Colección Compendios Académicos

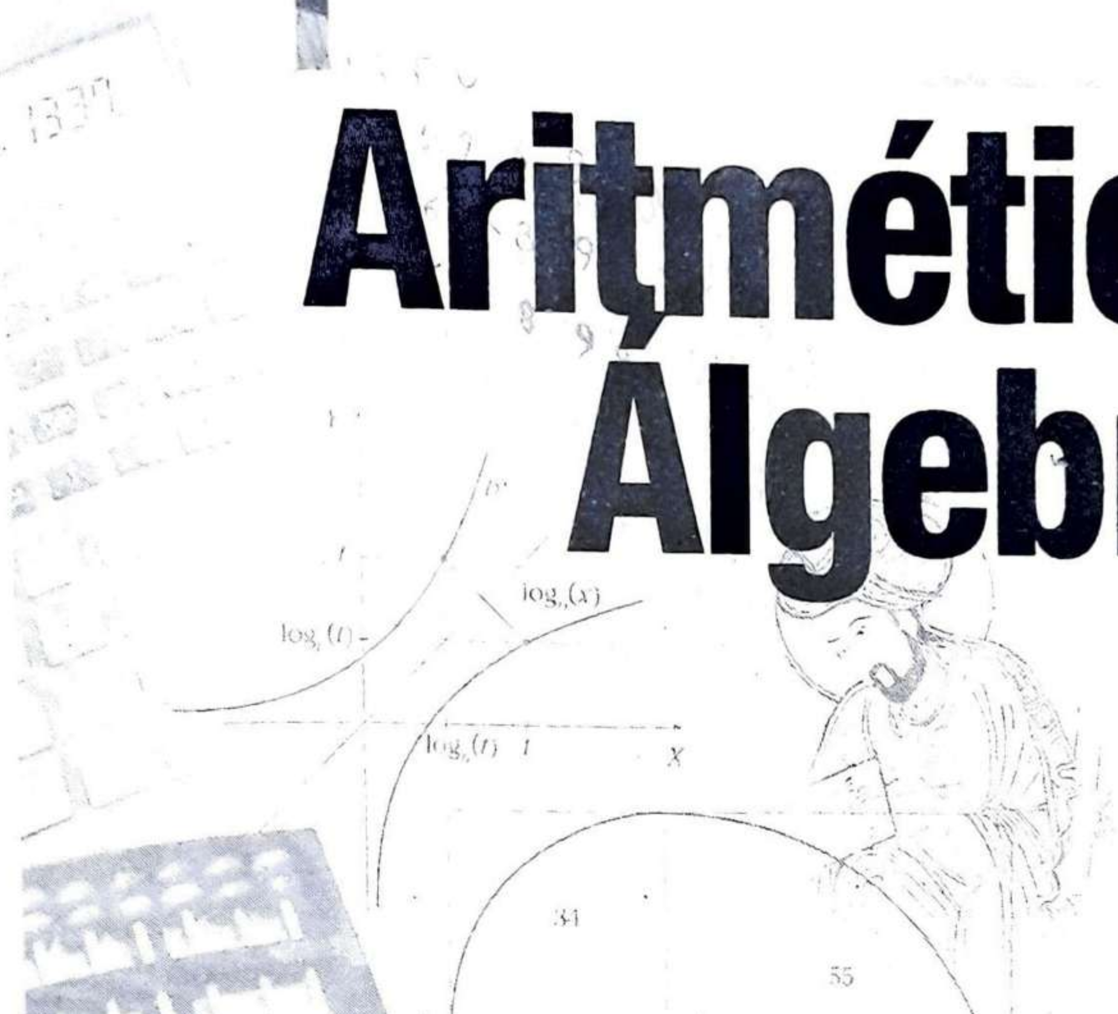
Aritmética Álgebra

Yony Ortiz Cotaquispe
Fernando Inga Mendizabal
César Velásquez Michue
Phflucker Coz Flores

Lumbreras Editores

Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Aritmética Álgebra



Lumbreras Editores

BIBLIOTECA NACIONAL DEL PERÚ
Centro Bibliográfico Nacional

513.12
A
2016

Aritmética, álgebra / [Yony Ortiz Cotaquispe, Fernando Inga Mendizabal, César Velásquez Michue ... [et al.] -- 1a ed., 4ª reimpr.-- Lima : Lumbreras Editores : Asociación Fondo de Investigadores y Editores, 2016.
380, [3] p. : il. ; 22 cm.-- (Compendios académicos)

Incluye bibliografías.

D.L. 2016-10791
ISBN 978-612-307-348-0

1. Aritmética - Problemas, ejercicios, etc. 2. Álgebra - Problemas, ejercicios, etc. I. Ortiz Cotaquispe, Yoni II. Inga Mendizabal, Fernando III. Velásquez Michue, César, 1968- IV. Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Lima) V. Serie

BNP: 2016-227

ARITMÉTICA - ÁLGEBRA

Autores: Yony Ortiz Cotaquispe, Fernando Inga Mendizabal, César Velásquez Michue, Phflucker, Humberto Coz Flores
© **Titular de la obra:** Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Editor: Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Diseño y diagramación: Asociación Fondo de Investigadores y Editores

© **Asociación Fondo de Investigadores y Editores**
Av. Alfonso Ugarte N.° 1426 - Breña. Lima-Perú. Telefax: 332-3786
Para su sello editorial Lumbreras Editores
Página web: www.elumbreras.com.pe
Primera edición: julio de 2013
Primera reimpresión: marzo de 2014
Tercera reimpresión: julio de 2015
Cuarta reimpresión: septiembre de 2016
Tiraje: 5000 ejemplares
ISBN: 978-612-307-348-0
Registro del proyecto editorial N.° 31501051600874
"Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú" N.° 2016-10791

Distribución y ventas al por mayor y menor
Teléfonos: Lima: 01-332 3786 / Provincia: 01-433 0713
ventas@elumbreras.com.pe

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la Asociación Fondo de Investigadores y Editores en el mes de septiembre de 2016.
Calle Las Herramientas N.° 1873 / Av. Alfonso Ugarte N.° 1426 - Lima-Perú.
Teléfono: 336-5889

Índice

ARITMÉTICA

ÁLGEBRA

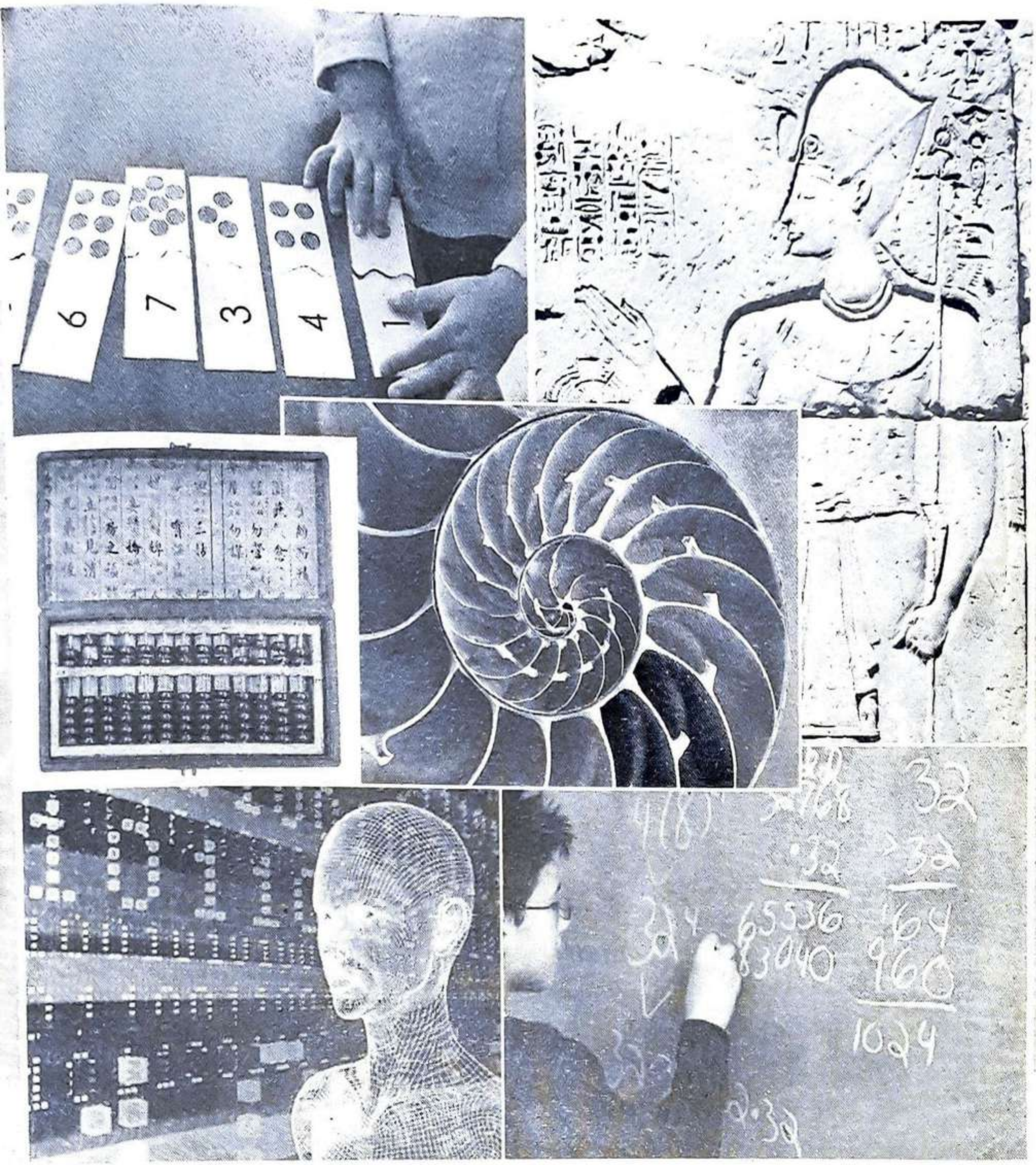
Presentación

La realidad de la educación en el Perú es hoy algo preocupante. Los distintos esfuerzos provenientes del Gobierno no se ven reflejados en avances significativos en este aspecto. Las políticas educativas nos muestran resultados negativos desde hace ya muchos años, y es poco lo que los estudios y las propuestas han logrado mejorar en las condiciones del sistema educativo; peor aún, permiten las desigualdades a nivel socioeconómico en las zonas rurales más alejadas del país; es decir, los estudiantes reciben una educación de baja calidad y en condiciones precarias.

En este contexto, los esfuerzos por aportar al desarrollo de la cultura y la educación en el país serán siempre valorados. Es así que, conscientes de esta realidad, la Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Afined), a través de su sello Lumbreras Editores, tiene como uno de sus objetivos contribuir al desarrollo de la educación; ello se cristaliza a través del aporte de los profesores del Instituto de Ciencias y Humanidades, quienes han sistematizado los materiales de manera didáctica gracias a su amplia experiencia docente que garantizan un contenido de calidad y, sobre todo, siempre accesible a los sectores populares, sumado a la presencia de nuestro sello editorial en distintos puntos del territorio nacional.

En esta ocasión presentamos el libro *Aritmética - Álgebra*, perteneciente a la Colección Compendios Académicos, publicación dirigida al estudiante preuniversitario, que constituye una herramienta útil para reforzar sus conocimientos gracias al trabajo teórico-práctico así como los problemas resueltos y propuestos mostrados por niveles, que permiten una mejor comprensión del tema. Este libro se constituye en material de consulta no solo para alumnos sino también para docentes, tanto de los últimos años del nivel escolar como preuniversitario.

Finalmente, nuestra institución reafirma su compromiso con la educación y la cultura del país, contribuyendo en la elaboración de libros de calidad, además de promover el trabajo de investigación, que nos permite acceder a una educación científica y humanista; todo ello siempre al servicio de los sectores más amplios de nuestra sociedad.



ARITMÉTICA

Yony Ortiz Cotaquispe / Fernando Inga Mendizabal

Razones y proporciones

Capítulo I

Objetivos

- Interpretar los resultados de la comparación de dos cantidades de una característica o cualidad inherente en los objetos.
- Reconocer las propiedades que se cumplen en las proporciones e igualdad de razones geométricas para la resolución de problemas de la vida cotidiana y en otras disciplinas.

Uno de los conceptos matemáticos que se utiliza en la vida cotidiana es la razón; por ejemplo, los biólogos lo utilizan para estimar el número de peces que hay en un lago; primero capturan una muestra de peces y marcan a cada especimen con una etiqueta inofensiva; unas semanas después capturan una muestra similar de los peces de las mismas áreas del lago y determinan la proporción de peces marcados, previamente, que hay en la muestra nueva. Se calcula que la población total de peces con base en la suposición de la proporción de peces marcados en la muestra nueva es la misma que la proporción de los peces marcados en el lago entero.

Suponga que el 1 de mayo los biólogos marcaron 300 peces, después regresan el 1 de junio y toman una muestra de 400 peces, entre los que había 5 marcados. Calculemos el número de peces que hay en el lago.

Sea x el número de peces en el lago. Se plantea la proporción

$$\frac{300}{x}=\frac{5}{400} \rightarrow x=24\,000$$

Se estima que aproximadamente hay 24 000 peces en el lago.

Razón

Es la comparación que se establece entre dos cantidades mediante las operaciones de sustracción o división.

Razón aritmética (R. A.)

Es la comparación de dos cantidades mediante la sustracción.

Ejemplo

La edad de Ana es 36 años y la edad de Brenda es 28 años; entonces podemos comparar sus edades.

$$\boxed{\overbrace{36 \text{ años} - 28 \text{ años}}^{\text{razón aritmética}} = 8 \text{ años}}$$

antecedente ← 36 años
consecuente ← 28 años
valor de la R.A. ← 8 años

Interpretación

- La edad de Ana excede a la edad de Brenda en 8 años.
- La edad de Brenda es excedida por la edad de Ana en 8 años.

Razón geométrica (R. G.)

Es la comparación de dos cantidades mediante la división.

Ejemplo

En un recipiente se tiene una mezcla de 24 L de vino y 8 L de agua; entonces podemos comparar los volúmenes de vino y de agua.

razón geométrica

antecedente, consecuente, valor de la R.G.

$$\boxed{\frac{24\text{ L}}{8\text{ L}}=\frac{3}{1}}$$

Interpretación

- La cantidad de vino es el triple de la cantidad de agua.
- Las cantidades de vino y de agua están en la relación de 3 a 1.
- La cantidad de vino es como 3 y la cantidad de agua es como 1.
- Por cada 3 L de vino hay 1 L de agua.
- La cantidad de vino es tres veces a la cantidad de agua.
- La cantidad de vino es dos veces más a la cantidad de agua.

En general

Razón aritmética	Razón geométrica
$a-b=r$	$\frac{a}{b}=k$

donde

- a: antecedente
- b: consecuente
- r y k: valores de las razones

Igualdad de razones geométricas

Llamada también serie de razones geométricas equivalentes (SRGE).

Ejemplo

Tenemos las siguientes razones geométricas cuyos valores son iguales.

$$\frac{40}{8}=5 \qquad \frac{30}{6}=5 \qquad \frac{15}{3}=5 \qquad \frac{10}{2}=5$$

Igualando tenemos

$$\overbrace{\frac{40}{8}=\frac{30}{6}=\frac{15}{3}=\frac{10}{2}}^{\text{antecedentes}}=5$$

consecuentes

constante de proporcionalidad

Observación

En la igualdad de 4 razones geométricas se tienen 8 términos que ocupan un lugar establecido.

$$\frac{1.^{\text{er}}\text{ térm.}}{2.^{\text{o}}\text{térm.}}=\frac{3.^{\text{er}}\text{ térm.}}{4.^{\text{o}}\text{térm.}}=\frac{5.^{\text{o}}\text{térm.}}{6.^{\text{o}}\text{térm.}}=\frac{7.^{\text{o}}\text{térm.}}{8.^{\text{o}}\text{térm.}}$$

Igualdad de razones geométricas continuas

Ejemplos

- $\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=\frac{16}{32}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$
- $\frac{162}{54}=\frac{54}{18}=\frac{18}{6}=\frac{6}{2}=3$

Tiene la forma

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=k} \text{ o } \boxed{\frac{ek^4}{ek^3}=\frac{ek^3}{ek^2}=\frac{ek^2}{ek}=\frac{ek}{e}=k}$$

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD DE RAZONES GEOMÉTRICAS

De la igualdad de razones geométricas del ejemplo inicial

$$\frac{40}{8}=\frac{30}{6}=\frac{15}{3}=\frac{10}{2}=5,$$

se cumple que

1.

$40=8\times5$

$30=6\times5$

$15=3\times5$

$10=2\times5$

$$\boxed{(\text{antecedente})=(\text{consecuente})\times(\text{cte.})}$$

2.

$$\frac{40+30+15+10}{8+6+3+2}=5 \longleftarrow \text{cte.}$$

$$\frac{40+30+15}{8+6+3}=5 \longleftarrow \text{cte.}$$

$$\boxed{\frac{\text{suma de antecedentes}}{\text{suma de consecuentes}}=(\text{constante})}$$

3.

$$\frac{40\times30\times15}{8\times6\times3}=5^3 \longleftarrow \text{cte.}$$

$$\frac{40\times30\times15\times10}{8\times6\times3\times2}=5^4 \longleftarrow \text{cte.}$$

$$\boxed{\frac{\text{producto de antecedentes}}{\text{producto de consecuentes}}=(\text{constante})^n}$$

n: número de razones que se multiplican

Proporción

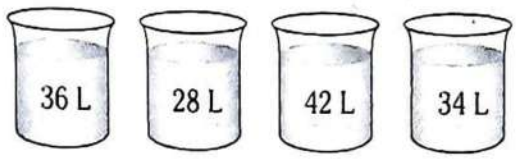
Es la igualdad de dos razones de la misma clase y tiene el mismo valor.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Es la igualdad de dos razones aritméticas.

Ejemplo

Se tienen 4 recipientes de vino cuyos volúmenes son 36 L; 28 L; 42 L y 34 L.



Se observa que

$$\boxed{36-28=42-34}$$

donde

- 36 y 34: términos extremos
- 28 y 42: términos medios

Se cumple que $\underbrace{36+24}_{\text{suma de térm. extremos}} = \underbrace{42+28}_{\text{suma de térm. medios}}$

Tipos

a. Discreta

Cuando los términos medios son diferentes.

$$\boxed{a-b=c-d}$$

donde

- d: cuarta diferencial de a, b y c

b. Continua

Cuando los términos medios son iguales.

$$\boxed{a-b=b-c}$$

donde

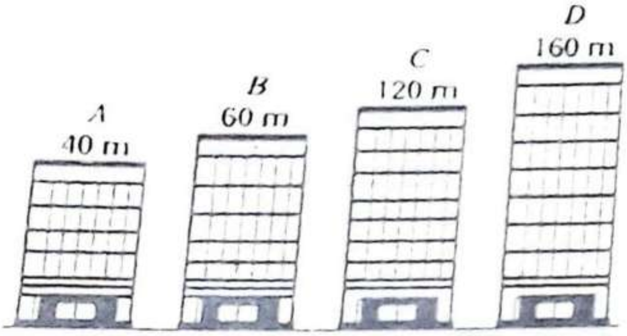
- b: media diferencial de a y c
- c: tercera diferencial de a y b

Proporción geométrica

Es la igualdad de dos razones geométricas.

Ejemplo

Se tiene las alturas de 4 edificios que son de 40 m; 60 m; 120 m y 160 m.



Se observa que

$$\boxed{\frac{40}{60}=\frac{120}{160}}$$

donde

- *40 y 60:* términos extremos
- *60 y 120:* términos medios

Se cumple que

$$40\times 160=120\times 60$$

Tipos

a. Discreta

Cuando los términos medios son diferentes.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}};\quad b\neq c$$

donde

- d: cuarta proporcional de a, b y c

b. Continua

Cuando los términos medios son iguales.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{c}}$$

donde

- b: media proporcional de a y c
- c: tercera proporcional de a y b

Propiedad de la proporción geométrica

Ejemplo

$$\frac{24}{8}=\frac{18}{6}=3$$

Se cumple que

- $\dfrac{24+8}{8}=\dfrac{18+6}{6}=4$
- $\dfrac{24}{24-8}=\dfrac{18}{18-6}=\dfrac{3}{2}$
- $\dfrac{24+8}{24-8}=\dfrac{18+6}{18-6}=2$

En general

Si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$,

entonces

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}=k+1$$

$$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}=\frac{k}{k-1}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}=\frac{k+1}{k-1}$$

Problema N.° 1

Las edades actuales de María Alejandra y de Fiorella son a y b años, respectivamente, pero hace 3 años sus edades estaban en la relación de 4 a 7. Si dentro de 2 años estarán en la relación de 3 a 5, calcule $a+b$.

Resolución

Colocaremos los datos en el siguiente recuadro para visualizar los tiempos (pasado, presente y futuro). Así tenemos

3 años 2 años

	Pasado	Presente	Futuro
María Alejandra	4×2		3×3
Fiorella	7×2		5×3
Diferencia de sus edades	$\boxed{3\times2}$	$\boxed{}$	$\boxed{2\times3}$

La diferencia de sus edades es constante (por lo tanto, a una se le multiplica por 2 y a la otra por 3).

Como ambas relaciones se han homogeneizado, podemos multiplicar a cada una por una misma variable. Así se tiene

5 años de diferencia

+3

	Hace 3 años	Hoy	Dentro de 2 años
María Alejandra	$8K=40$	$43=a$	$9K=45$
Fiorella	$14K=70$	$73=b$	$15K=75$

Planteamos la diferencia de edades (hace 3 años y dentro de 2 años) de María Alejandra.

$$9K-8K=5 \;\rightarrow\; K=5$$

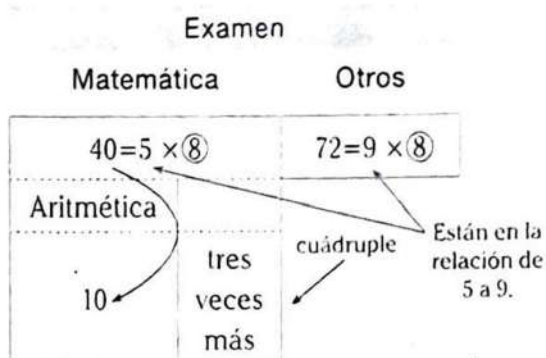
Por lo tanto, la edad actual de María Alejandra es $a=43$ y de Fiorella es $b=73$. Entonces $a+b=116$.

Problema N.° 2

En un examen, se observó que por cada 5 preguntas de matemática hay 9 de otros cursos, y el total de matemática es tres veces más que las de Aritmética. ¿Cuántas preguntas tenía el examen si eran 10 de Aritmética?

Resolución

Elaboramos el siguiente cuadro para colocar los datos



Por lo tanto, el número total de preguntas del examen es $40+72=112$.

Otra forma

Se sabe que el número de preguntas es 10.

El número de preguntas de Matemática es el cuádruple o tres veces más que el número de preguntas de Aritmética, es decir, $4\times10=40$.

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{el número de}\\ \text{preguntas}\\ \text{de Matemática}\end{pmatrix}}{\underbrace{5}_{5\,\times\,8\,=\,40}}=\frac{\begin{pmatrix}\text{el número de}\\ \text{preguntas}\\ \text{de otros cursos}\end{pmatrix}}{\underbrace{9}_{9\,\times\,8\,=\,72}}$$

Por lo tanto, el total de preguntas del examen es $40+72=112$.

Problema N.° 3

En una proporción aritmética, la suma de los términos extremos es 64 y los términos medios están en la relación de 9 a 7. Halle la tercera diferencial de los términos medios.

Resolución

Se sabe que en una proporción aritmética la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios. Así tenemos que

La suma es 64

$$\boxed{} - \boxed{9w} = \boxed{7w} - \boxed{}$$

La suma es 64

Por dato, los términos medios están en la relación de 9 a 7, entonces se cumple que

$$9w+7w=64$$
$$16w=64$$
$$w=4$$

Luego los términos medios serán

$$9\times4=36 \quad \text{y} \quad 7\times4=28$$

Ahora calculamos la tercera diferencial de 36 y 28. En la proporción aritmética continua, calculamos x (la tercera diferencial).

términos iguales (continua)

$$36-28=28-x$$
$$36+x=28+28$$
$$x=20$$

Por lo tanto, la tercera diferencial de 36 y 28 es 20.

Problema N.° 4

Si $\dfrac{\sqrt{a^2+120}}{20}=\dfrac{\sqrt{b^2+270}}{30}=\dfrac{\sqrt{c^2+480}}{40}$,

donde $a+b+c=36$, calcule $a\times b\times c$.

Resolución

Simplificamos los consecuentes y luego elevamos al cuadrado la expresión para eliminar la raíz

$$\frac{\sqrt{a^2+120}}{2}=\frac{\sqrt{b^2+270}}{3}=\frac{\sqrt{c^2+480}}{4}$$

$$\frac{a^2+120}{4}=\frac{b^2+270}{9}=\frac{c^2+480}{16}$$

Convenientemente multiplicamos a todos los consecuentes por 30 y obtenemos

$$\frac{a^2+120}{120}=\frac{b^2+270}{270}=\frac{c^2+480}{480}$$

Ahora aplicamos la propiedad de las proporciones (al antecedente de cada razón le restamos su respectivo consecuente). Así se tiene

$$\frac{a^2+120-120}{120}=\frac{b^2+270-270}{270}=\frac{c^2+480-480}{480}$$

$$\frac{a^2}{120}=\frac{b^2}{270}=\frac{c^2}{480}$$

Simplificamos y sacamos la raíz cuadrada a los términos de cada razón

$$\frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{9}=\frac{c^2}{16}$$

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k\,; \quad k\text{: constante}$$

Por propiedad

$$\frac{a+b+c}{2+3+4}=\frac{\overset{\text{dato}}{36}}{9}=k=4$$

$$\therefore \quad a\times b\times c=(2\times4)\times(3\times4)\times(4\times4)=1536$$

Problema N.° 3

En una proporción aritmética, la suma de los términos extremos es 64 y los términos medios están en la relación de 9 a 7. Halle la tercera diferencial de los términos medios.

Resolución

Se sabe que en una proporción aritmética la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios. Así tenemos que

La suma es 64.

$$\boxed{} - \boxed{9w} = \boxed{7w} - \boxed{}$$

La suma es 64.

Por dato, los términos medios están en la relación de 9 a 7, entonces se cumple que

$$9w+7w=64$$
$$16w=64$$
$$w=4$$

Luego los términos medios serán

$$9\times4=36 \quad \text{y} \quad 7\times4=28$$

Ahora calculamos la tercera diferencial de 36 y 28. En la proporción aritmética continua, calculamos x (la tercera diferencial).

términos iguales (continua)

$$36-28=28-x$$
$$36+x=28+28$$
$$x=20$$

Por lo tanto, la tercera diferencial de 36 y 28 es 20.

Problema N.° 4

Si $\dfrac{\sqrt{a^2+120}}{20}=\dfrac{\sqrt{b^2+270}}{30}=\dfrac{\sqrt{c^2+480}}{40}$,

donde $a+b+c=36$, calcule $a\times b\times c$.

Resolución

Simplificamos los consecuentes y luego elevamos al cuadrado la expresión para eliminar la raíz.

$$\frac{\sqrt{a^2+120}}{2}=\frac{\sqrt{b^2+270}}{3}=\frac{\sqrt{c^2+480}}{4}$$

$$\frac{a^2+120}{4}=\frac{b^2+270}{9}=\frac{c^2+480}{16}$$

Convenientemente multiplicamos a todos los consecuentes por 30 y obtenemos

$$\frac{a^2+120}{120}=\frac{b^2+270}{270}=\frac{c^2+480}{480}$$

Ahora aplicamos la propiedad de las proporciones (al antecedente de cada razón le restamos su respectivo consecuente). Así se tiene

$$\frac{a^2\cancel{+120}\cancel{-120}}{120}=\frac{b^2\cancel{+270}\cancel{-270}}{270}=\frac{c^2\cancel{+480}\cancel{-480}}{480}$$

$$\frac{a^2}{120}+\frac{b^2}{270}=\frac{c^2}{480}$$

Simplificamos y sacamos la raíz cuadrada a los términos de cada razón

$$\frac{a^2}{4}=\frac{b^2}{9}=\frac{c^2}{16}$$

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k\,; \quad k\text{: constante}$$

Por propiedad

$$\frac{a+b+c}{2+3+4}=\frac{\overset{\text{dato}}{36}}{9}=k=4$$

$$\therefore \quad a\times b\times c=(2\times4)\times(3\times4)\times(4\times4)=1536$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. La edad de Camila excede a la edad de Danilo en 16 años, y hace 5 años la suma de sus edades era 32 años. ¿En qué relación estarán sus edades dentro de 7 años?

   A) 3 a 2
   B) 9 a 5
   C) 7 a 4
   D) 6 a 5
   E) 5 a 3

2. Luis nació cuando Fernando tenía 12 años. Si las edades actuales de Luis y de Fernando están en la relación de 3 a 5, ¿cuántos años tendrá Fernando dentro de 12 años?

   A) 42 B) 52 C) 48
   D) 60 E) 54

3. Las edades actuales de Carlos y de Roberto están en la relación de 5 a 8, y dentro de 22 años estarán en la relación de 7 a 9. ¿Cuántos años tiene Roberto?

   A) 16 B) 24 C) 32
   D) 40 E) 30

4. Por cada S/.5 que tiene Ángela, Brenda tiene S/.2, y por cada S/.3 que tiene Brenda, Carla tiene S/.7. Si entre las tres tienen S/.455, ¿cuántos soles tiene Ángela más que Carla?

   A) 13 B) 12 C) 15
   D) 26 E) 18

5. La cantidad de programas que domina Javier es dos veces a la de César, y la cantidad de programas que domina César es dos veces más a la de Marcos. ¿Cuántos programas domina César si la cantidad de programas que domina Javier excede a la de Miguel en 20?

   A) 12 B) 9 C) 15
   D) 6 E) 18

6. En una reunión, el número de varones que bailan y de mujeres que no bailan están en la relación de 5 a 7; además, el número de mujeres que bailan es dos veces más al número de varones que no bailan. Si hay 128 mujeres más que varones, ¿cuántas mujeres hay en la reunión?

   A) 142 B) 184 C) 264
   D) 224 E) 288

7. La cantidad de horas dictadas por los profesores Álex, Johnny y Gerardo durante la semana es de 140 h. Si la cantidad de horas dictadas por Álex y Johnny están en la relación de 2 a 3, y la de Johnny y Gerardo es de 4 a 5, respectivamente, ¿cuántas horas dictó Johnny durante la semana?

   A) 40
   B) 48
   C) 75
   D) 60
   E) 54

8. De una mezcla de agua y de vino que contiene 336 L, se extraen 105 L, de los cuales 75 L son de vino. ¿Cuántos litros de agua se deben agregar para que la relación de agua y de vino sea de 2 a 3?

   A) 36 B) 44 C) 30
   D) 40 E) 24

9. Dos móviles (A y B) parten al encuentro de dos ciudades distantes de 420 km, con velocidades que están en la relación de 7 a 3, respectivamente; luego de cierto tiempo se encuentran separados 80 km después del primer encuentro. En ese instante, ¿cuánto le falta al móvil A para llegar al otro extremo?

A) 70 km B) 50 km C) 60 km
D) 40 km E) 80 km

10. En una proporción geométrica continua de constante entera, la suma de términos es 150. Calcule la diferencia de los términos extremos.

A) 72 B) 80 C) 90
D) 86 E) 96

11. En una proporción geométrica continua de constante entera, la suma de antecedentes es 24 y la suma de extremos es 20. Calcule la medida proporcional.

A) 6 B) 10 C) 12
D) 8 E) 15

12. En una proporción continua, los términos extremos están en la relación de 4 a 9. Halle la media proporcional si la suma de los términos diferentes es 57.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 21 E) 24

13. Si $\frac{2}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{162}=k$, calcule $a+b+c$.

A) 60 B) 78 C) 76
D) 64 E) 81

14. Si $\frac{a}{18}=\frac{12}{b}=\frac{c}{30}=\frac{32}{d}=k$, además $d-b=15$, calcule $a+b+c+d$.

A) 125 B) 91 C) 112
D) 97 E) 107

NIVEL INTERMEDIO

15. Una competencia se inició con una determinada cantidad de personas entre hombres y mujeres. Luego, 8 mujeres salieron de la competencia, quedando 2 hombres por cada mujer. Finalmente se retiraron 20 hombres y quedaron 3 mujeres por cada hombre. ¿Con cuántas personas se inició la competencia?

A) 40 B) 44 C) 50
D) 48 E) 52

UNMSM 2007-I

16. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$, además

$$\frac{a^2+c^2+2e^2}{b^2+d^2+2f^2}+\frac{3a+c-e}{3b+d-f}=42,$$

calcule k.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

17. Si

- $3a$ es la media diferencial de 57 y 39
- 32 es la tercera proporcional de $2b$ y a
- c es la media proporcional de a y b

calcule $a+b+c$.

A) 24 B) 48 C) 32
D) 28 E) 30

18. Se tienen dos barriles de vino de distintas calidades; uno de 80 L y el otro de 120 L. ¿Cuántos litros se deben intercambiar de manera que ambos resulten de la misma calidad?

A) 48 B) 36 C) 24
D) 32 E) 40

19. Un recipiente contiene 60 L de mezcla de agua y de vino, cuyos volúmenes están en la relación de 2 a 3, respectivamente. Luego se extraen 20 L de la mezcla y se reemplazan con *n* litros de agua para que los volúmenes de agua y de vino estén en la relación de 7 a 4. Calcule el valor de *n*.

A) 28 B) 30 C) 26
D) 24 E) 40

20. La razón aritmética de dos números es a la razón geométrica de los mismos como el menor número es a 3. Calcule el mayor número si la suma de los números es 65.

A) 26 B) 30 C) 39
D) 40 E) 44

21. Se tienen cajas que contienen 20; 20 y 10 fichas entre rojas y azules. Si todas las fichas de la segunda caja se pasaran a la primera, la relación de las fichas rojas y azules sería de 3 a 2; pero si de la tercera caja se pasaran todas las fichas a la segunda, la cantidad de fichas azules sería la mitad de las rojas. ¿Cuántas fichas rojas hay en la segunda caja si en total hay 20 fichas azules?

A) 6 B) 10 C) 14
D) 12 E) 8

22. A una fiesta concurren 360 personas, entre hombres y mujeres, asistiendo 5 hombres por cada 4 mujeres; después de 3 horas se retiran igual número de hombres y de mujeres; quedan entonces 3 hombres por cada 2 mujeres. ¿Cuántas parejas formadas por un hombre y una mujer se retiraron?

A) 40 B) 80 C) 60
D) 30 E) 20

UNMSM 2008-II

23. Los radios de la Luna y de la Tierra están en la relación de 3 a 11, y el diámetro del Sol es igual a 108 diámetros terrestres. ¿Cuál es la razón geométrica entre los radios de la Luna y del Sol?

