiente gráfico.



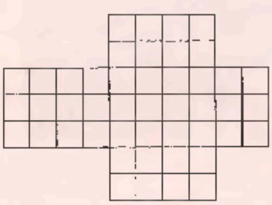
A) 189 B) 191 C) 193
D) 185 E) 187

45. Calcule el número de cuadriláteros en el siguiente gráfico.



A) 114 B) 127 C) 117
D) 113 E) 119

46. ¿Cuántos cuadriláteros hay en el siguiente gráfico?

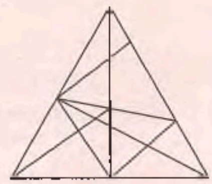


A) 550 B) 560 C) 530
D) 520 E) 540

47. ¿Cuántos cuadrados hay en el siguiente gráfico?

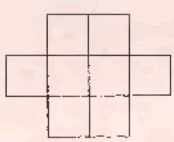
A) 110 B) 100 C) 90
D) 95 E) 105

48. ¿Cuántos triángulos hay en el siguiente gráfico?



A) 35 B) 32 C) 36
D) 33 E) 34

49. ¿Cuántos octógonos hay en la siguiente figura?



A) 26 B) 28 C) 30
D) 32 E) 34

Sucesos mínimos

Capítulo XXI

OBJETIVOS

- Aplicar los criterios teóricos necesarios para resolver problemas sobre sucesos mínimos.
- Afianzar su sentido de análisis frente a situaciones matemáticas nuevas que se le presenten.
- Ejercitar, más aún, su sentido de precisión, aprendiendo a escoger la opción más provechosa entre todas las que se le presenten.

Como se aprecia en el ejemplo, hay situaciones similares a este en las cuales a veces nos encontramos. Si no somos agudos en nuestro análisis, no saldremos airosos de tales situaciones.

El presente capítulo nos ayudará justamente a afianzar más aún nuestro sentido de análisis para afrontar dichas situaciones. Para tal efecto, comencemos por conocer algunos aspectos teórico-prácticos.

Problemas sobre certezas

Se reconoce a este tipo de problemas por tres palabras básicas que se encuentran presentes en la formulación de la pregunta: **extraer, mínimo** y **seguro.** Pueden ser exactamente estas palabras o sus equivalentes: seleccionar, escoger, sacar, la seguridad, certeza, etc.

Un ejemplo de este tipo de enunciado puede ser *¿Cuántas canicas como **mínimo** se deberán **extraer** para estar completamente **seguros** de que entre las elegidas se encuentren tres canicas blancas?*

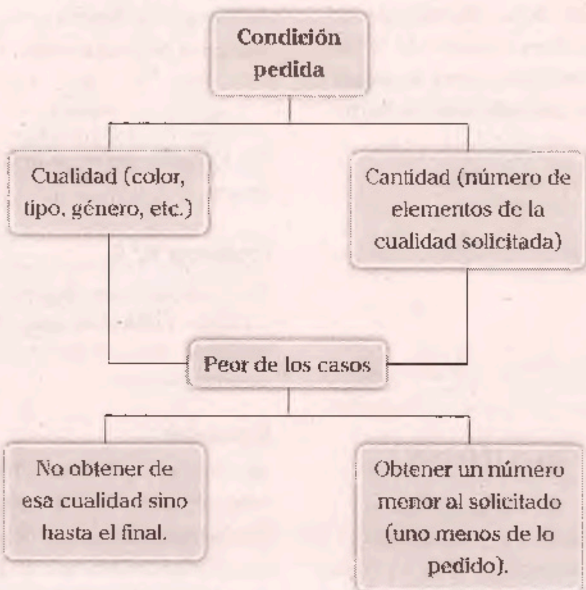
El objetivo de estos problemas es escoger entre varias posibilidades la más óptima, es decir, la que con el mínimo esfuerzo estemos completamente seguros de que va a ocurrir la condición planteada.

¿Qué es la certeza?

Es el conocimiento seguro y claro de algo; no hay temor de errar. Académicamente, es el proceso por el cual obtenemos con seguridad y anticipación el resultado de un problema.

Estrategia para la resolución de problemas de certezas

Para obtener la condición planteada, asumiremos que tenemos mala suerte, que lo pedido no ocurre sino hasta el final (cuando ya no hay otra opción), es decir, analizaremos el problema dirigiéndolo al caso más extremo (el peor de los casos).



Problemas Resueltos

Problema N.º 1

En una caja hay 30 bolos numerados del 1 al 30, todos con diferente numeración. ¿Cuántos bolos, como mínimo, se deben extraer al azar para tener la certeza de haber extraído, entre ellos, dos bolos con numeración impar menor que 17?

Resolución

Se tiene $\boxed{①②③ ... ㉚}$

Nos piden extraer dos de los bolos

$\underbrace{⑮⑬⑪⑨⑦⑤③①}_{8 \text{ bolos}}$

Se extraen

22 bolos (los que no piden)
2 bolos (los que piden)

Por lo tanto, se deben extraer 24 bolos.

Problema N.º 2

Álvaro tiene en una urna fichas numeradas del 1 al 14. ¿Cuál es el mínimo número de fichas que ha de extraer al azar para tener la seguridad de haber extraído cuatro fichas con numeración consecutiva?

Resolución

Se tiene $\boxed{①②③ ... ⑭}$

Se extraen

$\underbrace{①②③⑤⑥⑦ ⑨⑩⑪ ⑬⑭}_{11 \text{ fichas}}$ $\underbrace{●}_{\text{una más}}$

Por lo tanto, se deben extraer 12 fichas.

Problema N.º 3

¿Cuántas cartas se deben extraer, al azar y como mínimo, de una baraja completa para obtener con seguridad seis cartas de un mismo palo?

Resolución

Se tiene

cartas
13 ♥
13 ♦
13 ♠
13 ♣

➡ se extraen

5 ♥
5 ♦
5 ♠
5 ♣
1

Por lo tanto, se extraen en total 21 cartas.

Problema N.º 4

En una reunión se encuentran presentes 400 personas. ¿Cuántas personas, como mínimo, deberán llegar para que en dicha reunión tengamos la certeza de que están presentes dos personas del mismo sexo que tengan la misma fecha de cumpleaños?

Resolución

Para encontrar dos personas con la misma fecha de cumpleaños, se debe considerar como peor caso un año bisiesto (366 fechas diferentes). Entonces deben estar presentes $366+1=367$ personas y, para el problema, las 367 personas deben ser del mismo sexo.

Entonces deberían estar

$$\underbrace{366}_{\text{mujeres}} + \underbrace{366}_{\text{varones}} + 1 = 733$$

Por lo tanto, deberán llegar $733-400=333$ personas.

Problema N.º 5

De un juego de ajedrez (32 fichas en total), ¿cuántas fichas hay que extraer, al azar y como mínimo, para obtener con seguridad cuatro peones blancos?

Resolución

Se sabe que de las 32 fichas, 8 son peones blancos, que son las fichas que piden.

Entonces se extraen

24 fichas (las que no piden)
4 fichas (peones blancos)

Por lo tanto, se deben extraer 28 fichas.

NIVEL BÁSICO

1. En una urna se tienen 18 esferas numeradas del 1 al 9, dos de cada número. ¿Cuántas esferas se tienen que extraer, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de que con las extraídas se pueda formar un número de dos cifras múltiplo de 3?

A) 6 B) 8 C) 10
D) 11 E) 7

2. Se tienen tres cajas; en una hay 10 dados negros y 10 blancos, en la otra hay 10 esferas blancas y 10 negras, y en la última hay 10 chapas blancas y 10 negras. ¿Cuál es el menor número de objetos que se deben sacar de las tres cajas para tener necesariamente, entre ellos, un par de dados, un par de esferas y un par de chapas, todos del mismo color?

A) 21 B) 18 C) 27
D) 25 E) 17

3. En una reunión realizada en el mes de octubre se encuentran varias personas, quienes dicen haber nacido todas en dicho mes. Si tres de ellas cumplen años el día de la reunión, ¿cuántas personas hay, como máximo, si todas las demás tienen distintas fechas de cumpleaños?

A) 18 B) 31 C) 33
D) 64 E) 96

4. En una caja se tienen 20 dados, cada dado tiene en sus caras 2 letras A, 2 letras B y 2 letras C. ¿Cuántos dados, como mínimo, se necesitan lanzar para estar seguros de que en las caras superiores haya 3 letras iguales?

A) 7 B) 5 C) 3
D) 9 E) 12

5. En una urna se tienen $(2n+3)$ esferas amarillas, $(n+4)$ rojas, $(5n+2)$ blancas y $(7n+4)$ verdes. ¿Cuántas esferas, como mínimo, se deberán extraer al azar para tener la seguridad de obtener n $(n \geq 2)$ del mismo color en dos de los colores?

A) $10n+2$ B) $11n+1$ C) $12n-1$
D) $7n+5$ E) $7n-3$

6. Se tienen en una bolsa a caramelos de limón, b caramelos de menta y c caramelos de naranja. ¿Cuántos caramelos se deben extraer, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de obtener uno de cada sabor?
Obs.: $a > b > c$

A) $a+b+1$ B) $a+c+1$ C) $b+c+1$
D) $b+c-1$ E) $a+b+c-1$

7. En una urna hay 18 fichas numeradas del 3 al 20. ¿Cuántas fichas se deben extraer, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de obtener, entre ellas, 2 fichas cuyas numeraciones sumen 19?

A) 14 B) 13 C) 12
D) 10 E) 11

8. Se tienen 5 automóviles y 4 llaves, de las cuales 3 abren la puerta de 3 de ellos y la otra llave no abre ninguna puerta. ¿Cuántas veces, como mínimo, se tendrá que probar al azar las llaves para saber con certeza a qué automóvil corresponde cada una?

A) 4 B) 5 C) 17
D) 14 E) 11

9. ¿Cuántos dados se deben lanzar, como mínimo, para estar seguros de observar dos dados, cuyo resultado sea el mismo o dos dados cuya suma de puntos obtenidos sea un número impar?

A) 4 B) 3 C) 7
D) 5 E) 6

10. En una reunión se encuentran presentes 130 personas. ¿Cuántas personas, como mínimo, deberán llegar para que en dicha reunión tengamos la certeza de que están presentes 9 personas del mismo sexo que hayan nacido el mismo mes?

A) 59 B) 67 C) 63
D) 75 E) 60

11. En una caja se tienen 10 monedas de S/.1, 20 monedas de S/.0,50 y 30 monedas de S/.0,20. Determine el número de monedas que se debe extraer, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de obtener 6 monedas del mismo valor en dos de tres valores?

A) 29 B) 24 C) 36
D) 16 E) 41

12. Fernando tiene en una urna 12 fichas numeradas del 1 al 12. ¿Cuál es el mínimo número de fichas que ha de extraer al azar para tener la seguridad de haber extraído 3 fichas con numeración consecutiva?

A) 9 B) 6 C) 10
D) 8 E) 7

13. Se tienen 8 candados y 2 manojos de llaves, uno de 6 y otro de 5. Se sabe que cada llave del manojo de 6 abre su candado respectivo y el otro manojo tiene las otras llaves que abren los demás candados. ¿Cuántas veces, como mínimo, se tendrán que probar al azar las llaves para saber con seguridad qué llave corresponde a cada uno de los 8 candados?

A) 35 B) 34 C) 32
D) 36 E) 40

14. Una bolsa contiene 10 canicas: 1 roja, 2 blancas, 3 azules y 4 amarillas. Si de la bolsa se extraen 5 canicas al azar, sucesivamente y sin reposición, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

I. Al menos dos canicas tienen colores diferentes.
II. Al menos dos canicas tienen el mismo color.
III. Alguna canica es amarilla.

A) I y II
B) solo II
C) solo I
D) II y III
E) I, II y III

15. En una urna hay 45 fichas, de las cuales 12 están numeradas con la cifra 2; 8, con la cifra 5; 10, con la cifra 4, y el resto; con la cifra 7. ¿Cuántas fichas se deben extraer al azar, como mínimo, para tener la certeza de obtener, entre ellas, 3 fichas con numeración diferente que sumen exactamente 11?

A) 38 B) 35 C) 40
D) 37 E) 36

16. Se dispone una balanza de 2 platillos y 24 pesas distintas: 10 gramos, 20 gramos, 30 gramos y 240 gramos. Si se escogen 5 pesas al azar y se ubican en el brazo derecho de la balanza, ¿cuántas pesas de las restantes se deben escoger, al azar y como mínimo, para ubicarlas en el brazo izquierdo y tener la certeza de que este brazo se inclinará mucho más que el otro?

A) 14 B) 18 C) 17
D) 15 E) 16

17. En una urna se tienen 20 boletos numerados del 1 al 20. Se premiará al que saque al azar una cierta cantidad de boletos, cuya suma de sus valores sea no menor que 30. ¿Cuántos boletos se deben extraer, como mínimo, para estar seguros de recibir un premio?

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

18. De 10 esferas negras, 8 esferas azules, 7 blancas y 11 esferas verdes, ¿cuál es el mínimo número de esferas que hay que sacar al azar para tener la certeza de haber extraído, por lo menos, cinco del mismo color en dos colores?

A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

19. Se tienen 3 cajas rotuladas que indican el contenido de las mismas, tal como se muestra en el siguiente gráfico:

¿Cuántas letras se tienen que extraer, como mínimo, para tener la certeza de que con las extraídas se forme la palabra UCH pero con letras del mismo color?

A) 14 B) 17 C) 15
D) 16 E) 18

20. En una urna se tienen 35 lapiceros: 9 de color negro, 14 de color azul y el resto de color rojo. Indique cuántos lapiceros se deben extraer, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de obtener lo siguiente:

I. Todos los lapiceros de un mismo color
II. Un lapicero de cada color
III. Dos lapiceros de diferente color

Dé como respuesta la suma de las tres cantidades obtenidas.

A) 74 B) 75 C) 76
D) 72 E) 73

NIVEL INTERMEDIO

21. En una reunión se sabe que el número de mujeres excede al de los hombres en 4. Si el número máximo de personas que se deben seleccionar, al azar, para estar seguros de formar con ellos 4 parejas de baile es 20, ¿cuántas son las mujeres en total?

A) 12 B) 14 C) 10
D) 18 E) 16

22. Se tiene un juego de 7 llaves rojas y otro juego de 7 llaves blancas; uno de los juegos contiene llaves que corresponden a 6 candados diferentes. ¿Cuántos intentos, como mínimo, se deben realizar para determinar con seguridad la correspondencia de las 6 llaves con sus candados?