A) 1/36 B) 1/11 C) 1/360
D) 1/396 E) 1/108

24. En una proporción geométrica continua de constante no entera, la suma de los términos medios es 12 y la diferencia de los términos extremos es 5. Calcule la suma de los términos extremos.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

25. En una igualdad de tres razones geométricas equivalentes continuas, las sumas de los antecedentes y de los consecuentes son 1332 y 999, respectivamente. Calcule la suma de los términos extremos de la igualdad de razones.

A) 756 B) 766 C) 888
D) 829 E) 819

26. Sea $r > 1$. Si

$$\frac{11+a}{11-a}=\frac{20+b}{20-b}=\frac{50+c}{50-c}=r^3 \text{ y } a+b+c+1=r^6.$$

Hallar el valor de r.

A) 8 B) 6 C) 4
D) 2 E) 10

UNMSM 2013-I

27. Si $\frac{a}{a+2}=\frac{2a}{b}=\frac{b-1}{c}$, además $a+c=40$, calcule $a+b-c$.

A) 4 B) 5 C) 8
D) 10 E) 12

28. Si $\frac{a+b}{32}=\frac{b+c}{20}=\frac{a+c}{28}$ y $a\cdot c=360$, calcule $a+b+c$.

A) 60 B) 84 C) 54
D) 66 E) 72

29. Si se cumple que

$$\frac{\sqrt{a^2+25}}{10}=\frac{\sqrt{b^2+36}}{12}=\frac{\sqrt{c^2+49}}{14},$$

además $a+b+c=54$, calcule $a\cdot b$.

A) 210 B) 280 C) 350
D) 270 E) 360

30. En una igualdad de tres razones geométricas equivalentes continuas, la suma de antecedentes es 666 y la suma de consecuentes es 888. Calcule la diferencia de los términos extremos.

A) 216 B) 168 C) 240
D) 222 E) 444

31. La suma de las razones de una igualdad de cuatro razones geométricas continuas es 4/3. Calcule el cuarto término si la suma de consecuentes excede a la suma de antecedentes en 320.

A) 36 B) 28 C) 24
D) 40 E) 32

32. Se tienen tres cilindros de agua cuyos volúmenes están en la relación de 5; 4 y 3, respectivamente. Se traspasan del primer cilindro al segundo y luego del segundo al tercero; la nueva relación de volúmenes es 2; 3 y 5, respectivamente. Calcule el volumen al final del primer cilindro si se traspasaron en total 140 L.

A) 48 L B) 52 L C) 60 L
D) 32 L E) 44 L

33. Si se cumple que

$$\frac{a}{24}=\frac{99}{b}=\frac{c}{40}=\frac{22}{d} \text{ y } a-b=d-c,$$

calcule $a+b+c+d$.

A) 124 B) 264 C) 196
D) 176 E) 216

34. En una proporción geométrica continua, el producto de antecedentes es 216, el producto de consecuentes es 486 y la suma de los términos de la primera razón es 30. ¿Cuál es la suma de los términos de la segunda razón?

A) 45 B) 35 C) 50
D) 55 E) 65

35. Si se sabe que el producto de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es 810 000 y la suma de extremos excede a la suma de antecedentes en 20, calcule la diferencia de extremos.

A) 76 B) 32 C) 88
D) 40 E) 36

Promedios

Capítulo II

OBJETIVOS

- Analizar los datos recopilados y determinar el promedio de dicho conjunto de datos.
- Conocer los promedios más importantes y cómo se utilizan estos en una situación particular.
- Aplicar las propiedades en la resolución de problemas que se plantean.

Una consecuencia del progreso, frecuentemente olvidada, pero de transcendentales proyecciones, es el aumento de la expectativa de vida.

Cuando se habla de expectativa de vida, generalmente se refiere a un promedio. Se toman los años de vida de los pobladores de un determinado lugar, se suman y se dividen entre el número de estos. Los que mueren muy jóvenes bajan el promedio y los que mueren muy viejos lo suben. Se trata de un promedio aritmético que no refleja necesariamente la realidad; por lo general los que pasan una edad peligrosa vivirán más de lo que indica el promedio, aun así las cifras empleadas para el promedio de vida son válidas para las comparaciones y un indicador del progreso.

Por ejemplo, la expectativa de vida en EE. UU. en el año 1850 era de 38 años y en 1900, gracias al progreso de la bacteriología, subió a 48 años. En 1950 ya estaba en 67 y hoy pasa de los 76 años.

Otros países avanzaron más despacio y en la mayor parte de Latinoamérica en 1940 no llegaba a los 40 años; hoy pasa de los 60 años.

Promedio

Dado un conjunto de datos, el promedio es una cantidad que representa a dichos datos, el cual debe estar entre el menor y el mayor de los datos.

Ejemplo

Dados los siguientes datos sobre las notas de un alumno: 12; 15; 16 y 18.

$$(\text{promedio}) = \frac{12+15+16+18}{4} = 15,25$$

Se cumple

$$\underset{\displaystyle 12}{\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix}\text{menor}\\ \text{dato}\end{pmatrix}}} < \underset{\displaystyle 15,25}{\underset{\downarrow}{(\text{promedio})}} < \underset{\displaystyle 18}{\underset{\downarrow}{\begin{pmatrix}\text{mayor}\\ \text{dato}\end{pmatrix}}}$$

MEDIA ARITMÉTICA O PROMEDIO ARITMÉTICO $(\overline{MA})$

Es el promedio más utilizado. El cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$\overline{MA} = \frac{\text{(suma de datos)}}{\text{(cantidad de datos)}}$$

En consecuencia

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{datos}\end{pmatrix} = \overline{MA} \times \begin{pmatrix}\text{cantidad}\\ \text{de datos}\end{pmatrix}$$

Ejemplo

Calcule la $\overline{MA}$ de los siguientes datos.

a. 10; 15; 13 y 20

$$\overline{MA} = \frac{10+15+13+20}{4} = 14,5$$

b. 8; 11; 14; 17 y 20

$$\overline{MA} = \frac{8+11+14+17+20}{5} = 14$$

Se observa que los datos están en progresión aritmética (P.A.)

$$8;\ 11;\ 14;\ 17;\ 20$$
$$\quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3$$

$$\therefore \overline{MA} = \frac{8+20}{2} = 14$$

NOTA

Sean los datos a_1; a_2; a_3; ...; a_n que están en progresión aritmética (P.A.): entonces

$$\overline{MA} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

MEDIA GEOMÉTRICA O PROMEDIO GEOMÉTRICO $(\overline{MG})$

Es un promedio que permite calcular el índice y la tasa de crecimiento.

$$\overline{MG} = \sqrt[\text{cantidad de datos}]{\text{productos de datos}}$$

Ejemplos

1. Calcule la $\overline{MG}$ de los siguientes datos.

   a. 8; 27 y 125

   $$\overline{MG} = \sqrt[3]{8 \times 27 \times 125} = 30$$

   b. 6; 12; 24 y 48

   $$\overline{MG} = \sqrt[4]{6 \times 12 \times 24 \times 48} = 16,97$$

2. La propagación de la población de bacterias en una ciudad anualmente en los últimos cuatro años se muestra en el cuadro

Año	2009	2010	2011	2012
Crecimiento	2%	4%	8%	16%

Calculemos el crecimiento anual promedio.

$$\overline{MG} = \sqrt[4]{(2\%)(4\%)(8\%)(16\%)}$$

$\overline{MG}$=5,66% aproximadamente

MEDIA ARMÓNICA O PROMEDIO ARMÓNICO $(\overline{MH})$

Se calcula de la siguiente manera:

$$\overline{MH} = \frac{\text{(cantidad de datos)}}{\text{(suma de inversa de datos)}}$$

Ejemplo

Calcule la $\overline{MH}$ de los siguientes datos.

a. 6; 10 y 15

$$\overline{MH}=\frac{3}{\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}=9$$

b. 20; 15; 12 y 30

$$\overline{MH}=\frac{4}{\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}}=17,14$$

PROPIEDADES

1. Para un conjunto de datos no todos iguales se tiene

$$\boxed{\overline{MA}>\overline{MG}>\overline{MH}}$$

2. Para un conjunto de datos iguales se tiene

$$\boxed{\overline{MA}=\overline{MG}=\overline{MH}}$$

3. Para dos cantidades (a y b) se tiene

$\overline{MA}$	$\overline{MG}$	$\overline{MH}$
$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{ab}$	$\frac{2a\times b}{a+b}$

Además

$$\boxed{\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2}$$

$$\boxed{(a-b)^2=4\left(\overline{MA}^2-\overline{MG}^2\right)}$$

Variación de la media aritmética ($\Delta\overline{MA}$)

$$\boxed{\Delta\overline{MA}=\frac{\begin{pmatrix}\text{aumento y/o disminución}\\ \text{en la suma de datos}\end{pmatrix}}{\text{cantidad de datos}}}$$

Además

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{promedio}\\ \text{final}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{promedio}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}+\Delta\overline{MA}}$$

Ejemplo

El promedio de 5 números es 16, luego se aumenta a los tres primeros números dos unidades a cada uno y se disminuye al resto una unidad a cada uno. Calcule el nuevo promedio.

Resolución

Sean los números a; b; c; d y e.

$$\begin{pmatrix}\text{promedio}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}=\frac{a+b+c+d+e}{5}=16$$

Luego

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ +2 & +2 & +2 & -1 & -1\end{array}$$

$$\Delta\overline{MA}=\frac{3(2)+2(-1)}{5}=0,8$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix}\text{promedio}\\ \text{final}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{promedio}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}+\Delta\overline{MA}$$

$$\begin{pmatrix}\text{promedio}\\ \text{final}\end{pmatrix}=16+0,8=16,8$$

Promedio ponderado

Sean

Datos: a_1; a_2; a_3; ...; a_n

Pesos: P_1; P_2; P_3; ...; P_n

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{promedio}\\ \text{ponderado}\end{pmatrix}=\frac{a_1\times P_1+a_2\times P_2+a_3\times P_3+...+a_n\times P_n}{P_1+P_2+P_3+...+P_n}}$$

Ejemplo

Se muestra en el cuadro las notas de un estudiante de la Facultad de Medicina.

Curso	Nota	N.° de créditos
Matemáticas	12	4
Biología I	16	5
Física I	14	4
Redacción	15	2

Calcule su promedio ponderado.

$$\begin{pmatrix}\text{promedio}\\ \text{ponderado}\end{pmatrix}=\frac{12\times4+16\times5+14\times4+15\times2}{4+5+4+2}=14{,}26$$

Velocidad promedio

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad}\\ \text{promedio}\end{pmatrix}=\frac{(\text{distancia total recorrida})}{(\text{tiempo total})}$$

Además, para espacios iguales se cumple que

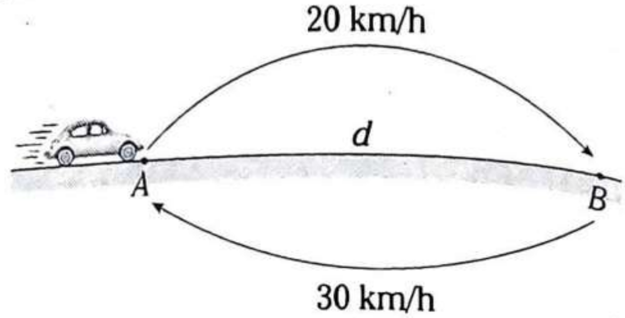
$$\begin{pmatrix}\text{velocidad}\\ \text{promedio}\end{pmatrix}=\overline{MH}_{\text{velocidades}}$$

Ejemplo

Un móvil para ir de A hacia B recorre con una velocidad de 20 km/h y de regreso (de B hacia A) lo hace con una velocidad de 30 km/h. Calcule la velocidad promedio.

Resolución

Se tiene



Se observa que los espacios que recorre de ida y de regreso son los mismos; entonces la velocidad promedio es la $\overline{MH}$ de las velocidades 20 km/h y 30 km/h.

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad}\\ \text{promedio}\end{pmatrix}=\frac{2}{\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}}=24\text{ km/h}$$

Por lo tanto, la velocidad promedio es 24 km/h.

Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Si la $\overline{MA}$ de dos números es 17,5 y la $\overline{MG}$ de los mismos números es $5\sqrt{10}$, calcule el mayor promedio de los números enteros comprendidos entre dichos números.

Resolución

De los datos se tiene

$$\overline{MA}=\frac{a+b}{2}=17,5 \;\rightarrow\; a+b=35$$

$$\overline{MG}=\sqrt{a\cdot b}=5\sqrt{10} \;\rightarrow\; a\cdot b=250$$

Donde a y b son los números enteros y positivos

$$\rightarrow\; \underset{25}{\underset{\downarrow}{a}}+\underset{10}{\underset{\downarrow}{b}}=35 \;\wedge\; \underset{25}{\underset{\downarrow}{a}}\cdot\underset{10}{\underset{\downarrow}{b}}=5\cdot5\cdot2\cdot5$$

Luego calculamos el mayor promedio, es decir, el promedio aritmético de todos los números enteros comprendidos entre 10 y 25; entonces los números son

$$\underbrace{11; 12; 13; 14; \ldots; 21; 22; 23; 24}_{24-10=14 \text{ números}}$$

En consecuencia

$$\overline{MA}=\frac{11+12+13+14+\ldots+23+24}{14}$$

$$\overline{MA}=\frac{\left(\frac{11+24}{2}\right)\cdot\cancel{14}}{\cancel{14}}=\frac{11+24}{2}=\frac{35}{2}=17,5$$

Por lo tanto, el mayor promedio de los 14 números comprendidos entre 10 y 25 es 17,5.

Problema N.° 2

La $\overline{MA}$ de 5 números enteros es 13, donde dos de ellos son 2 y 6. El resto forma una proporción geométrica continua. Calcule la $\overline{MG}$ de dichos números restantes si estos son impares.

Resolución

Sean a; b; c; d y e los números, pero como dos de ellos son 2 y 6, entonces sean $a=2$ y $b=6$.

Además

$$\overline{MA}=\frac{2+6+c+d+e}{5}=13$$

entonces

$$2+6+c+d+e=65$$
$$c+d+e=57$$

También se cumple que c; d y e forman una proporción geométrica continua; entonces se tiene

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{e}=k\\[2ex] \dfrac{ek^2}{ek}=\dfrac{ek}{e}=k\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{Se sabe que}\\ c,\, d \text{ y } e \text{ son}\\ \text{impares, entonces}\\ k \text{ es impar.}\end{array}$$

Como $c+d+e=57$, reemplazamos

$$ek^2+ek+e=1\times57$$

$$e(k^2+k+1)=1\times57$$

De donde

$$\begin{cases} e=1 \;\wedge\; k=7\\ d=ek=7 \;\wedge\; c=ek^2=49\end{cases}$$

Por lo tanto, la $\overline{MG}$ de 1; 7 y 49 será

$$\sqrt[3]{1\cdot7\cdot49}=\sqrt[3]{7^3}=7.$$

Problema N.° 3

Un mosquito recorre los lados de un polígono regular con velocidades de 40 cm/s; 88 cm/s; 154 cm/s; 238 cm/s; ...; 2350 cm/s. Calcule la velocidad promedio que el mosquito recorrió.

Resolución

Se sabe que cuando los recorridos son iguales, se cumple

$$\overline{\begin{pmatrix}\text{velocidad}\\ \text{promedio}\end{pmatrix}}=\overline{MH}_{\text{velocidades}}$$

Entonces calculamos la $\overline{MH}$, porque el mosquito va a recorrer los lados de un polígono regular (lados iguales). Se tiene

$$\overline{MH}=\frac{\overbrace{\begin{pmatrix}\text{número de}\\ \text{velocidades}\end{pmatrix}}^{\text{número de lados}}}{\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+\frac{1}{154}+\frac{1}{238}+\ldots+\frac{1}{2350}}$$

$$\overline{MH}=\frac{(\text{número de lados})}{\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\frac{1}{11\times 14}+\frac{1}{14\times 17}+\ldots+\frac{1}{47\times 50}}$$

$$\boxed{3K+2}$$

Los primeros factores tienen la forma de $3K+2$; donde K indica el lugar que ocupan. En consecuencia, para que $3K+2=47$, entonces $K=15$; luego hay 15 velocidades o también podemos decir que el polígono tiene 15 lados. Ahora se tiene

$$\overline{MH}=\frac{15}{\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\frac{1}{11\times 14}+\frac{1}{14\times 17}+\ldots+\frac{1}{47\times 50}}$$

Convenientemente multiplicamos por 3 al numerador y al denominador

$$\overline{MH}=\frac{3\times 15}{\underbrace{\frac{3}{5\times 8}+\frac{3}{8\times 11}+\frac{3}{11\times 14}+\frac{3}{14\times 17}+\ldots+\frac{3}{47\times 50}}_{\text{suma notable}}}$$

$$\overline{MH}=\frac{3\times 15}{\frac{1}{5}-\frac{1}{50}}=\frac{3\times 15}{\frac{9}{50}}=250$$

Por lo tanto, la velocidad promedio que recorre el mosquito es 250 cm/s.

Problema N.° 4

En un salón de clases, el 25% de los estudiantes tienen 15 años; 2/5 del resto tienen 13 años y los 27 restantes tienen 11 años. Si entran luego 3 estudiantes, cuya suma de edades es 63, calcule el promedio de edades de todos los estudiantes.

Resolución

Con respecto a los estudiantes que inicialmente hay en el aula, sea $20K$ el total inicial; entonces

- $\begin{pmatrix}\text{n.° de estudiantes}\\ \text{que tienen 15 años}\end{pmatrix}=25\%(20K)=\frac{1}{4}(20K)=5K$

- $\begin{pmatrix}\text{n.° de estudiantes}\\ \text{que tienen 13 años}\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\underbrace{(15K)}_{\text{el resto}}=6K$

- $\begin{pmatrix}\text{n.° de estudiantes}\\ \text{que tienen 11 años}\end{pmatrix}=20K-5K-6K=\underbrace{9K}_{\text{el resto}}=27$

$$\rightarrow K=3$$

Colocamos estos datos en la siguiente tabla:

	Estudiantes de 15 años	Estudiantes de 13 años	Estudiantes de 11 años	Total
Número de estudiantes	$5K=15$	$6K=18$	$9K=27$	$20K=60$
$\overline{MA}$	15	13	11	x
Suma de edades	15×15	18×13	27×11	$60\cdot x$

Observación
La suma de las edades de todos los grupos debe ser igual a la suma total de las edades.

Calculamos la suma de todas las edades

$$15\times15+18\times13+27\times11=756$$

Ahora, como llegan tres estudiantes más cuya suma de edades es 63, entonces

$$\begin{pmatrix}\text{nuevo}\\\text{promedio}\end{pmatrix}=\frac{756+63}{60+3}=\frac{819}{63}=13$$

Por lo tanto, el nuevo promedio de las edades de los estudiantes es 13.

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Si la edad promedio de 20 mujeres es 16,5 y la de 30 varones es 18 años, ¿cuál será la edad promedio de todas las personas luego de 6 años?

A) 17 B) 17,4 C) 23
D) 23,4 E) 24,6

2. La media aritmética de dos números es 15 y su media geométrica es 12. Calcule la diferencia de dichos números.

A) 12 B) 15 C) 16
D) 18 E) 10

3. El promedio de ocho números es $2n$. Si el promedio de tres de ellos es $n/3$, ¿cuál es el promedio de los otros cinco?

A) n B) $2n$ C) $3n$
D) $4n$ E) $5n$

4. El producto de dos números es 64 y la suma de sus raíces cuadradas positivas es 6. Calcule la media armónica de dichos números.

A) 64/5 B) 32/5 C) 23/5
D) 42/5 E) 47/5

UNMSM 2010-I

5. Un tren recorre la distancia que separa dos ciudades (A y B) a una velocidad de 80 km/h de ida, pero de regreso a 120 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio del recorrido?

A) 100 km/h
B) 110 km/h
C) 105 km/h
D) 96 km/h
E) 98 km/h

6. El promedio aritmético de las edades de ocho personas es 30. ¿Cuál es la edad máxima que podría tener una de ellas si ninguna es menor de 28 años?

A) 44 B) 38 C) 39
D) 40 E) 45

7. La edad promedio de 20 personas hace 5 años fue 19 años. Si en dicho grupo hay dos gemelos, ¿cuál es la mínima edad que pueden tener si nadie tiene más de 26?

A) 5 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

8. El promedio geométrico de 10 números es 4 y el promedio geométrico de otros 5 números es 32. Calcule el promedio geométrico de los 15 números.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

9. La $\overline{MA}$ y la $\overline{MH}$ de dos números están en la misma relación que los números 16 y 15; además, la razón aritmética de dichos números es 24. Calcule la suma de los números.

A) 96 B) 80 C) 108
D) 72 E) 98

10. El promedio de notas de 30 alumnos en el curso de historia es de 52. Si 6 de los alumnos tienen un promedio de 40, ¿cuál es el promedio de los restantes?

A) 46 B) 58 C) 48
D) 55 E) 50

UNMSM 2008-II

11. El promedio aritmético de 40 números es 16. Si a 30 de ellos se les añade 5 unidades y a los restantes se les quita 3 unidades, ¿cuál es el nuevo promedio aritmético?

A) 17 B) 18 C) 18,5
D) 19 E) 19,6

12. El producto de la media armónica y de la media aritmética de dos números enteros es igual al cuádruple de la media geométrica de ellos. Halle el producto de los números.

A) 12 B) 16 C) 18
D) 25 E) 36

13. El promedio armónico de tres números impares consecutivos es 6,6083... Calcule la media aritmética del triple del menor y del doble del mayor de dichos números.

A) 12 B) 15 C) 15,5
D) 16 E) 16,5

NIVEL INTERMEDIO

14. En un aula de colegio se observó que el promedio de notas de las mujeres es 18 y de los varones es 16; además, el promedio de las notas del total de alumnos de dicho colegio es 17,25. ¿Cuántas son mujeres si en total hay 40 alumnos?

A) 20 B) 25 C) 15
D) 18 E) 22

15. La edad promedio de cuatro hermanos es 12,5; además, las edades promedio de los dos menores y de los dos mayores están en la relación de 2 a 3. Si las edades de dichos hermanos son cantidades enteras y diferentes, ¿qué edad máxima puede tener el mayor?

A) 8 B) 10 C) 12
D) 15 E) 18

16. El promedio armónico de cinco números es 20 y de otros siete números es 28. Calcule promedio armónico de estos doce números.

A) 24 B) 48 C) 32
D) 40 E) 42

17. La edad promedio de un grupo de personas es 16 años; pero si a este grupo se unieran dos personas, cuya edad promedio es 18 años, el nuevo promedio sería 16,16 años. ¿Cuál será el nuevo promedio de edad si del grupo se retirasen tres personas, cuyo promedio de edad es 15 años?

A) 15,92 B) 16,15 C) 16,7
D) 17,2 E) 16,348

18. El promedio de estatura de 120 estudiantes de un colegio es de 1,54 m. Si la estatura promedio de todas las mujeres es 1,50 m y el promedio de todos los varones es 1,60, ¿cuál es la diferencia de la cantidad de mujeres y varones?

A) 10 B) 15 C) 20
D) 24 E) 30

19. Un motociclista ha recorrido los tres lados de una pista triangular con velocidades de 60 km/h; 30 km/h y 20 km/h, respectivamente. Calcule la velocidad promedio de su recorrido sabiendo que la pista triangular es equilátera.

A) 30 km/h B) 36,6 km/h C) 42 km/h
D) 37,5 km/h E) 40 km/h

20. En un paseo se observa que la cantidad de piuranos es el 75% de la cantidad de tumbesinos, y las cantidades de arequipeños es el 60% de los norteños. Si las edades promedio de los piuranos, tumbesinos y arequipeños son 28; 21 y 8 años, respectivamente, ¿cuál es la edad promedio de todas las personas?

A) 12 B) 14 C) 15
D) 18 E) 20

21. Si la $\overline{MA}$ de dos números excede en una unidad a su $\overline{MH}$, calcule la diferencia de los números sabiendo además que su $\overline{MG}$ de los mismos números es $4\sqrt{15}$.

A) 6 B) 4 C) 12
D) 8 E) 10

22. Si la $\overline{MH}$ de los K números de la sucesión 2; 6; 12; 20; 30; ... es 11, calcule el mayor promedio de los dos mayores números.

A) 84 B) 96 C) 100
D) 110 E) 112,5

23. La $\overline{MH}$ de dos números es igual a la mitad del número mayor, y la $\overline{MA}$ excede a la $\overline{MH}$ en 24 unidades. Halle la diferencia de los dos números.

A) 72 B) 96 C) 48
D) 60 E) 84

24. La media geométrica de un número de tres cifras y otro de dos cifras es a la media aritmética de las mismas como 5 es a 13. Calcule la suma de ambos números si son los mayores posibles.

A) 1024 B) 1014 C) 1008
D) 1012 E) 1086

25. La media geométrica de cuatro números es $10\sqrt[4]{5}$ y su media aritmética es 55/4. Calcule la media aritmética de tres de ellos, sabiendo que la media geométrica de estos es $10\sqrt[3]{5}$.

A) 17 B) 15,5 C) 16
D) 15 E) 18

UNMSM 2005-I

26. Un tráiler para repartir cemento a las ferreterías utiliza normalmente sus 12 llantas para movilizarse 480 km cada día. Cierta semana tuvo que utilizar sus 4 llantas de repuesto. ¿Cuál es el recorrido semanal promedio de cada llanta?

A) 360 B) 240 C) 120
D) 420 E) 300

27. Las medias aritmética y armónica de tres números son 14 y 72/7, respectivamente. Halle el menor de ellos si se sabe que su media geométrica es igual a uno de los números.

A) 10 B) 12 C) 8
D) 9 E) 6

28. Para la producción de zapatos por campaña escolar se distribuyó la producción entre las empresas A, B y C en forma proporcional a 2; 3 y 5, respectivamente. Si dichas empresas producen 30; 80 y 40 pares de zapatos por día, respectivamente, calcule la producción media de una empresa por día.

A) 40,27 B) $43,\widehat{63}$ C) 42,36
D) 40,50 E) $47,\widehat{23}$

29. La edad promedio de cinco hermanos es 18,8; de los cuales los varones son trillizos y las mujeres son mellizas, y todos son mayores de edad. Calcule el promedio de las edades de dos de los varones con una de las mujeres.

A) 56/3 B) 49/3 C) 53/3
D) 47/3 E) 38/3

30. De treinta invitados, ninguno tiene menos de 15 años. ¿Cuál será la máxima edad que 2 de ellos pueden tener para que el promedio de edades (considerando las edades de todos los invitados) sea 18 años?

A) 50 años B) 36 años C) 40 años
D) 70 años E) 60 años

UNMSM 2009-I

31. Una hormiga recorre el perímetro de un polígono regular por una vez con velocidades de 3; 15; 35; 63; ... m/min. Al calcular la velocidad promedio de la hormiga sobre su recorrido se obtuvo 35 m/min. Calcule el número de lados del polígono regular si solo recorrió una vez cada lado.

A) 17 B) 16 C) 15
D) 14 E) 18

32. Se tienen cinco números y ninguno es menor que 54. Si la media geométrica de los cinco números es 108, halle el máximo valor que puede tomar uno de ellos.

A) 1728 B) 1258 C) 1128
D) 1360 E) 1100

33. En la sección de Acabados de una empresa, para hacer los ojales se distribuyó la producción en dos partes iguales: las máquinas *A* y *B*. Se sabe que en 1 h la máquina *A* hace ojales a 5 camisas y *B* a 7 camisas. Halle la cantidad promedio de ojales de una máquina en una hora si cada camisa lleva 6 botones.

A) 30 B) 24 C) 28
D) 35 E) 22

34. Los promedios aritmético y geométrico de dos números (a y b) son 13 y 12, respectivamente. Los promedios aritmético y geométrico de otros dos números (c y d) son 14 y $8\sqrt{3}$. Calcule la media aritmética de los dos números mayores.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 15

35. La $\overline{MG}$ de dos números es menor en 12 unidades que el mayor de dicho número y su $\overline{MA}$ es mayor en 10 unidades que el menor que estos números. Calcule la suma de los números.

A) 50 B) 51 C) 52
D) 53 E) 54

Magnitudes proporcionales

Capítulo III

Objetivos

- Comparar diversas magnitudes y analizar su variación cuantitativamente.
- Identificar al comparar dos magnitudes si son directa o inversamente proporcionales.
- Conocer las propiedades de las magnitudes que son directa o inversamente proporcionales para la resolución de los problemas.

En la vida cotidiana podemos observar distintas características propias de la materia, las mismas que pueden ser comparadas teniendo en cuenta como referencia a una de ellas. Por ejemplo:

- El largo de un muro es 20 veces el largo de un libro.
- El largo de una determinada mesa es 5 veces el largo del mismo libro.

Se observa que al realizar la comparación (medición) de las longitudes del largo del muro y la mesa, utilizando la longitud del largo de un libro (unidad de medida) como referencia, se obtiene como resultado lo siguiente:

- longitud del muro <> $\underbrace{\text{20 veces}}_{\text{valor numérico}}\ \underbrace{\text{la longitud del libro}}_{\text{unidad referencial}}$

- longitud de la mesa <> $\underbrace{\text{5 veces}}_{\text{valor numérico}}\ \underbrace{\text{la longitud del libro}}_{\text{unidad referencial}}$

Antiguamente, tal vez la primera necesidad del hombre fue medir el tiempo para planificar citas tribales, labores agrícolas, etc., y con este fin se estableció un calendario y se adoptó el día como unidad de medida del tiempo.

Magnitud

Se entiende por magnitud, para nuestro estudio, como todo aquello que tiene la característica de variar (aumentar o disminuir) y que se puede medir o cuantificar.

Cantidad

Es un estado particular de la magnitud el cual resulta de medir la magnitud y es expresado en ciertas unidades.

Ejemplos

Magnitud	Cantidad
Temperatura	21 °C
Velocidad	80 km/h
Área	120 m^2
Tiempo	45 min

Relaciones entre dos magnitudes

Magnitudes directamente proporcionales (DP)

Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, los valores correspondientes de la otra magnitud también aumentan o disminuyen en la misma proporción.

Ejemplo

Carlitos compra en una librería una docena de lapiceros por S/.18, entonces comparando las magnitudes: número de lapiceros y costo, tenemos

N.° de lapiceros	12	24	36	6
Costo	18	36	54	9

Se observa que

$\uparrow$ (lapiceros) DP (costo) $\uparrow$

Se cumple que sus valores correspondientes

$$\frac{\text{(lapiceros)}}{\text{(costo)}}=\frac{12}{18}=\frac{24}{36}=\frac{36}{54}=\frac{6}{9}$$

En general, sean A y B dos magnitudes

$$\boxed{A \text{ DP } B \leftrightarrow \frac{\text{valor } A}{\text{valor } B}=\text{cte.}}$$

Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, los valores correspondientes de la otra magnitud también disminuyen o aumentan en la misma proporción.

Ejemplo

Una obra puede ser realizada por 10 obreros en 12 días, entonces comparando las magnitudes: número de obreros y número de días, tenemos

N.° de obreros	10	20	30	5
N.° de días	12	6	4	24

Se observa que

$\uparrow$ (obreros) IP (días) $\downarrow$

Se cumple que sus valores correspondientes

$$\text{(obreros)}\times\text{(días)}=10\cdot 2=20\cdot 6=30\cdot 4=5\cdot 24$$

En general, sean M y N dos magnitudes

$$\boxed{M \text{ IP } N \leftrightarrow (\text{valor } M)\times(\text{valor } N)=\text{cte.}}$$

Propiedades

Sean las magnitudes A, B, M y N.

1. $$\boxed{\begin{array}{c} A \text{ DP } B \leftrightarrow B \text{ DP } A \\ M \text{ IP } N \leftrightarrow N \text{ IP } M \end{array}}$$

2. $$\boxed{\begin{array}{c} A \text{ DP } B \leftrightarrow A^n \text{ DP } B^n \\ M \text{ IP } N \leftrightarrow M^n \text{ IP } N^n \\ n\in Q \wedge n\neq 0 \end{array}}$$

3. $$\boxed{\begin{array}{c} A \text{ DP } B \leftrightarrow A \text{ IP } \dfrac{1}{B} \\ M \text{ IP } N \leftrightarrow M \text{ DP } \dfrac{1}{N} \end{array}}$$

4. Sean A, B, C y D magnitudes.

> Si
>
> A DP B ; C y D cte.
>
> A IP C ; B y D cte.
>
> A DP D ; B y C cte.
>
> entonces
>
> $$\frac{(\text{valor } A)(\text{valor } C)}{(\text{valor } B)(\text{valor } D)}=\text{cte.}$$

Aplicaciones de las magnitudes

Reparto proporcional

Es un procedimiento que consiste en repartir una determinada cantidad de manera DP y/o IP a ciertos números denominados índices.

Ejemplos

1. Se desea repartir S/.357 en tres partes DP a 3; 5 y 9. Halle cada una de las partes.

Resolución

Sean las partes A, B y C.

Partes	A	B	C
Índices	3	5	9

(partes) DP (índices)

Tenemos

$$\frac{A}{3}=\frac{B}{5}=\frac{C}{9}=k \rightarrow \begin{cases} A=3k \\ B=5k \\ C=9k \end{cases}$$

Por dato

$$A+B+C=357$$

$$17k=357$$

$$k=21$$

Luego

$$A=63; \quad B=105; \quad C=189$$

2. Se desea repartir S/.513 en tres partes IP a 3; 4 y 6. Halle cada una de las partes.

Resolución

Sean las partes M, N y P.

Partes	M	N	P
Índices	3	4	6

(partes) IP (índices)

Tenemos

$$M\cdot 3=N\cdot 4=P\cdot 6$$

Dividimos entre el MCM (3; 4; 6)=12

$$\frac{M\cdot 3}{12}=\frac{N\cdot 4}{12}=\frac{P\cdot 6}{12}$$

Simplificando se tiene

$$\frac{M}{4}=\frac{N}{3}=\frac{P}{2}=k \rightarrow \begin{cases} M=4k \\ N=3k \\ P=2k \end{cases}$$

Por dato

$$M+N+P=513$$

$$9k=513$$

$$k=57$$

Luego

$$M=228; \quad N=171; \quad P=114$$

Regla de compañía

Una compañía está conformada por varios socios, quienes aportan capitales que pueden ser dinero o bienes, y luego de cierto periodo, por lo general anual, la compañía obtiene utilidades o ganancias las cuales son repartidas entre los socios en base del capital y tiempo de permanecía de estos.

Relacionando las magnitudes que intervienen se tiene lo siguiente:

- (ganancia) DP (capital)
- (ganancia) DP (tiempo)

Entonces

$$\boxed{\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=\text{cte.}}$$

Ejemplo

Tres socios inician un negocio aportando S/.2000; S/.3000 y S/.4000 durante 6; 8 y 12 meses, respectivamente, obteniendo una ganancia de S/.16 800. Halle la ganancia obtenida por cada socio.