A) 27 B) 34 C) 33
D) 30 E) 28

23. Se tienen 120 fichas numeradas del 1 al 120. Si se quiere obtener 2 fichas de 2 cifras que tengan en su numeración cifras iguales. ¿Cuántas fichas se deben extraer, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de que esto ocurra?

A) 112 B) 111 C) 114
D) 113 E) 109

24. En una caja hay caramelos de tres sabores distintos. ¿Cuántos se deben extraer, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de obtener dos caramelos del mismo sabor?

A) 2 B) 4 C) 5
D) 1 E) 3

25. Dentro de una caja se tienen 6 plumones verdes, 8 negros, 12 azules y 15 amarillos. ¿Cuántos plumones se deben extraer, al azar y como mínimo, para tener la seguridad de haber obtenido 2 de color negro y 3 amarillos?

A) 29 B) 30 C) 32
D) 35 E) 36

26. En un cesto hay 10 polos negros, 12 amarillos y 15 verdes. ¿Cuál es el menor número de polos que se debe extraer, al azar, para obtener con seguridad 3 polos de diferentes colores?

A) 23 B) 26 C) 29
D) 27 E) 28

27. En una caja se tienen 5 cubos blancos y 5 cubos negros; en otra caja se tienen 8 esferas negras y 7 esferas blancas. Si las 2 cajas se introducen en una caja grande, ¿cuántos objetos se deberán extraer, al azar y como mínimo, para obtener con seguridad 2 objetos diferentes del mismo color?

A) 7 B) 9 C) 10
D) 11 E) 16

28. En una caja se tienen 6 pares de medias azules, 5 pares de medias rojas y 12 pares de medias negras. ¿Cuántas medias tendrán que extraerse, al azar y como mínimo, para obtener con certeza un par de medias del mismo color?

A) 11 B) 2 C) 13
D) 4 E) 5

29. En una urna hay esferas de diferentes colores y cantidades: 15 rojas, 17 azules, 20 amarillas y n verdes. ¿Cuántas esferas se deben extraer, al azar y como mínimo, para obtener con certeza 7 esferas azules y 5 esferas rojas?

A) 42 B) 43 C) $42+n$
D) $43+n$ E) 45

30. En una urna se tienen depositadas 16 esferas rojas, 15 verdes, 20 blancas, 10 azules y 8 negras. ¿Cuántas esferas se deben sacar, al azar y como mínimo, para estar seguros de obtener 12 esferas del mismo color en 2 de los 5 colores?

A) 48 B) 54 C) 57
D) 61 E) 63

31. En una caja se tienen esferas numeradas del 1 al 20. ¿Cuántas esferas se deben extraer, al azar y como mínimo, para obtener con certeza un número primo mayor que 7?

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

32. Un portero tiene 3 manojos de 5 llaves aparentemente iguales, cada uno. Un manojo corresponde a una serie de 4 candados pero no sabe a cuál. ¿Cuántas llaves tendrá que probar, al azar y como mínimo, para lograr relacionar con seguridad los candados con sus respectivas llaves?

A) 10 B) 15 C) 20
D) 24 E) 25

33. Se tienen 4 cajas rotuladas que indican su contenido. ¿Cuántas figuras hay que extraer, al azar y como mínimo, para obtener con certeza una figura de cada tipo (las 4 figuras del mismo color)?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

34. Robert guarda sus medias en una bolsa. ¿Cuántas medias tendrá que extraer, al azar y como mínimo, para obtener con seguridad 2 pares de medias utilizables del mismo color, si hay 5 pares de medias azules, 10 medias negras y 4 pares de medias blancas?

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

35. Se tienen 3 candados cuyas llaves fueron confundidas en un manojo de 22 llaves. ¿Cuántos intentos, como mínimo, se tendrán que realizar para saber con seguridad qué llave abre cada candado?

A) 3 B) 6 C) 59
D) 60 E) 61

36. Se tiene una urna que contiene 10 bolitas azules, 9 blancas y 6 amarillas. Un niño saca al azar 6 bolitas reemplazándolas por otras 6 de color verde. Si luego viene su hermanito, ¿cuántas bolitas deberá extraer, como mínimo, para tener la seguridad de haber extraído 2 de color verde?

A) 19 B) 20 C) 21
D) 22 E) 23

37. En una reunión están presentes 25 personas. ¿Cuántas personas deben llegar, como mínimo, para tener la certeza de encontrar a 6 personas cuyos cumpleaños coincidan en el mismo mes?

A) 36 B) 35 C) 26
D) 25 E) 46

38. En un saco se tienen 8 pares de guantes de box blancos, 6 pares de guantes de box rojos, 8 chalinas rojas y 6 chalinas blancas. ¿Cuántos objetos se tienen que extraer, al azar y como mínimo, para tener con seguridad un par de guantes utilizables y una chalina, todos del mismo color?

A) 18 B) 20 C) 23
D) 24 E) 25

39. En una urna se ubican esferas numeradas del 1 hasta el 58. ¿Cuántas esferas se deben extraer, al azar y como mínimo, para obtener con seguridad esferas cuya suma sea mayor que 100?

A) 10 B) 12 C) 13
D) 14 E) 16

40. En una reunión se encuentran reunidas 150 personas. ¿Cuántas personas deben llegar, al azar y como mínimo, para tener la certeza que entre todos ellos hay 3 personas con la misma fecha de cumpleaños (día y mes)?

A) 583 B) 580 C) 680
D) 571 E) 562

Introducción al análisis combinatorio

Capítulo XXII

Objetivos

- Saber qué es un factorial, cuáles son las técnicas de conteo y qué son permutaciones y combinaciones.
- Reconocer y diferenciar entre una permutación y una combinación y resolver los problemas sobre estos conceptos.
- Comprender que los conceptos de este capítulo se pueden aplicar para resolver problemas en nuestra vida diaria y también tienen aplicación en otras áreas de la matemática, como la estadística.

Muchas veces nos hemos hallado en situaciones parecidas a la de nuestra amiga del ejemplo, en la cual nos preguntamos de cuántas maneras diferentes ocurren ciertos sucesos de nuestro alrededor. En este capítulo estudiaremos y desarrollaremos los diferentes criterios que existen para determinar el número de ocurrencia de eventos o sucesos y su aplicación a situaciones concretas.

Factorial de un número ($n!$ o $\underline{\lfloor n}$)

El factorial de un número n, entero y positivo, se define como el producto consecutivo desde la unidad hasta el número n inclusive. Es decir

$$\boxed{n! = \underline{\lfloor n} = 1\times2\times3\times4\times\ldots\times(n-2)\times(n-1)\times n}$$

$$\boxed{n! = \underline{\lfloor n} = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times4\times3\times2\times1};\ n\in\mathbb{Z}^+$$

Ejemplos

- $2!=2\times1=2$
- $3!=3\times2\times1=6$
- $4!=4\times3\times2\times1=24$
- $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$
- $6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$
- $7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$
- $8!=8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=40\,320$
- $9!=9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=362\,880$
- $10!=10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=3\,628\,800$

NOTA

Se observa que, a partir del desarrollo de 5!, los resultados terminan en la cifra 0.

1.
   - $(-3)! \rightarrow$ no está definida
   - $-3!=-6$
   - $\left(\frac{2}{3}\right)! \rightarrow$ no está definida
   - $\frac{2!}{3!}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
2. Por convención: $0!=1!=1$
3. También se puede expresar un factorial en términos de otro factorial menor (degradación de un factorial)

$$8!=8\times7\times\overbrace{\underbrace{6\times5\times4\times3\times2\times1}_{6!}}^{7!}$$

$8!=8\times7!$

$8!=8\times7\times6!$

$8!=8\times7\times6\times5!$

En general, el factorial de un número se puede descomponer en el producto de 2, 3, 4 o más factores.

$$n!=n\times(n-1)!=n\times(n-1)\times(n\times2)!=...$$

COFACTORIAL O SEMIFACTORIAL DE UN NÚMERO ($n!!$)

Se define para un n entero positivo de la siguiente manera:

Para n par: producto de números pares

Desde 2 hasta el número n inclusive.

$4!!=2\times4$

$8!!=2\times4\times6\times8$

$12!!=2\times4\times6\times8\times10\times12$

En general

$$n!!=2\times4\times6\times8\times...\times n;\ n \text{ es par}$$

Para n impar: producto de números impares

Desde 1 hasta el número n inclusive.

$3!!=1\times3$

$7!!=1\times3\times5\times7$

$13!!=1\times3\times5\times7\times9\times11\times13$

En general

$$n!!=1\times3\times5\times7\times...\times n;\ n \text{ es impar}$$

Principios fundamentales de conteo

En lo que respecta a técnicas de conteo, tenemos dos principios importantes: el principio de adición y el principio de multiplicación.

PRINCIPIO DE ADICIÓN (O)

Si un evento o suceso A ocurre de n maneras y otro B ocurre de m maneras, entonces

El número de maneras en que puede ocurrir el evento A o el evento B es $n+m$.

NOTA

Un suceso o evento ocurre de una forma o de otra, mas no de ambas formas a la vez (no sucede en simultáneo).

Principio de multiplicación (y)

Conocido también como el principio fundamental del análisis combinatorio.

Si un evento A ocurre de n maneras diferentes seguido de otro evento B que ocurre de m maneras distintas, entonces

> El número de maneras en que puede ocurrir A y B es $n\times m$.

Nota

> Los sucesos o eventos ocurren uno a continuación de otro originando un suceso compuesto.

Permutación y combinación

Son los diferentes ordenamientos (permutaciones) o agrupaciones (combinaciones) que se pueden obtener con n elementos tomados de k en k.

n elementos $\xrightarrow{\text{ordenar}}$ k elementos

Sí importa el orden como se toman los elementos.

➡ P_k^n: permutaciones

n elementos $\xrightarrow{\text{agrupar}}$ k elementos

No importa el orden como se toman los elementos.

➡ C_k^n: combinaciones

Nota

> Se sugiere tener presente la importancia de discernir; si importa o no el orden de los elementos, ya que ello nos permitirá escoger entre una permutación (sí importa el orden) o una combinación (no importa el orden).

Permutación

Son los diferentes ordenamientos que se obtienen con n elementos tomados de k en k. En una permutación sí importa el orden como se toman los elementos. Tenemos tres tipos importantes de permutaciones.

Permutación lineal

- De algunos elementos

n elementos $\xrightarrow{\text{ordenar}}$ k elementos

$$\boxed{P_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}}\quad 0<k\leq n$$

Permutación de n elementos tomados de k en k

- De todos los elementos

n elementos $\xrightarrow{\text{ordenar}}$ n elementos

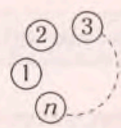
$$\boxed{P_n=n!}$$

Permutación de n elementos

Permutación circular

Se llama permutación circular cuando los elementos se ordenan formando una línea cerrada o cuando se ordenan alrededor de un objeto.

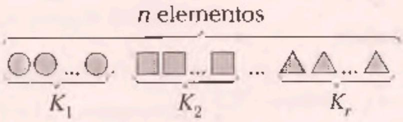
n elementos $\xrightarrow{\text{ordenar}}$



$$\boxed{P_{C(n)}=(n-1)!}$$

Permutación con elementos repetidos

Se van a ordenar n elementos, de los cuales hay algunos que se repiten



$$\boxed{P^n_{K_1;K_2;\ldots;K_r}=\frac{n!}{K_1!\times K_2!\times\ldots\times K_r!}}$$

donde

n: número total de elementos

K_1, K_2, ..., K_r: número de elementos repetidos en cada clase

$K_1+K_2+\ldots+K_r\leq n$

Combinación

Son los diferentes agrupamientos que se obtienen con n elementos tomados de k en k. En una combinación no importa el orden como se toman los elementos.

n elementos $\xrightarrow{\text{agrupar}}$ k elementos

$$\boxed{C^n_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}}\;;0\leq k\leq n$$

Combinaciones de n elementos tomados de k en k

Principales propiedades

$$\boxed{C^n_1=n}\rightarrow C^5_1=5$$

$$\boxed{C^n_n=1}\rightarrow C^7_7=1$$

$$\boxed{C^n_{k-1}+C^n_k=C^{n+1}_k}\rightarrow C^6_2+C^6_3=C^7_3$$

$$\underbrace{\boxed{C^n_k=C^n_{n-k}}}_{\text{números combinatorios complementarios}}$$

Ejemplos

- $C^{200}_{199}=C^{200}_1$
- $C^{10}_7=C^{10}_3$
- $C^{20}_{18}=C^{20}_2$

$$\boxed{C^n_k=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots}^{k\text{ factores}}}{k!}}$$

$$\boxed{C^n_1+C^n_2+C^n_3+\ldots+C^n_n=2^n-1}$$

Ejemplos

- $C^5_1+C^5_2+C^5_3+C^5_4+C^5_5=2^5-1=31$
- $C^{10}_2=\frac{10\times9}{2!}=\frac{10\times9}{2}=45$
- $C^{15}_3=\frac{15\times14\times13}{3!}=\frac{15\times14\times13}{6}=455$
- $C^{20}_4=\frac{20\times19\times18\times17}{4!}=\frac{20\times19\times18\times17}{24}=4845$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

Una persona puede viajar de A a B por vía aérea o por vía terrestre, y tiene a su disposición 2 líneas aéreas y 5 líneas terrestres. ¿De cuántas maneras distintas se puede realizar el viaje?

Resolución

Por el principio de adición

Puede viajar por vía:	aérea	o	terrestre
n.º de maneras:	2	+	5

$\therefore$ 2+5=7 maneras distintas

Problema N.º 2

Ana tiene 3 blusas diferentes y 4 faldas también diferentes. ¿De cuántas maneras se puede vestir?

Resolución

Por el principio de multiplicación

Para vestirse usará:	blusas	y	faldas
n.º de maneras:	3	$\times$	4

$\therefore$ 3×4=12 maneras diferentes

Problema N.º 3

Reduzca

$$E=\frac{(n!)!\times n!+(n!)!}{(n!-1)!\times n!}$$

Resolución

Por la degradación de un factorial

$$E=\frac{\cancel{(n!-1)!}(n!)\cdot n!+\cancel{(n!-1)!}(n!)}{\cancel{(n!-1)!}\cdot n!}$$

$$E=\frac{\cancel{n!}\cdot n!+\cancel{n!}}{\cancel{n!}}$$

$\therefore \quad E=n!+1$

Problema N.º 4

En una carrera participan cuatro atletas. ¿De cuántas maneras distintas pueden llegar a la meta, si llegan uno a continuación del otro?

Resolución

Si se les ubicara de maneras distintas, el orden importa; entonces

$$\text{4 atletas} \xrightarrow[\text{a todos}]{\text{se ordenan}} \text{4 lugares}$$

Por lo tanto, el número de maneras para llegar a la meta es $P_4=4!=24$.

Problema N.º 5

¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar seis alumnas en una fila de manera que Laura y Daniela siempre estén juntas?

Resolución

Ya que Laura y Daniela deben estar juntas, las consideramos como un solo elemento.

(Laura Daniela) ( ) ( ) ( ) ( )

Entonces debemos permutar cinco elementos y también debemos considerar la permutación entre Laura y Daniela.

Por lo tanto, el número de maneras de ubicarse es $P_5\times P_2=5!\times 2!=120\times 2=240$.

Problema N.º 6

Se tienen 5 cortes de tela, todos de distintos colores y un asta con lugar para 3 cortes de tela. ¿De cuántas maneras diferentes se puede confeccionar una bandera de 3 colores?

Resolución

Debemos ordenar 3 de los 5 cortes de tela.

Por lo tanto, el número de maneras para confeccionar la bandera es

$$P_3^5=\frac{5!}{2!}=\frac{120}{2}=60$$

Problema N.° 7

¿De cuántas maneras diferentes pueden ubicarse una pareja de esposos y sus cuatro hijos alrededor de una mesa, de modo que los esposos siempre estén juntos?

Resolución

Ya que los esposos deben estar juntos, los consideramos como un solo elemento.

Entonces para los 5 elementos $P_{c(5)}$ y para los esposos P_2.

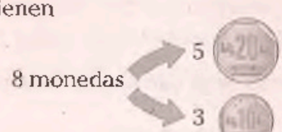
Por lo tanto, el número de maneras de ubicarse es $P_{c(5)} \times P_2 = 4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$.

Problema N.° 8

¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar alineadamente 8 monedas, de las cuales 5 son de 20 céntimos y 3 de 10 céntimos?

Resolución

Se tienen



Nos piden alinear las monedas (hay elementos repetidos).

Por lo tanto, el número de maneras de alinearlas es

$$P_{5;3}^{8} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times \cancel{6}} = 56$$

Problema N.° 9

¿De cuántas maneras diferentes puede elegirse a 3 personas para ejecutar un trabajo, si se dispone de 6 personas con igual eficiencia?

Resolución

Al ser las 6 personas de igual eficiencia, no buscamos ordenarlas sino agruparlas.

Por lo tanto, el número de maneras de elegirlas es

$$C_3^6 = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{720}{6 \times 6} = 20$$

Problema N.° 10

De un grupo de 6 varones y 5 mujeres se va a elegir un comité de 5 personas que está integrado por 2 mujeres y 3 varones. ¿Cuántos comités diferentes pueden ser elegidos?

Resolución

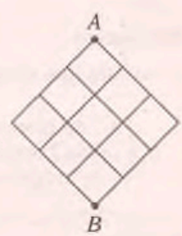
Buscaremos formar los grupos solicitados.

Elegiremos 3 varones de 6 y 2 mujeres de 5. Por lo tanto, el número de comités diferentes es

$$C_3^6 \times C_2^5 = \frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{720}{6 \times 6} \times \frac{120}{2 \times 6} = 200$$

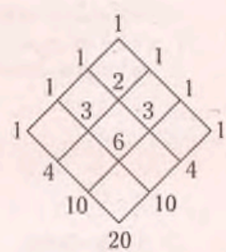
Problema N.° 11

¿De cuántas maneras diferentes se puede llegar del punto *A* hacia el punto *B* sin retroceder, siguiendo el camino indicado por las líneas del gráfico?



Resolución

Tomaremos caminos y veremos las formas de llegar a cada punto.



Por lo tanto, el número de maneras de ir de *A* hacia *B* es igual a 20.

Problema N.º 12

¿De cuántas maneras se puede leer la palabra ADUNI uniendo letras vecinas?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & A & & & \\ & & D & & D & & \\ & U & & U & & U & \\ N & & N & & N & & N \\ & I & & I & & I & \end{array}$$

Resolución

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \overset{1}{A} & & & & & \\ & & \overset{1}{D} & & \overset{1}{D} & & & & \\ & \overset{1}{U} & & \overset{2}{U} & & \overset{1}{U} & & & \\ \overset{1}{N} & & \overset{3}{N} & & \overset{3}{N} & & \overset{1}{N} & & \\ & \overset{4}{I} & & \overset{6}{I} & & \overset{4}{I} & \rightarrow & \underbrace{4+6+4=14}_{\text{suma de números de las letras finales}} & \end{array}$$

Por lo tanto, el número de maneras diferentes para leer la palabra ADUNI es 14.

Problema N.º 13

Siete amigas se sientan en una fila de siete asientos. ¿Dé cuántas maneras distintas pueden ubicarse en la banca si Sara y Virginia (dos de ellas) no desean sentarse juntas?

Resolución

Para este tipo de problemas se recomienda trabajar con el complemento de lo que piden, es decir

$$\begin{pmatrix}\text{n.º de maneras de ubicar}\\ \text{a las 7 amigas con Sara}\\ \text{y Virginia separadas}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{n.º total de maneras de}\\ \text{ubicar a las 7 amigas}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{n.º de maneras de ubicar}\\ \text{a las 7 amigas con Sara y}\\ \text{Virginia juntas}\end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{pmatrix}\text{n.º de maneras de ubicar}\\ \text{a las 7 amigas con Sara}\\ \text{y Virginia separadas}\end{pmatrix}=\underset{P_7}{\underset{\downarrow}{7!}}-\underset{\substack{\text{tomamos a}\\ \text{Sara y a Virginia}\\ \text{como un solo}\\ \text{elemento}\\ (P_6)}}{\underset{\downarrow}{6!}}\times \underset{\substack{\text{Sara y Virginia}\\ \text{permutan de lugar}\\ (P_2)}}{\underset{\downarrow}{2!}}$$

$\therefore\quad 7!-6!\times 2!=3600$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Una persona tiene 3 pares de zapatos y 4 pares de zapatillas. ¿De cuántas maneras puede elegir un par de calzados para vestirse?

A) 3 B) 4 C) 7
D) 12 E) 14

2. Un excursionista desea ir a Piura, y para ello cuenta con 3 posibilidades por vía aérea, con 4 posibilidades por vía terrestre, y con 2 posibilidades por vía marítima. ¿De cuántas maneras diferentes puede elegir la forma de viaje para ir a Piura?

A) 9 B) 12 C) 24
D) 18 E) 20

3. Un contribuyente debe pagar un recibo (de manera íntegra) en cualquiera de los 3 establecimientos siguientes: un banco, un supermercado o una botica. Si el banco cuenta con 2 sucursales; el supermercado, con 4 sucursales, y la botica, con 6 sucursales, todas ubicadas en diferentes puntos de la ciudad, ¿de cuántas maneras podría hacer efectivo dicho pago?

A) 10 B) 12 C) 20
D) 24 E) 48

4. Diego quiere hacerle un presente a su mamá y decide que le regalará un electrodoméstico. Si opta por un televisor, podrá elegir entre un Sony, un Panasonic o un LG. Si opta por una cocina, podrá elegir entre una General Electric, una Nova o una Indurama. Si opta por una refrigeradora, podrá elegir entre una Coldex, una Samsung o una Electrolux. ¿De cuántas maneras puede elegir el presente para su mamá?

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 27

5. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra MOLINA de manera continua (uniendo letras vecinas) en el siguiente diagrama?

```
      M
    O   O
  L   L   L
I   I   I   I
  N   N   N
    A   A
```

A) 20 B) 16 C) 32
D) 24 E) 28

6. ¿De cuántas formas se puede leer la palabra ÁRBOL de manera continua (uniendo letras vecinas) en el siguiente diagrama?

```
  A   A
R   R   R
  B   B
O   O   O
  L   L
```

A) 9 B) 12 C) 16
D) 18 E) 24

7. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra ÉXITOS de manera continua (uniendo letras vecinas) en el siguiente diagrama?

```
  E   E   E
X   X   X   X
  I   I   I
    T   T
  O   O   O
    S   S
```

A) 40
B) 42
C) 44
D) 46
E) 48

8. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra CAMINO de manera continua (uniendo letras vecinas) en el siguiente diagrama?

C C C
A A
M M M
I I I I
N N N
O O

A) 36 B) 38 C) 40
D) 44 E) 42

9. ¿De cuántas formas se puede leer la palabra ROSAS de manera continua (uniendo letras vecinas) en el siguiente diagrama?

R R R R
O O O
S S S S
A A A A A

A) 40 B) 50 C) 48
D) 44 E) 46

10. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra ISAÍAS de manera continua (uniendo letras vecinas) en el siguiente diagrama?

I
S S
A A A
I I I I

A) 8 B) 16 C) 32
D) 30 E) 20

11. ¿De cuántos modos se puede leer la palabra RADAR de manera continua (uniendo letras vecinas) en el siguiente diagrama?

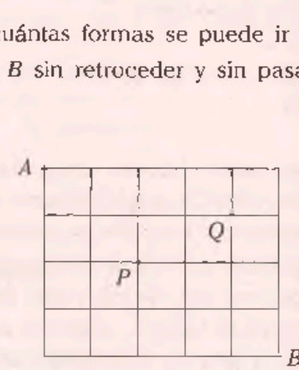
R R R
A A A A
D D D

A) 32 B) 34 C) 36
D) 38 E) 40

12. ¿De cuántas maneras se puede ir desde *A* hasta *B* sin retroceder?

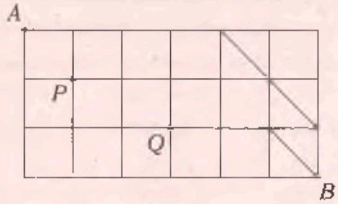
A) 16 B) 20 C) 32
D) 35 E) 36

13. ¿De cuántas formas se puede ir desde *A* hasta *B* sin retroceder y sin pasar por *P* ni *Q*?



A) 40 B) 42 C) 44
D) 46 E) 48

14. ¿De cuántos modos se puede ir desde A hasta B sin retroceder y sin pasar por P ni Q?



A) 32 B) 36 C) 38
D) 40 E) 42

15. Una persona entra a un restaurante y al momento de pedir el menú le ofrecen de entrada papa a la huancaína, ensalada rusa y ceviche; mientras que para el segundo le ofrecen lomo saltado, seco de res, estofado, pollo al horno y tallarines. ¿De cuántas maneras diferentes puede ordenar su menú?

A) 8 B) 10 C) 15
D) 18 E) 20

16. Carlos va a una tienda de discos con el propósito de comprar 2 CD: uno de *rock* y uno de salsa. En el local se encuentran disponibles 3 discos diferentes de *rock* y 2 discos diferentes de salsa. ¿De cuántas maneras diferentes puede elegir los CD que va a comprar?

A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

17. Un niño quiere comprar un lápiz y un tajador, pero al llegar a la librería encuentra lápices de 4 marcas distintas y tajadores de 3 modelos diferentes. ¿De cuántas formas puede elegir lo que quiere comprar?

A) 7 B) 10 C) 12
D) 15 E) 24

18. En una fiesta hay 8 damas y 5 varones. ¿De cuántas maneras se puede formar una pareja mixta de baile?

A) 5 B) 8 C) 13
D) 20 E) 40

19. Una persona tiene 4 pantalones diferentes, 3 camisas diferentes y 2 pares de zapatos diferentes. ¿De cuántas formas se puede vestir eligiendo una prenda de cada tipo?

A) 24 B) 12 C) 6
D) 9 E) 18

20. Leonel tiene 5 pares de zapatillas, 4 pantalones y 5 camisas (todas las prendas son diferentes). ¿De cuántas maneras diferentes puede combinar una prenda de cada tipo para vestirse, si el pantalón azul solo lo podrá usar cuando use la camisa verde y viceversa?

A) 60 B) 70 C) 100
D) 65 E) 14

21. ¿Cuántos números de tres cifras impares existen?

A) 60 B) 125 C) 64
D) 100 E) 45

22. ¿Cuántos números de dos cifras existen de modo que sus cifras sean distintas?

A) 81 B) 72 C) 90
D) 64 E) 56

23. ¿Cuántos números de tres cifras existen de modo que sus cifras sean distintas?

A) 648 B) 729 C) 720
D) 810 E) 576

24. ¿Cuántos números pares de tres cifras significativas existen?

A) 450 B) 270 C) 324
D) 360 E) 405

NIVEL INTERMEDIO

25. ¿Cuántos números impares de tres cifras significativas diferentes existen?

A) 260 B) 280 C) 240
D) 300 E) 320

26. ¿Cuántos números de cuatro cifras significativas existen de modo que las dos primeras sean pares y las dos últimas sean impares diferentes?

A) 400 B) 360 C) 380
D) 320 E) 340

27. ¿Cuántos números de tres cifras no presentan en su escritura ningún dígito primo?

A) 125 B) 120 C) 130
D) 100 E) 110

28. ¿Cuántos números de cuatro cifras significativas existen que no presenten en su escritura ninguna cifra par?

A) 130 B) 120 C) 180
D) 124 E) 125

29. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar los dos primeros lugares en un curso de Matemática, si se presentan ocho concursantes?

A) 64 B) 56 C) 60
D) 42 E) 48

30. ¿De cuántas formas pueden otorgarse las medallas de oro y de plata en una carrera en la que compiten seis atletas?

A) 36 B) 24 C) 28
D) 30 E) 32

31. ¿De cuántos modos pueden elegirse a un delegado, un subdelegado y un tesorero entre 10 que integran un grupo?

A) 700 B) 740 C) 760
D) 800 E) 720

32. ¿De cuántas maneras puede elegirse a un presidente, un vicepresidente, un vocero y un secretario entre 9 personas que se presentan como candidatas?

A) 3024 B) 3060 C) 3120
D) 3048 E) 3200

33. A un pueblo llegan 4 viajeros, y el pueblo tiene 3 grandes hoteles para hospedarlos. ¿De cuántas maneras pueden quedar hospedados los viajeros?

A) 125 B) 64 C) 81
D) 24 E) 36

34. ¿De cuántas formas pueden ocupar los 6 asientos de una camioneta para un viaje si en cada asiento debe ir una sola persona y hay 9 personas de las cuales solo 4 de ellas pueden conducir.

A) 26 820 B) 24 840 C) 28 640
D) 26 840 E) 26 880

35. ¿De cuántas maneras pueden izarse, una debajo de otra, 5 banderas diferentes si es necesario izar por lo menos 3 de ellas?