Resolución

Sean las ganancias de los tres socios: GA, GB, GC.

Ganancia	Capital	Tiempo
GA	S/.2000	6 meses
GB	S/.3000	8 meses
GC	S/.4000	12 meses

Tenemos

$$\frac{GA}{2000\times 6}=\frac{GB}{3000\times 8}=\frac{GC}{4000\times 12}$$

Simplificando tenemos

$$\frac{GA}{1}=\frac{GB}{2}=\frac{GC}{4}=k\rightarrow\begin{cases}GA=k\\GB=2k\\GC=4k\end{cases}$$

Por dato

$$GA+GB+GC=16\,800$$
$$7k=16\,800$$
$$k=2400$$

Luego

$GA=2400$

$GB=4800$

$GC=9600$

En problemas de una obra

Al comparar las siguientes magnitudes:

- (obreros) IP (días)
- (obreros) IP (horas diarias)
- (obreros) IP (eficiencia)
- (obreros) DP (obra)
- (obreros) DP (dificultad)

Entonces

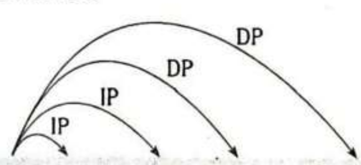
$$\boxed{\frac{(\text{obreros})(\text{días})(\text{horas diarias})(\text{eficiencia})}{(\text{obra})(\text{dificultad})}=\text{cte.}}$$

Ejemplo

Una obra que consiste en armar la base de una columna de un puente la pueden hacer 10 obreros durante 12 días trabajando a razón de 8 h/d. ¿Cuántos obreros se necesitarán para armar otra columna que es el triple de la anterior en 15 días trabajada a razón de 6 h/d y cuya dificultad es la mitad?

Resolución

Por dato tenemos



Obreros	Días	h/d	Obra	Dificultad
10	12	8	1	2
x	15	6	3	1

Tenemos

$$\frac{10\cdot 12\cdot 8}{1\cdot 2}=\frac{x\cdot 15\cdot 6}{3\cdot 1}$$

$\therefore\ x=16$

Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Se sabe que la fuerza de atracción entre dos masas es IP al cuadrado de la distancia que los separa. ¿En qué fracción varía la distancia de separación si la fuerza de atracción disminuye en sus $\frac{24}{49}$?

Resolución

Por dato se sabe que

$$\begin{pmatrix}\text{fuerza de atracción}\\ \text{entre dos masas}\end{pmatrix} \text{ IP } \begin{pmatrix}\text{distancia que}\\ \text{los separa}\end{pmatrix}^2$$

Entonces debe cumplir que

$$\begin{pmatrix}\text{fuerza de atracción}\\ \text{entre dos masas } (F)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{distancia que}\\ \text{los separa } (d)\end{pmatrix}^2 = \underbrace{k}_{\text{constante}}$$

Lo cual significa que se cumple que

$$F_1 \times d_1^2 = F_2 \times d_2^2 = F_3 \times d_3^2 = \ldots = k$$

Convenientemente proponemos que

$$d_1 = 1 \;;\; F_1 = 49 \text{ y } F_2 = 25$$

$$\text{dato: } \underbrace{49 - \frac{24}{49}(49)}_{\text{Disminuye en sus } \frac{24}{49}.} = 25$$

Reemplazando los valores se tiene

$$49 \times 1^2 = 25 \cdot x^2$$

Sacamos la raíz cuadrada a ambos miembros

$$7 \times 1 = 5 \cdot x$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{7}{5}$$

Por lo tanto, podemos decir que la distancia aumentó en

$$\frac{7}{5} - 1 = \frac{7}{5} - \frac{5}{5} = \frac{2}{5}$$

Problema N.° 2

Se reparten S/.600 en forma IP a los números 2; 6; 12; 20; ...; 110. Calcule la diferencia entre la mayor y la menor cantidades repartidas.

Resolución

Si la condición del reparto es inversamente proporcional (IP) a los números, se cumple que

$$P_1 \times 2 = P_2 \times 6 = P_3 \times 12 = P_4 \times 20 = \ldots = P_n \times 110 = k$$

Donde P_1; P_2; P_3; ...; P_n corresponden a cada parte.

Convenientemente le damos la siguiente forma:

$$\frac{P_1}{\frac{1}{2}} = \frac{P_2}{\frac{1}{6}} = \frac{P_3}{\frac{1}{12}} = \frac{P_4}{\frac{1}{20}} = \ldots = \frac{P_n}{\frac{1}{110}} = k$$

$$\frac{P_1}{\frac{1}{1 \times 2}} = \frac{P_2}{\frac{1}{2 \times 3}} = \frac{P_3}{\frac{1}{3 \times 4}} = \frac{P_4}{\frac{1}{4 \times 5}} = \ldots = \frac{P_{10}}{\frac{1}{10 \times 11}} = k$$

Indica el lugar que ocupa.

Aplicamos la propiedad (la suma de antecedentes entre la suma de sus respectivos consecuentes es igual a la constante).

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots + P_{10}}{\underbrace{\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \ldots + \frac{1}{10 \times 11}}_{\text{suma notable}}} = k$$

$$\frac{\overset{\text{dato}}{600}}{1 - \frac{1}{11}} = k = \frac{600}{\frac{10}{11}} = 660 \quad \rightarrow \quad k = 660$$

Luego calculamos lo que les corresponde a P_1 y P_{10}, así tenemos

$$P_1=\frac{660}{2}=330 \quad \wedge \quad P_{10}=\frac{660}{110}=6$$

$\therefore \quad P_1-P_{10}=330-6=S/.224$

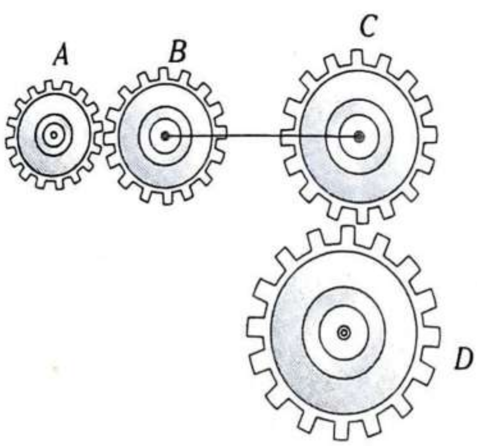
Problema N.° 3

La rueda A de 100 dientes engrana con la rueda B de 80 dientes; unida a B mediante un eje, está la rueda C de 140 dientes que engrana con D, esta tiene 210 dientes. Si en 40 s la rueda A da 24 vueltas, ¿cuántas vueltas dará D en 30 s?

Resolución

Según los datos se tiene el siguiente gráfico:

$D_A=100 \quad D_B=80 \qquad D_C=140$



$D_D=210$

Se sabe que

(n.° de dientes) IP (n.° de vueltas)

Entonces se cumple que

$$D_A\times V_A=D_B\times V_B \quad \wedge \quad D_C\times V_C=D_D\times V_D$$

Reemplazamos los datos

$$\cancel{100}\cdot V_A=\cancel{80}\cdot V_B \qquad 140\cdot V_C=210\cdot V_D$$

$$\frac{V_A}{4}=\frac{V_B}{5} \quad \wedge \quad \frac{V_C}{3}=\frac{V_D}{2}$$

Tienen que ser iguales, porque tienen el mismo eje.

Homogeneizando se tiene

$$\frac{V_A}{4\times3}=\frac{V_B}{5\times3} \quad \wedge \quad \frac{V_C}{3\times5}=\frac{V_D}{2\times5}$$

Entonces

$$\frac{V_A}{12}=\frac{V_B}{15}=\frac{V_C}{15}=\frac{V_D}{10}$$

Además se sabe que

- En 40 s

  A: 24 vueltas=12×2

  D: 20 vueltas=10×2

- En 10 s

  A: 6 vueltas

  D: 5 vueltas

Por lo tanto, la rueda D dará 5×3=15 vueltas en 30 s.

Problema N.° 4

En un prado 25 vacas comen la hierba que crece en 30 días. Si se sabe, además, que 45 vacas se tardarían la mitad del tiempo, ¿cuánto tardarían 65 vacas si el crecimiento diario de la hierba es constante?

Resolución

Se sabe que el crecimiento diario de la hierba en el prado es constante, entonces el tiempo que tardarían en comer la hierba depende de manera inversamente proporcional del número de vacas que comen y en forma directamente proporcional a su altura.

(n.º de vacas) IP (n.º de días)

(n.º de vacas) DP (altura de la hierba)

Entonces se cumple

$$\frac{(\text{n.º de vacas})\ (\text{n.º de días})}{(\text{altura de la hierba})} = \text{cte.}$$

> **Nota**
> Si llamamos h al crecimiento diario, entonces en 5 días crecerá $5h$, así como en 30 días crecerá $30h$, pero al momento de ingresar las vacas ya hay una altura inicial que llamaremos H.

Entonces planteamos

$$\frac{25\cdot 30}{H+30h} = \frac{45\cdot 15}{H+15h} = \frac{65\cdot x}{H+x\cdot h}$$

Simplificando, se tiene

$$\frac{5\cdot 2}{H+30h} = \frac{9\cdot 1}{H+15h}$$

$$10H+150h = 9H+270h$$

$$H = 120h$$

Además se cumple que

$$\frac{45\cdot 15}{120h+15h} = \frac{65\cdot x}{120h+x\cdot h}$$

$$\frac{\cancel{45}\cdot \cancel{3}}{\cancel{135}\,\cancel{h}} = \frac{13\cdot x}{(120+x)\,\cancel{h}}$$

$$120+x = 13x$$

$$x = 10$$

Por lo tanto, las vacas tardarán 10 días.

> **¿Sabía que...?**
> Medir es relacionar una magnitud con otra u otras de la misma especie que se consideran patrones universalmente aceptados, estableciendo una comparación de igualdad, de orden y número.
> Los patrones básicos se llaman unidades de medida. Para obtener el valor de una magnitud hay que dar la unidad de medida y el número que relaciona a ambos valores.
> Algunas equivalencias
> - 1 milla <> 1,6 kilómetros
> - 1 onza <> 28,35 gramos
> - 1 galón <> 3,78 litros

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Si Mario demora 12 días en hacer una zanja, ¿cuántos días demorará en hacer una zanja de las mismas dimensiones en un terreno 1/3 más dificultoso?

A) 12 B) 15 C) 18
D) 16 E) 20

2. Un grupo de obreros hace una obra en 10 días. ¿Cuánto demorará en hacer otra obra con el triple de dificultad?

A) 30 días B) 18 días C) 32 días
D) 24 días E) 28 días

3. Si el peso de una esfera varía proporcionalmente a su volumen, determine en cuánto debe disminuir su radio para que su peso disminuya en 19/27 de su valor inicial.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{7}$

4. Un cubo cuya arista es de 3 m es llenado por un grifo en 5 h. Calcule el tiempo que demora en llenarse un cubo, cuya arista es dos veces más que la arista inicial, sabiendo que el cubo es llenado por el mismo grifo y al mismo caudal.

A) 120 B) 115 C) 135
D) 150 E) 145

5. Samir demora 18 días en hacer una zanja. ¿Cuántos días demorará Jesús en hacer una zanja de las mismas dimensiones en un terreno 1/3 más dificultoso y con una eficiencia que es media vez más que la de Samir?

A) 12 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

6. Se contratan 48 obreros para construir una casa, y faltando 30 días para terminar, 12 de ellos sufrieron un accidente y se retiraron de la obra. Calcule cuántos días tardarán los obreros restantes en culminar lo que faltaba de la obra.

A) 36 B) 40 C) 32
D) 24 E) 18

7. Un taxista acostumbra cobrar de forma proporcional respecto al número de pasajeros que transporta y a la distancia recorrida. Si a 3 pasajeros les cobró S/.20 por recorrer 5 km, ¿cuánto les cobrará a 4 pasajeros por recorrer 6 km?

A) S/.24 B) S/.30 C) S/.32
D) S/.35 E) S/.40

8. Veinticuatro obreros pueden asfaltar una carretera de 200 metros de largo en 10 días trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántos hombres serán necesarios para asfaltar una carretera de 800 metros de largo trabajando 8 horas diarias durante 15 días?

A) 36 B) 40 C) 44
D) 48 E) 60

9. Ocho peones se demoran 4 días de 9 horas diarias de trabajo en sembrar 400 m^2. ¿Cuántos días de 6 horas diarias de trabajo se demorarán 6 peones doblemente hábiles en sembrar 600 m^2?

A) 4 B) 6 C) 5
D) 10 E) 12

10. Dos magnitudes (A y B) son directamente proporcionales para valores de A mayores o iguales a 4, pero inversamente proporcionales para valores de A menores o iguales a 4. Si $A=3$ cuando $B=12$, halle B cuando $A=8$.

A) 12 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

11. Un albañil puede construir una casa en 20 días, pero con la ayuda de su hijo pueden construirla en 15 días. Si el hijo trabajara solo, ¿en cuántos días construirá la misma casa?

A) 45 B) 50 C) 40
D) 60 E) 75

UNMSM 2009-I

12. Doce obreros pueden realizar una obra en 30 días. Si al final del noveno día se incorporaron n obreros, terminando así 3 días antes de lo establecido, calcule n.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

13. La rueda A de 50 dientes engrana con la rueda B de 60 dientes. Fija al eje B se encuentra la rueda C de 100 dientes, que engrana con la rueda D de 40 dientes. Si A da 240 RPM, ¿cuántas vueltas dará la rueda D en 10 min?

A) 1024 B) 5000 C) 1200
D) 1500 E) 1800

14. Una familia de cuatro miembros tiene víveres para todos los días del mes de mayo; pero como recibieron la visita de un primo, los víveres se terminaron días antes. Calcule cuánto tiempo duró la visita del primo.

A) 12 B) 14 C) 15
D) 16 E) 20

15. Se ha notado que el precio de venta de un artículo es DP a su precio de costo e IP al número de artículos vendidos. Si de un artículo que costó S/.45 se vendieron 3000 unidades al precio de S/.60 cada una, ¿a qué precio debería venderse si hubiese costado S/.20 cada una y se hubiera vendido 2500 unidades?

A) S/.32 B) S/.24 C) S/.30
D) S/.18 E) S/.16

16. Un padre decide repartir cierta suma de dinero entre sus tres hijos de forma IP a sus edades, las cuales son 25; 15 y 10 años. Si la diferencia entre las cantidades recibidas por el mayor y el menor suman S/.135, ¿cuánto recibió el segundo hermano?

A) S/.100 B) S/.120 C) S/.135
D) S/.150 E) S/.200

NIVEL INTERMEDIO

17. En una obra trabajan 10 obreros. Cuando faltaban 30 días para culminar la obra, se enfermaron 6 obreros; 10 días después son reemplazados por x obreros, culminando la obra en el plazo establecido. Halle x.

A) 10 B) 12 C) 13
D) 15 E) 9

18. Se contratan 48 obreros para construir una casa, y faltando 30 días para terminar, 12 de ellos sufrieron un accidente y se retiraron de la obra. Calcule cuántos días tardarán los obreros restantes en culminar lo que faltaba de la obra.

A) 32 B) 10 C) 40
D) 36 E) 42

19. Un grupo de obreros se comprometen a realizar una obra en 20 días; luego de haber realizado la quinta parte, se retiran 8 obreros, y 9 días más tarde se exige al contratista que entregue la obra en el plazo fijado, por lo cual se contrata *n* obreros. Halle *n*.

A) 16 B) 11 C) 14
D) 12 E) 10

20. Una herencia se repartió proporcionalmente a las edades de tres hermanos, las cuales son 12, 18 y 24 años. Si el reparto se hubiera hecho IP a dichas edades, uno de ellos habría recibo S/.4200 más. Halle cuánto es la herencia.

A) S/.12 000 B) S/.14 000 C) S/.15 000
D) S/.17 550 E) S/.18 000

21. Una obra puede ser hecha por 30 hombres en 16 días. Pero, faltando 6 días para terminar, el cliente solicita que la obra aumente en su cuarta parte, por lo cual el capataz contrata a más obreros y logra acabar a tiempo. ¿Cuántos obreros contrató al final?

A) 30 B) 24 C) 20
D) 18 E) 22

22. A fin de año se desea repartir cierta gratificación entre tres empleados que reúnen los siguientes datos:

	Número de faltas	Horas extras	Número tardanzas	Años de servicio
A	6	18	3	4
B	15	8	4	10
C	5	35	21	1

Halle la cantidad repartida si el primero recibió S/.2400 más que el segundo.

A) 6500 B) 5100 C) 8500
D) 6000 E) 7500

23. Diez hombres pueden hacer una obra en 6 días; mientras que 15 mujeres harían la misma obra en 8 días. ¿Qué tiempo emplearían en hacer la misma obra 4 hombres y 6 mujeres?

A) 55/12 días
B) 83/9 días
C) 12 días
D) 8 días
E) 60/7 días

UNMSM 2004-II

24. Se contrataron 36 obreros para hacer una obra en 30 días trabajando 5 horas diarias. Después de 8 días de trabajo se acordó que la obra tenía que terminar 12 días antes del plazo fijado y así se hizo. ¿Cuántos obreros más debieron emplearse si además se aumentó 4 horas de trabajo diario?

A) 6 B) 12 C) 9
D) 8 E) 10

25. Un anciano decide repartir D soles entre sus tres hijos en forma proporcional a sus edades que son 11; 13; y 18, pero el hermano mayor decide hacerlo dentro de 7 años, debido a ello recibe S/.120 menos. Calcule D.

A) S/.3000
B) S/.3780
C) S/.4000
D) S/.4500
E) S/.6000

26. Para sembrar cierto terreno, lo realizan 4 hombres y 3 mujeres en 24 días. El mismo terreno será sembrado por 2 hombres y 3 mujeres en n días. Si el trabajo que realizan 2 hombres es equivalente al trabajo que realizan 3 mujeres, calcule n.

A) 30
B) 33
C) 36
D) 40
E) 45

27. Un albañil para construir un muro de forma rectangular cobró S/.625. ¿Cuánto cobrará este albañil por otro muro similar, cuyas dimensiones sean 20% menos y 40% más en el largo y alto, respectivamente, sabiendo que al final hizo una rebaja del 10%.

A) S/.600
B) S/.630
C) S/.650
D) S/.700
E) S/.690

28. Un albañil para colocar losetas sobre la superficie rectangular de un piso cobró S/.750. ¿Cuánto cobrará el albañil por otra superficie, cuyas dimensiones aumentan en 20% y 30%, respectivamente, si al final hizo una rebaja del 10%?

A) S/.1053
B) S/.1050
C) S/.1100
D) S/.1048
E) S/.1036

29. Se sabe que un grupo de 40 obreros pueden hacer una obra en 35 días, mientras que otro grupo de 50 lo haría en 42 días trabajando ambos 8 h/d. Si se contratara la mitad de los obreros del primer grupo con 5 obreros del segundo, ¿en cuántos días terminan la misma obra?

A) 30
B) 45
C) 50
D) 60
E) 70

30. Se reparte N soles en forma directamente proporcional a 2; 3 y 7 entre tres personas. Pero luego se decide repartirlo inversamente proporcional a 45; 36 y 20, respectivamente, por ello una persona se perjudicó en S/.120. Calcule N.

A) S/.1200
B) S/.1600
C) S/.1440
D) S/.1500
E) S/.2400

31. Dos socios inician un negocio aportando cada uno S/.4500, después de dos meses uno de ellos aumenta su capital en S/.1500 y luego de tres meses el otro aumenta la misma cantidad. Determine cuánto recibió el que gana más si la diferencia de dichas ganancias es S/.300 y el negocio duró 2 años.

A) S/.9400
B) S/.9300
C) S/.1500
D) S/.6000
E) S/.7800

32. Un bodeguero posee dos tipos de jabones. Los jabones del primer tipo miden 2 cm de ancho, 4 cm de alto y 6 cm de largo, y cuestan S/.2,40 cada uno. Los jabones del segundo tipo miden 3 cm del alto, 3 cm de ancho y 8 cm de largo. Si la calidad del primer jabón es el doble del segundo, ¿cuánto debe costar cada jabón del segundo tipo?

A) S/.1,50
B) S/.1,80
C) S/.2,00
D) S/.2,20
E) S/.2,50

33. Se reparte N soles proporcionalmente a 3; 4 y 5 entre tres personas. La tercera de ellas recibiría S/.150 menos si el reparto se hiciera DP a los cuadrados de dichos números. Calcule N.

A) S/.1200 B) S/.1500 C) S/.1800
D) S/.2000 E) S/.2400

34. Un padre decide repartir S/.520 entre sus tres hijos, que están en el colegio, en partes que sean DP a sus edades (8; 9 y 12 años), DP a sus notas (15, 10, 12) e IP al número de faltas (10, 15 y 18), respectivamente. Halle la menor de las partes.

A) S/.100 B) S/.120 C) S/.150
D) S/.180 E) S/.200

35. Dos personas forman un negocio aportando la primera S/.3000 y la segunda S/.1800. Después de tres meses aceptan a un tercer socio que aporta un capital de S/.4000; luego de cinco meses se retira la primera persona. Calcule cuánto ganó el tercer socio si la utilidad total es de S/.3400 y el negocio dura un año.

A) S/.1000
B) S/.1200
C) S/.1500
D) S/.1600
E) S/.1800

36. Se contratan a 150 obreros para ejecutar una obra. Después del primer día, 4 obreros se retiran diariamente, por lo que la obra se terminó 8 días después de lo pactado. ¿En cuántos días terminaron la obra?

A) 16 B) 17 C) 24
D) 25 E) 27

37. Las magnitudes A y B guardan cierta relación de proporcionalidad; además se muestran los valores correspondientes.

A	12	x	108	75	15
B	4	6	12	10	y

Calcule $x+y$.

A) 36 B) 42 C) 40
D) 38 E) 47

Regla del tanto por ciento

Capítulo IV

Objetivos

- Interpretar la relación de una parte respecto a un total.
- Determinar el tanto por ciento de una cantidad respecto a otra.
- Calcular el aumento o el descuento sucesivo de una cantidad en referencia.
- Identificar los elementos que intervienen en las operaciones comerciales.

El tanto por ciento es una forma muy común de presentar información numérica en nuestra vida cotidiana; por ejemplo, los centros comerciales lo utilizan para anunciar los descuentos; los fabricantes, para el contenido de sus productos, y los bancos lo utilizan para indicar los intereses de las cuentas de ahorros y los préstamos. Los diarios están llenos de estadísticas en forma porcentual, como por ejemplo vemos que la inflación del mes es el 2%, las exportaciones aumentaron en 40%, el candidato demócrata ganó con el 52%, etc.

El término **por ciento** se deriva de la frase latina *per centun*, que indica cierta parte de cada ciento de una cosa cualquiera; por ejemplo, 5 por ciento indicaría 5 personas de cada 100 personas, 5 soles de cada 100 soles, 5 kilos de cada 100 kilos, etc.

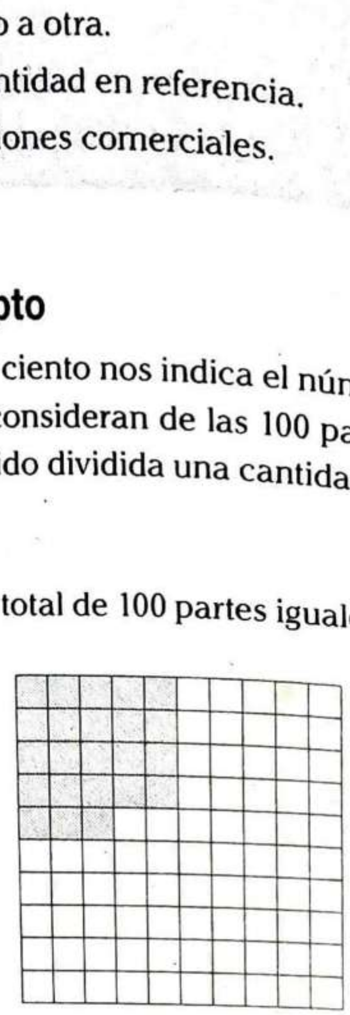
En este capítulo estudiaremos cómo los tanto por ciento se relacionan con las fracciones y sus equivalencias, además de las aplicaciones comerciales.

Concepto

El tanto por ciento nos indica el número de partes que se consideran de las 100 partes iguales en que ha sido dividida una cantidad.

Ejemplo

Se tiene un total de 100 partes iguales



Se ha considerado 23 de 100 partes iguales que equivale a decir 23 por 100, y se expresa matemáticamente así

$$\frac{23}{100} = 23\%$$

El 1 por ciento equivale a

$$\frac{1}{100} <> 1\%$$

En general

$$\text{el } a \text{ por ciento} <> a\% <> \frac{a}{100}$$

EQUIVALENCIAS IMPORTANTES

- De tanto por ciento a fracción

$$10\% <> \frac{10}{100} <> \frac{1}{10}$$

$$20\% <> \frac{20}{100} <> \frac{1}{5}$$

$$25\% <> \frac{25}{100} <> \frac{1}{4}$$

$$30\% <> \frac{30}{100} <> \frac{3}{10}$$

$$50\% <> \frac{50}{100} <> \frac{1}{2}$$

$$75\% <> \frac{75}{100} <> \frac{3}{4}$$

$$100\% <> \frac{100}{100} <> 1$$

- De fracción a tanto por ciento

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 100\% = 60\% \rightarrow \frac{3}{5} <> 60\%$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 100\% = 33,\widehat{3}\% \rightarrow \frac{1}{3} <> 33,\widehat{3}\%$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 100\% = 66,\widehat{6}\% \rightarrow \frac{2}{3} <> 66,\widehat{6}\%$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \times 100\% = 12,5\% \rightarrow \frac{1}{8} <> 12,5\%$$

Porcentaje

Es el resultado de calcular el tanto por ciento de una determinada cantidad.

Ejemplos

1. El 13% de 500 es

$$13\%(500) = \frac{13}{100} \times 500 = 65.$$

2. El 5% de 800 es

$$5\%(800) = 40.$$

3. El 8% del 15% de 1200 es

$$8\% \times 15\% \times 1200 = \frac{8}{100} \times \frac{15}{100} \times 1200 = 14,4.$$

> **NOTA**
>
> Las palabras **de**, **del** y **de los** nos indican una multiplicación.
>
> Las palabras **es**, **son** y **será** nos indican una igualdad.

4. ¿Qué tanto por ciento de 150 es 72?

Primera forma: regla de tres

$$\begin{array}{l} 150 \longrightarrow 100\% \\ \;\,72 \longrightarrow x\% \\ \hline \end{array}$$

$$x\% = \frac{72 \times 100\%}{150}$$

$$x\% = 48\%$$

Segunda forma: relación parte-todo

$$x\%(150) = 72$$

$$x\% = \frac{72}{150}$$

$$x\% = \frac{72}{150} \times 100\%$$

$$x\% = 48\%$$

5. En una reunión asisten 30 varones y 45 mujeres. Determine lo siguiente.

- ¿Qué tanto por ciento representan los varones en la reunión?

$$\text{total}=75\begin{cases}45 \text{ mujeres}\\30 \text{ varones}\end{cases}$$

$$x\%(75)=30$$

$$x\%=\frac{30}{75}\times 100\%$$

$$x\%=40\%$$

- ¿Qué tanto por ciento representan la cantidad de varones de las mujeres?

$$x\%(45)=30$$

$$x\%=\frac{30}{45}\times 100\%$$

$$x\%=66,\widehat{6}\%$$

Operaciones con el tanto por ciento

Adición

- $18\%N+25\%N=43\%N$
- $N+25\%N=125\%N$

Sustracción

- $80\%N-24\%N=56\%N$
- $N-43\%N=57\%N$

Multiplicación

- $8\%(20N)=160\%N$
- $42\%(50N)=50\%(42N)=21N$

Nota

Si N aumenta en un 10%, entonces sería $N+10\%N=110\%N$.

Si N disminuye en un 20%, entonces sería $N-20\%N=80\%N$.

Aumentos y descuentos sucesivos

Descuentos sucesivos

Ejemplo

Al precio de un producto se le hacen dos descuentos sucesivos del 10% y 30%. ¿A qué único descuento equivalen ambos?

Resolución

Sea P el precio inicial del producto.

$$P=100\%P$$

Precio inicial	Descuentos sucesivos	Precio final
P	-10% y -30%	$90\%\times 70\%\times P=63\%P$

$100\%P$ —— $63\%P$

Disminuye en 37%.

Por lo tanto, el descuento único es el 37%.

Aumentos sucesivos

Ejemplo

Al precio de un producto se le hacen dos aumentos sucesivos del 10% y 20%. ¿A qué único descuento equivalen ambos?

Resolución

Sea P el precio inicial del producto.

$$P=100\%P$$

Precio inicial	Aumentos sucesivos	Precio final
P	$+10\%$ y $+20\%$	$110\%\times 120\%\times P=132\%P$

$100\%P$ —— $132\%P$

Aumenta en 32%.

Por lo tanto, el aumento único es el 32%.

Variación porcentual

Es el cambio que experimenta una cantidad con relación a su valor inicial. Esta cantidad es expresada en tanto por ciento.

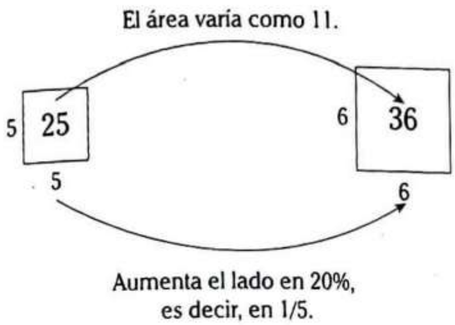
$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{variación}\\ \text{porcentual}\end{pmatrix}=\frac{(\text{cantidad en que varía})}{(\text{cantidad inicial})}\times 100\%}$$

Ejemplo

¿Qué tanto por ciento varía el área de un cuadrado si su lado aumenta en 20%?

Resolución

Sabemos que 20% <> $\frac{1}{5}$, entonces consideremos el lado del cuadrado como 5.



Se observa que el área varía como 11, es decir, aumenta en 11; entonces

$$\begin{pmatrix}\text{variación}\\ \text{porcentual}\end{pmatrix}=\frac{11}{25}\times 100\%=44\%$$

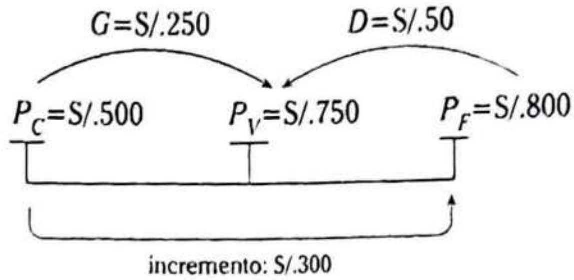
Por lo tanto, el área del cuadrado aumenta en 44%.

Aplicaciones comerciales

Ejemplo

Un comerciante compra un producto a S/.500 y para ofrecer al público hace un incremento de S/.300, pero al momento de la venta hace una rebaja de S/.50, con la cual se vendió a S/.750.

Entonces podemos decir



donde

- P_C: precio de costo
- P_V: precio de venta
- P_F: precio fijado o lista
- G: ganancia
- D: descuento

Si $P_V > P_C$, se cumple que

$$\boxed{P_V=P_C+G}$$

$$\boxed{P_V=P_F-D}$$

Además, si en una operación comercial hay gastos, entonces se cumple que

$$\boxed{G_B=G_N+(\text{gastos})}$$

donde

- G_B: ganancia bruta
- G_N: ganancia neta

Entonces

$$\boxed{P_V=P_C+G_B}$$

Si $P_V < P_C$, entonces hay pérdida y se cumple que

$$\boxed{(\text{pérdida})=P_C-P_V}$$

NOTA

- La ganancia, por lo general, representa un tanto por ciento del precio de costo.
- El descuento, por lo general, representa un tanto por ciento del precio fijado.

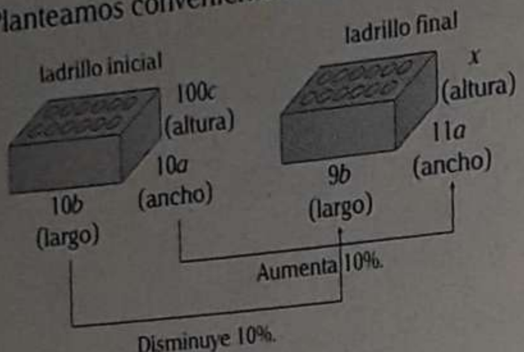
Problemas Resueltos

Problema N.º 1

El ancho de un ladrillo aumenta en 10% y su largo disminuye en 10%. ¿Qué tanto por ciento varía su altura para que el volumen disminuya 30,7%?

Resolución

Planteamos convenientemente que



Se sabe que

$$\begin{pmatrix}\text{volumen}\\ \text{del ladrillo}\end{pmatrix}=(\text{ancho})\times(\text{largo})\times(\text{altura})$$

Ahora, como el volumen disminuye en 30,7%, proponemos que

- volumen inicial: 100%
- volumen final: 69,3%

Disminuye en 30,7%.

Planteamos

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{volumen}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}}{100\%}=\frac{\begin{pmatrix}\text{volumen}\\ \text{final}\end{pmatrix}}{69{,}3\%}$$

Reemplazamos los valores propuestos convenientemente

$$\frac{1\cancel{0}\,\cancel{a}\cdot 1\cancel{0}\,\cancel{b}\cdot 100c}{1\cancel{0}\,\cancel{0}}=\frac{11\cancel{a}\cdot 9\cancel{b}\cdot x}{69{,}3}$$

$$6930c=99x$$

$$x=70c$$

Se observa que la altura inicial es $100c$, y la final es $70c$, entonces $100c-70c=30c$.

Por lo tanto, la altura disminuye en 30% para que el volumen disminuya en 30,7%.

Problema N.º 2

En cierto espectáculo se aumenta el precio de la entrada en 20%, pero la asistencia bajó en 10% de lo previsto; entonces la recaudación fue

Resolución

Se sabe que

$$(\text{recaudación})=\begin{pmatrix}\text{número de}\\ \text{asistentes}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{precio de}\\ \text{la entrada}\end{pmatrix}$$

Para el caso inicial convenientemente designamos $5K$ al precio de la entrada y 10ω al número de asistentes.

Entonces se cumple que

$$\begin{pmatrix}\text{recaudación}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}=(10\omega)\times(5K)$$

Disminuye en 10%. Aumenta en 20%.

$$\begin{pmatrix}\text{recaudación}\\ \text{final}\end{pmatrix}=(9\omega)\times(6K)$$

Ahora para saber qué pasó con la nueva recaudación planteamos

$$\frac{\begin{pmatrix}\text{recaudación}\\ \text{inicial}\end{pmatrix}}{100}=\frac{\begin{pmatrix}\text{recaudación}\\ \text{final}\end{pmatrix}}{x}$$

Representa el 100% inicial.