A) 320 B) 380 C) 340
D) 300 E) 360

36. ¿Cuántos códigos diferentes de 4 caracteres se pueden hacer con las 5 vocales y 10 dígitos, si los 2 primeros caracteres deben ser vocales y los 2 últimos dígitos?

A) 2400 B) 2500 C) 2320
D) 2600 E) 2100

37. ¿Cuántos códigos de 5 caracteres diferentes se pueden hacer con las 5 vocales y 10 dígitos, si los 3 primeros caracteres deben ser vocales y los 2 últimos dígitos?

A) 1250 B) 2500 C) 4800
D) 2400 E) 5400

38. Si 5 amigos compiten en una carrera donde para los 3 primeros lugares se dan las medallas de oro, de plata y de bronce. ¿De cuántas maneras pueden quedar distribuidas las medallas?

A) 60 B) 120 C) 720
D) 24 E) 240

39. Se tienen telas de 8 colores diferentes y se desea hacer una bandera tricolor de 3 franjas verticales. ¿De cuántas maneras se puede confeccionar la bandera?

A) 210 B) 332 C) 220
D) 336 E) 224

40. Un papá quiere matricular a sus 3 hijos, y cuenta con 4 colegios como posibilidades. ¿De cuántas formas pueden quedar matriculados los hijos?

A) 7 B) 64 C) 27
D) 81 E) 24

41. Halle x en

$$1!\,2^2+2!\,3^2+3!\,4^2+\ldots+20!\,21^2=x!-2!$$

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

42. Si

$$120(120!)^{24!}=(5!)^{(4!)!}(5+x)!,$$

calcule $(x+2)!$

A) 6 B) 1 C) 2
D) 120 E) 24

43. Se tienen 4 libros de Aritmética y 3 libros de Álgebra. ¿De cuántas formas se podrán ubicar en un estante donde solo entran 5 libros y deben estar alternados?

A) 224 B) 192 C) 256
D) 216 E) 360

44. Alrededor de una mesa circular de 6 asientos se ubican 2 niñas y 3 niños. ¿De cuántas formas podrán hacerlo, si el asiento vacío debe quedar entre las niñas?

A) 16 B) 8 C) 24
D) 6 E) 12

Áreas y perímetros de regiones sombreadas

Capítulo XXIII

OBJETIVOS

- Aplicar los conocimientos básicos geométricos para el cálculo del área de regiones.
- Distinguir el perímetro y el área de una región y saber relacionarlos adecuadamente.
- Resolver situaciones concretas referidas al cálculo de perímetro o área de una región señalada.

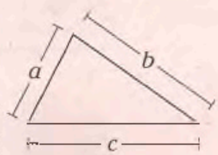
Perímetro de una región

Es la longitud de la línea que describe su borde, contorno o sus lados.

L: longitud de la circunferencia

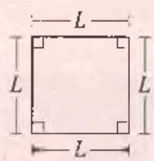
$$L = 2\pi R$$

T: perímetro de la región triangular



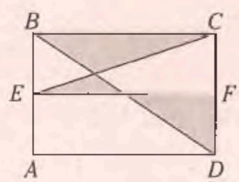
$$T = a + b + c$$

C: perímetro de la región cuadrada



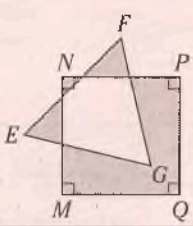
$$C = 4L$$

P: perímetro de la región sombreada



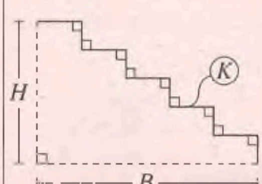
$$P = BC + CE + EF + BD + FD$$

Sean C el perímetro del cuadrado $MNPQ$ y T el perímetro del triángulo EFG. Además, K es el perímetro de la región sombreada.



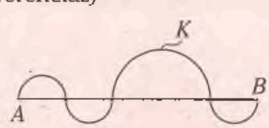
$$K = C + T$$

Longitud de la línea quebrada: K



$$K = H + B$$

Longitud de la línea curva: K (formada por semicircunferencias)



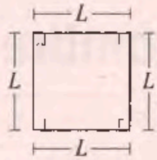
$$K = \frac{AB}{2} \times \pi$$

Área de una región

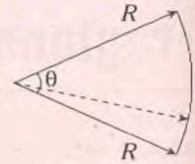
Es la medida del espacio que ocupa la figura (superficie).

$$\begin{pmatrix}\text{área del}\\ \text{círculo}\end{pmatrix} = \pi \times R^2$$

$$\begin{pmatrix}\text{área del}\\ \text{triángulo}\end{pmatrix} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$



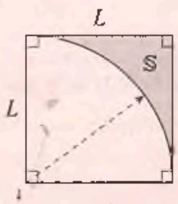
$$\begin{pmatrix}\text{área del}\\ \text{cuadrado}\end{pmatrix} = L^2$$

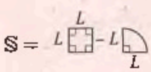


$$\begin{pmatrix}\text{área del}\\ \text{sector}\\ \text{circular}\end{pmatrix} = \frac{\pi R^2 \times \theta}{360^\circ}$$

Criterios para la resolución de algunas preguntas sobre áreas.

Por diferencia



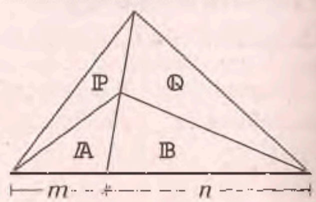


$$\mathbb{S} = L^2 - \frac{\pi L^2}{4}$$

Por traslado

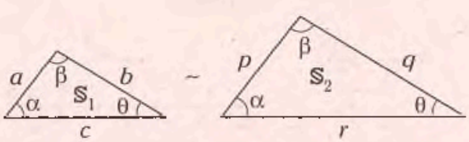
<>

Por proporcionalidad



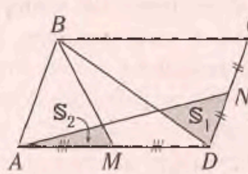
$$\frac{\mathbb{A}}{\mathbb{B}} = \frac{m}{n} \qquad \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{Q}} = \frac{m}{n}$$

Por semejanza



$$\frac{\mathbb{S}_1}{\mathbb{S}_2} = \left(\frac{a}{p}\right)^2 = \left(\frac{b}{q}\right)^2 = \left(\frac{c}{r}\right)^2$$

Por regiones notables

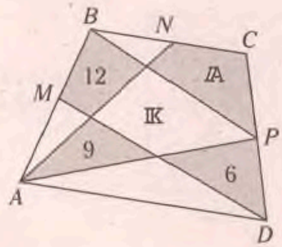


M y *N* son puntos medios

$$\mathbb{S}_1 = \frac{\mathbb{S}_{\square ABCD}}{12} \qquad \mathbb{S}_2 = \frac{\mathbb{S}_{\square ABCD}}{20}$$

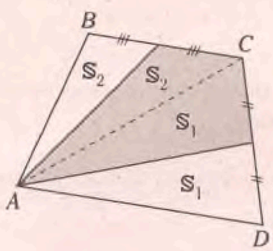
Problema N.º 1

En el gráfico, M, N y P son puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Calcule el valor de $\mathbb{A}$.

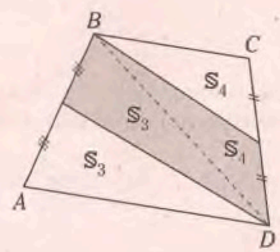


Resolución

Veamos



y



$$\begin{pmatrix}\text{área de lo}\\ \text{sombreado}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\square ABCD \qquad \begin{pmatrix}\text{área de lo}\\ \text{sombreado}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\square ABCD$$

Tienen el mismo valor

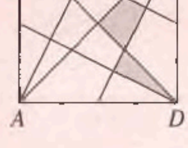
Luego en la figura del problema

$$12+\mathbb{K}+6=9+\mathbb{K}+\mathbb{A}$$

$\therefore\quad \mathbb{A}=9$

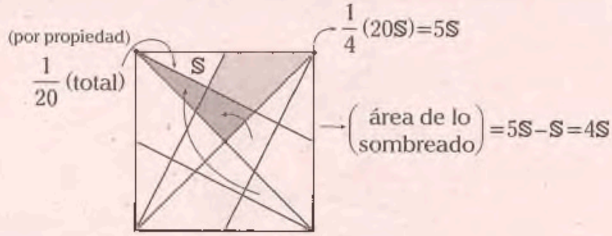
Problema N.º 2

Si $ABCD$ es un cuadrado y el área de la región sombreada es 36 m^2, calcule el área de la región de dicho cuadrado.



Resolución

Sea el área total 20$\mathbb{S}$.



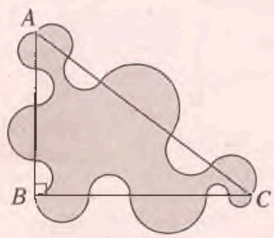
Por dato

$$4\mathbb{S}=36 \ \rightarrow \ \mathbb{S}=9$$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es 20(9) = 180 m^2.

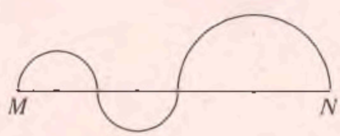
Problema N.º 3

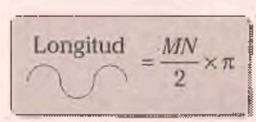
Si ABC es un triángulo rectángulo, en donde $AB=6$ m, $BC=8$ m y las líneas curvas son todas semicircunferencias, calcule el perímetro de la región sombreada.



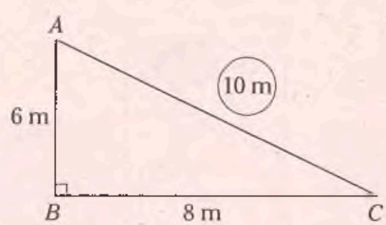
Resolución

Sabemos que

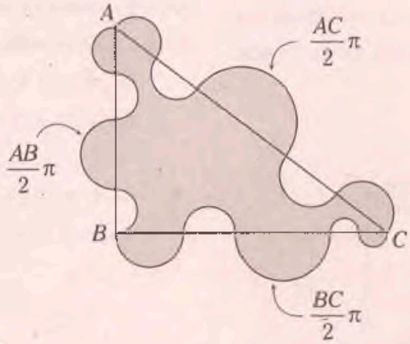




Además



Luego aplicando dicha relación en el gráfico dado tenemos

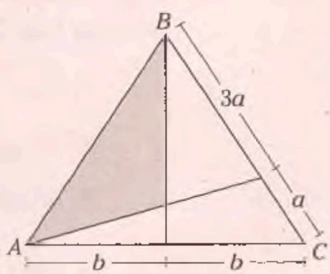


Por lo tanto, el perímetro de lo sombreado es

$$\frac{6\pi}{2}+\frac{8\pi}{2}+\frac{10\pi}{2}=12\pi \text{ m}$$

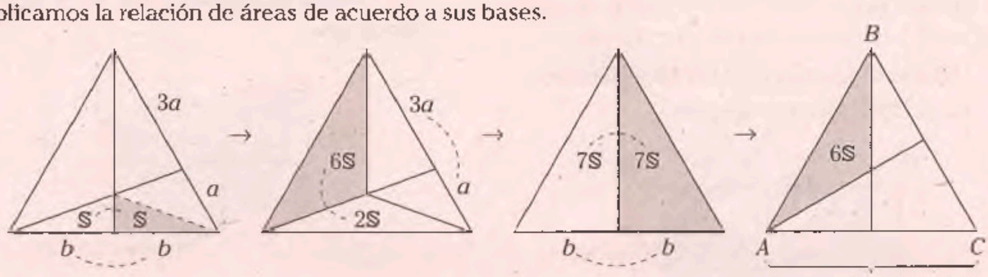
Problema N.º 4

En el gráfico, ¿qué parte del área de la región triangular ABC representa el área de la región sombreada?



Resolución

Aplicamos la relación de áreas de acuerdo a sus bases.



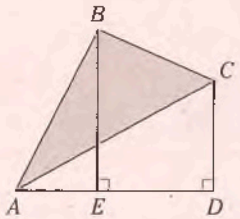
área total $\triangle ABC=14\mathbb{S}$

$$\frac{\text{área de lo sombreado}}{\text{área total }\triangle ABC}=\frac{6\cancel{\mathbb{S}}}{14\cancel{\mathbb{S}}}=\frac{3}{7}$$

Problemas Propuestos

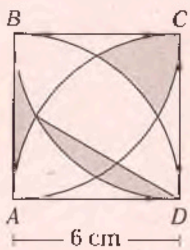
NIVEL BÁSICO

1. En el gráfico, $AE=3$ cm; $ED=5$ cm; $BE=6$ cm y $CD=4$ cm. Calcule el área de la región sombreada.



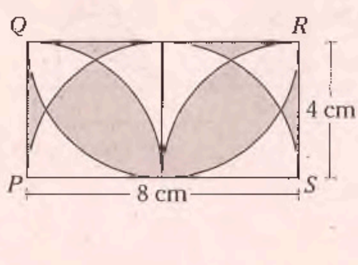
A) $16\ cm^2$ B) $15\ cm^2$ C) $18\ cm^2$
D) $20\ cm^2$ E) $21\ cm^2$

2. En el gráfico, $ABCD$ es un cuadrado. Determine el área de la región sombreada.



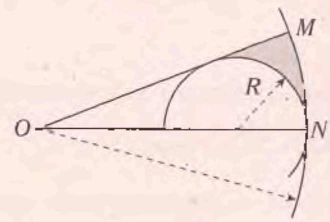
A) $2\pi\ cm^2$ B) $3\pi\ cm^2$ C) $4\pi\ cm^2$
D) $6\pi\ cm^2$ E) $9/2\pi\ cm^2$

3. Calcule el perímetro de la región sombreada, si $PQRS$ es un rectángulo.



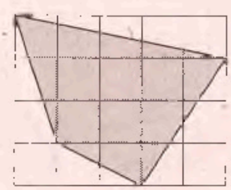
A) $4(3\pi+4)$ cm
B) $4(\pi+4)$ cm
C) $3(4\pi+3)$ cm
D) $4(5\pi+4)$ cm
E) $8(3\pi+2)$ cm

4. En el gráfico, $R=2\sqrt{3}$ cm y $m\sphericalangle MON=30º$. Halle el área de la región sombreada.



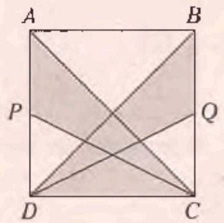
A) $(10\pi-\sqrt{3})cm^2$
B) $(12\pi-6\sqrt{3})cm^2$
C) $(15\pi-6\sqrt{3})cm^2$
D) $(15\pi-3\sqrt{3})cm^2$
E) $(5\pi-6\sqrt{3})cm^2$

5. La figura está formada por 20 cuadraditos iguales en la que cada uno tiene un lado que mide 2 m. Halle el área de la región sombreada.



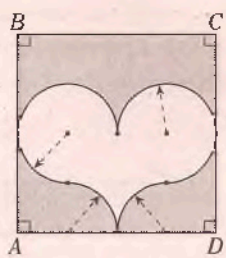
A) $42\ m^2$ B) $44\ m^2$ C) $52\ m^2$
D) $48\ m^2$ E) $56\ m^2$

6. Si $ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide $6\sqrt{2}$ cm, además P y Q son puntos medios de los lados, calcule el área de la región sombreada.



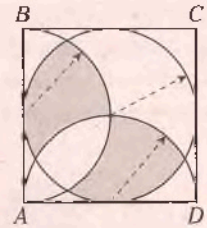
A) 44 cm^2 B) 45 cm^2 C) 42 cm^2
D) 48 cm^2 E) 40 cm^2

7. La figura está formada por un cuadrado y por arcos de circunferencias. Los radios de las circunferencias son congruentes y el área del cuadrado es 25 m^2. Determine el perímetro de la región sombreada.



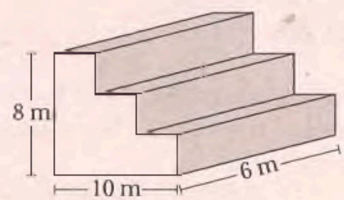
A) $(20+10\pi)$ m
B) $(25+5\pi)$ m
C) $(20+5\pi)$ m
D) $(24+5\pi)$ m
E) $(20+20\pi)$ m

8. Si el lado del cuadrado $ABCD$ mide 24 m, halle el perímetro de la región sombreada.



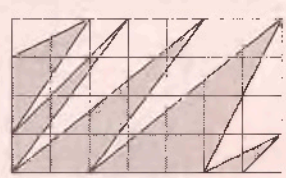
A) 24π m B) 26π m C) 28π m
D) 30π m E) 32π m

9. La figura representa una escalera y la parte sombreada representa la alfombra que la cubre. Halle el área de la alfombra, si se sabe que está conformada por secciones rectangulares.



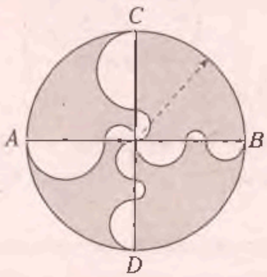
A) 128 m^2 B) 108 m^2 C) 112 m^2
D) 120 m^2 E) 124 m^2

10. La cuadrícula mostrada está formada por cuadrados simples iguales, que tienen de área 4 m^2 cada uno. Calcule el área de la región sombreada.



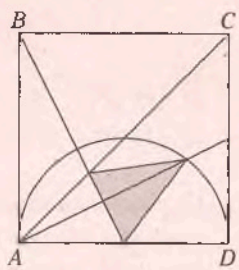
A) 64 m^2 B) 48 m^2 C) 60 m^2
D) 52 m^2 E) 56 m^2

11. Las figuras sin sombrear son semicircunferencias. Además, AB y CD son diámetros que miden 10 cm cada uno. Calcule el perímetro de la región sombreada.



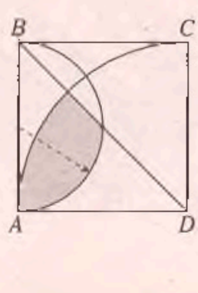
A) $(20\pi+20)$ cm
B) $(30\pi+20)$ cm
C) $(15\pi+20)$ cm
D) $(10\pi+20)$ cm
E) $(20\pi+10)$ cm

12. Halle el área de la región sombreada, sabiendo que el área del cuadrado $ABCD$ mide 120 m^2.



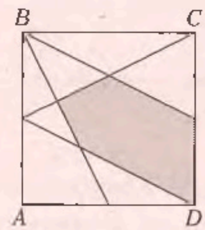
A) 12 m^2
B) 8 m^2
C) 15 m^2
D) 20 m^2
E) 10 m^2

13. Calcule el perímetro de la región sombreada, si el lado del cuadrado $ABCD$ mide 8 m.



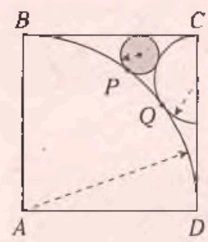
A) $4\pi+8-4\sqrt{2}$
B) $8\pi-8+4\sqrt{2}$
C) $4\pi+6-4\sqrt{2}$
D) $6\pi+8-4\sqrt{2}$
E) $8\pi+8-2\sqrt{2}$

14. Si $ABCD$ es un cuadrado de área igual a 120 m^2, determine el área de la región sombreada.



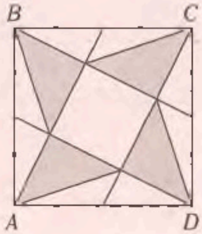
A) 39 m^2 B) 45 m^2 C) 41 m^2
D) 42 m^2 E) 38 m^2

15. Si $ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide 16 m, calcule el área de la región sombreada, sabiendo que P y Q son puntos de tangencia.



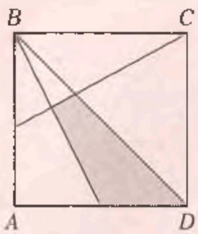
A) π cm^2
B) 4π cm^2
C) 2π cm^2
D) $2{,}25\pi$ cm^2
E) 3π cm^2

16. Calcule el área de la región sombreada, si la figura mostrada es un cuadrado cuya área es 120 m^2.



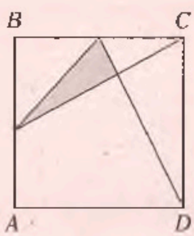
A) 30 m^2 B) 45 m^2 C) 48 m^2
D) 50 m^2 E) 42 m^2

17. El área del cuadrado *ABCD* mide 60 m^2. Halle el área de la región sombreada.



A) 15 m^2 B) 13 m^2 C) 17 m^2
D) 14 m^2 E) 12 m^2

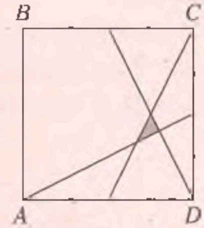
18. Calcule el área de la región sombreada, si el área del cuadrado *ABCD* mide 120 m^2.



A) 7 m^2 B) 8 m^2 C) 10 m^2
D) 11 m^2 E) 9 m^2

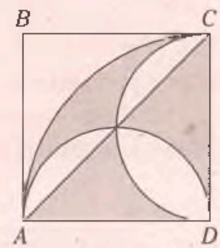
19. El área del cuadrado *ABCD* es 120 m^2. Halle el área de la región sombreada.

A) 1 m^2
B) 2 m^2
C) 3 m^2
D) 1,5 m^2
E) 2,5 m^2



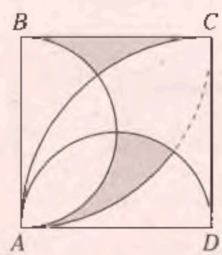
20. Si *ABCD* es un cuadrado cuyo lado mide 6 m, determine el área de la región sombreada.

A) 18 m^2
B) 20 m^2
C) 12 m^2
D) 24 m^2
E) 15 m^2



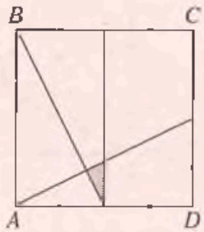
NIVEL INTERMEDIO

21. Calcule el perímetro de la región sombreada, si *ABCD* es un cuadrado cuyo lado mide 8 cm.



A) $(8\pi + 4)$ cm
B) $(5\pi + 4)$ cm
C) $(4\pi + 4)$ cm
D) $(2\pi + 4)$ cm
E) $(6\pi + 4)$ m

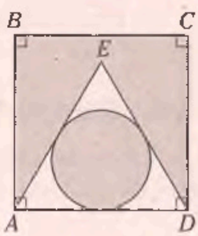
22. La figura mostrada es un cuadrado cuya área mide 80 m^2. Halle el área de la región sombreada.



A) 2 m^2 B) 3 m^2 C) 1 m^2

D) 1,5 m^2 E) 2,5 m^2

23. Calcule el perímetro de la región sombreada, si *ABCD* es un cuadrado cuyo lado mide 6 m, además *AED* es un triángulo equilátero.



A) $(30+6\sqrt{3}\pi)$ cm

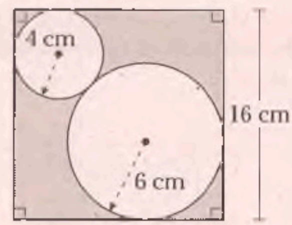
B) $(30+4\sqrt{3}\pi)$ cm

C) $(30+3\sqrt{3}\pi)$ cm

D) $(30+2\sqrt{3}\pi)$ cm

E) $(30+\sqrt{3}\pi)$ cm

24. Determine el área de la región sombreada en la siguiente figura.



A) $(256-52\pi)$ cm^2

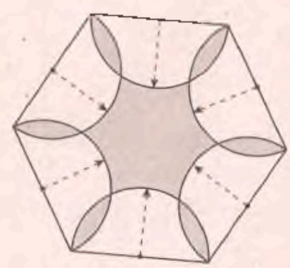
B) $(264-52\pi)$ cm^2

C) $(288-52\pi)$ cm^2

D) $(284-52\pi)$ cm^2

E) $(272-52\pi)$ cm^2

25. La siguiente figura es un hexágono regular de lado a cm. Halle el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{2\pi a^2}{5}$ cm^2

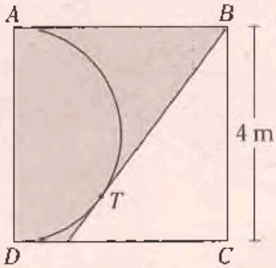
B) $\dfrac{\pi a^2}{3}$ cm^2

C) $\dfrac{\pi a^2}{4}$ cm^2

D) $\dfrac{\pi a^2}{2}$ cm^2

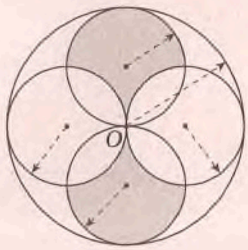
E) $\dfrac{3\pi a^2}{8}$ cm^2

26. Sea $ABCD$ un cuadrado. Calcule el área de la región sombreada. T: punto de tangencia



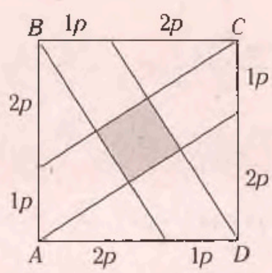
A) $9\ m^2$ B) $8\ m^2$ C) $12\ m^2$
D) $10\ m^2$ E) $8{,}5\ m^2$

27. Se tiene un círculo mayor de radio igual a 20 m, y cuatro círculos menores congruentes. Calcule el área de la región sombreada.
Obs.: O es el centro de la circunferencia mayor.



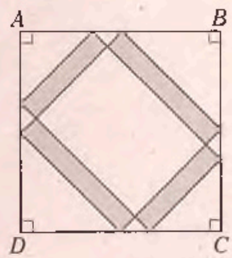
A) $400\ m^2$
B) $420\ m^2$
C) $480\ m^2$
D) $360\ m^2$
E) $380\ m^2$

28. Si $ABCD$ es un cuadrado y sus lados están divididos en segmentos que guardan la proporción indicada en la figura, ¿qué fracción del área del cuadrado representa el área de la región sombreada?



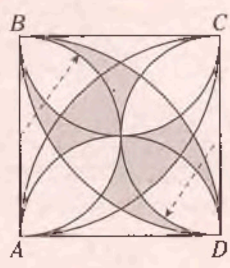
A) 1/12 B) 1/13 C) 1/10
D) 1/15 E) 1/16

29. Si $ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide 4 m, halle la diferencia entre el perímetro de lo no sombreado y el perímetro de lo sombreado.



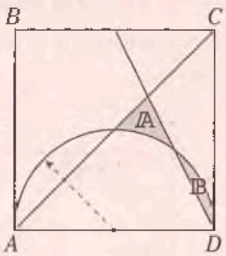
A) 12 m B) 8 m
C) 4 m
D) 16 m E) 20 m

30. Sea $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 8 m. Determine el área de la región sombreada.



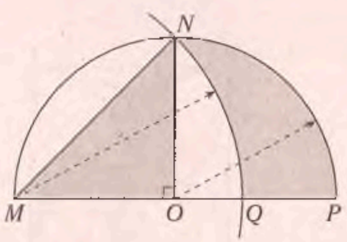
A) $(16\pi + 32)\ m^2$
B) $(16\pi - 32)\ m^2$
C) $(32\pi - 32)\ m^2$
D) $(32\pi - 24)\ m^2$
E) $(64\pi - 32)\ m^2$

31. Si $ABCD$ es un cuadrado de lado igual a 12 m, calcule la diferencia de las áreas indicadas por A y B, correspondiente a las regiones sombreadas.



A) $(36-9\pi)\ m^2$
B) $(36-10\pi)\ m^2$
C) $(32-9\pi)\ m^2$
D) $(30-9\pi)\ m^2$
E) $(30-10\pi)\ m^2$

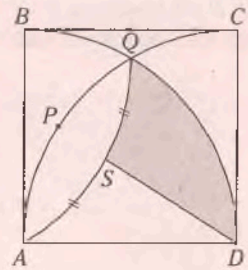
32. En el gráfico, O es el centro de la semicircunferencia. Además, MNQ es un sector circular. Halle la relación entre las áreas de las regiones sombreadas.



A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$

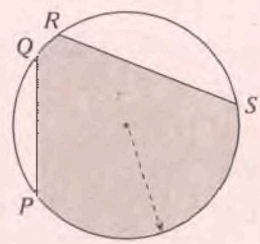
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

33. Sea $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 6 m. Además, $\overset{\frown}{APQ}$ es congruente a $\overset{\frown}{ASQ}$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $4\pi\ m^2$ B) $2\pi\ m^2$ C) $6\pi\ m^2$
D) $5\pi\ m^2$ E) $3\pi\ m^2$

34. En el gráfico $m\overset{\frown}{PQ}+m\overset{\frown}{RS}=180°$, además $PQ=6$ m y $RS=8$ m. Determine el área de la región sombreada.