Reemplazamos

$$\frac{10\,\cancel{\omega}\cdot 5K}{10\cancel{0}}=\frac{9\,\cancel{\omega}\cdot 6K}{x}$$

$$x=\frac{9\cdot 6\cdot 10}{5}=108$$

Por lo tanto, la recaudación final aumentó en 8%, dado que $108-100=8$.

Problema N.° 3

Cierta parte de una mercadería se vende con un 8% de pérdida, el resto se vende ganando el 7%. ¿Qué parte del total se vendió primero si en total se ganó el 4%?

Resolución

Sea $N=a+b$ el total de inversión en la mercadería, donde a es parte invertida que se vende con una pérdida del 8% y b es la parte que se vende ganando el 7%; además se ganó el 4% de $(a+b)$. Así planteamos que

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{ganancia que se}\\ \text{obtiene al vender}\\ \text{la inversión } b\end{pmatrix}}_{7\%b} - \underbrace{\begin{pmatrix}\text{pérdida que se}\\ \text{obtiene al vender}\\ \text{la inversión } a\end{pmatrix}}_{8\%a} = 4\%(a+b)$$

Desarrollamos

$$7\%b-8\%a=4\%a+4\%b$$

$$3\%b=12\%a$$

$$\rightarrow \quad \frac{b}{4}=\frac{a}{1}=\frac{a+b}{5}=\frac{N}{5}$$

Se observa que a es la quinta parte del total.

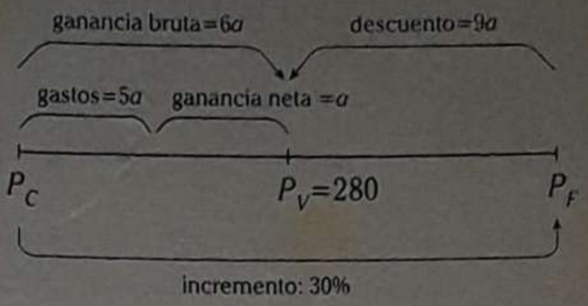
Por lo tanto, en el primero se vendió el 20% de lo invertido, ya que $\frac{1}{5} <> 20\%$.

Problema N.° 4

Para fijar el precio de un artículo, su costo se incrementa en 30%. Si la ganancia neta, los gastos y el descuento están en progresión aritmética, calcule el precio fijado si la ganancia neta representa el 20% de los gastos y el artículo se vendió en S/.280.

Resolución

Se conoce el siguiente esquema:



Por dato, la ganancia neta, los gastos y el descuento forman una P.A. (progresión aritmética).

$$\text{(ganancia neta)}:\text{(gastos)}:\text{(descuento)}$$

$$a \qquad 5a \qquad \boxed{9a}$$

$$\text{razón:} \quad +4a \qquad +4a$$

Además

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{bruta}\end{pmatrix}=(\text{gastos})+(\text{ganancia neta})$$

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{bruta}\end{pmatrix}=5a+a=6a$$

Ahora planteamos que

$$P_V=P_C+G_B=P_F-(\text{descuento})$$

$$P_C+6a=130\%P_C-9a$$

$$15a=130\%P_C-P_C=30\%P_C$$

$$a=2\%P_C$$

Luego

$$P_V=P_C+(\text{ganancia bruta})$$

$$280=P_C+6a$$

$$280=P_C+12\%P_C=112\%P_C$$

$$280=\frac{112}{100}P_C \quad \rightarrow \quad P_C=250$$

Por lo tanto, el precio fijado (P_F) es

$$130\%250=S/.325.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. El 25% del 30% de $2N$ más el 10% del 40% de $3N$ es igual a 540. Halle N.

A) 2400 B) 3600 C) 1200
D) 1800 E) 2000

2. En una granja de aves, el 60% son pollos. Si se ha vendido el 60% de gallinas, ¿qué tanto por ciento ha disminuido el número de aves?

A) 18% B) 24% C) 36%
D) 40% E) 60%

3. Al inicio de una reunión había 104 varones y 120 mujeres, luego se retiran 25% de los varones y llegan 30% más de mujeres. ¿Qué tanto por ciento son la cantidad de los varones respecto de las mujeres al final?

A) 30% B) 40% C) 50%
D) 60% E) 20%

4. En una fiesta se observa que el 60% de los asistentes son varones; además, el 70% de los varones no bailan. ¿Qué tanto por ciento de las mujeres son las que bailan?

A) 50% B) 35% C) 20%
D) 45% E) 55%

5. Una persona lleva 4000 naranjas al mercado y encuentra que el 20% estaban malogradas; solo pudo vender el 40% de las buenas. ¿Cuántas naranjas de las buenas no se vendieron?

A) 2760 B) 1920 C) 1840
D) 2240 E) 2720

6. Al precio de un artículo se le hace dos aumentos sucesivos del 10% y 40% para ofrecerlo al público en S/.4620. Calcule el precio del artículo.

A) S/.2400 B) S/.2800 C) S/.3000
D) S/.3600 E) S/.3100

7. Si la arista de un cubo aumenta en un 10%, ¿qué tanto por ciento aumenta el volumen del cubo?

A) 33,5% B) 28% C) 33,1%
D) 40% E) 27,5%

8. En una reunión, la cantidad de mujeres representa el 60% de los varones. ¿Qué tanto por ciento representan el número de parejas que deben llegar a la reunión para el número de varones sea el 60% del total de asistentes?

A) 10% B) 12,5% C) 15%
D) 16,5% E) 20%

9. ¿Qué precio se debe fijar a un artículo que costó S/.600 si se hace una rebaja del 20% y aun así se gana el 20%?

A) 900 B) 1000 C) 1100
D) 990 E) 1200

10. Para fijar el precio de un artículo se aumenta en 40% de su precio de costo, pero al momento de venderlo se hizo un descuento del 10%. ¿Qué tanto por ciento se ganó?

A) 20% B) 25% C) 30%
D) 15% E) 26%

11. Para fijar el precio de un artefacto se incrementa en S/.90 y al venderlo se hace un descuento del 20% y todavía se gana el 20%. ¿Cuál es el precio de fijado?

A) S/.225 B) S/.270 C) S/.300
D) S/.180 E) S/.216

12. El sueldo de un trabajador aumenta cada año en un 20% respecto al año anterior. ¿Qué tanto por ciento habrá aumentado su sueldo luego de 3 años?

A) 80% B) 72,8% C) 62,5%
D) 78,2% E) 65%

13. Si el largo de un rectángulo aumenta en 30% y el ancho disminuye en 20%, ¿qué tanto por ciento varía el área del rectángulo?

A) Aumenta en 6%.
B) Disminuye en 4%.
C) Aumenta en 5%.
D) Disminuye en 6%.
E) Aumenta en 4%.

NIVEL INTERMEDIO

14. De un recipiente lleno de vino se extrae el 40% de lo que no se extrae, luego se devuelve el 60% de lo que no se devuelve, así se tiene al final 69 L de vino. ¿Cuál es la capacidad del recipiente?

A) 74 L B) 80 L C) 100 L
D) 92 L E) 84 L

15. Carmen al momento de vender un *netbook* a un cliente le hace dos descuentos sucesivos del 20% y 25%, aun así gana el 25% del precio de venta. ¿Qué tanto por ciento se ganó del precio de costo?

A) 30% B) 40% C) $33,\widehat{3}$
D) 42,5% E) 33,5%

16. José compró un iPhone en $630. ¿Cuánto debe aumentar a este precio para que durante la venta haga una rebaja del 10% y aun así gane el 40% del costo?

A) $300 B) $350 C) $400
D) $450 E) $460

17. Un comerciante vende el 60% de su mercadería perdiendo el 40%. ¿Qué tanto por ciento debe ganar en la venta del resto para recuperar el dinero?

A) 52% B) 40% C) 48%
D) 42% E) 60%

18. Fernando tiene un departamento que está valorizado en S/.80 000 y se lo vende a Miguel con una ganancia del 20%. Miguel revende el departamento a Fernando con una pérdida del 20%. ¿Cuánto gana o pierde Fernando?

A) No gana ni pierde.
B) Gana S/.2400.
C) Pierde S/.3200.
D) Pierde S/.2400.
E) Gana S/.3200.

19. En un salón de clase, 60% de los estudiantes aprobaron el examen de comunicación. Al revisar otra vez las evaluaciones, el docente se dio cuenta de que 6 de los estudiantes desaprobados en realidad habían aprobado el examen, por lo que el porcentaje de aprobados fue 72%. ¿Cuántos estudiantes dieron examen?

A) 48 B) 55 C) 54
D) 60 E) 50

UNMSM 2009-I

20. Alexandra rebaja en un 4% el precio de sus mercancías y quiere aumentar sus ingresos en un 20%. ¿Qué porcentaje debe aumentar la producción?

A) 25% B) 20% C) 5%
D) 10% E) 30%

21. Una persona apostó todo su dinero ganando el 10%, luego apostó lo que tenía perdiendo el 80% y por última vez apuesta todo el dinero que le queda perdiendo el 70%, con lo cual se retiró únicamente con S/.66. Calcule cuánto dinero perdió.

A) S/.934 B) S/.1034 C) S/.834
D) S/.880 E) S/.969

22. La remuneración de un obrero minero es de S/.1500 mensuales, en este mes hay un incremento en sus haberes del 10% más una bonificación de S/.90, pero se le estipula un descuento del 5% de la remuneración actualizada para el seguro de vida. ¿Cuál es la remuneración efectiva del obrero?

A) S/.1590 B) S/.1653 C) S/.1725
D) S/.1685 E) S/.1770

23. En el último recibo de luz de Pamela se observa que por el consumo de energía le han cobrado el 10% más del monto facturado del mes anterior y por otros gastos operativos el 5% del consumo actual. ¿Cuál es el monto facturado el mes anterior si el último recibo debe pagar S/.346,50?

A) 280 B) 300 C) 330
D) 265 E) 310

24. Si para pintar la pizarra de un salón se tuvo que pagar S/.50, ¿cuánto se tendrá que pagar para pintar otra pizarra cuya base sea 20% menos que la anterior y cuya altura sea 50% más que la anterior, sabiendo que para esta pizarra el pintor ofreció dos descuentos sucesivos del 25% y 20% del precio que iba a cobrar?

A) S/.28 B) S/.30 C) S/.32
D) S/.25 E) S/.36

25. Un comerciante tiene 1000 chompas y vende de la quinta parte de su mercadería ganando el 10% y la cuarta parte del resto ganando el 20%. ¿Qué tanto por ciento debe ganar en el resto de la mercadería si desea obtener una ganancia total del 30%?

A) 40% B) 30% C) 28%
D) 42% E) 36%

26. La venta de un artículo se rebajó en 25%, pero aun se ganó un 40% del precio de costo. Si los gastos representan un 20% de la ganancia neta, calcule el precio de venta sabiendo que la suma del precio de costo más el precio fijado es de S/.1548.

A) S/.756 B) S/.816 C) S/.714
D) S/.832 E) S/.954

27. Un comerciante vende dos computadoras al mismo precio; una ganando el 25% del precio de costo y la otra ganando el 25% del precio de venta. Calcule el precio de venta de una computadora si la diferencia de los precios de costo es S/.215.

A) S/.2800 B) S/.2500 C) S/.3000
D) S/.3600 E) S/.4300

28. Dos recipientes (A y B) contienen vino. El recipiente A está lleno hasta el 80% y el B en un 20% de su volumen. Se completan las capacidades con agua y luego se vierten las mezclas en un tercer recipiente C. Calcule qué tanto por ciento de vino contiene la mezcla C sabiendo que la capacidad del recipiente B es el doble de A.

A) 20% B) 30% C) 40%
D) 50% E) 25%

29. Un comerciante reduce en 10% el precio de los artículos para que aumente en 17% el total de sus ingresos. ¿Qué tanto por ciento debe aumentar sus ventas?

A) 15% B) 10% C) 30%
D) 12% E) 20%

30. Un envase de conserva tiene la forma de un cilindro recto. La empresa quiere modificar las dimensiones de la lata por lo que disminuye el radio de su base en un 20%. ¿Qué tanto por ciento debe aumentar la longitud de la altura si la condición es que el envase aumente su volumen en 20%?

A) 75,5% B) 73,5% C) 80,5%
D) 87,5% E) 92%

31. Un atleta debe recorrer x metros como parte de su entrenamiento. Si en la primera hora ha recorrido el 30%; en la segunda hora, el 40% de lo que le falta, y en la tercera hora, el 20% que le está faltado, calcule el valor de x si aún le falta recorrer 1428 m.

A) 3750 m B) 4250 m C) 3860 m
D) 2500 m E) 4800 m

32. El precio de costo de un televisor es S/.2400. Si la ganancia neta es el 40% de la ganancia bruta y los gastos son S/.120, calcule el precio de fijado si el descuento es el 20%.

A) S/.3100
B) S/.3200
C) S/.3500
D) S/.3250
E) S/.3000

33. Dos pueblos (A y B) tienen en la actualidad 64 064 y 1001 habitantes, respectivamente. Si suponemos una disminución anual de A de 12,5% de sus habitantes y un aumento anual de B de 75% de sus habitantes, ¿cuánto tiempo debería pasar para que las dos poblaciones tengan el mismo número de habitantes?

A) 6 años B) 5 años C) 4 años
D) 3 años E) 7 años

34. En la venta de un artículo se obtiene un beneficio del 20% sobre el precio de costo. Si se hubiera ganado el 20% sobre el precio de venta, se hubiera ganado S/.4 más. ¿Cuál fue el precio de costo?

A) S/.75 B) S/.80 C) S/.85
D) S/.90 E) S/.92

35. Un comerciante compró cierto número de libros por S/.40 cada uno, recibiendo S/.2800 por la venta de todos. Si sus gastos representan el 15% del beneficio bruto, ¿cuál fue el número de libros adquiridos sabiendo además que el beneficio neto fue de S/.170?

A) 40 B) 45 C) 55
D) 60 E) 65

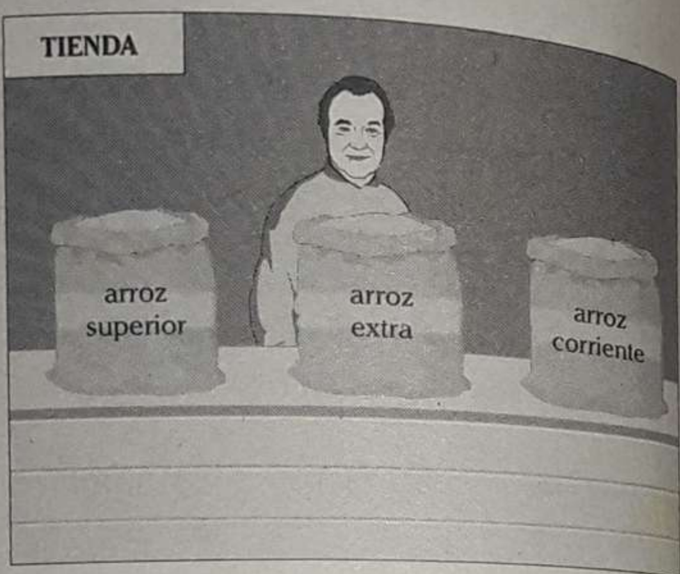
Regla de mezcla

Capítulo V

Objetivos

- Identificar las sustancias o ingredientes que intervienen en una mezcla.
- Determinar el precio medio y el grado medio al mezclar dos o más ingredientes.
- Calcular el precio de venta de una mezcla considerando su ganancia respectiva.

Desde el punto de vista de la aritmética, este estudio comprende la identificación de las cantidades que componen una mezcla homogénea en sus diferentes calidades; para ello se requieren los costos unitarios de cada componente y su relación con los pesos que intervienen en ella.



Su aplicación es muy cotidiana dentro de las actividades, como también en las actividades industriales y en nuestro entorno. Por ejemplo, para facilitar la venta directa de productos de pan llevar (fideos, arroz, menestras, cereales) de distintas calidades es necesario a veces mezclar para desarrollar dicho intercambio y, de alguna manera, fluir el comercio; asimismo dentro de las industrias, así como por ejemplo en la industria de colorantes y de pinturas resulta importante buscar cantidades proporcionales que han de participar en una mezcla para obtener diversos tonos.

Desde tiempos lejanos, griegos, romanos y fenicios trabajaron con mezclas, al igual que nuestras culturas andinas; por ejemplo, los paracas en su textilería, orfebrería y alfarería, así como todas las culturas preíncas, incluyendo la cultura incaica. Los griegos y los romanos conocían la regla de mezcla que usaban en su constante comercio de vinos con los fenicios. Los escritores italianos del siglo XV dieron a conocer en sus aritméticas comerciales numerosos problemas de mezcla y aligación.

Mezcla

Es la unión de dos o más sustancias (ingredientes) en cantidades arbitrarias conservando cada una su propia naturaleza.

Ejemplos

- Mezcla de arroz superior y corriente
- Mezcla de alcohol y agua
- Mezcla de vino seco y vino semiseco

Precio medio (P_m)

Es el precio de costo por unidad de medida de la mezcla, dicho precio no genera ganancia ni pérdida, por ello también recibe el nombre de precio de equilibrio.

Ejemplo

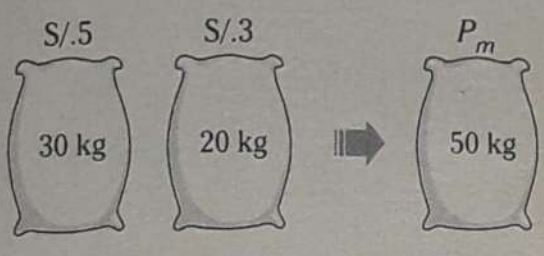
Se desea mezclar dos clases de maní de diferentes calidades, 30 kg de S/.5 el kilogramo con 20 kg de S/.3 el kilogramo. Se desea calcular lo siguiente:

a. El precio de costo de un kilogramo de la mezcla.

b. ¿A qué precio se debe vender el kilogramo de la mezcla para ganar el 25%?

Resolución

a. Se tienen los ingredientes



$$\begin{pmatrix}\text{costos}\\ \text{parciales}\end{pmatrix} = \underbrace{5\times 30}_{S/.150} \quad \underbrace{3\times 20}_{S/.60}$$

(costo total)=150+60=S/.210

(peso total)=30+20=50 kg

$$\begin{pmatrix}\text{costo por 1 kg}\\ \text{de mezcla}\end{pmatrix} = \frac{S/.210}{50} = S/.4{,}2$$

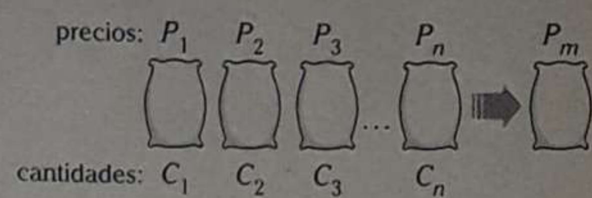
Luego

P_m=S/.4,2

Se observa que para determinar el precio medio (P_m) se tendrá en cuenta

$$\boxed{P_m = \frac{\text{costo total}}{\text{cantidad total}}}$$

En forma práctica, para determinar el precio medio (P_m) se toman en cuenta las cantidades y los precios.



Entonces

$$\boxed{P_m = \frac{C_1\times P_1 + C_2\times P_2 + C_3\times P_3 + \ldots + C_n\times P_n}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n}}$$

b. En el caso de una mezcla, el precio de costo es igual al precio medio (P_m).

Así tendremos

$$\boxed{P_V = P_m + (\text{ganancia})}$$

Luego, el precio al cual debe venderse para ganar el 25% sería

$P_V = 4{,}2 + 25\%(4{,}2)$

$P_V = 4{,}2 + 1{,}05$

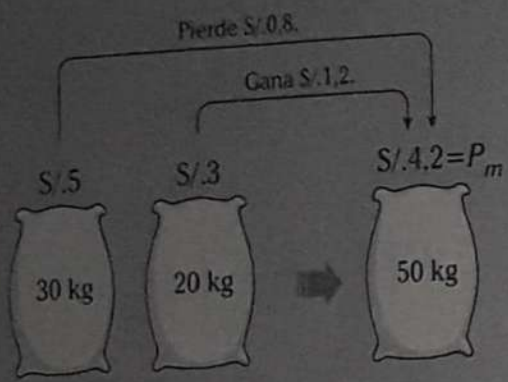
$P_V = S/.5{,}25$

OBSERVACIÓN

1. Al comparar los precios unitarios con el precio medio se cumple que

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}}$$

Veamos



$$G_A=P_A$$

$$\underbrace{20\times(S/.1,2)}_{S/.24}=\underbrace{30\times(S/.0,8)}_{S/.24}$$

2. En toda mezcla se cumple que

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{menor}\\ \text{precio}\end{pmatrix}\leq P_m\leq\begin{pmatrix}\text{mayor}\\ \text{precio}\end{pmatrix}}$$

Del ejemplo anterior

$$\underbrace{S/.3}_{\substack{\text{menor}\\ \text{precio}}}<\underbrace{S/.4,2}_{P_m}<\underbrace{S/.5}_{\substack{\text{mayor}\\ \text{precio}}}$$

Mezcla alcohólica

Es un caso particular donde los ingredientes principales son el agua y el alcohol.

GRADO O PUREZA DE UN ALCOHOL

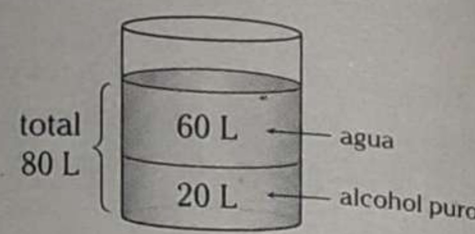
Es el tanto por ciento de alcohol puro que contiene una mezcla alcohólica.

Ejemplo

Se tienen los recipientes A y B en los que se han mezclado agua y alcohol. En A hay 60 L de agua y 20 L de alcohol, y en B hay 10 L de alcohol y 10 L de agua. Determine el grado de pureza en los recipientes A y B.

Resolución

- En el recipiente A

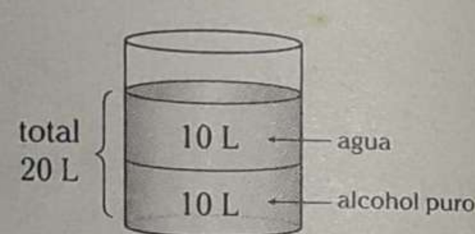


20 L de los 80 L son alcohol puro.

$$\begin{pmatrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{pmatrix}=\frac{20}{80}\times 100\%=25\%$$

es decir, su grado de pureza es de 25°.

- En el recipiente B



10 L de los 20 L son alcohol puro.

$$\begin{pmatrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{pmatrix}=\frac{10}{20}\times 100=50\%$$

es decir, su grado de pureza es de 50°.

En general

$$\begin{pmatrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{pmatrix}=\frac{\text{volumen de alcohol puro}}{\text{volumen de la mezcla}}\times 100^{\circ}$$

NOTA

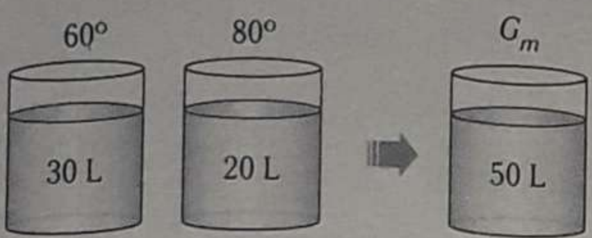
alcohol puro < > 100°
agua pura < > 0°

GRADO MEDIO (G_m)

Es el grado resultante al mezclar varios alcoholes, cada uno con su grado respectivo.

Ejemplo
Se mezclan 30 L de alcohol de 60° con 20 L de 80°. ¿Cuál es el grado de la mezcla resultante?

Resolución
Se tienen las mezclas alcohólicas



Volumen de alcohol puro
60%(30)+80%(20)=34 L

Volumen total de la mezcla
30+20=50 L

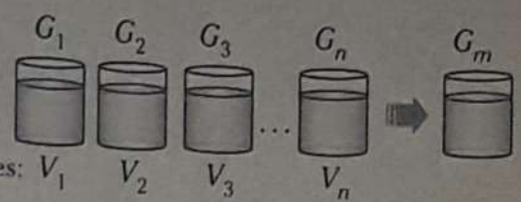
Es decir

$$\begin{pmatrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{pmatrix}=\frac{60\%(30)+80\%(20)}{30+20}=$$

$$=\frac{34}{50}\times 100\% = 68\% <> 68^{\circ}$$

$\rightarrow\ G_m=68^{\circ}$

En forma práctica, para calcular el grado medio (G_m) se toman en cuenta los volúmenes y los grados.



Entonces

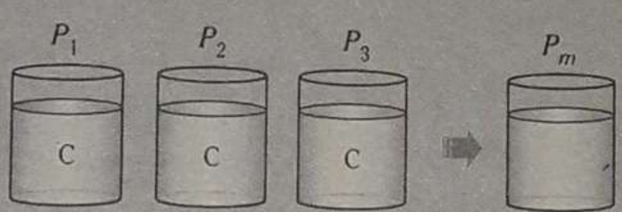
$$G_m=\frac{V_1\times G_1+V_2\times G_2+V_3\times G_3+\ldots+V_n\times G_n}{V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n}$$

Se cumple que

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}^{0}=\begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}^{0}$$

NOTA

Para cantidades iguales en una mezcla, el precio medio se calcula como la $\overline{MA}$ de los precios unitarios; es decir



Entonces

$$P_m=\frac{P_1+P_2+P_3}{3}$$

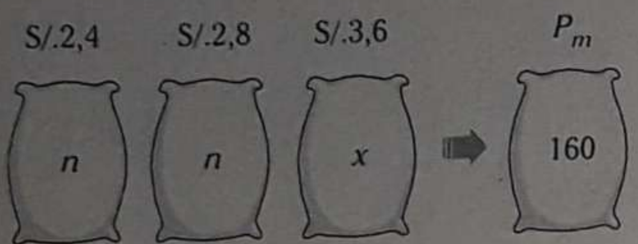
Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Un comerciante quiere mezclar tres tipos de arroz de S/.2,4; S/.2,8 y S/.3,6 el kilogramo, respectivamente. Si se quiere obtener una mezcla de 160 kg que se puede vender a S/.3,72 el kilogramo, ganando en ellos el 20%, ¿cuánto habrá utilizado del tercer tipo si las cantidades de los dos primeros son iguales?

Resolución

Se tienen las mezclas



Se observa que $2n+x=160$

Por condición del problema, el P_V=S/.3,72.

Sabemos que

$P_V=P_m+(\text{ganancia})$

$3{,}72=P_m+20\%P_m$

$3{,}72=120\%P_m$

$3{,}1=P_m$

Luego

$$P_m=\frac{2{,}4\times n+2{,}8\times n+3{,}6x}{n+n+x}=3{,}1$$

$x=2n$

Reemplazando en $2n+x=160$ tenemos

$2n+2n=160 \;\rightarrow\; n=40$

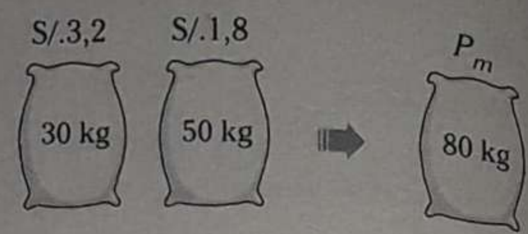
Por lo tanto, ha utilizado 80 kg del tercer tipo.

Problema N.° 2

César mezcla 30 kg de arroz de S/.3,20 el kilogramo, con 50 kg de arroz de S/.1,80 el kilogramo. ¿A cuánto se debe vender un kilogramo de la mezcla para ganar el 20%?

Resolución

Se tienen las mezclas



Luego

$$P_m=\frac{30(3{,}20)+50(1{,}8)}{80}=2{,}325$$

Entonces el precio de venta para ganar el 20% es

$P_V=P_m+(\text{ganancia})$

$P_V=2{,}325+20\%(2{,}325)$

P_V=S/.2,79

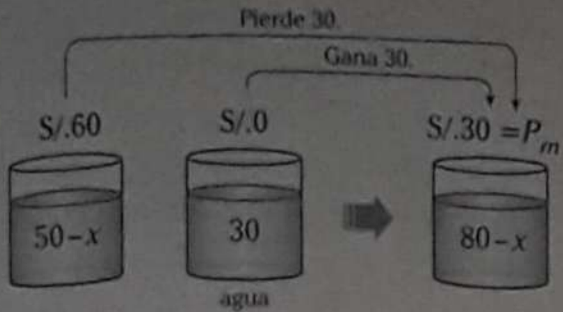
Por lo tanto, el precio de venta es S/.2,79.

Problema N.° 3

Se tienen 50 L de vino de S/.60 el litro. ¿Cuántos litros se deben extraer para que, al agregar 30 L de agua, el precio medio resulte S/.30?

Resolución

Del problema se tienen 50 L de S/.60 el litro. Se extraen x litros de dicha mezcla, luego se agregan 30 L de agua y se obtiene una mezcla de S/.30.



$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$30(30)=30(50-x) \rightarrow x=20$$

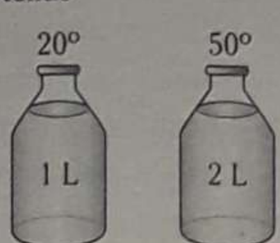
Por lo tanto, se deben extraer 20 L de agua.

Problema N.° 4

Un farmacéutico tiene botellas de un litro de alcohol de 20° y botellas de dos litros de alcohol de 50°. ¿Cuántas botellas de dos litros debe mezclar con 10 botellas de un litro para obtener una mezcla de 44°?

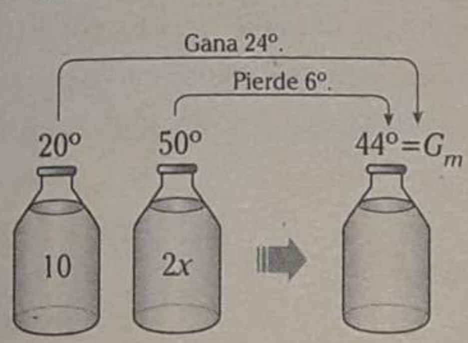
Resolución

Se tienen botellas



Luego se mezclan x botellas de dos litros de alcohol de 50° con 10 botellas de un litro de alcohol de 20°.

Veamos gráficamente



Se cumple que

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$24°\times 10=6°\times(2x)$$

$$\rightarrow \quad 20=x$$

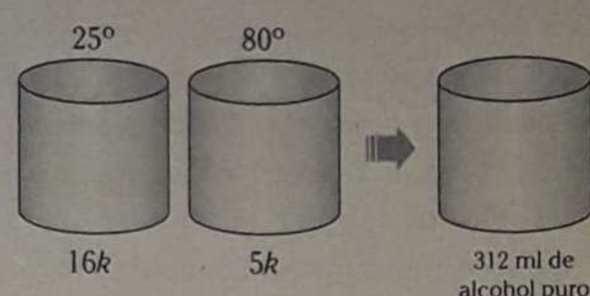
Por lo tanto, se necesitan 20 botellas de 2 L.

Problema N.° 5

Se mezclan dos alcoholes de 25° y 80° en cantidades que están en relación inversa de sus grados, obteniendo 312 ml de alcohol puro. Halle el volumen de alcohol de menor concentración.

Resolución

Tenemos dos tipos de alcoholes cuyos volúmenes son inversos a sus grados.



Se sabe que un alcohol de 25°<>25% y 80°<>80%.

Del dato

$$\begin{pmatrix}\text{volumen de}\\ \text{alcohol puro}\end{pmatrix}=312\text{ ml}$$

$$25\%(16k)+80\%(5k)=312 \rightarrow k=39$$

Calculamos el volumen de menor concentración (25°) que es

$$16k=16(39)=624\text{ ml}$$

Por lo tanto, hay 624 ml de alcohol de 25°.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Se desea obtener 42 L de un líquido a S/.7 mezclando dos líquidos cuyos precios son S/.5 y S/.8. ¿Qué volumen de este último se debe emplear?

A) 28 L B) 30 L C) 24 L
D) 32 L E) 20 L

2. Se mezclan 45 L de vino de S/.40 el litro con vino de S/.24 y S/.36 el litro, resultando un precio medio de S/.34 el litro. Si por cada 5 L del segundo hay 7 L del tercero, calcule la cantidad total de la mezcla.

A) 120 L B) 135 L C) 180 L
D) 210 L E) 270 L

3. Se tienen tres tipos de frijoles, cuyos precios por kilogramo son S/.4; S/.6 y S/.8. Si la cantidad de la segunda es el 25% de la primera y la cantidad de la tercera es la semisuma de las otras dos, calcule el precio de un kilogramo si se mezclan estos tres tipos de frijoles.

A) 5,6 B) 4,8 C) 4,5
D) 5,2 E) 6,5

4. Se mezclan tres clases de vino, siendo la relación los volúmenes del primero con el segundo de 3 a 4, y la relación del segundo con el tercero de 3 a 5. Si los precios por litro son S/.x; S/.5 y S/.6, respectivamente, calcule x si el precio de un litro de la mezcla es S/.9.

A) 16 B) 18 C) 20
D) 22 E) 21

5. Se mezclan dos tipos de avena de S/.2 y S/.5 el kilogramo y se obtiene 60 kg, el cual fue vendido en S/.300, obteniendo una ganancia del 25%. Calcule la diferencia de las cantidades de avena que se utilizaron en dicha mezcla.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

6. Se mezclan dos tipos de ingredientes cuyos precios unitarios son S/.6 y S/.9 el kilogramo. De su venta se recaudó S/.360, ganando el 25% del precio de venta. Si del primero se utilizó 21 kg, calcule la diferencia de los pesos de los ingredientes.

A) 6 kg B) 7 kg C) 8 kg
D) 9 kg E) 5 kg

7. Se mezclan tres tipos de café, cuyos precios son S/.15; S/.10 y S/.3 el kilogramo en cantidades que se encuentran en progresión aritmética creciente. Determine cuál es la mayor cantidad utilizada si la mezcla resultante es de 180 kg y su precio medio es S/.8.

A) 60 B) 70 C) 80
D) 90 E) 50

8. Dos tipos de café que cuestan 10 soles el kilo y 15 soles el kilo se mezclarán. Si utilizamos 9 k del café de 10 soles, ¿cuántos kilos del otro café debemos usar para que la mezcla tenga un costo de 12 soles el kilo?

A) 6 kg B) 7 kg C) 8 kg
D) 5 kg E) 4 kg

UNMSM 2004-I

9. Vladimir realiza una mezcla alcohólica tomando 30 L de un alcohol de 40° y 40 L de otro alcohol cuyo grado se desconoce. Si al final se obtiene alcohol de 56°, calcule el grado del segundo alcohol.