A) $\left(\frac{24+25\pi}{2}\right)\ m^2$

B) $\left(\frac{48+25\pi}{2}\right)\ m^2$

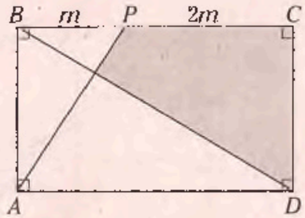
C) $\left(\frac{48+15\pi}{2}\right)\ m^2$

D) $\left(\frac{12+25\pi}{2}\right)\ m^2$

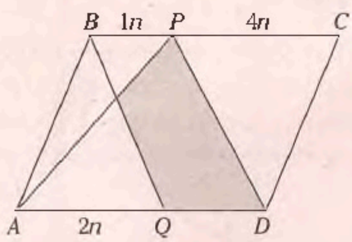
E) $\left(\frac{24+9\pi}{2}\right)\ m^2$

35. Si $ABCD$ es un rectángulo, ¿qué fracción del área total representa el área de la región sombreada?

A) 11/24
B) 13/24
C) 8/27
D) 11/27
E) 15/29

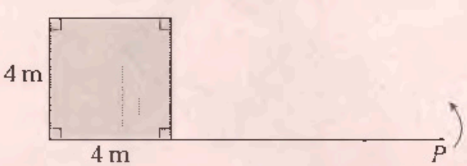


36. Si $ABCD$ es un paralelogramo, ¿qué fracción del área total representa el área de la región sombreada?



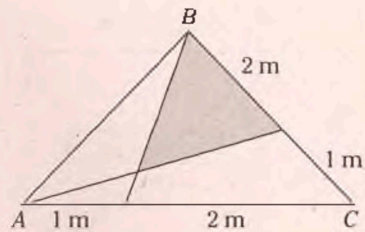
A) 13/25 B) 11/25 C) 11/30
D) 17/30 E) 13/30

37. Del gráfico mostrado, halle la longitud de arco que describe el extremo de la cuerda, cuando esta envuelve el sentido antihorario al cuadrado cuyo lado mide 4 m. La cuerda cuyo extremo es P está atada a uno de los vértices y mide 14 m.



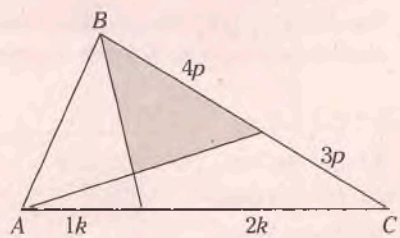
A) 12π m B) 14π m C) 16π m
D) 20π m E) 21π m

38. El área de la región triangular ABC mide 105 m^2. Calcule el área de la región sombreada.



A) 35 m^2 B) 40 m^2 C) 50 m^2
D) 56 m^2 E) 48 m^2

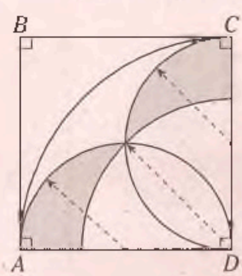
39. El área de la región triangular ABC mide 420 m^2. Determine el área de la región sombreada.



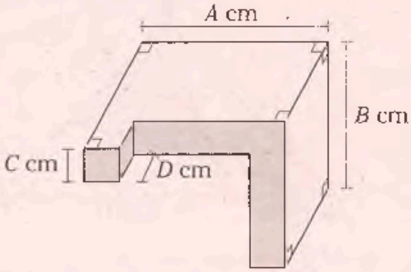
A) 128 m^2 B) 160 m^2 C) 120 m^2
D) 132 m^2 E) 164 m^2

40. Sea $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 8 m. Calcule el área de la región sombreada.

A) 24 m^2
B) 18 m^2
C) 16 m^2
D) 12 m^2
E) 20 m^2



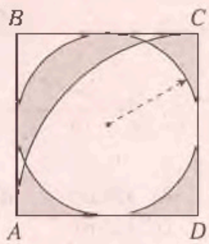
41. En el siguiente sólido, calcule el perímetro de la región sombreada si está formada por regiones rectangulares.



A) $2(A+B+C)$ cm
B) $2(B+C+D)$ cm
C) $2(A+C+D)$ cm
D) $2(C+D+2A)$ cm
E) $2(A+B+D)$ cm

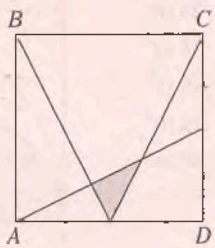
42. Sea $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 2 m. Halle el perímetro de la región sombreada.

A) $(2+5\pi)$ cm
B) $(4+4\pi)$ cm
C) $(4+3\pi)$ cm
D) $(8+3\pi)$ cm
E) $(4+5\pi)$ cm



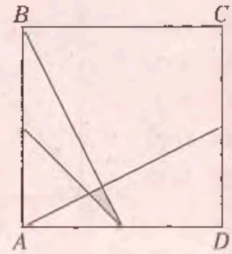
43. Calcule el área de la región sombreada. La figura mostrada es un cuadrado cuya área es 60 m^2.

A) 3 m^2
B) 4 m^2
C) 1 m^2
D) 2 m^2
E) 5 m^2

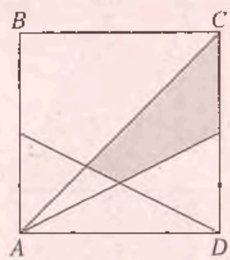


44. Determine el área de la región sombreada, si el cuadrado $ABCD$ tiene un área de 240 m^2.

A) 3 m^2
B) 4 m^2
C) 1 m^2
D) 2,5 m^2
E) 2 m^2

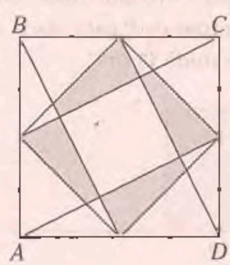


45. La figura mostrada es un cuadrado de área 120 m^2. Calcule el área de la región sombreada.



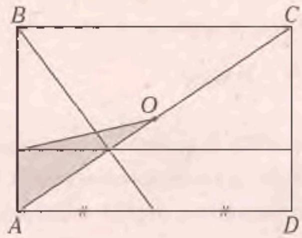
A) 30 m^2 B) 24 m^2 C) 25 m^2
D) 20 m^2 E) 32 m^2

46. Si $ABCD$ es un cuadrado de 120 m^2 de área, halle el área de la región sombreada.



A) 34 m^2 B) 36 m^2 C) 32 m^2
D) 30 m^2 E) 28 m^2

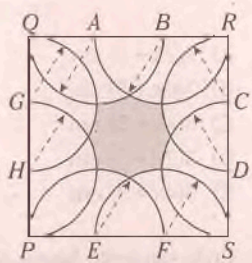
47. Sea $ABCD$ un rectángulo de centro O cuya área es $96\ m^2$. Calcule el área de la región sombreada.



A) $6\ m^2$ B) $16\ m^2$ C) $12\ m^2$
D) $9{,}6\ m^2$ E) $8\ m^2$

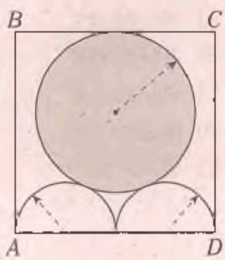
48. Sea $PQRS$ un cuadrado; además A, B, C, D, E, F, G y H son los centros de las ocho semicircunferencias equivalentes, cuyo radio mide 12 m. Halle el perímetro de lo sombreado.

A) 12π m
B) 14π m
C) 20π m
D) 18π m
E) 16π m



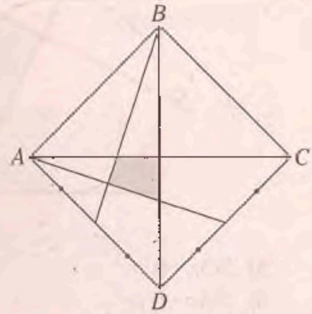
49. Calcule el área de la región sombreada, si $ABCD$ es un cuadrado de 20 cm de lado.

A) $60\pi\ cm^2$
B) $36\pi\ cm^2$
C) $64\pi\ cm^2$
D) $49\pi\ cm^2$
E) $81\pi\ cm^2$

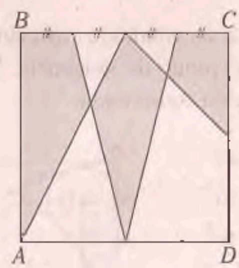


50. Si $ABCD$ es un cuadrado cuya diagonal AC mide $4\sqrt{10}$ m, calcule el área de la región sombreada.

A) $5\ m^2$
B) $6\ m^2$
C) $8\ m^2$
D) $4\ m^2$
E) $10\ m^2$



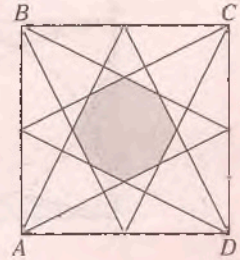
51. Sea $ABCD$ un cuadrado cuya área es $120\ m^2$. Determine el área de la región sombreada.



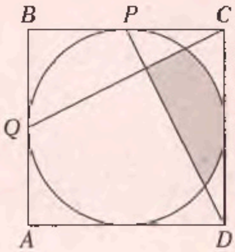
A) $58\ m^2$ B) $50\ m^2$ C) $60\ m^2$
D) $61\ m^2$ E) $59\ m^2$

52. Sea $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 12 m. Calcule el área de la región sombreada.

A) $18\sqrt{2}\ m^2$
B) $16\sqrt{2}\ m^2$
C) $16\sqrt{3}\ m^2$
D) $18\sqrt{3}\ m^2$
E) $12\sqrt{2}\ m^2$



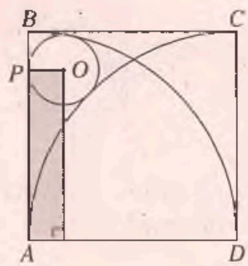
53. Calcule el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado mide 20 m; además P y Q son puntos de tangencia.



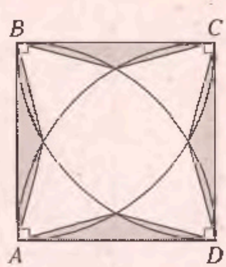
A) $5(3\pi-4)$ m^2
B) $5(5\pi-4)$ m^2
C) $5(5\pi-8)$ m^2
D) $5(3\pi-8)$ m^2
E) $5(4\pi-5)$ m^2

54. Sea $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 6 m. Si P es el punto de tangencia, halle el área de la región sombreada.

A) $3\sqrt{6}$ m^2
B) $5\sqrt{6}$ m^2
C) $4\sqrt{6}$ m^2
D) $2\sqrt{6}$ m^2
E) $6\sqrt{6}$ m^2

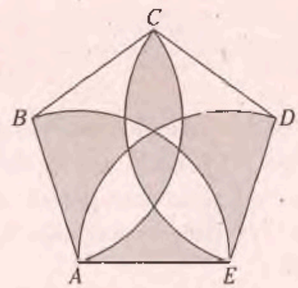


55. Calcule el área de la región sombreada, si $AB=2$ cm; además $ABCD$ es un cuadrado.



A) $4(\sqrt{3}+1)$ cm^2
B) $4(\sqrt{3}-1)$ cm^2
C) $8\sqrt{3}$ cm^2
D) $4(\sqrt{2}-1)$ cm^2
E) $4(2-\sqrt{3})$ cm^2

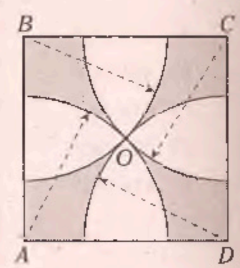
56. En el gráfico se muestra un pentágono regular $ABCDE$, cuyo lado mide 5 cm. Determine el perímetro de la región sombreada.



A) $5(2\pi+3)$ cm
B) $3(6\pi+5)$ cm
C) $3(4\pi+5)$ cm
D) $3(2\pi+5)$ cm
E) $5(4\pi+3)$ cm

57. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado de centro O y $AD=2\sqrt{2}$ cm. Halle el área de la región sombreada.

A) $4(4-\pi)$ cm^2
B) $2(8-\pi)$ cm^2
C) $4(2-\pi)$ cm^2
D) $(8-3\pi)$ cm^2
E) $(8-\pi)$ cm^2



Máximos y mínimos

Capítulo XXIV

Objetivos

- Aplicar conocimientos elementales de matemática para optimizar expresiones de determinadas características.
- Integrar conocimientos geométricos, algebraicos y aritméticos en el análisis de expresiones en los que se observan valores mínimos o máximos.
- Resolver ejercicios concretos que involucran valores mínimos o máximos.

Máximos y mínimos en situaciones algebraicas

Generalmente, este tipo de ejercicios buscará encontrar el máximo o el mínimo de expresiones de la siguiente forma:

$$A_{(x)}=12-x^2-3x$$

$$H_{(t)}=3t^2+12t+1$$

$$P_{(x)}=\frac{12}{8+2x^2-3x}$$

Para ello se debe tener presente el método de completar cuadrados.

Ejemplos

- $9-x^2-2x=9-(x^2+2x+1)+1=10-(x+1)^2$
- $x^2-4x+7=(x^2-4x+4)+3=(x-2)^2+3$

$$x^2+5x+3=x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2+3-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

Nota

En algunos casos podemos aplicar el criterio de la **suma de inversas**.

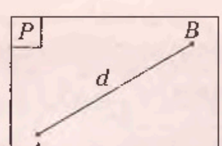
Si $x>0$, se cumple $\boxed{x+\frac{1}{x}\geq 2}$; $x\in\mathbb{R}$

Máximos y mínimos en situaciones geométricas

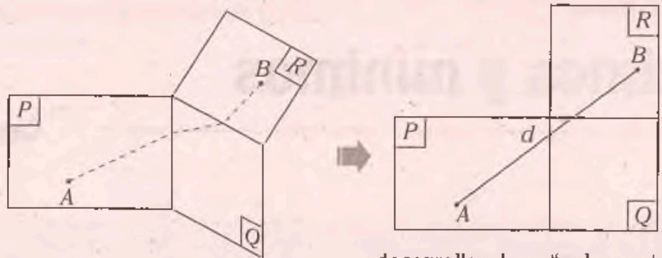
Generalmente en estos ejercicios se trata de encontrar el camino más corto para unir dos puntos bajo determinadas condiciones.

Por ejemplo, para unir A y B mediante el recorrido mínimo tenemos diversas situaciones:

- En un mismo plano

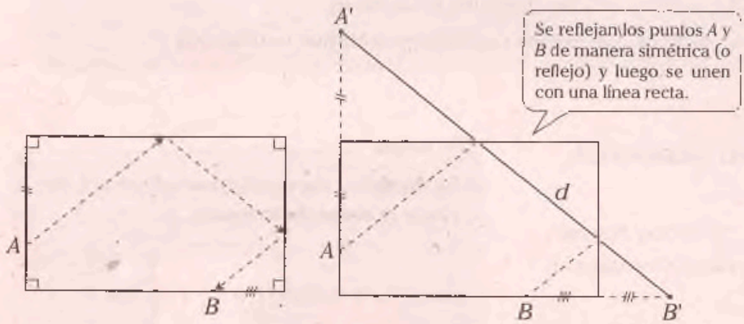


- En dos planos diferentes



desarrollando, o "aplanando", la figura

Realizamos desvíos previos (tocando líneas intermedias)



Observación

En todos los casos, d es el camino más corto que une A y B.

Máximos y mínimos en situaciones aritméticas

Generalmente se trata de comparar la suma de varias cantidades con el producto que se puede obtener con ellos. Es oportuno recordar que para n números reales positivos siempre se cumple que

media aritmética ≥ media geométrica

Ejemplos

Para dos números	Para tres números	Para cuatro números
$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$	$\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$	$\dfrac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

También es importante recordar que si

$A+B=K$, A y $B \in \mathbb{R}^+$ y K es constante

$$\rightarrow \quad \boxed{(A\times B)_{\text{máximo}} = \left(\frac{K}{2}\right)\left(\frac{K}{2}\right) = \frac{K^2}{4}}$$

Problema N.º 1

Sea $M=(40+x)(10-x)$. Calcule el máximo valor de M; $x \in \mathbb{R}^+$.

Resolución

Como

$$(40+x)+(10-x)=50 \left(\begin{array}{c}\text{suman un valor}\\ \text{constante}\end{array}\right)$$

entonces

$$M_{\text{máx.}}=\underbrace{(40+x)(10-x)}_{\text{iguales}=\frac{50}{2}=25}$$

$$M_{\text{máx.}}=(25)(25)=625$$

Problema N.º 2

Halle el mínimo valor de E.

$$E=x^3+\frac{3}{x}; \qquad x>0$$

Resolución

Expresamos E de la siguiente manera:

$$x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$$

y aplicamos

media aritmética ≥ media geométrica

$$\frac{x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{x^3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}$$

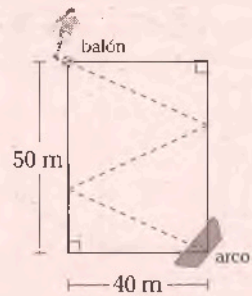
$$\rightarrow \quad \underbrace{x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}_{E}\geq 4$$

$$E\geq 4$$

$$\therefore \quad E_{\text{mín.}}=4$$

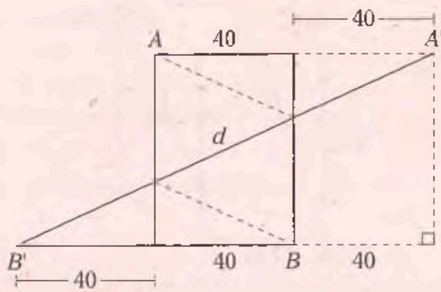
Problema N.º 3

Un jugador de fútbol patea el balón y hace que este toque las dos paredes laterales y se introduzca en el arco. ¿Cuál es el recorrido que realizó el balón si es el menor posible?

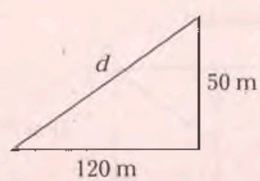


Resolución

Se emplea el criterio de reflejar los puntos y construir con todos los recorridos parciales una sola línea recta.



Luego

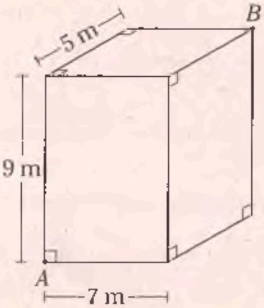


Por triángulo pitagórico

$d=130$ m

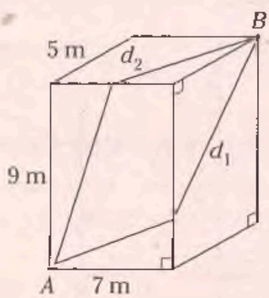
Problema N.º 4

Una hormiga ubicada en el punto A desea desplazarse por la superficie del ladrillo mostrado hasta el punto B. ¿Cuál será la mínima longitud de su recorrido?



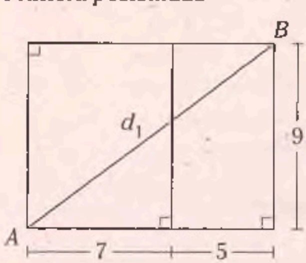
Resolución

Al examinar la figura, por inspección, nos damos cuenta de que hay dos posibles rutas, de las cuales elegiremos la menor (d_1 o d_2).



Desarrollando el sólido tenemos

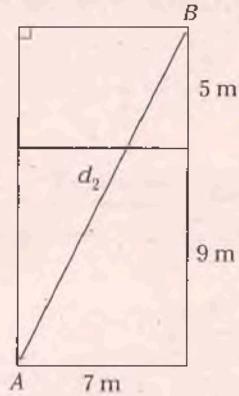
Primera posibilidad



(Por Pitágoras)

d_1=15 m

Segunda posibilidad



(Por Pitágoras)

$d_2=7\sqrt{5}$ m

Por lo tanto, la mínima longitud que recorrerá la hormiga será 15 m.

Problema N.º 5

Halle el mínimo valor de la siguiente expresión.

$$E=\frac{m+n+\sqrt{m+n}+1}{\sqrt{m+n}};\ m \text{ y } n\in\mathbb{R}^+.$$

Resolución

Separamos los términos convenientemente

$$E=\frac{\cancel{m+n}}{\cancel{\sqrt{m+n}}}+\frac{\cancel{\sqrt{m+n}}}{\cancel{\sqrt{m+n}}}+\frac{1}{\sqrt{m+n}}$$

$$E=\sqrt{m+n}+1+\frac{1}{\sqrt{m+n}}$$

suma de inversas
(como mínimo es 2)

$\therefore\quad E_{\text{mín.}}=2+1=3$

NIVEL BÁSICO

1. Calcule el mínimo valor de la expresión M.
$M=x^2+4x+9$; $x \in \mathbb{R}$

A) 9 B) 8 C) 5
D) 4 E) 3

2. Halle el máximo valor de la expresión N.

$$N=\frac{48}{x^2+6x+12};\ x \in \mathbb{R}$$

A) 3 B) 12 C) 4
D) 16 E) 24

3. Calcule el máximo valor de la siguiente expresión y dé como respuesta la suma de cifras de P.

$$P=\frac{51}{n^2+n+1};\ n \in \mathbb{R}$$

A) 12 B) 8 C) 14
D) 9 E) 10

4. Halle el máximo valor de R.

$$R=\frac{36xy}{\frac{x^2y}{3}+3y+\frac{xy^2}{2}+2x+5xy};\ x, y \in \mathbb{R}^+$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 9

5. Si a y $b \in \mathbb{R}^+$, además $a+b=18$, calcule el máximo valor de E.
$E=a \cdot b$

A) 100 B) 108 C) 90
D) 81 E) 64

6. Si a y $b \in \mathbb{R}^+$, además $2a+3b=60$, calcule el máximo valor de ab.

A) 120 B) 180 C) 100
D) 160 E) 150

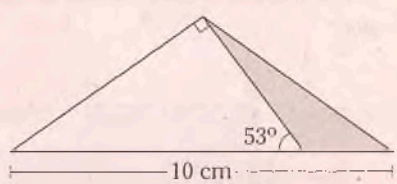
7. El gráfico muestra una mesa de billar y el recorrido de una bola de M a N. ¿Cuál es el recorrido mínimo que pudo realizar dicha bola si necesariamente tuvo que rebotar en las dos bandas mostradas?

A) 40 u B) 50 u C) 60 u
D) 70 u E) 48,5 u

8. Sean a, b y c números reales positivos que cumplen que
$a+b+c=22$.
Calcule el máximo valor de R.
$R=(3a+18)(2b-8)(c)$

A) 2048 B) 2662 C) 3072
D) 3993 E) 3476

9. En el siguiente gráfico, calcule el área máxima de la región sombreada.



A) 6 cm^2 B) 15 cm^2 C) 20 cm^2
D) 12 cm^2 E) 18 cm^2

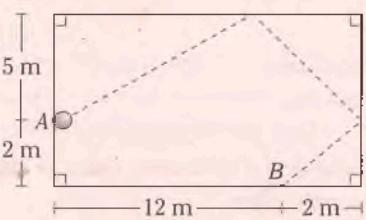
10. Calcule el menor valor de M.

$$M=\frac{1}{x^2-5}+x^2-1;\quad x>\sqrt{5}\ \wedge\ x\in\mathbb{R}$$

A) 3 B) 6 C) 8
D) 5 E) 7

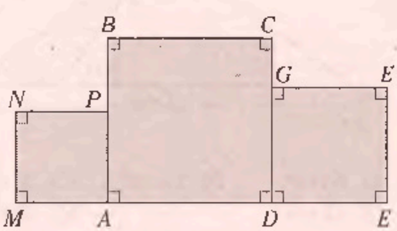
NIVEL INTERMEDIO

11. Se desea golpear una bola de billar de tal manera que siga la trayectoria indicada desde A hasta detenerse en el punto B. Halle el recorrido de la bola de billar si realizara esta acción haciendo el mínimo recorrido.



A) 19 m B) 21 m C) 20 m
D) 36 m E) 24 m

12. En el gráfico, $AMNP$, $ABCD$ y $DEFG$ son cuadrados. La longitud del lado del cuadrado $ABCD$ es igual a la suma de las longitudes de los lados de los otros cuadrados. Además, el perímetro de la región sombreada es de 72 cm. Indique el área mínima de dicha región.



A) 210 m^2 B) 180 m^2 C) 252 m^2
D) 216 m^2 E) 220 m^2

13. Calcule el mínimo valor de D.

$$D=a^2+\frac{2}{a};\quad a\in\mathbb{R}^+$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 6 E) 9

14. Calcule el mínimo valor de A.

$A=\sqrt{x^2+w^2}+\sqrt{y^2+z^2}$; $x, w, y, z\in\mathbb{R}^+$;

además $x+y=7\ \wedge\ w+z=24$.

A) 35 B) 31 C) 24
D) 25 E) 30

15. Halle el valor de x para el cual la expresión $P_{(x;y)}$ toma su mínimo valor.

$P_{(x;y)}=x^2y^2+12xy+y^2-4y+40$; $x, y\in\mathbb{R}$

A) 1 B) –4 C) –3
D) –2 E) 0

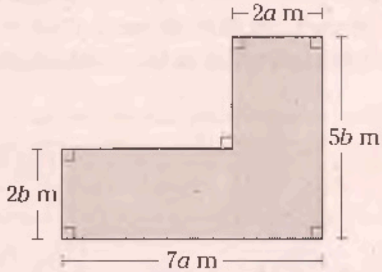
16. Un ebanista puede hacer puertas a un costo de S/.70 cada una, y las vende a S/.x la unidad. Si firma un contrato para hacer $(340-2x)$ puertas, ¿cuál será la máxima ganancia que obtendrá el ebanista?

A) S/.28 800 B) S/.32 600 C) S/.32 000
D) S/.24 300 E) S/.36 200

17. El ancho de una sala rectangular es excedido por 168 m por el doble de su perímetro. Calcule el área máxima del piso de la sala.

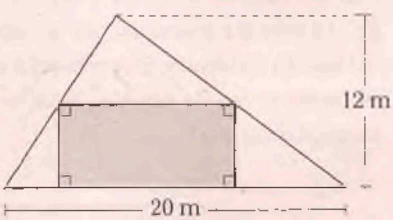
A) 588 m^2 B) 300 m^2 C) 540 m^2
D) 630 m^2 E) 672 m^2

18. Calcule el valor del área de la región hexagonal mostrada en el gráfico si su perímetro es 42 m.



A) 21 m^2 B) 42 m^2 C) 63 m^2
D) 84 m^2 E) 105 m^2

19. Calcule el área máxima de la región rectangular sombreada.



A) 120 m^2 B) 60 m^2 C) 48 m^2
D) 56 m^2 E) 50 m^2

20. Calcule el mínimo valor de c de modo que se cumpla la siguiente expresión.

$a^2+b^2=6abc$; a, b y $c \in \mathbb{R}^+$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{1}{6}$

21. Sabiendo que a, b y $c \in \mathbb{R}^+$, calcule el mínimo valor de S.

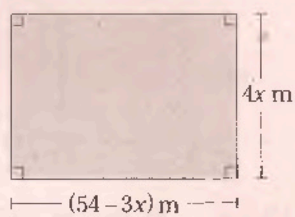
$$S=\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}$$

A) 1 B) 6 C) 3
D) 4 E) 2

22. En un triángulo rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa mide 6 m. Calcule la máxima área de dicha región triangular.

A) 24 m^2 B) 36 m^2 C) 12 m^2
D) 48 m^2 E) 42 m^2

23. Calcule el área máxima de la región rectangular.



A) 982 m^2 B) 1000 m^2 C) 840 m^2
D) 810 m^2 E) 972 m^2

24. Halle el máximo valor de Q.

$$Q=\frac{60x}{20x+8x^2+x^3};\ x \in \mathbb{R}$$

A) 30 B) 15 C) 20
D) 36 E) 10

25. Calcule el mínimo valor de L. Considere que x e y son números reales.

$L=x^2+8y-1+4y^2+4x$

A) -12 B) -9 C) -8
D) -6 E) -4

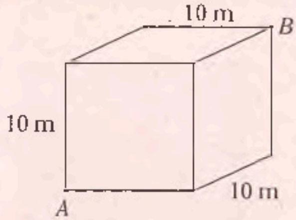
26. La siguiente expresión relaciona el tiempo transcurrido (t) con la altura $h(t)$ que alcanza el balón al ser lanzado desde el suelo

$h(t)=20t-10t^2$

¿Cuál es la máxima altura que alcanza el balón? Considere que $h(t)$ está expresada en metros.

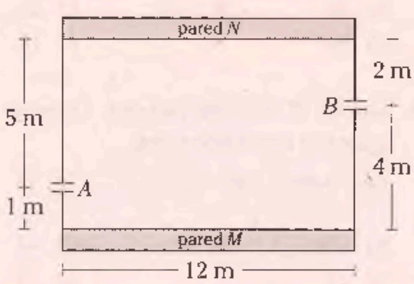
A) 5 m B) 10 m C) 20 m
D) $10\sqrt{2}$ m E) 6 m

27. Una hormiga se encuentra en el punto A (vértice del bloque cúbico) y desea caminar hasta el punto B recorriendo lo mínimo posible. ¿Cuánto recorrerá, si la arista del cubo mide 10 m?