A) 60°
B) 64°
C) 68°
D) 72°
E) 78°

10. Se tienen dos mezclas alcohólicas de 30° y 50°. Al mezclarse se obtiene una mezcla de 45°, cuyo precio es S/.18 el litro. Si el precio por litro del primer recipiente era de S/.12, calcule el precio por litro del segundo recipiente.

A) 20 B) 18 C) 16
D) 24 E) 28

11. En una mezcla alcohólica de 240 L, donde el volumen de agua es el 60% del volumen del alcohol puro, ¿cuántos litros de alcohol puro se deben agregar a la mezcla para obtener una mezcla alcohólica de 80°?

A) 480 B) 360 C) 210
D) 180 E) 150

12. A 50 L de alcohol de 28° se le agregan m litros de alcohol puro y n litros de agua pura. Calcule la razón aritmética de m y n sabiendo que al final se obtiene 100 L de alcohol al 46%.

A) 32 L B) 14 L C) 18 L
D) 16 L E) 4 L

13. En 14 L de agua hay 3 kg de azúcar. ¿Cuántos litros de agua pura tiene que añadirse para que la cantidad de azúcar sea la décima parte del volumen total?

A) 14 L B) 15 L C) 16 L
D) 17 L E) 18 L

NIVEL INTERMEDIO

14. Se mezclan tres tipos de alcoholes, cuyos volúmenes son 40, n y $60-n$ litros y sus grados de pureza son 30°, 70° y 90°, respectivamente, obteniendo una mezcla cuyo grado de pureza es 60°. De esta mezcla se extraen 40 L y se reemplazan con agua; de esta nueva mezcla se extraen 25 L y se reemplazan con agua. ¿Cuál es el grado de pureza final?

A) 22°
B) 25°
C) 27°
D) 28°
E) 30°

15. Se mezclan dos clases de café en proporción de 2 a 3 y la mezcla se vende con 40% de beneficio. Después se mezclan en proporción de 3 a 2 y se vende con 15% de beneficio. Si el precio de venta es igual en ambos casos, calcule la relación de los precios de ambos tipos de café.

A) $\frac{38}{13}$ B) $\frac{13}{25}$ C) $\frac{25}{27}$
D) $\frac{38}{45}$ E) $\frac{19}{26}$

16. Se tienen dos mezclas: una de $\overline{ab}$ litros y otra de $\overline{a(4b)}$ litros, cuyos costos por litro son S/.5 y S/.15, respectivamente. Se mezclan dichas cantidades para venderlas a S/.13,75, ganando el 25% de su precio de costo. Calcule el valor de $a+b$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

17. Se tienen dos tipos de alcohol de 60° y 30° de pureza, cuyos volúmenes son iguales. Se mezclan con agua y se obtiene un alcohol, cuya pureza es de 36°, además se sabe que en la mezcla la cantidad de agua es excedida por la cantidad de alcohol puro en 32 L. Calcule la cantidad de agua que se utilizó.

A) 50 L B) 40 L C) 30 L
D) 20 L E) 10 L

18. Se realiza una mezcla de alcohol de 90° con alcohol de 60°, obteniéndose alcohol de 70°; si se vendiera todo ganando el 50%, se obtendría S/.540. Además, si el valor del precio de costo de un litro de la mezcla final se impusiera al 25% mensual durante un mes, se obtendría S/.10 de interés. Calcule el volumen inicial de alcohol de 90°.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 9

19. Un comerciante mezcla a litros de vino de S/.12 el litro con b litros de vino de S/.18 el litro y obtiene vino de S/.13. Si invierte los volúmenes iniciales de vino, halle el precio de venta de un litro de la nueva mezcla si quiere ganar el 20%.

A) S/.20,4 B) S/.17,6 C) S/.16,8
D) S/.14,8 E) S/.14,6

20. Se desea obtener 660 L de vino a S/.22 el litro mezclando vinos de S/.21; S/.27,5 y S/.19 el litro. Pero mezclando de la tercera clase la décima parte de la suma de los volúmenes de los otros dos, ¿cuántos litros de S/.27,5 se debe tomar?

A) 120 L B) 100 L C) 110 L
D) 115 L E) 112 L

21. Un comerciante tiene vino de S/.20 y S/.40 el litro y quiere formar una mezcla que pueda vender a S/.30 el litro ganando el 20%. ¿Cuánto tomará de la última clase de vino si se obtuvo 200 L de mezcla?

A) 42 L B) 45 L C) 48 L
D) 50 L E) 52 L

22. Se han mezclado 70 L de vino de S/.3 con 110 L de vino de S/.5. Si se desea obtener una mezcla que contenga el 40% del vino más barato, se debe agregar una misma cantidad de ambos vinos. ¿Cuál es esta cantidad?

A) 10 L B) 11 L C) 12 L
D) 13 L E) 14 L

23. Se tienen dos variedades de café, cuyo precio por kilogramo suman S/.26 y se mezclan 10 kg del primero con 20 kg del segundo. Si hubiera 20 kg del primero y 10 kg del segundo, el precio medio aumenta en S/.2. ¿Cuál es el precio por kilogramo del café de mayor calidad?

A) S/.14 B) S/.15 C) S/.16
D) S/.15,5 E) S/.16,5

24. Se mezclan dos clases de café en proporción 1 a 2 y la mezcla se vende con un 5% de beneficio, después se mezclan en la proporción de 2 a 1 y se vende la mezcla con 10% de beneficio. El precio de venta es igual en ambos casos. Halle la relación de los precios de café.

A) 20 a 23
B) 20 a 19
C) 10 a 13
D) 7 a 11
E) 15 a 19

25. Se mezclan n litros de alcohol de 43° con 25 litros de alcohol de 64°, obteniéndose al final alcohol de n°. Calcule el valor de n.

A) 45 B) 50 C) 55
D) 60 E) 48

26. Un depósito contiene 2000 L de una mezcla alcohólica de 20° y se necesita una mezcla alcohólica de 60°, para lo cual se coloca un grifo que suministra alcohol de 80° a razón de 160 L por minuto. ¿Cuántos minutos debe funcionar el grifo para lograr su objetivo?

A) 20 B) 24 C) 23
D) 25 E) 27

27. Se mezclan $\overline{ab}$ litros de alcohol de 50° con $\overline{ba}$ litros de alcohol de 20° y 25 L de agua. Si la mezcla resultante tiene un 81% de agua, calcule $a+b$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

28. Se mezclan a litros de alcohol de b° con b litros de alcohol de a°. Si hubiera mezclado al revés, se obtendría un alcohol cuya pureza es 25% más que la anterior. ¿En qué relación se encuentran a y b?

A) 1/3
B) 2/3
C) 1/2
D) 1/4
E) 3/4

29. Se tiene vino de S/.36 el litro y otro de S/.27 el litro. ¿Cuántos litros se debe tomar de cada clase para obtener una mezcla de 360 L, cuyo precio por cada litro sea de S/.32. Calcule la diferencia de los volúmenes.

A) 40 L B) 60 L C) 50 L
D) 70 L E) 90 L

30. Un kilo de arroz de primera cuesta x soles y un kilo de arroz de segunda cuesta S/.5. Se mezclan 10 kg de primera con 20 kg de segunda. Si se hubiera mezclado 20 kg de primera con 10 kg de segunda, el precio medio hubiera sido S/.2 más. ¿Cuál es el precio de 1 kg de arroz de primera?

A) S/.18 B) S/.16 C) S/.11
D) S/.12 E) S/.10

31. Se mezclan 3 L de ácido al 30% con 9 L al 70% y al resultado se le agrega un diluyente hasta obtener una concentración al 50%. ¿Cuántos litros del diluyente se empleó?

A) 2,4 B) 2 C) 3,1
D) 1 E) 4,5

32. Se mezclan 30 L de alcohol de 10° con 60 L de alcohol de 40° y 210 L de alcohol de K°, y se obtiene una mezcla donde el 56% es agua. Calcule K.

A) 50 B) 46 C) 60
D) 48 E) 56

33. De un depósito de 200 L de capacidad (lleno de vino) se saca una cierta cantidad de vino y se reemplaza por agua; luego se extrae la misma cantidad de la mezcla y se reemplaza por agua. La mezcla resultante contiene 64% de vino. Halle la cantidad de líquido que se extrae cada vez.

A) 55 L B) 40 L C) 50 L
D) 70 L E) 32,2 L

34. Un recipiente de 100 L de capacidad está lleno de alcohol 80°. ¿Cuántos litros de dicho recipiente hay que sacar para que al ser reemplazados por agua se obtenga mezcla de 60°?

A) 25 L B) 26 L C) 27 L
D) 28 L E) 29 L

35. Se mezclan dos clases de alcohol de 40° y 25°, obteniendo 35 L. Si las cantidades de agua y de alcohol son enteros en cada ingrediente, calcule cuántos litros de alcohol puro tendrá que adicionarse a la última mezcla para que al final resulte de $66,\hat{6}$%.

A) 48 L B) 37 L C) 40 L
D) 23 L E) 50 L

36. ¿Qué cantidades de café de S/.5 y S/.4 el kilogramo harán falta para formar una mezcla de 30 kg que se pueda vender a S/.4,2 el kilogramo sin ganar ni perder?

A) 8 y 22 kg
B) 6 y 24 kg
C) 9 y 21 kg
D) 23 y 7 kg
E) 10 y 20 kg

37. Se tienen 60 L de alcohol al 65%. Si se le agregan 15 L de alcohol puro, ¿cuál será la pureza de la mezcla?

A) 75% B) 73% C) 72%
D) 70% E) 65%

Regla de interés

Capítulo VI

OBJETIVOS

- Reconocer los elementos que intervienen en la regla de interés.
- Conocer las clases de interés y entender cómo estas se diferencian.
- Aplicar las relaciones matemáticas que se obtienen entre los elementos de la regla de interés en la resolución de los problemas.

Hoy en día muchas personas desean tener un negocio propio, una casa, un auto, etc., asimismo hay distintas entidades que otorgan préstamos inmediatos. Por ello, muchas personas al no contar con efectivo solicitan un préstamo a instituciones financieras, las cuales cobran intereses; pero la pregunta sería: ¿por qué?

Veamos un ejemplo, imagínese que usted tenga que prestar S/.10 000 a su amigo y al cabo de un año recibe la misma suma prestada; es lógico pensar que los S/.10 000 que usted prestó no tendrá el mismo valor que hace un año, es decir, el poder adquisitivo de su dinero se habrá perdido debido a distintos factores como la inflación. Entonces es necesario que usted a pesar de que le esté haciendo el favor de prestarle dinero le cobre un interés razonable por el uso de su dinero, de lo contrario usted hubiera invertido en un negocio y hubiera obtenido utilidades.

Podemos decir que el interés que se cobra es por el uso del dinero para que no pierda su poder adquisitivo al cabo de cierto tiempo, aunque cabe mencionar que en muchas entidades financieras los intereses que se cobran muy son excesivos.

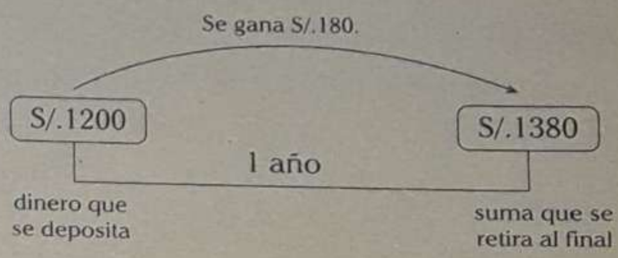
Concepto

Es un procedimiento aritmético que consiste en determinar el interés o la ganancia que se obtiene al prestar o depositar un capital bajo ciertas condiciones.

Ejemplo

El señor Carlos depositó en el banco S/.1200 y al cabo de un año retira su dinero y obtiene una utilidad de S/.180, es decir, un total de S/.1380.

Veamos en un esquema.



Calculemos el tanto por ciento que se ha ganado del dinero depositado.

$$x\% = \frac{180}{1200} \times 100\%$$

$\rightarrow$ $x\%=15\%$ (en un año)

Elementos de la regla de interés

Capital (*C*)

Es el dinero o bien que se deposita o presta durante cierto tiempo con el objetivo de tener ganancia.

Del ejemplo inicial

C=S/.1200

Tiempo (*t*)

Es el periodo que se deposita o presta el capital.

Del ejemplo inicial

t=1 año

Nota

Equivalencias para el tiempo

- 1 mes comercial < > 30 días
- 1 año comercial < > 360 días
- 1 año común < > 365 días
- 1 año bisiesto < > 366 días

Interés (*I*)

Es la ganancia que produce un capital durante cierto tiempo.

Del ejemplo inicial

I=S/.180

Tasa de interés (*T*%)

Es el tanto por ciento que se gana del capital durante cierto tiempo. También se dice que es la ganancia que se obtiene por cada 100 unidades monetarias en una unidad de tiempo.

Del ejemplo inicial

$r\%=15\%$ anual

Observación

- Una tasa del 15% anual significa que se gana el 15% de capital por cada año.
- Una tasa del 3% mensual significa que se gana el 3% de capital por cada mes.

Tasas equivalentes

Dos tasas son equivalentes si colocadas ambas al mismo tiempo se obtiene la misma ganancia.

Ejemplos

- $2\% \text{ mensual} <> \begin{cases} 4\% \text{ bimestral} \\ 6\% \text{ trimestral} \\ 8\% \text{ cuatrimestral} \\ 12\% \text{ semestral} \\ 24\% \text{ anual} \end{cases}$

- $48\% \text{ anual} <> \begin{cases} 24\% \text{ semestral} \\ 16\% \text{ cuatrimestral} \\ 12\% \text{ trimestral} \\ 8\% \text{ bimestral} \\ 4\% \text{ mensual} \\ \frac{48}{360}\% \text{ diario} \end{cases}$

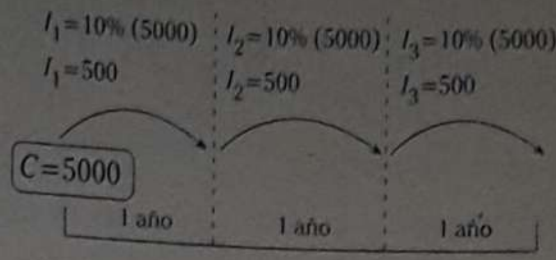
NOTA

Cuando no se mencione la unidad de tiempo en una tasa, se deberá considerar una tasa anual.

Ejemplo

10% <> 10% anual

Esquema



Por lo tanto, el interés en 3 años sería

$I=500\times3=S/.1500$

Luego

$M=C+I$

$M=5000+1500$

$M=S/.6500$

MONTO (M)

Es la suma del capital más el interés que se obtiene hasta un determinado tiempo.

$$\boxed{M=C+I}$$

Del ejemplo inicial

$M=1200+180$

$M=S/.1380$

Clases de interés

INTERÉS SIMPLE

Es cuando el interés se calcula del capital inicial que permanece constante durante todo el periodo de tiempo.

Ejemplo

Ricardo depositó en un banco S/.5000 durante 3 años a una tasa de interés del 10% anual. Determine el interés y el monto generado.

Resolución

Identificando los elementos tenemos

$C=S/.5000$

$t=3$ años

$r\%=10\%$ anual

M: monto

Ahora deduciremos la fórmula de interés simple

$I=10\%\cdot5000\cdot3$

tiempo (t)

capital (C)

tasa ($r\%$)

En general

$$\boxed{I=C\times r\%\times t}$$

Donde la tasa ($r\%$) y el tiempo (t) deben estar en las mismas unidades.

OBSERVACIÓN

Se entiende por clásico a todo aquello que es tomado como modelo o arquetipo a seguir.

$$\begin{pmatrix}\text{interés}\\\text{simple}\end{pmatrix}\text{ DP }\begin{pmatrix}\text{tiempo de}\\\text{imposición}\end{pmatrix}$$

Se cumple

$$\frac{\text{interés}}{\text{tiempo}}=\frac{500}{1\text{ año}}=\frac{1000}{2\text{ años}}=\frac{1500}{3\text{ años}}$$

Interés compuesto

Es cuando el interés obtenido se acumula en el capital al cabo de un periodo especificado; a este proceso se le conoce como capitalización.

Ejemplo

Ricardo deposita un capital de S/.5000 durante 3 años a una tasa del 10% anual capitalizable anualmente. Calcule el interés y el monto.

Resolución

Identificando los elementos tenemos

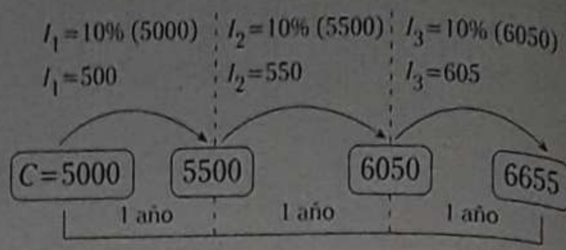
c=S/.5000

t=3 años

$r\%$=10% anual

La capitalización anualmente nos indica que cada año el interés obtenido se acumula al capital.

Esquema



Por lo tanto, el interés en 3 años sería

I=500+550+605

I=S/.1655

Luego

M=5000+1655

M=S/.6655

Ahora deduciremos la fórmula del monto compuesto.

$M=110\%\times110\%\times110\%\ (5000)$

$M=(1+10\%)^3\times5000$

En general

$$\boxed{M=C(1+r\%)^n}$$

n: número de periodos de capitalización

Nota

En el contexto de la banca se trabaja con tasas de interés distintas.

- **Tasa de interés activa.** Es el porcentaje que las instituciones bancarias, de acuerdo con las condiciones de mercado y las disposiciones del banco central, cobran por los diferentes tipos de servicios de crédito a los usuarios de los mismos. Es activa porque es el recurso a favor de la banca.
- **Tasa de interés pasiva.** Es el porcentaje que paga una institución bancaria a quien deposita dinero mediante cualquiera de los instrumentos que para tal efecto existen.

Problema N.° 1

Si el 40% de S/.45 000 se impone durante dos meses al 30% trimestral de interés simple, calcule a qué tasa se debe imponer el resto durante dos años para que la ganancia total de estos dos sea S/.17 100.

Resolución

Calculamos la primera ganancia (interés) que genera el 40% del capital a sus respectivas condiciones que son:

- tiempo $(t)=2$ meses
- tasa de interés $(r\%)=30\%$ trimestral
  $=10\%$ mensual
- capital $(C)=40\%(45\,000)=\frac{2}{5}\cdot 45\,000=18\,000$

Entonces

$$I=C\times r\%\times t$$

$$I=18\,000\cdot 10\%\cdot 2=3600$$

Para obtener una ganancia total de 17 100, nos falta 17 100−3600=13 500, que lo debe generar el resto del capital que es 45 000−18 000=27 000 con las siguientes condiciones:

- tiempo $(t)=2$ años
- tasa de interés $(r\%)=r\%$
- capital $(C)=$S/.27 000
- interés $(I)=$S/.13 500

Entonces, al reemplazar en la relación conocida, se tiene

$$I=C\times r\%\times t$$

$$135\cancel{00}=27\cancel{000}\cdot r\%\cdot 2$$

$$1=4\cdot\frac{r}{100}$$

$\rightarrow r=25$

Por lo tanto, la tasa de interés debe ser 25% anual para cumplir la condición.

Problema N.° 2

Los 4/9 de un capital se impone al 12%; la cuarta parte del resto, al 18%, y lo que queda, al 20% de interés simple, obteniendo así una renta de S/.64 020. Determine el capital.

Resolución

Convenientemente llamaremos $36k$ al capital total, ya que es un número que tiene novena y cuarta; entonces se tiene

$$\begin{pmatrix}\text{capital}\\ \text{total}\end{pmatrix}=36k \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} C_1=\frac{4}{9}(36k)=16k \\ r_1\%=12\% \text{ anual} \end{cases} \\ \begin{cases} C_2=\frac{1}{4}\underbrace{(20k)}_{\substack{\text{resto del capital}\\ (36k-16k)}}=5k \\ r_2\%=18\% \text{ anual} \end{cases} \\ \begin{cases} C_3=\underbrace{(36k-16k-5k)}_{\text{el resto}}=15k \\ r_3\%=20\% \text{ anual} \end{cases} \end{cases}$$

Como la condición es que se debe obtener una renta (ganancia anual) de S/.64 020, planteamos así

$$\underbrace{I_1+I_2+I_3}_{\substack{\text{suma de intereses}\\ \text{en un año}}}=I_{\text{total}}$$

Reemplazando cada uno de los intereses en función del capital, tasa de interés y tiempo, se tiene

$$16k\cdot 12\%\cdot 1+5k\cdot 18\%\cdot 1+15\%\cdot 20\%\cdot 1=64\,020$$

$$192\%k+90\%k+300\%k=64\,020$$

$$582\%k=64\,020$$

$$k=11\,000$$

Por lo tanto, el capital total será

$36\times 11\,000=$S/.396 000.

Problema N.° 3

A Samir Fabián se le presentan dos opciones para depositar su dinero; la primera paga el 40% capitalizable trimestralmente y la segunda paga el 38%. Se da cuenta que en medio año una produciría S/.40 más que la otra. ¿Cuál es el capital de Samir Fabián?

Resolución

Sea C el capital de Samir Fabián.

Primera opción

- Capital=C
- $r\%=40\%$ anual=10% trimestral
- $t=6$ meses=2 trimestres
- Capitalizable trimestralmente

Se observa que es un interés compuesto ya que es capitalizable trimestralmente, de allí que todas las unidades deben ser trimestrales.

Calculamos el monto (M)

$$M=C(1+r\%)^n=C(1+10\%)^2$$

$$M=C\cdot(110\%)^2=C\left(\frac{11}{10}\right)^2=\frac{121C}{100}$$

Calculamos ahora el interés compuesto

$$I_1=M-C=\frac{121C}{100}-C=\frac{21C}{100}=21\%C$$

Segunda opción

- Capital=C
- $t=6$ meses=1 semestre
- $r\%=38\%$ anual=19% semestral

Calculamos el interés simple

$$I_2=C\cdot 19\%\times 1=19\%C$$

Además se sabe que la diferencia de intereses obtenidos en 6 meses es S/.40, entonces

$$\underbrace{I_1}_{21\%C}-\underbrace{I_2}_{19\%C}=40$$

$$21\%C-19\%C=40$$

$$2\%C=40 \rightarrow C=2000$$

Por lo tanto, su capital es S/.2000.

Problema N.° 4

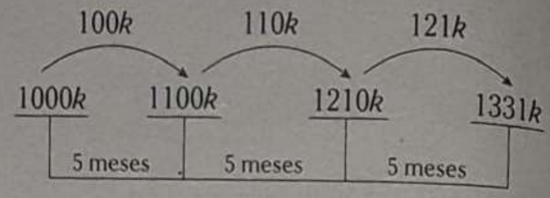
Jesús deposita un capital al 4% bimestral capitalizable cada 5 meses. Si el monto al final del tercer periodo excede al anterior en S/.1815, calcule el capital depositado por Jesús.

Resolución

Convenientemente llamaremos $1000k$ al capital, además se sabe que

- $r\%=4\%$ bimestral=2% mensual
  =10% (cada 5 meses)
- Capitalización cada 5 meses

Se observa que cada 5 meses se ganará el 10%, es decir, la décima parte del capital.



Observación

Interés (1.$^{\text{er}}$ periodo)= $\frac{1}{10}(1000k)=100k$

Interés (2.° periodo)= $\frac{1}{10}(1100k)=110k$

Interés (3.$^{\text{er}}$ periodo)= $\frac{1}{10}(1210k)=121k$

Por condición, el monto del tercer periodo excede al monto anterior en 1815; entonces planteamos

$$1331k-1210k=1815$$

$$121k=1815$$

$$k=15$$

Por lo tanto, el capital depositado por Jesús es $15\times 1000=$S/.15 000.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Un capital se deposita al 12% semestral durante un año y cuatro meses generando un interés de S/.1024. Calcule el capital.

A) S/.2800 B) S/.3000 C) S/.3200
D) S/.4200 E) S/.2400

2. Un capital impuesto al 8% trimestral produce anualmente S/.420 más de interés que si se impusiera al 20% anual. Halle dicho capital.

A) S/.3500 B) S/.3200 C) S/.3000
D) S/.2800 E) S/.2400

3. Javier deposita el 40% de un capital en un banco y a los 16 meses se duplicó. Luego deposita lo restante en el mismo banco y en un año le genera S/.810 de interés. Calcule el capital inicial.

A) S/.1800 B) S/.1600 C) S/.2000
D) S/.2200 E) S/.1860

4. Al depositar un capital por 17 meses se transformó S/.2680 y por 11 meses en S/.2440. ¿A qué tasa anual se impuso?

A) 12% B) 24% C) 18%
D) 20% E) 4%

5. Un capital impuesto durante 8 meses produce un interés que es el 20% del monto. ¿Qué tanto por ciento del monto producirá en 18 meses?

A) 50% B) 36% C) 40%
D) 23% E) 28%

6. La señorita Valeria deposita S/.3000 en un banco al 2% mensual, luego de 4 meses depositó S/.2000 más y 3 meses después retiró su capital e intereses. ¿Cuánto dinero retiró?

A) S/.5000 B) S/.3540 C) S/.5400
D) S/.5540 E) S/.4500

7. Un capital de S/.2800 se divide en dos partes y se colocan en dos bancos, cuyas tasas son 18% anual y 2% mensual. Si luego de dos años los intereses obtenidos son iguales, halle la mayor parte.

A) S/.1600 B) S/.1200 C) S/.1400
D) S/.800 E) S/.2000

8. Dos capitales que son entre sí como 3 es a 4 se imponen a interés simple, uno al 30% y el otro al 12,5%. ¿Dentro de cuánto tiempo la relación de los montos es la inversa de la relación original de los capitales?

A) 10 años B) 8 años C) 7 años
D) 5 años E) 4 años

9. Se deposita un capital de S/.5000 durante un año y medio a una tasa de interés del 20% anual capitalizable semestralmente. Calcule el monto obtenido.

A) S/.6500 B) S/.6200 C) S/.6250
D) S/.6655 E) S/.6565

10. ¿Cuál es el interés que produce S/.1920 impuesto al 25% capitalizable anualmente durante 30 meses?

A) S/.1450 B) S/.1380 C) S/.1830
D) S/.1455 E) S/.1540

NIVEL INTERMEDIO

11. La cuarta parte de un capital prestado a una tasa en 20 meses produce un monto de S/.6000, y la veinteava parte de dicho capital a la misma tasa en 16 meses produce un monto S/.1080. Entonces la octava parte de dicho capital, ¿qué interés producirá en 8 meses?

A) 720 B) 600 C) 500
D) 750 E) 800

12. Un capital está depositado en un banco a una tasa del 15% trimestral durante dos cuatrimestres. Si el interés obtenido se deposita en el mismo banco durante un semestre, entonces el nuevo interés es de S/.360. Determine el interés que se obtiene al depositar el capital inicial al 36% durante 8 meses y 20 días.

A) S/.1200 B) S/.1300 C) S/.1500
D) S/.1600 E) S/.780

13. Pedro y Luis depositaron sus ahorros al 5% y 6% de interés anual, respectivamente. La diferencia de ahorros, al momento de hacer los depósitos, era de S/.12 000 y, al cabo de un año, los intereses obtenidos por ambos resultaron iguales. ¿Cuánto dinero depositaron Pedro y Luis juntos?

A) S/.112 000
B) S/.192 000
C) S/.132 000
D) S/.152 000
E) S/.172 000

UNMSM 2009-II

14. Se coloca cierto capital en un banco al 5% trimestral. Pasando un año se retiran los intereses y una parte del capital igual a los intereses. Si sucede lo mismo al final del segundo, tercero y cuarto año, ¿cuáles fueron los intereses producidos en los tres primeros años si se sabe que el capital al final del tercer año fue S/.6400?

A) S/.600 B) S/.6100 C) S/.6400
D) S/.4500 E) S/.5000

15. Un artefacto que cuesta S/.2000 en la actualidad se desvaloriza uniformemente en S/.200 al año. Fernando desea comprarlo pero solo dispone de S/.1250, razón por la que deposita todo su dinero en un banco al 4% de interés. ¿Cuánto tiempo, como mínimo, tendrá que pasar para que Fernando pueda adquirir dicho artefacto?

A) 3 años B) 4 años C) 5 años
D) 6 años E) 10 años

16. Calcule el interés que generan S/.1800 al ser depositados al 5% trimestral capitalizable semestralmente durante 15 meses.

A) S/.695,50 B) S/.486,90 C) S/.580,50
D) S/.437,75 E) S/.495,30

17. Un capital es representado por un número entero de tres cifras se deposita en un banco al 4% anual. Si se genera un interés que es igual al número de dos cifras formado con las cifras de menor orden del capital inicial, halle la suma de cifras del número que representa dicho capital.

A) 13 B) 15 C) 17
D) 16 E) 12

UNMSM 2013-I

18. Un comerciante vende su automóvil ganando S/.800. Con el dinero obtenido abre una cuenta en el banco, el cual paga el 60% de interés simple. Al cabo de 5 meses retira el monto obtenido y gasta el 20%, con lo que le queda S/.18 000. ¿Cuál era el costo del automóvil?

A) S/.15 000 B) S/.15 200 C) S/.15 500
D) S/.17 000 E) S/.17 200

19. Juan deposita S/.1000 a una entidad financiera que le paga una tasa del r% anual capitalizable anualmente durante 3 años y observa que si lo prestaba a interés simple a una tasa del 13,3% cuatrimestral, obtenía el mismo monto. Halle r.

A) 24 B) 25 C) 30
D) 40 E) 50

20. Los capitales de tres socios están en la relación de 1, 3 y 4, los cuales son depositados durante 7 meses en diferentes bancos cuyas tasas son 14%, 5% y 4% mensual, respectivamente. Si la suma del duplo del interés obtenido por el primer socio más el interés obtenido por el segundo socio menos el interés obtenido por el tercer socio es S/.2079, halle el capital impuesto por el tercer socio.

A) S/.5200 B) S/.5400 C) S/.4400
D) S/.3400 E) S/.4300

21. Una persona divide su capital en tres partes: primero toma los 3/5 de su capital, luego los 3/8 de lo que queda y, finalmente, lo restante en tres bancos que le ofrecen un 60%, 4% mensual y 9% trimestral durante 5, 7 y 8 meses, respectivamente, obteniendo un interés total de S/.4032. Calcule el capital total.

A) 45 230 B) 42 016 C) 42 316
D) 39 336 E) 16 000

22. Dos capitales se obtienen al dividir 36 000 dólares colocados al 6% y 15% anual. La parte colocada al 15% genera un interés que duplica el interés generado por la otra parte. ¿Qué porcentaje representa el mayor capital?

A) 75,5% B) 45,5% C) 65,5%
D) $55,\overline{5}$% E) 85,5%

23. Un padre deja una herencia a sus dos hijos dejándole al mayor de ellos dos veces más que al menor. Si ambos imponen sus partes al 4% durante cierto tiempo, las utilidades recibidas por el mayor y el menor son del 2% y 9% de la herencia. Halle la diferencia de los tiempos de imposición.

A) 9 años y 8 meses
B) 8 años y 3 meses
C) 6 años y 4 meses
D) 6 años y 2 meses
E) 5 años y 3 meses

24. Un capital depositado al r% mensual durante dos años y medio genera S/.660 más de interés de lo que generaría si se hubiera depositado al r% anual durante el mismo tiempo. Calcule el interés generado por dicho capital al r% diario durante 5 meses.

A) S/.4800
B) S/.5600
C) S/.7200
D) S/.3600
E) S/.9600

25. Patricia divide su dinero en tres partes. La primera parte la deposita al 5%; la segunda parte, al 4%, y la tercera parte, al 3%. La primera parte es los 3/5 de la segunda y la tercera es igual a la suma de las otras dos. Halle la parte menor sabiendo que al final de un año retira entre capital e interés la suma de S/.5530.

A) S/.2500 B) S/.2200 C) S/.1000
D) S/.800 E) S/.500

26. Se deposita un capital a una tasa del 50% durante un año y medio capitalizable semestralmente. Si en el tercer periodo el interés generado fue de S/.750, halle el capital.

A) S/.2400 B) S/.1920 C) S/.1800
D) S/.1460 E) S/.1200

27. ¿Durante qué tiempo se debe depositar S/.7200 al 25% anual capitalizable anualmente para que genere un monto de S/.13 125?

A) 28 meses
B) 30 meses
C) 32 meses
D) 36 meses
E) 40 meses

28. Un capital es dividido en dos partes proporcionales a 3 y 5. El menor de ellos se deposita al 20% cuatrimestral capitalizable semestralmente durante un año y el otro capital es depositado al 15% semestral capitalizable cuatrimestralmente durante el mismo tiempo que el capital anterior. Si se obtuvo un interés total de S/.470, calcule el capital inicial.

A) S/.11 200 B) S/.8800 C) S/.10 800
D) S/.6000 E) S/.9600

29. Juan deposita S/.1000 en una entidad financiera que le paga una tasa del r% anual capitalizable anualmente durante 3 años y observa que si lo presta a interés simple a una tasa del 13,3% cuatrimestral, obtendría el mismo monto. Halle r.

A) 45 B) 40 C) 35
D) 30 E) 25

30. Mario depositó S/.3000 en el banco y luego de un año liquida su cuenta y recibe S/.3600. Si Vladimir deposita S/.4000 en el mismo banco, ¿cuántos meses debe estar depositado su dinero para poder ganar un interés de S/.600?

A) 6 meses B) 7 meses C) 9 meses
D) 10 meses E) 8 meses

31. Los 2/5 de un capital se prestan al 10% anual de interés durante 4 años y 3 meses, de este modo se obtiene S/.782 menos de ganancia que la que produce el resto del capital colocado al 12% durante 3 años. ¿Cuál fue dicho capital?

A) S/.64 000
B) S/.50 000
C) S/.17 000
D) S/.34 000
E) S/.36 000

32. Se depositan dos capitales de S/.3000 y S/.5000 al 2,5% trimestral y 5% cuatrimestral, respectivamente, ambos durante 2 años. Calcule el monto total que se obtiene.

A) S/.10 000 B) S/.10 010 C) S/.10 100
D) S/.11 900 E) S/.12 000

33. Un capital se deposita a interés compuesto capitalizable semestralmente y se sabe que el monto que genera en dos años excede en 44% al monto que genera en un año. Calcule la tasa de interés.

A) 25% B) 20% C) 10%
D) 30% E) 40%

34. Gustavo se prestó S/.2000 durante 6 meses, acordando pagar un interés del 20% bimestral con respecto al saldo deudor de cada bimestre. Sin embargo, solo amortizó S/.1700 al final del segundo bimestre. ¿Cuánto tiene que pagar al final para cancelar su deuda?

A) S/.1000 B) S/.1100 C) S/.1416
D) S/.1400 E) S/.1600

35. Un capital que se deposita durante 6 meses, capitalizable bimestralmente al 60%, genera S/.1308 más de interés que si se depositara al 40% semestral capitalizable trimestralmente durante el mismo tiempo. Halle el capital depositado inicialmente.