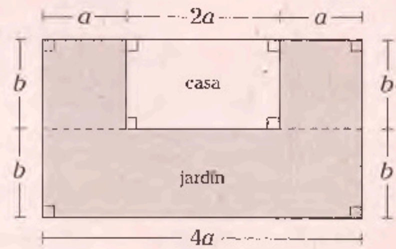
A) $15\sqrt{5}$ m B) $20\sqrt{2}$ m C) $10\sqrt{5}$ m
D) $(10\sqrt{2}+10)$ m E) $10\sqrt{3}$ m

28. En el gráfico se debe cumplir que una persona entre por la puerta A, toque la pared M, luego toque la pared N y finalmente salga por la puerta B. ¿Cuánto tiempo demorará, como mínimo, si realiza toda la caminata con rapidez constante de 1 m/s?



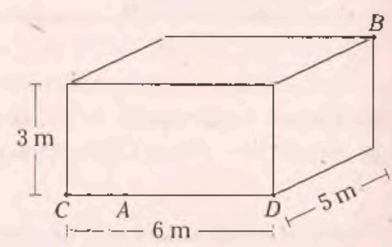
A) 12 s B) 10 s C) 18 s
D) $6\sqrt{5}$ s E) 15 s

29. Se desea cercar el jardín mostrado utilizando para ello 32 m de cerca. ¿Cuál es el área máxima que puede tener dicho jardín?



A) 120 m^2 B) 64 m^2 C) 96 m^2
D) 32 m^2 E) 128 m^2

30. Una hormiga en el punto A ($AD=2CA$) llegó al punto B caminando por la superficie del ladrillo mostrado. Si se observó que ha recorrido lo menor posible, ¿cuál es dicha longitud recorrida?



A) $3\sqrt{5}$ m

B) $3\sqrt{10}$ m

C) $4\sqrt{5}$ m

D) $4\sqrt{10}$ m

E) $5\sqrt{3}$ m

Bibliografía

✓ BEUTELSPACHERS KLEINES, Albrecht. *Matemáticas: 101 preguntas fundamentales*. Madrid: Alianza Editorial, 2011.

✓ DI GENOVA, Facundo. *El barman científico*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores, 2008.

✓ NEWMAN, James. *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Volumen 4. Barcelona-México: D. F. Ediciones Grijalbo, 1969.

✓ SMULLYAN, Raymond. *El enigma de Scherezade*. Barcelona: Editorial Gedisa, 2008.

✓ DE GUZMÁN OZÁMIZ, Miguel. *Aventuras matemàticas*. Barcelona: Editorial Labor, 1988.

✓ HOLT, Michael. *Matemáticas recreativas*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, 1986.

✓ PERELMAN, Yakov I. *Problemas y experimentos recreativos*. URSS: Editorial Mir, 1975.

Claves

Capítulo I

1 B	8 A	15 C	22 C	29 B	36 B	43 C	50 C
2 E	9 C	16 B	23 B	30 A	37 B	44 B	51 B
3 A	10 C	17 A	24 D	31 C	38 D	45 A	52 B
4 E	11 D	18 C	25 C	32 B	39 C	46 D	
5 D	12 B	19 B	26 B	33 A	40 E	47 D	
6 B	13 E	20 C	27 C	34 E	41 B	48 C	
7 B	14 D	21 B	28 D	35 E	42 C	49 B	

Capítulo II

1 A	6 D	11 C	16 C	21 C	26 D	31 B	36 D
2 B	7 C	12 E	17 C	22 A	27 C	32 C	37 B
3 D	8 C	13 C	18 E	23 B	28 D	33 C	
4 C	9 B	14 B	19 A	24 D	29 C	34 C	
5 C	10 A	15 C	20 B	25 A	30 C	35 E	

Capítulo III

1 A	7 C	13 C	19 D	25 C	31 A	37 E
2 B	8 C	14 D	20 A	26 D	32 A	38 B
3 D	9 B	15 C	21 B	27 E	33 C	39 B
4 D	10 D	16 A	22 E	28 B	34 B	40 E
5 B	11 A	17 D	23 A	29 E	35 B	41 D
6 B	12 C	18 A	24 B	30 C	36 C	42 C
						43 C

Capítulo IV

1 D	8 A	15 C	22 C	29 B	36 C	43 A	50 B
2 D	9 B	16 D	23 E	30 A	37 D	44 E	51 B
3 E	10 D	17 B	24 C	31 C	38 B	45 C	
4 A	11 C	18 A	25 D	32 D	39 B	46 E	
5 C	12 B	19 A	26 B	33 C	40 A	47 D	
6 E	13 D	20 D	27 D	34 C	41 E	48 B	
7 B	14 A	21 D	28 A	35 D	42 E	49 A	

Capítulo V

1 B	6 E	11 D	16 B	21 A	26 A	31 B
2 E	7 B	12 A	17 B	22 E	27 D	32 C
3 D	8 D	13 B	18 D	23 C	28 A	33 B
4 A	9 C	14 C	19 A	24 B	29 C	34 B
5 B	10 E	15 D	20 D	25 C	30 D	35 A

Capítulo VI

1 C	6 C	11 C	16 D	21 C	26 B	31 C	36 D
2 D	7 A	12 D	17 A	22 D	27 E	32 B	37 E
3 E	8 D	13 C	18 E	23 C	28 D	33 D	38 E
4 A	9 E	14 A	19 C	24 A	29 B	34 B	
5 C	10 D	15 B	20 D	25 C	30 C	35 D	

Capítulo VII

1 C	6 A	11 C	16 E	21 D	26 E	31 B	36 A
2 B	7 B	12 D	17 D	22 B	27 D	32 D	37 D
3 B	8 D	13 B	18 C	23 E	28 D	33 E	38 B
4 A	9 B	14 C	19 B	24 E	29 E	34 E	39 D
5 A	10 A	15 E	20 A	25 C	30 A	35 C	40 B

Capítulo VIII

1 B	7 B	13 A	19 D	25 E	31 E	37 B
2 C	8 C	14 E	20 E	26 B	32 D	38 D
3 E	9 A	15 D	21 A	27 A	33 E	39 C
4 E	10 C	16 A	22 B	28 C	34 B	
5 B	11 E	17 B	23 E	29 A	35 C	
6 C	12 C	18 E	24 B	30 D	36 B	

Capítulo IX

1 B	10 B	19 D	28 D	37 E	46 A	55 A
2 C	11 E	20 B	29 A	38 C	47 C	56 A
3 D	12 A	21 E	30 C	39 B	48 B	57 C
4 B	13 D	22 A	31 B	40 B	49 D	58 B
5 E	14 B	23 A	32 D	41 A	50 A	59 D
6 C	15 E	24 E	33 D	42 E	51 D	60 B
7 B	16 A	25 A	34 A	43 B	52 A	61 D
8 C	17 C	26 A	35 E	44 C	53 B	62 A
9 E	18 A	27 D	36 D	45 C	54 A	63 D

Capítulo X

1 C	5 B	9 D	13 E	17 A	21 E	25 A	29 D
2 A	6 E	10 E	14 A	18 B	22 E	26 D	30 C
3 D	7 A	11 A	15 C	19 B	23 C	27 C	
4 D	8 E	12 B	16 C	20 A	24 B	28 B	

Capítulo XI

1 B	8 B	15 A	22 C	29 B	36 D	43 C
2 A	9 D	16 B	23 D	30 B	37 B	44 E
3 D	10 A	17 C	24 B	31 A	38 D	45 D
4 C	11 B	18 C	25 E	32 A	39 C	
5 D	12 D	19 B	26 B	33 D	40 D	
6 E	13 C	20 A	27 D	34 D	41 B	
7 A	14 E	21 C	28 B	35 E	42 A	

Capítulo XII

1 C	7 C	13 A	19 A	25 C	31 D	37 A
2 A	8 B	14 B	20 B	26 A	32 C	38 C
3 B	9 D	15 E	21 A	27 C	33 D	39 D
4 E	10 C	16 A	22 A	28 C	34 D	40 B
5 B	11 A	17 A	23 B	29 B	35 D	
6 B	12 D	18 C	24 B	30 B	36 D	

Capítulo XIII

1 C	7 D	13 C	19 A	25 D	31 B	37 C
2 D	8 D	14 D	20 D	26 C	32 B	38 E
3 D	9 C	15 B	21 C	27 B	33 B	
4 A	10 E	16 E	22 B	28 D	34 B	
5 B	11 C	17 D	23 D	29 A	35 B	
6 A	12 A	18 B	24 B	30 A	36 B	

Claves

Capítulo XIV

1	B	9	A	17	A	25	D	33	D	41	D	49	C	57	E
2	E	10	D	18	D	26	B	34	B	42	A	50	D	58	A
3	C	11	D	19	C	27	C	35	D	43	C	51	A	59	B
4	B	12	C	20	A	28	C	36	E	44	D	52	E	60	B
5	A	13	A	21	B	29	B	37	D	45	A	53	B	61	E
6	C	14	D	22	C	30	C	38	D	46	D	54	D	62	E
7	D	15	B	23	D	31	D	39	C	47	D	55	A		
8	B	16	E	24	B	32	B	40	E	48	C	56	A		

Capítulo XV

1	A	6	A	11	B	16	D	21	A	26	B	31	D	36	E
2	B	7	C	12	C	17	B	22	E	27	C	32	B	37	D
3	C	8	B	13	C	18	C	23	B	28	D	33	C	38	C
4	A	9	E	14	A	19	B	24	A	29	A	34	A	39	B
5	D	10	D	15	B	20	C	25	D	30	B	35	E	40	B

Capítulo XVI

1	B	6	E	11	B	16	C	21	A	26	B	31	B	36	C
2	A	7	A	12	C	17	A	22	C	27	D	32	E	37	E
3	A	8	E	13	A	18	D	23	B	28	B	33	E	38	E
4	D	9	B	14	A	19	A	24	A	29	C	34	B	39	A
5	B	10	D	15	B	20	D	25	E	30	A	35	B		

Capítulo XVII

1	C	6	B	11	A	16	A	21	B	26	A	31	E
2	A	7	D	12	C	17	C	22	C	27	C	32	D
3	D	8	A	13	C	18	A	23	E	28	A	33	A
4	E	9	A	14	A	19	D	24	A	29	B	34	A
5	A	10	B	15	D	20	D	25	D	30	D	35	B

Capítulo XVIII

1	B	9	C	17	C	25	A	33	B	41	E	49	C	57	B
2	B	10	C	18	A	26	B	34	C	42	C	50	D	58	C
3	D	11	D	19	B	27	B	35	C	43	A	51	E	59	A
4	C	12	B	20	B	28	D	36	B	44	E	52	A	60	B
5	C	13	C	21	B	29	C	37	D	45	B	53	C	61	C
6	A	14	B	22	D	30	C	38	A	46	E	54	D	62	E
7	C	15	A	23	B	31	C	39	A	47	C	55	B		
8	D	16	C	24	E	32	B	40	D	48	B	56	E		

Capítulo XIX

1	D	9	B	17	B	25	A	33	B	41	E	49	E	57	D
2	B	10	C	18	D	26	D	34	A	42	C	50	A	58	B
3	C	11	D	19	D	27	C	35	B	43	E	51	E	59	D
4	A	12	E	20	C	28	E	36	D	44	D	52	C	60	A
5	E	13	E	21	B	29	A	37	B	45	A	53	A		
6	B	14	B	22	E	30	C	38	C	46	A	54	E		
7	D	15	D	23	C	31	C	39	D	47	B	55	E		
8	C	16	C	24	E	32	A	40	A	48	D	56	E		

Capítulo XX

1	C	7	D	13	D	19	C	25	B	31	A	37	A	43	E
2	D	8	E	14	E	20	B	26	D	32	E	38	C	44	A
3	A	9	D	15	A	21	D	27	A	33	D	39	B	45	C
4	C	10	C	16	A	22	E	28	D	34	A	40	D	46	A
5	B	11	B	17	B	23	B	29	D	35	E	41	B	47	B
6	A	12	E	18	C	24	D	30	B	36	B	42	A	48	E
														49	C

Capítulo XXI

1	B	6	A	11	E	16	D	21	E	26	E	31	D	36	C
2	C	7	C	12	A	17	B	22	E	27	A	32	C	37	A
3	C	8	D	13	B	18	C	23	D	28	D	33	C	38	D
4	A	9	A	14	A	19	C	24	B	29	C	34	A	39	D
5	A	10	C	15	A	20	B	25	D	30	D	35	D	40	A

Capítulo XXII

1	C	9	D	17	C	25	B	33	C	41	B	49	A
2	A	10	E	18	E	26	D	34	D	42	C	50	C
3	B	11	B	19	A	27	A	35	D	43	D	51	D
4	C	12	D	20	D	28	E	36	B	44	E	52	C
5	A	13	D	21	B	29	B	37	E	45	B	53	D
6	D	14	E	22	A	30	D	38	A	46	A	54	A
7	B	15	C	23	A	31	E	39	D	47	A		
8	C	16	B	24	D	32	A	40	B	48	B		

Capítulo XXIII

1	C	9	B	17	B	25	C	33	E	41	E	49	C
2	B	10	E	18	E	26	D	34	B	42	C	50	D
3	B	11	A	19	A	27	A	35	A	43	D	51	E
4	E	12	E	20	A	28	B	36	C	44	E	52	A
5	B	13	A	21	E	29	D	37	C	45	C	53	B
6	C	14	C	22	C	30	B	38	B	46	C	54	D
7	C	15	A	23	D	31	D	39	A	47	E	55	E
8	C	16	C	24	C	32	A	40	C	48	E	56	C
												57	A

Capítulo XXIV

1	C	5	D	9	A	13	C	17	A	21	B	25	B	29	B
2	D	6	E	10	B	14	D	18	C	22	B	26	B	30	C
3	C	7	B	11	C	15	C	19	B	23	E	27	C		
4	C	8	C	12	D	16	A	20	A	24	B	28	E		

Colección Compendios Académicos

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
RAZONAMIENTO VERBAL ARITMÉTICA-ÁLGEBRA
GEOMETRÍA-TRIGONOMETRÍA FÍSICA
QUÍMICA BIOLOGÍA-ANATOMÍA
LENGUAJE LITERATURA HISTORIA
GEOGRAFÍA ECONOMÍA-EDUCACIÓN CÍVICA
FILOSOFÍA-LÓGICA PSICOLOGÍA

Amor a Sofía

Razonamiento Matemático

ISBN: 978-612-307-316-9
9 786123 073169