A) S/.14 400 B) S/.12 400 C) S/.10 000
D) S/.15 000 E) S/.12 000

36. Joshué observa que al depositar un capital, luego de 4 meses, el monto representa el 120% del capital. Desde este instante, determine dentro de cuántos meses el monto representará el 100% del capital.

A) 12 meses B) 6 meses C) 9 meses
D) 8 meses E) 7 meses

37. La diferencia de dos capitales es S/.1000; el primero se impone al 20% cuatrimestralmente y el segundo al 25% trimestral. Si al cabo de un año los montos son iguales, halle la suma de capitales.

A) S/.8000
B) S/.5000
C) S/.6000
D) S/.4500
E) S/.9000

Teoría de conjuntos

Capítulo VII

Objetivos

- Identificar correctamente las nociones de conjunto y su notación.
- Identificar las relaciones entre conjuntos así como también los conjuntos especiales.
- Representar adecuadamente los conjuntos en forma gráfica.
- Conocer las operaciones entre conjuntos y aplicar las leyes del álgebra de conjuntos de manera eficaz en la resolución de problemas.

La teoría de conjuntos empezó a desarrollarse en el siglo XIX, fundamentalmente, en Alemania. Esta teoría es una de las piedras angulares sobre las que reposa todo el edificio de las matemáticas contemporáneas, dotándolas de un rigor del que carecía esta ciencia anteriormente, entendida más como cálculo o como ciencia abstracta.

Georg Cantor es considerado el padre de la teoría de conjuntos, la cual es una parte fundamental de las matemáticas que se dedica al estudio de las características y las relaciones que existen entre varias agrupaciones de objetos, conocidas también como álgebra de conjuntos.

Los objetos que conforman los conjuntos son llamados **elementos** del conjunto o **miembros** del conjunto. Así pues, un conjunto es una **colección** de objetos.

Noción de conjunto

La idea de conjunto es una idea primitiva que consiste en una colección, agrupación o reunión de objetos cualesquiera, denominados elementos.

Ejemplo

El conjunto de los cinco primeros números impares.

Se denota

$$A=\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11\}$$

nombre del conjunto — elementos

Relación de pertenencia

Es una relación que se establece exclusivamente entre el elemento y su conjunto.

$$\text{Elemento} \xrightarrow{\text{pertenece } (\in)} \text{Conjunto}$$

$$\text{Elemento} \xrightarrow{\text{no pertenece } (\notin)} \text{Conjunto}$$

Ejemplo

Dado el conjunto

$A=\{2, \{3; 5\}, 8, \{7\}\}$

podemos decir

- $2 \in A$
- $\{3; 5\} \in A$
- $8 \in A$
- $\{7\} \in A$
- $5 \notin A$
- $7 \notin A$
- $\{2\} \notin A$
- $10 \notin A$

Determinación de un conjunto

Consiste en precisar correctamente qué elementos forman el conjunto. Se puede realizar de dos maneras.

Por extensión o forma tabular

Es cuando se indica cada elemento en forma explícita.

Ejemplos

- $A=\{$do; re; mi; fa; sol; la; si$\}$
- $B=\{2; 4; 6; 8; 10\}$
- $C=\{1^2; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2; 6^2; 7^2; 8^2\}$

Por comprensión o forma constructiva

Es cuando se indica una o más características comunes de los elementos de un conjunto.

Ejemplos

- $A=\{x/x$ es una nota musical$\}$
- $B=\{2n/1 \leq n \leq 5; n \in \mathbb{N}\}$
- $C=\{n^2/0 < n < 9; n \in \mathbb{Z}\}$

Cardinal de un conjunto

Es el número de elementos diferentes que posee un conjunto. Se denota $n(A)$.

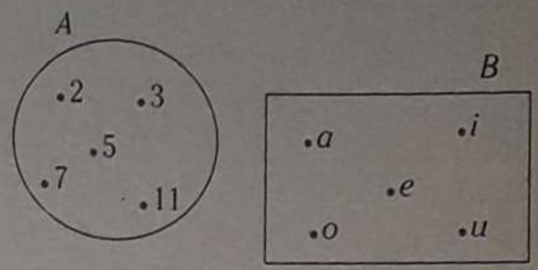
Ejemplos

- $M=\{a; b; c; d; e\} \rightarrow n(M)=5$
- $N=\{2; 3; 2; 3; 3\} \rightarrow n(N)=2$
- $P=\{a, \{b\}, b, \{a; b\}\} \rightarrow n(P)=4$

Diagrama de Venn-Euler

Es la representación de los conjuntos mediante regiones planas limitadas por figuras geométricas cerradas.

Ejemplos



Relación entre conjuntos

Inclusión

El conjunto A está incluido en el conjunto B si solo si todos los elementos de A son también elementos de B. Se expresa también así

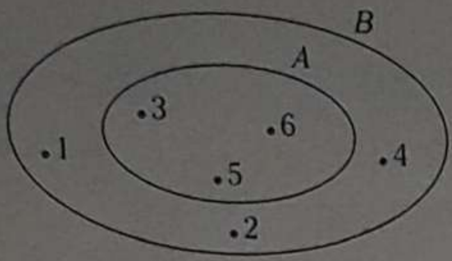
$$A \subset B \leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B)$$

Ejemplo

Dados los conjuntos

$A=\{3; 5; 6\}$ y $B=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Representamos gráficamente



Se lee

- A está incluido en B.
- A está contenido en B.
- A es un subconjunto de B.
- B contiene a A.
- B es un superconjunto de A.

NOTA

La relación de inclusión se establece de conjunto a conjunto, es decir

$$\boxed{\text{Conjunto}} \xrightarrow[\not\subset]{\subset} \boxed{\text{Conjunto}}$$

Ejemplo

Dado el conjunto

$$A=\{\underbrace{2, 5, \{8\}, \{1; 4\}, 3}_{\text{elementos}}\}$$

Podemos decir

- $\{2\} \subset A$ ($\in$)
- $\{\{8\}\} \subset A$ ($\in$)
- $\{\{1; 4\}\} \subset A$ ($\in$)
- $\{4\} \not\subset A$ ($\notin$)
- $\{5; 3\} \subset A$ ($\in$)
- $\{5; 1\} \not\subset A$ ($\notin$)

IGUALDAD

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.

Se define

$$\boxed{A=B \leftrightarrow (A \subset B \ \wedge \ B \subset A)}$$

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A=\{8; 10; 12\}$

$B=\{12; 10; 8; 12\}$

Como $A \subset B \ \wedge \ B \subset A$, entonces $A=B$.

DISJUNTOS

Dos conjuntos (A y B) son disjuntos cuando no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo

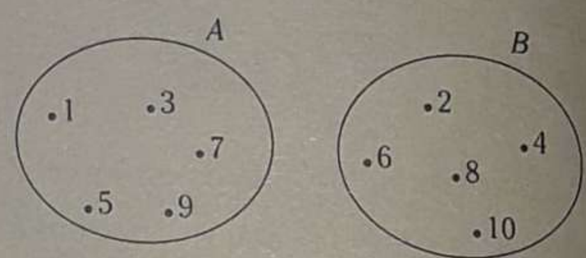
Sean los conjuntos

$A=\{1; 3; 5; 7; 9\}$

$B=\{2; 4; 6; 8; 10\}$

Se observa que A y B son disjuntos.

Diagrama



A y B son disjuntos.

Clases de conjuntos

CONJUNTO FINITO

Es aquel conjunto que tiene un número limitado de elementos; es decir, su cardinal está determinado.

Ejemplo

Sean los conjuntos

- $M=\{a; b; c; d; e\} \rightarrow n(M)=5$

  Por lo tanto, M es un conjunto finito.

- $N=\{n^2/n \in \mathbb{Z} \wedge 2 < n < 10\} \rightarrow n(N)=7$

  Por lo tanto, N es un conjunto finito.

Conjunto infinito

Es aquel conjunto que tiene un número ilimitado de elementos; es decir, no se puede determinar su cardinal.

Ejemplo

Dados los conjuntos

$\mathbb{Z}=\{...; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

$\mathbb{N}=\{1; 2; 3; 4; 5; ...\}$

$T=\{x/x \in \mathbb{R} \wedge 2 < x < 3\}$

Todos son conjuntos infinitos.

Conjuntos especiales

Conjunto nulo o vacío

Es aquel conjunto que carece de elementos.

Notación: ϕ o { }

Ejemplo

Sean los conjuntos

- $A=\{x/x \in \mathbb{Z}; 2 < x < 3\}$

  $\therefore A=\phi$

- $B=\{x/x$ es número impar; $3 < x < 5\}$

  $\therefore B=\phi$

Observación

- El conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto, es decir

  $\phi \subset A$

- El conjunto unitario es diferente del vacío.

  $\{\phi\} \neq \{\ \}$

Conjunto unitario o singletón

Es aquel conjunto que posee un solo elemento.

Ejemplo

Sean los conjuntos

- $A=\{4; 4; 4\} \rightarrow n(A)=1$

  Por lo tanto, A es conjunto unitario.

- $B=\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge 3 < x < 5\} \rightarrow n(B)=1$

  Por lo tanto, B es conjunto unitario.

Conjunto universal

Es un conjunto referencial que comprende a todos los conjuntos considerados para un estudio determinado.

Notación: U

Ejemplo

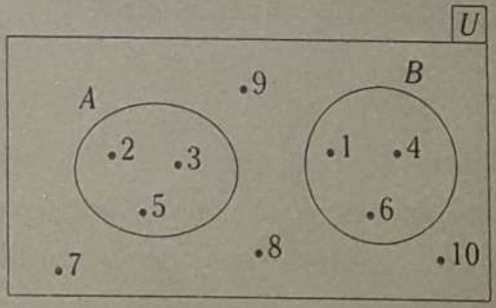
Dados los conjuntos

$A=\{2; 3; 5\}$ y $B=\{1; 4; 6\}$

se puede considerar

$U=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Diagrama



Conjunto potencia

Dado el conjunto A, el conjunto potencia de A es aquel conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

Notación: $P_{(A)}$

$$\boxed{P_{(A)}=\{x/x \subset A\}}$$

Ejemplo

Dado el conjunto

$A=\{a; b; c\} \rightarrow n(A)=3$

$$P_{(A)}=\underbrace{\{\overbrace{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a;b\}, \{a;c\}, \{b;c\},}^{\text{subconjuntos propios de } A} \{a;b;c\}\}}_{\text{subconjuntos de } A}$$

Se observa que

- n.º de subconjuntos de $A=n[P_{(A)}]=2^3=8$
- n.º de subconjuntos propios de $A=2^3-1=7$

Observación

$$\left(\begin{matrix}\text{n.º de subconjuntos}\\ \text{de } A\end{matrix}\right)=2^{n(A)}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{n.º de subconjuntos}\\ \text{propios de } A\end{matrix}\right)=2^{n(A)}-1$$

Operaciones entre conjuntos

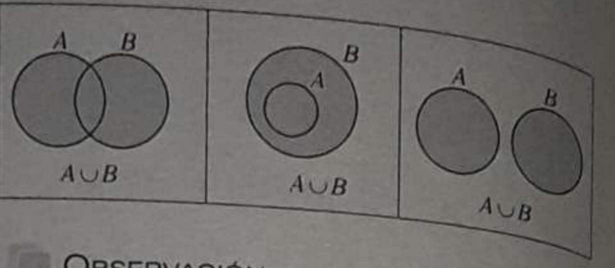
Unión

La unión de dos conjuntos (A y B) es el conjunto formado por la agrupación de todos los elementos de A con todos los elementos de B. Se denota $A \cup B$.

Se define

$$\boxed{A \cup B=\{x/x \in B \;\vee\; x \in B\}}$$

Diagrama



Observación

- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B=B$
- Si A y B son disjuntos, entonces $n(A \cup B)=n(A)+n(B)$.

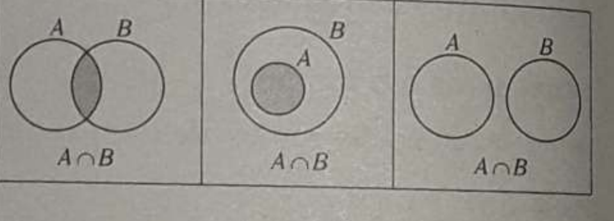
Intersección

La intersección de dos conjuntos (A y B) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez. Se denota $A \cap B$.

Se define

$$\boxed{A \cap B=\{x/x \in A \;\wedge\; x \in B\}}$$

Diagrama



Observación

- Si $A \subset B$, entonces $A \cap B=A$
- Si A y B son disjuntos, entonces $A \cap B=\phi$

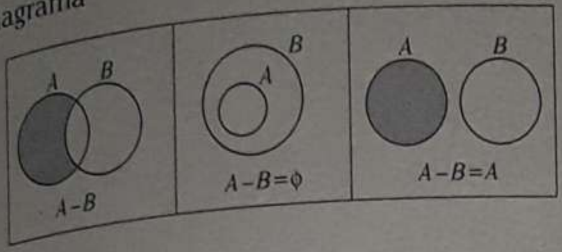
Diferencia

La diferencia de dos conjuntos A y B (en dicho orden) es el conjunto formado por los elementos de A pero que no pertenecen a B. Se denota $A-B$.

Se define

$$A-B=\{x/x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

Diagrama



Observación

- Si $A \subset B$, entonces $A-B=\phi$
- Si A y B son disjuntos, entonces $A-B=A$.

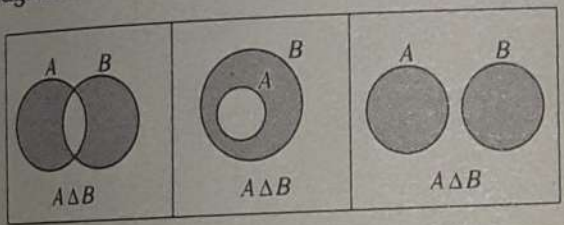
Diferencia simétrica

La diferencia simétrica de dos conjuntos (A y B) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B pero no a ambos. Se denota $A \Delta B$.

Se define

$$A \Delta B=\{x/x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \notin (A \cap B)\}$$

Diagrama



Observación

Si A y B son disjuntos, entonces $A \Delta B=A \cup B$.

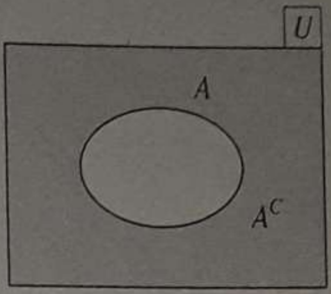
Complemento

El complemento de un conjunto A es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto universal U pero no al conjunto A. Se denota A^C.

Se define

$$A^C=\{x/x \in U \wedge x \notin A\}$$

Diagrama



Ejemplo

Dados los conjuntos A y B incluidos en el universo U.

$A=\{2; 3; 5; 8\}$

$B=\{1; 3; 6; 8\}$

$U=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

Determine las operaciones con dichos conjuntos.

- $A \cup B=\{1; 2; 3; 5; 6; 8\}$
- $A \cap B=\{3; 8\}$
- $A-B=\{2; 5\}$
- $B-A=\{1; 6\}$
- $A \Delta B=\{1; 2; 5; 6\}$
- $A^C=\{1; 4; 6; 7; 9; 10\}$
- $B^C=\{2; 4; 5; 7; 9; 10\}$

Leyes del álgebra de conjuntos

Idempotencia

- $A \cup A=A$
- $A \cap A=A$

Conmutativa

- $A \cup B=B \cup A$
- $A \cap B=B \cap A$

Asociativa

- $A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap A$

DISTRIBUTIVA

- $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cap C)$
- $A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$

DE MORGAN

- $(A \cup B)^C=A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C=A^C \cup B^C$

DE LA DIFERENCIA

- $A-B=A \cap B^C$

ABSORCIÓN

- $A \cup (A \cap B)=A$
- $A \cap (A \cup B)=A$
- $A \cup (A^C \cap B)=A \cup B$
- $A \cap (A^C \cup B)=A \cap B$

DEL COMPLEMENTO

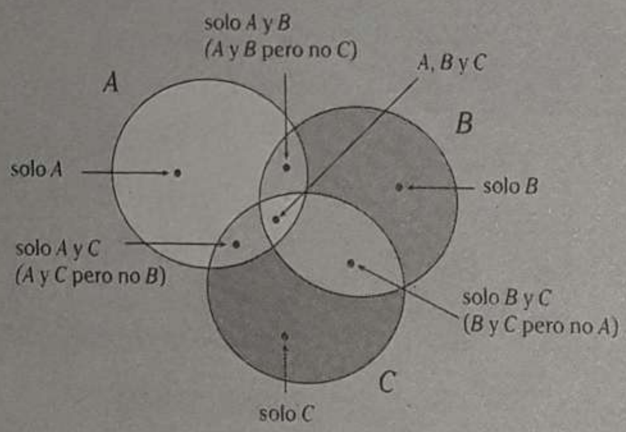
- $A \cup A^C=U$
- $A \cap A^C=\phi$
- $(A^C)^C=A$
- $(U)^C=\phi$
- $(\phi)^C=U$

DE LA UNIDAD

- $A \cup U=U$
- $A \cup \phi=A$
- $A \cap U=A$
- $A \cap \phi=\phi$

¿SABÍA QUE...?

En el gráfico general, para tres conjuntos (A, B y C), cada región tiene una interpretación como se muestra a continuación.



Problema N.º 1

Se sabe que

$$x=\begin{cases} x^2; & \text{si } x \text{ es par}\\ 2x; & \text{si } x \text{ es impar}\end{cases}$$

y el conjunto

$$A=\{x / x\in\mathbb{Z} \wedge 1\le x\le 4\}$$

Calcule la suma de los elementos del conjunto A.

Resolución

Si $A=\{x / x\in\mathbb{Z} \wedge \underbrace{1\le x\le 4}_{\text{valores de } x:\ 1;\ 2;\ 3;\ 4}\}$

Reemplazando los valores de x en la condición (operador matemático), se tiene

- $1=2\times 1=2 \rightarrow 1=2=2^2=4$
- $2=2^2=4 \rightarrow 2=4=4^2=16$
- $3=2\times 3=6 \rightarrow 3=6=6^2=36$
- $4=4^2=16 \rightarrow 4=16=16^2=256$

Entonces el conjunto A está determinado por

$$A=\{4;\ 16;\ 36;\ 256\}$$

Por lo tanto, la suma de los elementos del conjunto A será

$$4+16+36+256=312.$$

Problema N.º 2

Dados los conjuntos unitarios A y B donde

$A=\{a+b;\ 2e+d;\ 10\}$

$B=\{7;\ b-d;\ e+3\}$

Calcule $n(C)+n(B)+n(A)$ si

$C=\{a;\ a^2;\ (a+d);\ (e-1)\}$.

Resolución

Como A y B son conjuntos unitarios, entonces tienen un solo elemento; en consecuencia se cumple que

- $\underset{4}{e}+3=7$
- $2\underset{4}{e}+\underset{2}{d}=10$
- $\underset{9}{b}-\underset{2}{d}=7$
- $\underset{1}{a}+\underset{9}{b}=10$

Ya que conocemos los valores de a, d y e, determinamos el conjunto C.

$$C=\{a;\ a^2;\ (a+d);\ (e-1)\}$$

$$C=\{1;\ 1^2;\ (1+2);\ (4-1)\}$$

$$C=\{1;\ 1;\ 3;\ 3\}$$

Entonces $n(C)=2$, dado que C solo tiene dos elementos diferentes.

Por lo tanto, $n(C)+n(B)+n(A)=2+1+1=4$. No olvidar que A y B son unitarios.

Problema N.º 3

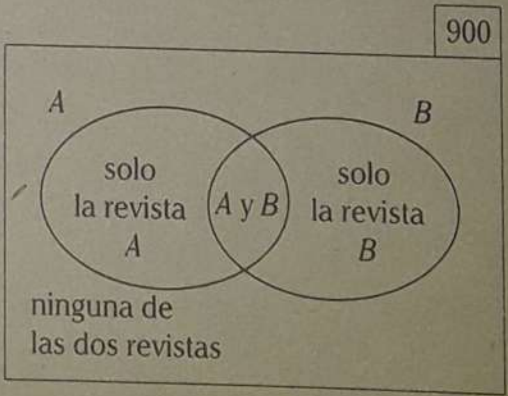
Se hizo una encuesta a 900 personas sobre las preferencias respecto a dos revistas (A y B). Se obtuvo lo siguiente:

- 300 leen la revista A.
- 650 leen la revista B.

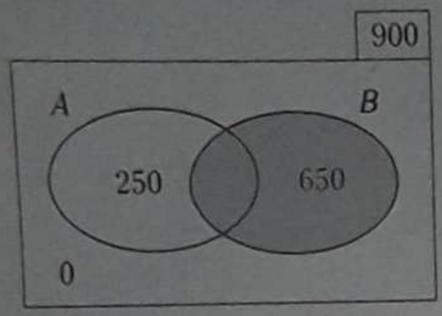
Si todos leen por lo menos una de las dos revistas, ¿cuántos leen solo la revista B?

Resolución

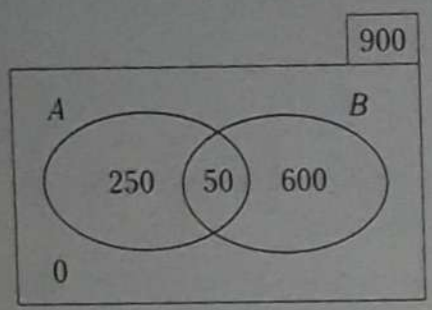
Utilizamos el diagrama de Venn-Euler y colocamos los datos que se tienen.



Se sabe que 650 personas leen la revista B y todos leen por lo menos una revista.



Y como los que leen la revista A son 300, se tiene



Por lo tanto, la cantidad de personas que leen la revista B son 600.

Problema N.° 4

En el cumpleaños de Jesús Fernando, se observa que la cantidad de varones excede a la de mujeres en 15. Si hay 34 mujeres bailando y entre los que no bailan hay 5 varones por cada 2 mujeres, ¿cuántas mujeres asistieron al cumpleaños de Jesús Fernando?

Resolución

Para el desarrollo de este problema nos conviene utilizar el gráfico de Lewis Carrol, ya que en este gráfico se utilizan para conjuntos disjuntos. Así se tiene

	Varones	Mujeres
Personas que bailan	34	34
Personas que no bailan	$5K$	$2K$

Están en la relación de 5 a 2.

Se observa que el número de varones que bailan es el mismo que el número de mujeres que bailan (parejas), dado que es una reunión formal, entonces en total

- N.° de varones$=34+5K$
- N.° de mujeres$=34+2K$

Por dato, la diferencia es 15, entonces planteamos

$$(34+5K)-(34+2K)=15$$
$$34+5K-34-2K=15$$
$$3K=15$$
$$K=5$$

Por lo tanto, el número de mujeres que asistieron al cumpleaños de Jesús Fernando será

$$34+2K=34+2\times5=44.$$

NIVEL BÁSICO

1. Dados los conjuntos
$A=\{3x+1/x \in \mathbb{Z}; 2 < x < 7\}$
$B=\{(3x+1) \in \mathbb{Z} / 2 < x < 7\}$
Calcule $n(A)+n(B)$.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 18 E) 20

2. Dado el conjunto
$$M=\left\{\left(\frac{x^2+1}{2}\right) \in \mathbb{Z}/1<x<5\right\}.$$
Calcule la suma de elementos de M.

A) 72 B) 80 C) 77
D) 82 E) 78

3. Dado el conjunto
$A=\{3, \{5; 8\}, 4, \{10\}, 7\}$.
¿Cuántas proposiciones son correctas?

- $7 \in A$
- $\{\{10\}\} \subset A$
- $8 \in A$
- $5 \notin A$
- $\{3\} \subset A$
- $\{3; 5\} \subset A$
- $\{4; 7\} \subset A$
- $\{8; 5\} \not\subset A$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

4. Los conjuntos A y B son iguales
$A=\{2a+3; b^2-a\}$
$B=\{3b+3; 24-a\}$
Además, a y b son enteros positivos. Calcule $a\times b$.

A) 35 B) 28 C) 30
D) 21 E) 42

5. Halle el número de elementos del conjunto $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ si
$A=\{x \in \mathbb{Z}/4 < x+3 < 8\}$
$B=\{x \in \mathbb{Z}/x^2-3x+2 \leq 0\}$
$C=\{x \in \mathbb{Z}/x=k-2, 3 < k < 7\}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

UNMSM 2006-I

6. Durante el mes de marzo, Andrea salió a almorzar con su amigo Valentín durante 18 días y con su amiga Camila durante 20 días. Si hubo 5 días que no salió con ninguno, ¿cuántos días salió a almorzar con los dos amigos?

A) 6 B) 12 C) 8
D) 10 E) 15

7. Sean los conjuntos
$A=\{x^2+1 / x \in \mathbb{Z}^+ \wedge 2x-3 < 5\}$
$B=\{(2x-1) \in \mathbb{Z} \wedge 3 < x < 5\}$
Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F), respectivamente.
I. A y B son disjuntos.
II. A y B son iguales.
III. $n(A)=n(B)$
IV. $A \subset B$
V. La suma de elementos de B es 21.

A) VFVFF
B) VFFVF
C) FVFVF
D) FVVFF
E) VFVFV

8. Si los conjuntos
$A=\{a^2+1; 3a-1\}$ y
$B=\{4b+c; b-2c+18\}$
son unitarios, calcule el mayor valor de $a+b+c$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

9. Los conjuntos B y C son iguales y el conjunto A es unitario.

$A=\{2a+3b+2; 30; 4b-2\}$

$B=\{37; 3^x; 16\}$

$C=\{2n+4; m^2+1; 81\}$

Calcule el valor de $a+b+n+m+x$.

A) 24 B) 18 C) 28
D) 19 E) 26

10. Sean los conjuntos A, B y C contenidos en U; además se cumple que

- $n(A)=20$
- $n(B)=25$
- $n(C)=22$
- $n[(A\cap B)-C]=7$
- $n[(A\cap C)-B]=8$
- $n[(B\cap C)-A]=4$
- $n(A\cup B\cup C)=40$

Calcule $n(A\cap B\cap C)$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 2

11. De un grupo de 210 turistas, se observó que a 10 personas no les gusta la comida peruana, a 20 personas no les gusta la comida china y a 5 no les gusta ninguna de las dos. ¿A cuántas personas les gustan ambas comidas?

A) 185 B) 175 C) 190
D) 195 E) 180

12. En un aula de 55 alumnos, donde solo estudian geografía, inglés e historia, todos prefieren al menos uno de estos cursos, 25 prefieren geografía, 32 prefieren inglés, 33 prefieren historia y 5 prefieren los tres cursos. ¿Cuántos prefieren solo dos cursos?

A) 15 B) 30 C) 35
D) 20 E) 25

UNMSM 2009-II

13. En un taller de música hay 400 alumnos; de los cuales 50% estudian guitarra; 60%, batería, y 30%, piano. Además 70 estudian guitarra y batería; 80, batería y piano; 50, guitarra y piano, y 10 personas estudian todos los instrumentos. ¿Cuántas personas no estudian ninguno de estos instrumentos?

A) 30 B) 20 C) 40
D) 10 E) 50

NIVEL INTERMEDIO

14. Dados los conjuntos A y B, se cumple que

$n(A\cup B)=12$

$n(A-B^C)=6$

$n(A)-n(B)=2$

Calcule $n[P(A\,\Delta\,B)]$.

A) 8 B) 16 C) 32
D) 64 E) 128

15. Dados los conjuntos A y B, se cumple que

- $n(A)-n(B)=2$
- $n[P(A)]+n[P(B)]=640$
- $n[P(A\cap B)]=32$

Calcule $n(A\cup B)$.

A) 16 B) 15 C) 10
D) 12 E) 11

16. En un aula de la academia donde estudian 50 alumnos entre varones y mujeres se observó lo siguiente:

- 8 mujeres tienen 15 años.
- 20 mujeres no tienen 15 años
- 19 mujeres no tienen 16 años.
- 6 varones no tienen ni 15 ni 16 años.

¿Cuántos varones tienen 15 o 16 años?

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 10

17. Un club deportivo tiene 75 miembros, de ellos 31 juegan fútbol, 42 juegan básquet y 38 juegan vóley. ¿Cuántos practican solo un deporte si 5 practican los tres deportes?

A) 21 B) 54 C) 48
D) 60 E) 56

18. Un grupo de personas decide viajar y resulta que 40 mujeres van al extranjero, 37 hombres van a provincias, 28 casados van al extranjero y 45 solteros van a provincias. Si se sabe que hay 42 hombres casados y 18 mujeres solteras viajan al extranjero, ¿cuál es el número de mujeres solteras?

A) 60 B) 62 C) 64
D) 66 E) 68

19. En un concurso nacional de matemáticas, de los 48 semifinalistas, 20 eran mujeres y de estas 6 usan lentes y reloj y 7 mujeres usaban lentes pero no reloj además, 8 varones usaban reloj pero no lentes y la cantidad de varones que usan lentes y reloj es igual a la cantidad de mujeres que no usan lentes pero sí reloj. ¿Cuántos varones usaban lentes si 24 estudiantes no usaban reloj y 21 no usan lentes?

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

20. Si $A \subset B$ y $B \cap C = \phi$, entonces simplifique la siguiente expresión.

$\{[(A \cap B)^C - B] \cup C\} \cup \{(C-A) \cup (A-B)\}$

A) ϕ
B) B^C
C) $A-B$
D) $A \cup B^C$
E) U

21. Dados los conjuntos A, B y C contenidos en el U, se cumple que

- $A \cap B = B$
- $n(B) = 9$
- $n(A \cap C) = 7$
- $n(A^C \cap B^C) = 8$
- $n(A - C) = 10$
- $n[(A \cap C) - B] = 2$
- $n(C \cap B^C) = 6$

Calcule $n[(A \Delta B) \cap (A \Delta C)]$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 3

22. Utilizando leyes de conjuntos, simplifique la siguiente expresión.

$\{(A-B) \cap (A \cup C)^C\} \cap \{(A^C - B) \cup (A^C \cap B)^C\}$

A) ϕ
B) $A-B$
C) C^C
D) $(A \cap C) - B$
E) $(A \cap B)^C$

23. Eduardo ha comprado 7 frutas diferentes y quiere preparar jugos surtidos. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?

A) 100 B) 63 C) 57
D) 120 E) 121

24. Sean A y B conjuntos incluidos en el universo. Se cumple lo siguiente:

- $A \cap B = \phi$
- B^C tiene 128 subconjuntos.
- La cantidad de subconjuntos de B excede a la cantidad de subconjuntos de A en 992.

¿Cuántos subconjuntos tiene A^C?

A) 4096 B) 512 C) 8192
D) 2048 E) 1024

25. En una reunión hay 40 personas, de las cuales 24 personas bailan, 10 mujeres cantan, 8 personas no cantan ni bailan y 7 mujeres cantan y bailan. Halle la cantidad de hombres que cantan, pero no bailan.

A) 7 B) 5 C) 6
D) 3 E) 4

26. De un grupo de 100 deportistas se observa que todos los que practican tenis practican fútbol, los que practican tenis y natación son la mitad y la tercera parte de los que practican solo fútbol y natación, respectivamente. Además, los que practican tenis y no natación son la cuarta parte de los que practican solo fútbol y natación. Dé como respuesta la suma del mínimo y máximo valor del número de personas que practican los tres deportes si todos practican algún deporte.

A) 12 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

27. En una conferencia donde asistieron 39 personas se observa que ningún actor canta, todos los actores son bailarines y todos los cantantes son poetas. Además, hay 5 personas que actúan y bailan solamente, 8 poetas que bailan pero no actúan y 7 personas que son poetas solamente. Si hay en total 30 poetas y 23 bailarines, ¿cuántos actores que son bailarines y poetas hay en dicha conferencia?

A) 10 B) 12 C) 9
D) 11 E) 8

28. Indique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.

I. Si $n(A)=n(B)$, entonces $A=B$.
II. Si A y B son disjuntos y $B \subset C$, entonces A y C son disjuntos.
III. Si $A \subset B$, entonces $P(A) \subset P(B)$.

A) VVF B) FVF C) FVV
D) FFV E) VVV

29. De un grupo de estudiantes se sabe lo siguiente:

- 10 fuman y no van a la academia.
- 25 van a la academia y no tienen 18 años.
- 16 no van a la academia ni fuman, pero tienen 18 años.
- 5 de los que van a la academia tienen 18 años, pero no fuman.
- 2 van a la academia, tienen 18 años y fuman.
- 12 no tienen 18 años, no fuman ni van a la academia.

Halle el número de estudiantes.

A) 70 B) 80 C) 90
D) 85 E) 65

30. Se hizo una encuesta a 180 personas para averiguar sobre la preferencia de los partidos políticos A, B, C y D, obteniendo los siguientes datos: 10 no simpatizan con ningún partido, 32 solo con D, 22 solo con A, 20 solo con B, 20 solo con C, 20 con A y D pero no con B, 6 solo con C y B, 4 solo con A y C, 24 con D y B, y 28 con A y B. ¿Cuántos simpatizan con A, B y D si ninguno que simpatiza con C simpatiza con D?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

31. Sean tres conjuntos (A, B, y C) no nulos y diferentes, tal que verifican

- $A-B=\phi$
- $n(A\cup C)=n(A)+n(C)$

Reduzca la expresión
$M=\{(B\cap C)-A\}\cup\{(A\cup C)^C\cap B\}$.

A) $B-C$ B) $B-A$ C) $B\cap C$
D) A E) B^C

32. En una reunión hay 120 personas, de las mujeres se observa que 23 usan reloj, 30 no bailan y 12 no bailan ni usan reloj. De los varones, 24 no bailan y 7 de ellos no tienen terno, pero sí reloj. De los que bailan, 16 tienen reloj y 6 mujeres no usan falda ni reloj. ¿Cuántas mujeres no usan reloj si se sabe que 5 varones con reloj y terno no bailan? Considere que solo los varones usan terno.

A) 30 B) 40 C) 27
D) 20 E) 36

33. En un autobús hay 41 pasajeros de los cuales se observa que hay 16 mujeres en total y 21 personas están sentadas. De los que están parados, 10 son hombres que no fuman, y de los están sentados, 8 no fuman. Calcule la máxima cantidad de varones que están de pie y fuman si hay 6 mujeres que fuman y 3 mujeres sentadas que no fuman.

A) 2 B) 3 C) 7
D) 13 E) 10

34. Dados los conjuntos

$A=\{x \text{ es par} / 6\leq x<15\}$

$$B=\left\{\left(\frac{x+1}{3}\right)\in\mathbb{N} \Big/ 2\leq x\leq 13\right\}$$

Calcule la suma de los cardinales de A y B.

A) 12 B) 10 C) 9
D) 8 E) 7

35. Sean los conjuntos

$A=\{2a;\, 2b+1\}$

$B=\{2;\, 3;\, 5\}$

$n(B)=a+b$; $A\subset B$ y $n(D)=a+2b$.

Halle el número de subconjuntos propios del conjunto D.

A) 32 B) 63 C) 15
D) 7 E) 31

36. Si los conjuntos A y B son tales que

- $n(A\cup B)=30$
- $n(A-B)=12$
- $n(B-A)=10$

Calcule $n(A)+n(B)$.

A) 24 B) 38 C) 42
D) 39 E) 50

37. Si el conjunto M posee $x+1$ elementos y $2x+3$ subconjuntos propios, calcule x.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Teoría de numeración

Capítulo VIII

Objetivos

- Conocer los principios fundamentales del sistema posicional de numeración.
- Representar una cantidad de unidades simples en un determinado sistema posicional de numeración.
- Descomponer polinómicamente cualquier numeral en un sistema de numeración y realizar los cambios de base.
- Aplicar las propiedades de un sistema de numeración en la resolución de los problemas.

Cuando los hombres empezaron a contar usaron los dedos, guijarros, marcas de bastones, nudos en una cuerda y algunas otras formas para ir pasando de un número al siguiente. A medida que la cantidad crece, se hace necesario un sistema de representación más práctico. El sistema de numeración más utilizado a lo largo de la historia es el sistema decimal o de base 10, según las apariencias por ser ese el número de dedos con los que contamos; actualmente, otro sistema de numeración que se utiliza es el sistema binario; se usa en los ordenadores internamente y utiliza dos símbolos diferentes: 0 y 1. En la práctica, el ordenador no trabaja con ceros ni unos, sino con dos niveles de tensión eléctrica, o bien la existencia o no de dicha tensión; un voltaje pequeño significaría un 0 y un valor más alto de voltaje significaría un 1.

Numeración

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la correcta lectura y escritura de los números.

Número

Es una idea de cantidad que nos permite cuantificar los objetos de la naturaleza.

Numeral

Es la representación simbólica o figurativa de un número.

Ejemplo

Se puede representar así

𝍸, •••••, V, 5, cinco, etc.

Cifra

Son los símbolos convencionales que serán utilizados para la formación de los numerales.

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...

Sistema posicional de numeración

Es el conjunto de normas, principios y reglas convencionales que nos van a permitir la correcta formación, lectura y escritura de los números. Este sistema presenta los siguientes principios fundamentales.

Del orden

Toda cifra que forma parte de un numeral ocupa un orden determinado, el cual se considera de derecha a izquierda.

Ejemplo

	4	3	2	1 ⟵ orden
	8	5	6	7
lugar ⟶	1.^{er}	2.^{o}	3.^{er}	4.^{o}

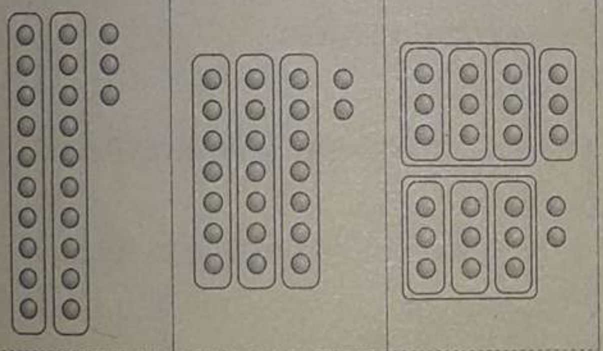
De la base

Es un número entero mayor que la unidad, el cual nos indica la cantidad de unidades necesarias y suficientes de un orden cualquiera para formar una unidad del orden inmediato superior.

Ejemplo

Represente veintitrés unidades simples a las bases 10, 7 y 3.

Base 10	Base 7	Base 3



23	$32_{(7)}$	$212_{(3)}$

Nota

En forma práctica, la base nos indica de cuánto en cuánto estamos agrupando las unidades.

Se concluye que

$$\underbrace{23 = 32_{(7)} = 212_{(3)}}_{\text{numerales equivalentes}}$$

$$\boxed{0 \leq (\text{cifra}) < (\text{base})}$$

$$\boxed{(\text{cifra máxima}) = (\text{base}) - 1}$$

A mayor numeral aparente le corresponde menor base, y a menor numeral aparente le corresponde mayor base, es decir

$$\text{Si } \overset{(+)}{\underset{(-)}{1232_n}} = \overset{(-)}{\underset{(+)}{215_m}} \rightarrow \boxed{n < m}$$

Algunos sistemas de numeración

Base	Nombre del sistema	Cifras utilizadas
2	binario	0; 1
3	ternario	0; 1; 2
4	cuaternario	0; 1; 2; 3
5	quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	octonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	decimal	0; 1; 2; 3; 4; ...; 9
11	undecimal	0; 1; 2; 3; 4; ...; 10
12	duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; ...; 11
20	vigesimal	0; 1; 2; 3; 4; ...; 19
60	sexagesimal	0; 1; 2; 3; 4; ...; 59

Observación

El número de cifras posibles a utilizar en cierta base es igual a la base, es decir

$$\text{base } n: \quad \overbrace{0\,;\underbrace{1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots;(n-1)}_{\text{cifra significativa}}}^{n \text{ cifras posibles a utilizar}}$$

0: cifra no significativa

Del valor de la cifra

Toda cifra que informa un numeral cuenta con dos valores.

Valor absoluto (V.A.)

Es el valor que representa en sí la cifra.

Valor relativo (V.R.)

Es el valor que representa por el orden que ocupa en un numeral.

Ejemplo

8 4 5 6

V.A.(8)=8

V.A.(4)=4

V.A.(5)=5

V.A.(6)=6

V.R.(6)$=6\times10^0=6$

V.R.(5)$=5\times10^1=50$

V.R.(4)$=4\times10^2=400$

V.R.(8)$=8\times10^3=8000$

Se puede observar que

$$8456=8\cdot10^3+4\cdot10^2+5\cdot10^1+6$$

Representación literal de los numerales

Cuando no se conocen las cifras de un numeral se van a representar mediante letras minúsculas, pero considerando lo siguiente:

- Las letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes.
- Toda expresión en paréntesis representa una cifra en un numeral.
- La primera cifra de un numeral debe ser diferente de cero.

Ejemplos

- Numeral de dos cifras en base 10

  $\overline{ab}\in\{10;11;12;13;\ldots;99\}$
- Numeral de tres cifras en base 7

  $\overline{mnp}_7\in\{100_7;101_7;102_7;103_7;\ldots;666_7\}$
- Numeral de tres cifras consecutivas de base 8

  $\overline{a(a+1)(a+2)}_8;\ \overline{(n+1)(n+2)(n+3)}_8$

Numeral capicúa

Son aquellos números cuyas otras equidistantes son iguales.

Ejemplos

$626;\ 1441_5;\ 77;\ \overline{aba};\ \overline{abba}_8$

Conteo de numerales

Ejemplo

¿Cuántos numerales de la siguiente forma

a. $\overline{ab}$

b. $\overline{nmp}$

c. $\overline{ab(a+1)(b-3)c}$

existen?

Resolución

a. $\overline{ab}_4 \in \left\{ \begin{matrix} 10_4;11_4;12_4;13_4;20_4;21_4; \\ 22_4;23_4;30_4;31_4;32_4;33_4 \end{matrix} \right\}$

Por lo tanto, hay 12 numerales.

Forma práctica

$$\begin{array}{cc} \overline{a} & \overline{b}_4 \\ \downarrow & \downarrow \\ & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ \hline 3 \times & 4 = 12 \end{array}$$

Por lo tanto, hay 12 numerales.

b.

$$\begin{array}{ccc} \overline{m} & \overline{n} & \overline{p}_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 7 & 7 & 7 \\ \hline 7 \cdot & 8 \cdot & 8 = 448 \end{array}$$

Por lo tanto, hay 448 numerales.

c.

$$\begin{array}{ccc} \overline{a(a+1)} & \overline{b(b-3)} & \overline{c} \\ \vee & \vee & \downarrow \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 8 & 9 & 9 \\ \hline 8 \times & 7 \times & 10 = 560 \end{array}$$

Por lo tanto, hay 560 numerales.

Descomposición polinómica

La descomposición polinómica consiste en expresar el numeral en función de sus cifras y su respectiva base.

Simple

Ejemplos

- $564_8 = 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 4$
- $6321_7 = 6 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^1 + 1$
- $8245 = 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5$
- $\overline{abcde}_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$

Por bloques

Ejemplos

- $4242_5 = 42_5 \cdot 5^2 + 42_5$
- $213213_7 = 213_7 \cdot 7^3 + 213_7$
- $\overline{ababab}_n = \overline{ab}_n \cdot n^4 + \overline{ab}_n \cdot n^2 + \overline{ab}_n$

Cambio de base

De base n a la base 10 ($n \neq 10$)

Método: descomposición polinómica

Ejemplo

Exprese 435_7 a la base 10.

$$435_7 = 4 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 5 = 222$$

$\therefore\ 435_7 = 222$

De base 10 a la base n ($n \neq 10$)

Método: divisiones sucesivas

Ejemplo

Exprese 222 a la base 7.

$$\begin{array}{r|l} 222 & 7 \\ \hline 5 & 31 \;\; | \; 7 \\ & \;\; 3 \;\;\;\; 4 \end{array}$$

$\therefore\ 222 = 435_7$

De base n a la base m ($n \neq m \neq 10$)

Método indirecto

$$\boxed{\text{base } n} \longrightarrow \boxed{\text{base } 10} \longrightarrow \boxed{\text{base } m}$$

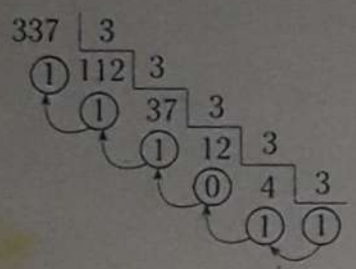
Ejemplo

Exprese 521_8 a la base 3.

$521_8=5\times8^2+2\cdot8^1+1$

$521_8=337$ (base 10)

Luego exprese de base 10 a la base 3



$\therefore\ 521_8=337=110111_3$

Ejemplos

- $12_{13_{14_{15_{(6)}}}}=2+3+4+5+6$

- $\underbrace{13_{13_{13_{\ddots_{13_{(8)}}}}}}_{100\ \text{términos}}=100\times3+8=308$

- $\underbrace{12_{15_{12_{15_{\ddots_{12_{15_{(9)}}}}}}}}_{80\ \text{términos}}=40\times2+40\times5+9=289$

Propiedades

Numeral de cifras máximas

$$\overline{\underbrace{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)(n-1)}_{k\ \text{cifras}}}_n=n^k-1$$

Ejemplos

- $99=10^2-1$
- $999=10^3-1$
- $9999=10^4-1$
- $77_8=8^2-1$
- $777_8=8^3-1$
- $7777_8=8^4-1$

Bases sucesivas

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\overline{1d}_{\overline{1e}_n}}}}=a+c+d+e+n$$

Intervalo en el cual se encuentra un numeral

$$n^{k-1}\leq\overline{\underbrace{abc\ldots x}_{k\ \text{cifras}}}_n<n^k$$

Ejemplos

- $100\leq\overline{abc}<1000$

  $10^2\leq\overline{abc}<10^3$

- $1000\leq\overline{abcd}<10\,000$

  $10^3\leq\overline{abcd}<10^4$

- $8^3\leq\overline{mnpq}_8<8^4$

- $9^5\leq\overline{xyzwrs}_9<9^6$

Problema N.º 1

Si $\overline{ab}_8=\overline{ba}_7+\overline{ba}_6$, calcule la suma de valores de $(a+b)$.

Resolución

Al observar el numeral $\overline{ba}_6$ se tiene que los valores de a y b pueden ser 1; 2; 3; 4 y 5.

A continuación descomponemos polinómicamente los numerales para que todos se encuentren en base 10. Así tenemos

$$8\cdot a+b=7\cdot b+a+6b+a$$

$$6a=12b$$

$$a=2b$$

$$\rightarrow \quad \frac{a}{2}=\frac{b}{1}$$

Lo cual significa que

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } a=2 \ \rightarrow \ b=1 \\ \text{Si } a=4 \ \rightarrow \ b=2\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{únicos}\\ \text{valores}\end{array}$$

Por lo tanto, la suma de valores de

$(a+b)$ es $3+6=9$.

Problema N.º 2

Si $\overline{abcabc}_n=1430$, calcule $a+b+c$.

Resolución

Convenientemente vamos a descomponer el numeral $\overline{abcabc}_n$ en bloques, así tenemos que

$$\overline{\underbrace{abc}\,\underbrace{abc}}_n=1430$$

$$\overline{abc}_n\cdot n^3+\overline{abc}_n=1430$$

$$\overline{abc}_n\cdot\left(n^3+1\right)=11\times13\times2\times5=22\times65$$

$$\overline{abc}_n\cdot\left(n^3+1\right)=22\times(4^3+1)$$

Se observa que $n=4$, entonces

$$\overline{abc}_4=22=112_4$$

Donde $a=1$; $b=1$ y $c=2$

$\therefore \quad a+b+c=1+1+2=4$

Problema N.º 3

¿Cuántos números tienen tres cifras en bases 7; 8 y 9?

Resolución

Sea N el número, tal que al ser expresado en las bases 7; 8 y 9 se representan con tres cifras. Así se tiene

$$N=\overline{abc}_7=\overline{def}_8=\overline{ghi}_9$$

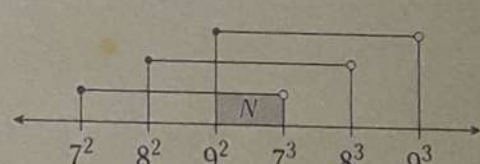
Se sabe además que los intervalos de los numerales son

$$7^2\leq\overline{abc}_7<7^3$$

$$8^2\leq\overline{def}_8<8^3$$

$$9^2\leq\overline{ghi}_9<9^3$$

Gráficamente



Luego

$$9^2 \leq N < 7^3$$

$$81 \leq N < 343$$

Los valores que puede tomar

$$N: \underbrace{81\ ;\ 82\ ;\ 83\ ;\ 84\ ;\ ...\ ;\ 341\ ;\ 342}$$

$$342-80=262 \text{ valores}$$

Por lo tanto, existen 262 números que se pueden representar con tres cifras en las bases 7; 8 y 9.

Problema N.º 4

Exprese en el sistema octanario el valor de

$E=2^{22}+2^{18}+2^{10}+2^4$.

Dé como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución

Dando la forma a la expresión E en función de 8, que es el sistema en el cual se quiere expresar

$$E=2\cdot 2^{21}+1\cdot 2^{18}+2\cdot 2^9+2\cdot 2^3$$

$$E=2\cdot(2^3)^7+1\cdot(2^3)^6+2\cdot(2^3)^3+2\cdot(2^3)$$

$$E=2\cdot 8^7+1\cdot 8^6+2\cdot 8^3+2\cdot 8$$

Completamos la expresión

$$E=2\cdot 8^7+1\cdot 8^6+0\cdot 8^5+0\cdot 8^4+2\cdot 8^3+0\cdot 8^2+2\cdot 8+0$$

$$E=\underbrace{21002020_8}_{\substack{\text{La suma de}\\ \text{cifras es 7.}}}$$

Por lo tanto, al expresar E en el sistema octanario se obtiene como suma de cifras 7.

Problema N.º 5

Si se cumple que

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}_n}_{(n+1)\text{ cifras}}=\overline{x0y3},$$

calcule el valor de $x+y+n$.

Resolución

De la igualdad

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}_n}_{(n+1)\text{ cifras}}=\overline{x0y3}$$

por propiedad de cifras máximas tenemos

$$n^{(n+1)}-1=\overline{x0y3}$$

$$n^{(n+1)}=\overline{x0y4}$$

Ahora por intervalo de un numeral

$$1004 < n^{(n+1)} < 9094$$

Si $n=3 \rightarrow 3^4=81$ (no cumple)

Si $n=4 \rightarrow 4^5=81$ (sí cumple)

Si $n=5 \rightarrow 5^6=81$ (no cumple)

$\rightarrow n=4;\ x=1;\ y=2$

$\therefore\ x+y+n=7$

NIVEL BÁSICO

1. Si $\overline{a(a+1)2}_7=\overline{2b(a+3)}_9$, calcule $a+b$.

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 7

2. Si $\overline{mom}_8=\overline{aboo}_5$, calcule $a+b+m$.

A) 14 B) 13 C) 10
D) 12 E) 9

3. Si $\overline{ab5}_c=\overline{b2c}_7$, halle $a+b$.

A) 6 B) 8 C) 4
D) 9 E) 7

4. Si $\overline{55bb}_n=\overline{an00}_8$, calcule $a+b+n$.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

5. Al expresar 352_n en base $n+1$, la suma de las cifras es $2n-5$. Calcule n.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

6. Se sabe que a es impar, además los siguientes numerales están bien escritos.

- $\overline{amaba}_{(8)}$
- $\overline{131}_{(a)}$
- $\overline{mama}_{(b)}$
- $\overline{a2a}_{(m)}$

Calcule $a+b+m$.

A) 15 B) 18 C) 20
D) 16 E) 17

7. ¿Cuántos números de tres cifras en base 12 se escriben con tres cifras en base 11 y en base 10?

A) 810 B) 500 C) 996
D) 856 E) 758

8. ¿Cuántos numerales de la forma

$$\overline{(m-3)(2+n)(1+m)\left(\frac{n}{2}\right)p}$$

existen en base 9?

A) 120 B) 108 C) 64
D) 144 E) 288

9. Si tenemos $\overline{ab6}_n=\overline{(a-1)7(a+b)}_8$, exprese $\overline{aaaaa}_{(b)}$ en base 10, y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 10 B) 8 C) 9
D) 11 E) 6

10. Si $\overline{abab}_n=407$, calcule $a+b+n$.

A) 8 B) 9 C) 12
D) 15 E) 10

11. Si $\overline{aaaa}_{(a+1)}=1160_8$, halle a^2.

A) 9 B) 16 C) 25
D) 36 E) 49

12. Si $\overline{abc}_n=329$, calcule la cantidad de valores que toma n.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

13. ¿Cuántas parejas de numerales de la forma $\overline{abc}_4$ y $\overline{mn}_6$ serán iguales?

A) 20 B) 30 C) 48
D) 19 E) 21

NIVEL INTERMEDIO

14. Si un numeral capicúa de tres cifras del sistema octonario, cuya suma de cifras es 14, se expresa en base 15, se obtiene un numeral capicúa de tres cifras, cuya suma de cifras también es 14. Calcule el producto de cifras del capicúa inicial.

A) 100 B) 96 C) 48
D) 72 E) 12

15. Con 3 dígitos distintos y no nulos, se forman todos los números posibles de dos cifras diferentes. ¿Cuál es la razón entre la suma de todos estos números de dos cifras y la suma de los 3 dígitos?

A) 22 B) 26 C) 28
D) 24 E) 20

UNMSM 2009-II

16. Si
$\overline{abcabc}_{(n)}=\overline{331(n-4)(n-4)}_{(5)}$,
calcule $a+b+c$.

A) 5 B) 6 C) 12
D) 8 E) 10

17. ¿Cuántos números del sistema decimal, al ser expresados en bases 4; 6 y 7, se representan con tres cifras?

A) 11 B) 12 C) 13
D) 15 E) 16

18. Calcule el producto de cifras de un número de tres cifras consecutivas del sistema octonario si al ser expresado en base 12 resulta un capicúa de tres cifras, cuya cifra de segundo orden es 1.

A) 60 B) 90 C) 24
D) 120 E) 210

19. Calcule cuántos números impares positivos existen, tal que al expresarlos en bases 5 y 6 tienen cuatro y tres cifras, respectivamente.

A) 46 B) 45 C) 20
D) 24 E) 25

20. Halle el mayor numeral de tres cifras del sistema senario tal que su representación en base 24 sea igual al numeral formado por el bloque de sus dos últimas cifras, y luego dé como respuesta la suma de cifras del numeral buscado.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

21. El máximo número impar se representa en el sistema octonario con seis cifras iguales. Calcule la suma de cifras de este numeral luego de expresarlo en base 4.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 27 E) 16

22. El mayor numeral capicúa de tres cifras es igual a 62 veces la suma de sus cifras diferentes. ¿En cuántos sistemas de numeración dicho numeral se representa con cuatro cifras?

A) 8 B) 9 C) 7
D) 6 E) 4

23. Si $\overline{1mmm}_6=\overline{2m(n^2)(n-2)}_p$, calcule cuántos sistemas de numeración $\overline{mnp}$ se representan con cuatro cifras.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

24. Si existen 693 numerales de la forma $\overline{(a-4)ba(b+3)c(2c)}_n$, calcule la suma de cifras de n.

A) 9 B) 7 C) 5
D) 6 E) 4

25. Si $\overline{abc0m}_{(k)}=\overline{(n-2)(2n)(n^2)m}_{(4n)}$, halle el máximo valor de $a+b+c+m$.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 10

26. Si $\overline{\left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{36}{a}\right)}_{(7)}=\overline{mnp}_{(a-1)}$, calcule $m+n+p$.

A) 10 B) 12 C) 11
D) 15 E) 16

27. Si $\overline{mnpmnp}_k=532$ y $\overline{a0b}_{(2k)}=\overline{2a10}_{(m+p)}$, halle $a+b$.

A) 4 B) 7 C) 5
D) 3 E) 6

28. Sabiendo que $\overline{(2a)b(2a)b}_7=\overline{aaa00}_5$, calcule la suma de cifras al expresar el numeral $\underbrace{\overline{aaa...aaa}_b}_{\overline{ba}\text{ cifras}}$ al sistema nonario.

A) 200 B) 128 C) 64
D) 72 E) 80

29. Si $\overline{aaa}_5=\overline{mnp}=\overline{bcc0}_p$, ¿cuántos sistemas de numeración $\overline{bcc}$ se representan con tres cifras?

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 7

30. Si $\overline{abc}$ al escribirse en dos bases pares consecutivas se representan con 1354 y 546, calcule $a+b+c$.

A) 20 B) 16 C) 15
D) 13 E) 14

31. Se cumple que

$\overline{4ab}=\overline{baa}_9$

$\overline{ba}_{\overline{ba}_n}=\overline{17a}$

Calcule $a\times b\times n$.

A) 96 B) 112 C) 110
D) 120 E) 124

32. Si $\overline{7ab}_m=\overline{60a}_n=\overline{40(m-1)}_{11}$, $n<0$, calcule $a+b+n+m$.

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 25

33. Cierto número de dos cifras es n veces la suma de sus cifras; pero al invertir el orden de las cifras, el nuevo número es k veces la suma de sus cifras. Halle $n+k$.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 11 E) 13

UNMSM 2007-I

34. Un número de tres cifras consecutivas creciente se escribe en base 8 de la forma $\overline{7b0}_8$. Halle b.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

35. ¿Cuántos numerales de la siguiente forma $\overline{(a+2)ab(2b)(c-3)c}_{12}$ existen?

A) 510 B) 540 C) 560
D) 620 E) 640

Operaciones fundamentales

Capítulo IX

Objetivos

- Conocer y aplicar las operaciones básicas de la aritmética en problemas concretos.
- Manejar criterios de asociación operativa para afrontar problemas de la vida diaria.
- Afianzar los aspectos básicos de las operaciones con los números que son base fundamental para la teoría de los números.

Las operaciones fundamentales de la adición, sustracción, multiplicación y división las aplicamos en la vida diariamente. Una ama de casa, por ejemplo, recurre a estas para la distribución más adecuada de sus ingresos.

En la empresa se realizan siempre operaciones fundamentales, dado que las materias primas, ingresos, egresos, sueldos, impuestos, etc., son cuantificados. Son muy importantes en la elaboración de presupuestos, distribución y planificación.

Aunque quienes realizan solo las operaciones básicas están siendo remplazados por las calculadoras, computadoras y máquinas, que pueden realizar las operaciones en menos tiempo. Sin embargo, no deja de ser importante conocer los aspectos básicos de dichas operaciones y sus propiedades que vamos a desarrollar en este capítulo.

Adición

Dadas dos o más cantidades, la operación de adición consiste en reunir dichas cantidades en una sola, llamada suma.

Es decir

$$\underbrace{A+B}_{\text{sumandos}}=\underbrace{S}_{\text{suma}}$$

- **Adición en base 10**

  Se agrupa de 10 en 10.

  Ejemplo

  Sume $948+536+869$.

Veamos

4	3	2	1	← orden
2	1	2		
	9	4	8	+
	5	3	6	→ La suma se agrupa de 10 en 10
	8	6	9	
2	3	5	3	← suma

Otra forma

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 9 & 4 & 8 & + \\
 & 5 & 3 & 6 & \\
 & 8 & 6 & 9 & \\
\hline
 & & 2 & 3 & \\
 & 1 & 3 & & \\
2 & 2 & & & \\
\hline
2 & 3 & 5 & 3 & \leftarrow \text{suma total}
\end{array}
\quad \text{(2 3, 1 3, 2 2: sumas parciales)}$$

$\therefore\ 948+536+869=2353$

Adición en otras bases

Se agrupa como indica la base.

Ejemplo

Sume $657_8+426_8+734_8$.

4	3	2	1	← orden
2	1	2		
	6	5	$7_{(8)}$	+
	4	2	$6_{(8)}$	← Se agrupa de 8 en 8.
	7	3	$4_{(8)}$	
2	2	4	$1_{(8)}$	← suma

Orden 1

$$7+6+4=17=\underset{\text{lleva}}{2}(8)+\underset{\text{queda}}{1}$$

Orden 2

$$5+2+3+2=12=\underset{\text{lleva}}{1}(8)+\underset{\text{queda}}{4}$$

Orden 3

$$6+4+7+1=18=\underset{\text{lleva}}{2}(8)+\underset{\text{queda}}{2}$$

$\therefore\ 657_{(8)}+426_{(8)}+734_{(8)}=2241_{(8)}$

Otros ejemplos

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 2 & 2 & 1 & \\
 & 5 & 4 & 2_{(6)} & + \\
 & 4 & 5 & 3_{(6)} & \\
 & 5 & 3 & 4_{(6)} & \\
\hline
2 & 4 & 1 & 3_{(6)} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrl}
 & 2 & 1 & 2 & \\
 & 3 & 4 & 2_{(5)} & + \\
 & 4 & 1 & 4_{(5)} & \\
 & 2 & 0 & 4_{(5)} & \\
\hline
2 & 0 & 2 & 0_{(5)} &
\end{array}$$

Sustracción

Es una operación inversa a la adición tal que dados dos números, minuendo y sustraendo, la operación de la sustracción hace corresponder un tercer número llamado diferencia.

Es decir

$$\boxed{M - S = D}$$

- M: minuendo
- S: sustraendo
- D: diferencia

- **Sustracción en base 10**

Ejemplo

Reste 5236−869.

4	3	2	1	← orden
	1	1	1	
5	2	3	6	− Al prestarse 1, equivale a un grupo de 10.
	8	6	9	
4	3	6	7	← diferencia

$\therefore\ 5236-869=4367$

- **Sustracción en otras bases**

Ejemplo

Reste 3542_8-657_8.

4	3	2	1	← orden
	1	1	1	
3	5	4	$2_{(8)}$	− Al prestarse 1, equivale a un grupo de 8.
	6	5	$7_{(8)}$	
2	6	6	$3_{(8)}$	← diferencia

$\therefore\ 3542_{(8)}-657_{(8)}=2663_{(8)}$

Orden 1

$$\overset{\text{equivale a}}{\widehat{1 + 2-7}} = 8+2-7=3$$

Orden 2

$$\overset{\text{equivale a}}{\widehat{1 + 3-5}} = 8+3-5=6$$

Orden 3

$$\overset{\text{equivale a}}{\widehat{1 + 4-6}} = 8+4-6=6$$

$\therefore\ 3542_{(8)} - 657_{(8)} = 2663_{(8)}$

Otros ejemplos

$$\begin{array}{r} \overset{1}{}\ \ \overset{1}{}\ \ \ \\ 4\ \ 2\ \ 3_{(5)} - \\ 1\ \ 4\ \ 4_{(5)} \\ \hline 2\ \ 1\ \ 4_{(5)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{1}{}\ \ \overset{1}{}\ \ \overset{1}{}\ \ \ \\ 6\ \ 0\ \ 1\ \ 2_{(7)} - \\ 2\ \ 6\ \ 5\ \ 4_{(7)} \\ \hline 3\ \ 0\ \ 2\ \ 5_{(7)} \end{array}$$

PROPIEDADES

1. Si $M-S=D$, entonces

$$\boxed{M=S+D}$$

$$\boxed{M+S+D=2M}$$

2. Si $\overline{ab}_n-\overline{ba}_n=\overline{xy}_n$, $a>b$, entonces $x+y=n-1$.

Ejemplos

$$\begin{array}{r} 5\ \ 2\ - \\ 2\ \ 5\ \ \ \\ \hline \underbrace{2\ \ 7}_{\text{suma 9}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ \ 2\ - \\ 2\ \ 8\ \ \ \\ \hline \underbrace{5\ \ 4}_{\text{suma 9}} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ \ 3_{(8)} \\ 3\ \ 7_{(8)} \\ \hline \underbrace{3\ \ 4}_{\text{suma 7}}{}_{(8)} \end{array}$$

3. Si $\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{xyz}_n$, $a>c$,

entonces

- $x+z=y=n-1$
- $a-c=x+1$

Ejemplos

$$\begin{array}{r} 6\ \ 3\ \ 2\ - \\ 2\ \ 3\ \ 6\ \ \ \\ \hline 3\ \ \underbrace{9\ \ 6}\ \ \ \\ \text{suma 9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ \ 1\ \ 2\ - \\ 2\ \ 1\ \ 5\ \ \ \\ \hline 2\ \ \underbrace{9\ \ 7}\ \ \ \\ \text{suma 9} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6\ \ 2\ \ 1_{(8)} - \\ 1\ \ 2\ \ 6_{(8)}\ \ \ \\ \hline 4\ \ \underbrace{7\ \ 3}_{(8)}\ \ \ \\ \text{suma 7} \end{array}$$

NOTA

En base 10

Si $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$,

entonces

- $x+z=y=9$
- $a-c=x+1$
- $b \in \{0; 1; 2; 3; 4; ...; 9\}$

Complemento aritmético (CA)

Si $N=\underbrace{\overline{abc\,...\,xyz}}_{k\text{ cifras}}{}_{n}$,

entonces $\boxed{\mathrm{CA}(N)=n^k-N}$

Ejemplos

- $\mathrm{CA}(53)=10^2-53=100-53=47$
- $\mathrm{CA}(256)=10^3-256=1000-256=744$
- $CA(\overline{abcd}) = 10^4 - \overline{abcd} = 10\,000 - \overline{abcd}$
- $\mathrm{CA}(32_8)=8^2-32_8=100_8-32_8=46_8$
- $\mathrm{CA}(215_8)=8^2-215_8=1000_8-215_8=563_8$

En forma práctica

- $CA(\overset{9}{5}\overset{9}{4}\overset{10}{2}) = 458$
- $CA(\overset{9}{2}\overset{9}{3}\overset{9}{7}\overset{10}{4}) = 7626$
- $CA(\overset{9}{3}\overset{9}{2}\overset{10}{4}\,0) = 6760$
- $CA(\overset{7}{3}\overset{7}{2}\overset{8}{5}{}_8) = 453_8$
- $CA(\overset{7}{2}\overset{7}{1}\overset{7}{5}\overset{8}{3}{}_8) = 5625_8$

Multiplicación

Es una operación matemática que consiste en sumar un número tantas veces como indica otro número.

Es decir

$$P = \underbrace{A + A + A + \ldots + A + A}_{B \text{ sumandos}}$$

$$\boxed{A \times B = P}$$

- multiplicando ← A
- multiplicador ← B
- producto ← P

Ejemplo

Multiplique 2356 por 342.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 2 & 3 & 5 & 6 \times & \leftarrow \text{multiplicando} \\
 & & & 3 & 4 & 2 & \leftarrow \text{multiplicador} \\
\hline
 & & 4 & 7 & 1 & 2 & \\
 & 9 & 4 & 2 & 4 & & \text{productos parciales} \\
7 & 0 & 6 & 8 & & & \\
\hline
8 & 0 & 5 & 7 & 5 & 2 & \leftarrow \text{producto total}
\end{array}$$

SUMA DE PRODUCTOS PARCIALES

Si

$$\begin{array}{rl}
\overline{abcd}\ \times & \\
\overline{mnp} & \\
\hline
\boxed{\overline{abcd} \times p} & \\
\boxed{\overline{abcd} \times n} & \text{productos parciales} \\
\boxed{\overline{abcd} \times m} & \\
\hline
\boxed{} & \leftarrow \text{producto total}
\end{array}$$

entonces

$$\left(\begin{array}{c}\text{suma de productos}\\ \text{parciales}\end{array}\right) = \overline{abcd} \times p + \overline{abcd} \times n + \overline{abcd} \times m$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{suma de productos}\\ \text{parciales}\end{array}\right) = \overline{abcd} \times (p + n + m)$$

Ejemplo

Calcule la suma de productos parciales de

a. 2356×342

$$\left(\begin{array}{c}\text{suma de productos}\\ \text{parciales}\end{array}\right) = 2356 \times (3 + 4 + 2) = 21\,204$$

b. 547×368

$$\left(\begin{array}{c}\text{suma de productos}\\ \text{parciales}\end{array}\right) = 547 \times (3 + 6 + 8) = 9299$$

c. 368×547

$$\left(\begin{array}{c}\text{suma de productos}\\ \text{parciales}\end{array}\right) = 368 \times (5 + 4 + 7) = 5888$$

División

Es una operación inversa a la multiplicación que consiste en averiguar cuántas veces un número (divisor) está contenido en otro número (dividendo). El resultado de la división recibe el nombre de cociente.

Términos

- D: dividendo
- d: divisor
- q: cociente
- r: residuo

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Se cumple que $\boxed{D=d\times q+r}$

Clases

Exacta ($r=0$)

Es cuando al agrupar las unidades no sobran ni faltan unidades, es decir, se considera residuo cero.

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} 42 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array} \rightarrow 42=7\times 6$$

En general

$$\boxed{\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} 0 & q \end{array} \rightarrow D=d\times q}$$

Inexacta ($r\neq 0$)

Es cuando al agrupar las unidades sobran o faltan unidades para formar un grupo más.

- Cuando sobran unidades, se dice que la división es inexacta por defecto.
- Cuando faltan unidades para formar un grupo más, se dice que la división es inexacta por exceso.

Ejemplo

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} 38 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 7 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 38 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 8 \end{array}$
$38=5\times 7+3$	$38=5\times 8-2$

Observación

- Tanto el dividendo como el divisor, en ambos casos, son iguales.
- El cociente por exceso tiene una unidad más que el cociente por defecto.

En general

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} D & d \\ \cline{2-2} r_d & q \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} D & d \\ \cline{2-2} r_e & q+1 \end{array}$
Se cumple que $D=d\times q+r_d$	Se cumple que $D=d(q+1)-r_e$

donde

- r_d: residuo por defecto
- r_e: residuo por exceso

Nota

Cuando la división es inexacta y no se especifica el tipo de división, se asume que es inexacta por defecto.

Propiedades

- $0<(\text{residuo})<(\text{divisor})$
- $(\text{residuo mínimo})=1$
- $(\text{residuo máximo})=(\text{divisor})-1$
- $\begin{pmatrix}\text{residuo por}\\ \text{defecto}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{residuo por}\\ \text{exceso}\end{pmatrix}=(\text{divisor})$

Problema N.° 1

Calcule la suma de todos los números de la forma $\overline{a(2a)(3b)b}$.

Resolución

Primero determinamos la cantidad de números que existen de esa forma.

$$\begin{array}{cccc} \overline{a & (2a) & (3b) & b} \\ \downarrow & & & \downarrow \\ 1 & & & 0 \\ 2 & & & 1 \\ 3 & & & 2 \\ 4 & & & 3 \\ \hline 4 & \times & & 4 \end{array} = 16 \text{ números}$$

Ahora, reemplazamos los valores de a y b para saber qué valores tomaría cada cifra del numeral.

$$\begin{array}{cccc} \overline{a & (2a) & (3b) & b} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}$$

Cada cifra tiene 4 valores.

Calculamos la suma de los 16 números que se pueden formar aplicando el método de la suma mediante la suma de parciales. Así

- $\begin{pmatrix}\text{en las cifras}\\ \text{de unidades}\end{pmatrix} = \frac{16}{4}(0+1+2+3) = 24$

cantidad de números: 16; suma de valores de la cifra: $(0+1+2+3)$; cantidad de valores que toma la cifra: 4

- $\begin{pmatrix}\text{en las cifras}\\ \text{de decenas}\end{pmatrix} = \frac{16}{4}(0+3+6+9) = 72$
- $\begin{pmatrix}\text{en las cifras}\\ \text{de centenas}\end{pmatrix} = \frac{16}{4}(2+4+6+8) = 80$
- $\begin{pmatrix}\text{en las cifras}\\ \text{de millares}\end{pmatrix} = \frac{16}{4}(1+2+3+4) = 40$

Ahora, ordenamos estos resultados parciales en el tablero posicional. Así tenemos

Decena de millar	Unidad de millar	Centenas	Decenas	Unidades	
			2	4	+
		7	2		
	8	0			
4	0				
4	8	7	4	4	

Por lo tanto, la suma de todos los numerales de la forma $\overline{a(2a)(3b)b}$ es 48 744.

Problema N.° 2

Si se cumple que

$CA(\overline{abc}) + CA(\overline{bab}) = CA(\overline{bb}) + 120,$

calcule $CA(\overline{bacab})$.

Resolución

Se sabe que

$$CA(\overline{abc}) = 1000 - \overline{abc}$$

$$CA(\overline{bab}) = 1000 - \overline{bab}$$

$$CA(\overline{bb}) = 100 - \overline{bb}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación y descomponiendo polinómicamente cada numeral, se tiene

$$1000-\overline{abc}+1000-\overline{bab}=100-\overline{bb}+120$$

$$1780=\overline{abc}+\overline{bab}-\overline{bb}$$

$$1780=100a+10b+c+100b+10a+b-11b$$

$$1780=110a+100b+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{c}\ \begin{pmatrix}\text{por la terminación}\\ \text{de los numerales}\end{pmatrix}$$

$$178\cancel{0}=11\cancel{0}a+10\cancel{0}b$$

$$178=11\underset{\substack{\downarrow\\ 8}}{a}+10b\ \begin{pmatrix}\text{por la terminación de}\\ \text{178, ya que } 10b \text{ siempre}\\ \text{termina en cero}\end{pmatrix}$$

$$178=88+10b$$

$$90=10b$$

$$\rightarrow\quad b=9$$

Ahora, reemplazamos los valores de a, b y c para calcular

$$\text{CA}\left(\overline{bacab}\right)=\text{CA}(98089)$$

Aplicando la regla práctica se tiene

$$\text{CA}(\underbrace{\overset{9}{9}}_{\text{cero}}\ \overset{9}{8}\ \overset{9}{0}\ \overset{9}{8}\ \overset{10}{9})=1\ 9\ 1\ 1$$

$$10-9=1$$

$\therefore\quad \text{CA}(98089)=1911$

Problema N.º 3

Calcule la suma de productos parciales que se obtiene al multiplicar $\overline{mnp}$ por 124 sabiendo que la media geométrica de sus productos parciales es 742.

Resolución

Al realizar la operación de múltiplicación se obtendría

$$\begin{array}{r}\overline{m\ n\ p}\ \times\\ 1\ \ 2\ \ 4\\ \hline \boxed{4\times\overline{mnp}}\\ \boxed{2\times\overline{mnp}}\quad\\ \boxed{1\times\overline{mnp}}\qquad\\ \hline \boxed{\qquad\qquad\qquad}\end{array}\ \begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\}\text{productos parciales}\\ \leftarrow \text{producto total}\end{array}$$

Por dato se tiene que la media geométrica $\left(\overline{MG}\right)$ de dichos productos parciales es 742, entonces se tiene que

$$\sqrt[3]{4\times\overline{mnp}\times2\times\overline{mnp}\times1\times\overline{mnp}}=742$$

$$\sqrt[3]{8\times\overline{mnp}^3}=742$$

$$2\times\overline{mnp}=742$$

$$\overline{mnp}=371$$

Ahora, calculamos la suma de productos parciales de la operación

$$\begin{pmatrix}\text{suma de productos}\\ \text{parciales}\end{pmatrix}=4\times\overline{mnp}+2\times\overline{mnp}+1\times\overline{mnp}$$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de productos}\\ \text{parciales}\end{pmatrix}=7\times\overline{mnp}=7\times371=2597$$

Por lo tanto, la suma de productos parciales en la operación es 2597.

Problema N.° 4

El cociente de una división entera inexacta es 72; además, el dividendo y el divisor suman 961. Halle el residuo por exceso.

Resolución

En la división se tiene

$$\begin{array}{r|l} \text{(dividendo)} & \text{(divisor)} \\ \cline{2-2} \text{(residuo)} & \text{(cociente)} \end{array}$$

Por el algoritmo de la división inexacta, se tiene

$$\text{(dividendo)}=\text{(divisor)}\times\text{(cociente)}+\text{(residuo)}$$

Por dato se tiene que

- (cociente)=72
- (dividendo)+(divisor)=961
  (dividendo)=961 – (divisor)

Reemplazamos los datos en la relación que se conoce por el algoritmo

$$961-\text{(divisor)}=72\times\text{(divisor)}+\text{(residuo)}$$

$$961=73\underset{\substack{\downarrow \\ 13}}{\text{(divisor)}}+\underset{\substack{\downarrow \\ 12}}{\text{(residuo)}}$$

$$\text{(residuo)} < \text{(divisor)}$$

Por propiedad se sabe que

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 12}}{\begin{pmatrix}\text{residuo por}\\ \text{defecto}\end{pmatrix}}+\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\begin{pmatrix}\text{residuo por}\\ \text{exceso}\end{pmatrix}}=\underset{\substack{\downarrow \\ 13}}{\text{(divisor)}}$$

Por lo tanto, el residuo por exceso es 1.

Problema N.° 5

En una división inexacta se sabe que la diferencia del residuo por defecto y exceso es 15, la suma del residuo por defecto con el cociente por defecto es 40 y la diferencia del residuo por exceso con el cociente por exceso es 8. Calcule el dividendo.

Resolución

De los datos tenemos

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{l\|l} D & d \\ \cline{2-2} r_d & q \end{array}$	$\begin{array}{l\|l} D & d \\ \cline{2-2} r_e & q+1 \end{array}$

Además

- $r_d-r_e=15$ (I)
- $r_d+q=40$ (II)
- $r_e-(q+1)=8$ (III)

Restando las ecuaciones (II) y (III) tenemos

$$r_d-r_e+2q+1=32$$
$$15+2q+1=32$$
$$q=8$$

Reemplazando $q=8$ en las ecuaciones (II) y (III) se obtiene

$$r_d=32 \wedge r_e=17$$

Se cumple que

$$r_d+r_e=d=49$$

Luego

$$D=d\times q+r$$
$$D=49\times 8+32=424$$

Por lo tanto, el dividendo es 424.

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Si $(a+b+c)^2=169$ y

$S=\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$,

calcule la suma de cifras de S.

A) 13 B) 12 C) 15
D) 14 E) 10

2. Si $\overline{m2n}+\overline{m3n}+\overline{m4n}+\ldots+\overline{m9n}=\overline{p896}$,

calcule $m+n+p$.

A) 10 B) 8 C) 14
D) 12 E) 9

3. Si $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{xy5}$, además $a+c=11$,

calcule $a \cdot c+x+y$.

A) 37 B) 36 C) 42
D) 40 E) 38

4. Si $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{3pq}$, además $a+c=6$,

calcule $a \times c \times p \times q$.

A) 250 B) 270 C) 280
D) 370 E) 260

5. Si $\overline{342a}-\overline{8a7}=\overline{2a6b}$, $a<b$,

calcule $a+b$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

6. Si $\text{CA}(\overline{abc})+\text{CA}(\overline{ab})=383$,

calcule $a+b+c$.

A) 10 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

7. Si $\text{CA}(\overline{abc253})=\overline{532mnp}$,

calcule $a+b+c+m+n+p$.

A) 32
B) 33
C) 34
D) 35
E) 36

8. La suma de los términos de una sustracción es 168 y la diferencia es mayor al sustraendo en 12. Calcule la suma de cifras del sustraendo.

A) 12 B) 9 C) 15
D) 10 E) 8

9. Si al multiplicar $\overline{abc}$ por 35 se obtiene como suma de productos parciales 5872, calcule $a+b+c$.

A) 14 B) 16 C) 18
D) 20 E) 22

10. Si a dos números enteros se les disminuyen y aumentan seis unidades, respectivamente, el producto de ellos aumenta 204 unidades. Calcule la diferencia de dichos números.

A) 20 B) 30 C) 40
D) 41 E) 45

11. La suma de los términos de una división exacta es 415 y el cociente excede en 19 al divisor. Calcule la suma de cifras del dividendo.

A) 13 B) 15 C) 9
D) 12 E) 8

12. De una división se sabe que la diferencia del residuo por defecto y exceso es 20, la suma del residuo por defecto y exceso es 44 y la diferencia del residuo por exceso con el cociente por defecto es 5. Halle la suma de cifras del dividendo.

A) 7 B) 10 C) 12
D) 15 E) 17

NIVEL INTERMEDIO

13. Si $\overline{ab2a}+\overline{3a52}+\overline{dec}=\overline{(c+2)d02}$, halle $a\times b+c\times e$.

A) 35 B) 36 C) 24
D) 28 E) 32

14. Si se cumple que
$\overline{abca}+\overline{8abc}+\overline{b7c8}+\overline{ccab}=\overline{24b22}$,
calcule $a\times b\times c$.

A) 120 B) 60 C) 90
D) 42 E) 50

15. Halle el menor de dos números si los complementos aritméticos de su suma y diferencia son, respectivamente, 530 y 830.

A) 150 B) 170 C) 80
D) 230 E) 143

UNMSM 2009-II

16. Si se cumple que
$\overline{abcdcba}\times 9999=...3421$,
calcule $a+b+c+d$.

A) 18 B) 20 C) 24
D) 27 E) 30

17. Si $\overline{abc}\times 57=...36$ y
$\overline{abc}\times 93=\overline{...26d}$,
calcule $a+b+c+d$.

A) 23 B) 18 C) 22
D) 24 E) 26

18. Si $\overline{abcd}\times 333=...9216$ y la suma de productos parciales de $\overline{abcd}\times\overline{(2m)m}$ es 39 168, calcule $a+b+c+d+m$.

A) 15 B) 17 C) 18
D) 16 E) 14

19. En una división donde el divisor es 89, el residuo por exceso excede al residuo por defecto en 15 unidades, y la suma del cociente por defecto y exceso es 31. Calcule la suma de cifras del dividendo.

A) 13 B) 12 C) 11
D) 14 E) 15

20. Determine la suma de cifras de un numeral capicúa de tres cifras sabiendo que si se resta la suma de sus cifras se obtiene $\overline{n74}$.

A) 23 B) 25 C) 30
D) 15 E) 18

21. Si $\text{CA}(\overline{abc})+\overline{cba}=\overline{xy5}$, calcule $x+y$.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

22. Si al sumar los complementos aritméticos de los números $\overline{ab}_{11}$ y $\overline{ba}_{11}$ resulta 57_{11}, calcule $a+b$.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

23. Al dividir 287 entre un número positivo n se obtiene como cociente $(n-1)$ y de residuo $(n-2)$. ¿Cuál es el valor de n?

A) 15 B) 17 C) 18
D) 16 E) 19

UNMSM 2010-II

24. Si $\overline{abc}_5-\overline{cba}_5=\overline{def}_5$,

además $(\overline{def}_5-\overline{fed}_5)\times\overline{pq}=3744$,

calcule $d+e+f+p+q$.

A) 23 B) 20 C) 17
D) 22 E) 15

25. Si $CA(\overline{abcd})=a+b+c+d$,

calcule $\overline{ab}\times\overline{cd}$.

A) 5762
B) 6432
C) 7630
D) 7638
E) 6732

26. La suma de los 4 términos de una división es 202. Si al dividendo y divisor se les multiplica por 5, entonces la suma de los 4 términos de esta nueva división es 770. Calcule el primer cociente.

A) 120 B) 70 C) 50
D) 60 E) 100

UNMSM 2005-II

27. Si se multiplica por 7 al CA de un número, el resultado es el mismo número. Halle la suma de cifras de este número si es el menor posible.

A) 19 B) 24 C) 20
D) 15 E) 25

28. La diferencia de los CA de dos números consecutivos es un número de tres cifras. Halle dicho número de tres cifras y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 12 B) 24 C) 26
D) 22 E) 25

29. ¿Cuál es el número de cuatro cifras que multiplicado por 4 resulta el mismo número pero en orden invertido? Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 18 B) 19 C) 17
D) 20 E) 23

30. Si a un número le multiplicamos por 3, al resultado le restamos 2, al nuevo resultado lo dividimos entre 5 y, finalmente, al número obtenido le sumamos 4, se obtiene de esta manera 6. Calcule el número.

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 3

31. En una división inexacta, la suma de los residuos por defecto y exceso es 20. Si el cociente es 10 y el residuo equidista en la recta numérica del divisor y cociente, calcule el dividendo.

A) 210 B) 215 C) 220
D) 225 E) 230

32. En una división inexacta se observa que el divisor es cuatro veces más que el residuo y si al residuo se le disminuye 17, este sería mínimo y la división seguiría siendo inexacta. Calcule la suma de cifras del dividendo si el cociente es los 5/3 del residuo.

A) 15 B) 16 C) 18
D) 20 E) 21

33. La suma de los productos parciales de $\overline{bcd}\times 237$ es 1584.
Además $\overline{mnpq}_8\times 63=\overline{...bcd6}_8$.
Calcule $m+n+p+q+b+c+d$.

A) 25 B) 22 C) 17
D) 23 E) 27

34. Al dividir un número de tres cifras entre otro de dos cifras, se obtiene 11 de cociente y 25 de residuo, se les toma el complemento aritmético del dividendo y divisor y se les vuelve a dividir, obteniendo 7 de cociente y 19 de resto. Calcule la suma de cifras del dividiendo inicial.

A) 28 B) 29 C) 24
D) 20 E) 18

35. A un número par de tres cifras se le resta el número que se obtiene al invertir el orden de sus cifras y al resultado se le divide entre las cifras de las decenas, resultando exacto y como cociente cuatro veces un número de dos cifras iguales e igual a la cifra de decenas del número original. Determine el número original si es el menor posible.

A) 532 B) 550 C) 630
D) 632 E) 732

36. Si $\overline{abc}\times 999=...257$, calcule $a+b+c$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 14 E) 20

37. La diferencia de dos números es 78 y la división entre ellos da cociente 12 y residuo mínimo. Halle la suma de cifras del dividendo.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

38. Si $CA(\overline{abc})=\overline{aa}$ y $\overline{mnp}\times 999=\overline{...cba}$, calcule $m+n+p$.

A) 18 B) 10 C) 12
D) 15 E) 17

Teoría de la divisibilidad

Capítulo X

OBJETIVOS

- Conocer la relación que existe entre divisibilidad y multiplicidad.
- Utilizar los principios de divisibilidad en las operaciones con los números.
- Determinar el residuo que se obtiene al dividir un número entre otro sin efectuar la división.
- Aplicar los criterios de divisibilidad en la resolución de los problemas.

Muchas veces en nuestra vida cotidiana ocurren situaciones particulares, como por ejemplo cuando queremos repartir 24 caramelos en partes iguales entre 6 niños; es lógico pensar que cada niño recibiría 4 caramelos y no sobraría ningún caramelo, lo mismo sucede cuando queremos repartir entre 8 niños, cada uno tendría 3 caramelos y no sobraría ni faltaría; pero qué pasaría si la cantidad de niños fuese 7 niños, entonces no se podrían repartir en partes iguales los 24 caramelos. A través de la práctica, el hombre descubrió que este tipo de situaciones a veces sí tenía solución y a veces no.

Este hecho hizo que se estudie qué relación había entre los números en los que este problema sí tenía solución y los números en los que no. De esta forma comenzó a estudiarse la divisibilidad.

Divisibilidad de los números $\mathbb{Z}$

Un número entero A se dice que es divisible entre otro número entero positivo B, llamado divisor, si al dividir A entre B la división es exacta.

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} 0 & K \end{array}$$

Donde

$A \in \mathbb{Z}; B \in \mathbb{Z}^+$ y $K \in \mathbb{Z}$

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} 42 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$$

Se puede decir que

- 42 es divisible entre 7.
- 7 es divisor de 42.

Multiplicidad de los números $\mathbb{Z}$

Un número entero A es múltiplo de otro entero positivo B si existe un tercer número K, tal que al multiplicarlo por B resulte el número A.

Es decir

$$\boxed{A = BK}$$

Donde

$A \in \mathbb{Z}; B \in \mathbb{Z}^+$ y $K \in \mathbb{Z}$

Ejemplo

$42=7\times 6$

Se puede decir que

- 42 es múltiplo de 7.
- 7 es factor de 42.

Se observa que

$$42 \xrightarrow{\text{divisible entre}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\text{múltiplo de}} 42$$

Nota

A es divisible entre B <> A es múltiplo de B.

Notación de los múltiplos de un número

Si A es múltiplo o divisible entre B, se denota

$$\boxed{A=\overset{\circ}{B}} \qquad \boxed{A=\overset{\circ}{\overline{B}}} \qquad \boxed{A=BK}$$

$A \in \mathbb{Z}$; $B \in \mathbb{Z}^+$ y $K \in \mathbb{Z}$

Ejemplos

- $42=\overset{\circ}{7}$ puesto que $42=7(6)$
- $55=\overset{\circ}{\overline{11}}$ puesto que $55=11(5)$
- $60=\overset{\circ}{\overline{10}}$ puesto que $-60=10(-6)$
- $0=\overset{\circ}{\overline{13}}$ puesto que $0=13\cdot(0)$
- $N=\overset{\circ}{\overline{15}}$ puesto que $N=15k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Veamos las siguientes situaciones.

1. Los divisores positivos de 12 y 35
   - $12: \underbrace{1; 2; 3; 4; 6; 12}_{\text{divisores}}$

     $12=12\times 1=6\times 2=4\times 3=3\times 4=2\times 6$
   - $35: \underbrace{1; 5; 7; 35}_{\text{divisores}}$

     $35=35\times 1=7\times 5=5\times 7=1\times 35$

Observación

Un número entero es múltiplo de cada uno de sus divisores positivos.

2. Los múltiplos de 5 y 11
   - $\overset{\circ}{5}\begin{cases} 5; 10; 15; 20; 25; \ldots \\ 0 \\ -5; -10; -15; -20; -25; \ldots \end{cases}$
   - $\overset{\circ}{\overline{11}}\begin{cases} 11; 22; 33; 44; 55, \ldots \\ 0 \\ -11; -22; -33; -44 \end{cases}$

Nota

- Todo número positivo es divisible por sí mismo y por la unidad.
- El cero es múltiplo de cualquier entero positivo. Es decir

  $0=\overset{\circ}{n};\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Notación de los no múltiplos de un número

Ejemplo

¿Es 45 divisible entre 7?

¡No! Porque al dividir 45 entre 7, la división es inexacta. Además, sabemos que la división puede ser por defecto o exceso.

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} 45 & 7 \\ \hline 3 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 45 & 7 \\ \hline 7 & 7 \end{array}$
$45=7\times 6+3$	$45=7\times 7-4$
Se denota	Se denota
$\boxed{45=\overset{\circ}{7}+3}$	$\boxed{45=\overset{\circ}{7}-4}$

Se cumple que

$$\underset{\overset{\downarrow}{3}}{r_d}+\underset{\overset{\downarrow}{4}}{r_e}=\underset{\overset{\downarrow}{7}}{(\text{módulo})}$$

Otros ejemplos

- $35=\overset{\circ}{8}+3=\overset{\circ}{8}-5$
- $90=\overset{\circ}{\overline{11}}+2=\overset{\circ}{\overline{11}}-9$
- $54=\overset{\circ}{5}+4=\overset{\circ}{5}-1$

Principios de divisibilidad

1. Operaciones con números múltiplos de un mismo módulo

- Adición

$$\boxed{\overset{\circ}{n}+\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}}$$

Ejemplo

$$\underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{5}}}{35}+\underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{5}}}{20}=\underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{5}}}{55}$$

- Sustracción

$$\boxed{\overset{\circ}{n}-\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}}$$

Ejemplo

$$\underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{7}}}{56}-\underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{7}}}{35}=\underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{7}}}{21}$$

- Multiplicación

$$\boxed{k\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}};\ k\in\mathbb{Z}$$

Ejemplo

$$8\times\underset{\overset{\downarrow}{8\times\overset{\circ}{\overline{12}}}}{60}=\underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{\overline{12}}}}{480}$$

- Potenciación

$$\boxed{\left(\overset{\circ}{n}\right)^k=\overset{\circ}{n}};\ k\in\mathbb{Z}^+$$

Ejemplo

$$\underset{\overset{\downarrow}{\left(\overset{\circ}{4}\right)^3}}{(12)^3}=\underset{\overset{\downarrow}{\overset{\circ}{4}}}{1728}$$

Observación

✓ $$\boxed{\left(\overset{\circ}{n}+a\right)\left(\overset{\circ}{n}+b\right)\left(\overset{\circ}{n}+c\right)=\overset{\circ}{n}+a\cdot b\cdot c}$$

Ejemplos

- $\left(\overset{\circ}{7}+2\right)\left(\overset{\circ}{7}+3\right)=\overset{\circ}{7}+2\cdot 3=\overset{\circ}{7}+6$
- $\left(\overset{\circ}{5}+2\right)\left(\overset{\circ}{5}+3\right)\left(\overset{\circ}{5}+4\right)=\overset{\circ}{5}+\underbrace{2\cdot 3\cdot 4}_{\overset{\circ}{5}+4}=\overset{\circ}{5}+4$
- $\left(\overset{\circ}{\overline{11}}+5\right)\left(\overset{\circ}{\overline{11}}+8\right)\left(\overset{\circ}{\overline{11}}+2\right)=\overset{\circ}{\overline{11}}+\underbrace{5\cdot 8\cdot 2}_{\overset{\circ}{\overline{11}}+3}=\overset{\circ}{\overline{11}}+3$

✓ $$\overline{abcde}_n=\overset{\circ}{n}+e$$
$$\overline{abcde}_n=\left(\overset{\circ}{\overline{n^2}}\right)+\overline{de}_n$$
$$\overline{abcde}_n=\left(\overset{\circ}{\overline{n^3}}\right)+\overline{cde}_n$$

Ejemplos

- $\overline{ab235}_8=\overset{\circ}{8}+5$
- $\overline{ab235}_8=\left(\overset{\circ}{\overline{8^2}}\right)+35_8$
- $\overline{ab235}_8=\left(\overset{\circ}{\overline{8^3}}\right)+235_8$

2. Si $A=\overset{\circ}{B}$, entonces A es múltiplo de todos los divisores de B.

Ejemplo

$$60=\overset{\circ}{\overline{15}}$$

divisores de 15: 1; 3; 5; 15

$$\begin{cases} 60=\overset{\circ}{1} \\ 60=\overset{\circ}{3} \\ 60=\overset{\circ}{5} \\ 60=\overset{\circ}{\overline{15}} \end{cases}$$

3. Si un número es múltiplo de varios módulos, entonces es múltiplo del MCM de dichos módulos.

> Si
>
> $$N \begin{cases} \overset{\circ}{a} \\ \overset{\circ}{b} \\ \overset{\circ}{c} \end{cases}$$
>
> entonces
>
> $$N=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(a,b,c)}}$$

Ejemplo

Sea

$$N \begin{cases} \overset{\circ}{8} \\ \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{6} \end{cases} \rightarrow\ N=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(8;9;6)}}=\overset{\circ}{\overline{72}}$$

Además

> Si
>
> $$N \begin{cases} \overset{\circ}{a}\pm r \\ \overset{\circ}{b}\pm r \\ \overset{\circ}{c}\pm r \end{cases}$$
>
> entonces
>
> $$N=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(a,b,c)}}\pm r$$

Ejemplo

Sea

$$N \begin{cases} \overset{\circ}{8}+3 \\ \overset{\circ}{9}+3 \\ \overset{\circ}{6}+3 \end{cases} \rightarrow\ N=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(5;6;8)}}=\overset{\circ}{\overline{120}}+3$$

4. Principio de Arquímedes

> Sean a y b dos números enteros no nulos. Si $a\cdot b=\overset{\circ}{n}$, además b y n tienen como único divisor en común a la unidad, entonces $a=\overset{\circ}{n}$.

Ejemplos

- $3a=\overset{\circ}{7}\ \rightarrow\ a=\overset{\circ}{7}$

  3 y 7 comparten como único divisor a la unidad.

- $6b=\overset{\circ}{15}$

  $2b=\overset{\circ}{5}\ \rightarrow\ b=\overset{\circ}{5}$

- $15c=\overset{o}{45}$

  $c=\overset{o}{3}$

- $5d=\overset{o}{17}+15$

  $5(d-3)=\overset{o}{17}$

  $d-3=\overset{o}{17} \rightarrow d=\overset{o}{17}+3$

- $4e=\overset{o}{11}+8$

  $\rightarrow e=\overset{o}{11}+2$

- $7f=\overset{o}{13}+2$

  $7f=\overset{o}{13}+\underbrace{2+26}_{28}$

  $\rightarrow f=\overset{o}{13}+4$

Criterios de divisibilidad

Es el conjunto de reglas que se aplican a las cifras de un numeral que permiten establecer si un numeral es o no divisible entre otro número, y, en caso de no serlo, permitirá determinar el residuo.

Divisibilidad por 2; 4 y 8

Sea $N=\overline{abcde}$.

$N=\overset{o}{2} \leftrightarrow e=\overset{o}{2}$
$N=\overset{o}{4} \leftrightarrow \overline{de}=\overset{o}{4}$
$N=\overset{o}{8} \leftrightarrow \overline{cde}=\overset{o}{8}$

Divisibilidad por 5; 25 y 125

Sea $N=\overline{abcde}$.

$N=\overset{o}{5} \leftrightarrow e=\overset{o}{5}$
$N=\overset{o}{25} \leftrightarrow \overline{de}=\overset{o}{25}$
$N=\overset{o}{125} \leftrightarrow \overline{cde}=\overset{o}{125}$

Divisibilidad por 3 y 9

Sea $N=\overline{abcde}$.

$N=\overset{o}{3} \leftrightarrow a+b+c+d+e=\overset{o}{3}$
$N=\overset{o}{9} \leftrightarrow a+b+c+d+e=\overset{o}{9}$

Divisibilidad por 11

Sea $N=\overline{\underset{+}{a}\underset{-}{b}\underset{+}{c}\underset{-}{d}\underset{+}{e}}$.

$$\boxed{N=\overset{o}{11} \leftrightarrow a-b+c-d+e=\overset{o}{11}}$$

Divisibilidad por 7

Sea $N=\overline{\underset{-2}{a}\;\underset{-3}{b}\;\underset{-1}{c}\;\underset{2}{d}\;\underset{3}{e}\;\underset{1}{f}}$.

$$\boxed{N=\overset{o}{7} \leftrightarrow -2a-3b-1c+2d+3e+f=\overset{o}{7}}$$

Divisibilidad por 13

Sea $N=\overline{\underbrace{\underset{1}{a}\,\underset{4}{b}\,\underset{3}{c}}_{+}\,\underbrace{\underset{1}{d}\,\underset{4}{e}\,\underset{3}{f}}_{-}\,\underset{1}{g}}$.

$$\boxed{N=\overset{o}{13} \leftrightarrow a+4b+3c-d-4e-3f+g=\overset{o}{13}}$$

Problema N.° 1

¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 2 pero no de 5?

Resolución

Se sabe que todos los números de tres cifras son

$$\underbrace{100;\ 101;\ 102;\ 103;\ ...;\ 998;\ 999}_{900\text{ números}}$$

Determinamos todos los números de tres cifras que son múltiplos de 2

$$\underbrace{100;\ 102;\ 104;\ 106;\ ...;\ 996;\ 998}_{\text{Todos tienen la forma de }2K.}$$

Donde

$$K:\ \underbrace{50;\ 51;\ 52;\ ...;\ 499}_{450\text{ valores}}$$

Entonces hay 450 números de tres cifras que son múltiplos de 2. Ahora determinamos cuántos números de tres cifras son múltiplos de 10, ya que nos piden que los números deben ser múltiplos de 2 pero no de 5.

Se tiene

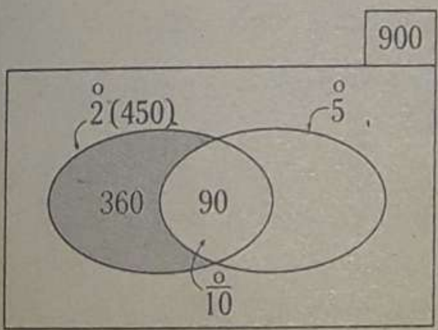
$$100 \leq 10\omega < 1000$$

$$10 \leq \omega < 100$$

$$\omega:\ \underbrace{10;\ 11;\ 12;\ 13;\ ...;\ 98;\ 99}_{90\text{ valores}}$$

Por lo tanto, el total de números de tres cifras que son $\overset{\circ}{2}$ pero no $\overset{\circ}{5}$ será $450-90=360$.

También podemos observar en el gráfico



Problema N.° 2

A un evento deportivo asisten una cantidad de personas menor que 350. Si los 2/11 de los asistentes son huaralinos y los 5/17 son huancaínos, ¿cuál es la cantidad de huaralinos?

Resolución

De los datos se tiene que

$$\text{n.° de huaralinos: } \frac{2}{11}(A) \rightarrow A=\overset{\circ}{11}$$

$$\text{n.° de huancaínos: } \frac{5}{17}(A) \rightarrow A=\overset{\circ}{17}$$

Siendo A el número de asistentes al evento deportivo.

Por principio se sabe que si

$$A \begin{cases} \overset{\circ}{11} \\ \overset{\circ}{17} \end{cases} \rightarrow A=\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(11;\ 17)}}=\overset{\circ}{187}$$

$$\rightarrow\ A=187\underset{\underset{1}{\downarrow}}{K};\ \ A<350$$

$$A=187\times1=187$$

Ahora, determinemos la cantidad pedida.

Por lo tanto, la cantidad de huaralinos es

$$\frac{2}{11}\times187=34.$$

Problema N.° 3

Si $\overline{ab0ab}_5=\overset{\circ}{8}+6$, calcule la suma de valores de $\overline{ab}$.

Resolución

Descomponemos en bloques el numeral

$$\overline{\underbrace{ab\ 0\ ab}_{\text{bloques}}}_5$$

Se tiene

$$\overline{ab}_5\times 5^3+\overline{ab}_5=\overset{o}{8}+6$$

$$\underbrace{126}\cdot\overline{ab}_5=\overset{o}{8}+6$$

$$\underbrace{\left(\overset{o}{8}+6\right)}\cdot\overline{ab}_5=\overset{o}{8}+6$$

$$\underbrace{\overset{o}{8}\cdot\overline{ab}_5}+6\cdot\overline{ab}_5=\overset{o}{8}+6$$

$$\overset{o}{8}+6\cdot\overline{ab}_5=\overset{o}{8}+6$$

Simplificamos

$$6\cdot\overline{ab}_5=\overset{o}{8}+6$$

$$3\cdot\overline{ab}_5=\overset{o}{4}+3$$

$$3\cdot\overline{ab}_5-3=\overset{o}{4}$$

$$3(\overline{ab}_5-1)=\overset{o}{4}$$

Por el principio de Arquímedes se tiene

$$\overline{ab}_5-1=\overset{o}{4}$$

$$\overline{ab}_5=4K+1 \quad (K\to 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5)$$

valor mínimo $10_5=5$ valor máximo $44_5=24$

Determinemos los valores de $\overline{ab}$

K	1	2	3	4	5
$\overline{ab}_5$	$5=10_5$	$9=14_5$	$13=23_5$	$17=32_5$	$21=41_5$
$\overline{ab}$	10	14	23	32	41

$$\therefore\ \left(\begin{matrix}\text{suma de}\\ \text{valores de } \overline{ab}\end{matrix}\right)=10+14+23+32+41=120$$

Problema N.° 4

Si $\overline{1a2b3c4d}=\overset{o}{7}-2$, halle el resto que se obtiene al dividir $\overline{1a1b2c2d3}$ entre 7.

Resolución

Convenientemente el numeral se descompone, tal que una parte esté formada solo por cifras numéricas y la otra, por cifras literales, cuidando que cada cifra conserve su lugar y orden dentro del numeral. Así se tiene que

$$\overline{1a2b3c4d}=10203040+\overline{a0b0c0d}=\overset{o}{7}-2$$

Ahora aplicamos el criterio de divisibilidad por 7 al numeral formado por cifras numéricas.

$$\underbrace{\underset{3\ 1}{1\,0}}_{+}\underbrace{\underset{2\ 3\ 1}{2\,0\,3}}_{-}\underbrace{\underset{2\ 3\ 1}{0\,4\,0}}_{+}+\overline{a\,0\,b\,0\,c\,0\,d}=\overset{o}{7}-2$$

$$3-7+12=8=\overset{o}{7}+1$$

Entonces la expresión queda así

$$\overset{o}{7}+1+\overline{a0b0c0d}=\overset{o}{7}-2$$

Donde

$$\overline{a0b0c0d}=\overset{o}{7}-3=\overset{o}{7}+4$$

Ahora calculamos el residuo en el numeral pedido aplicando el mismo criterio.

$$\overline{1a1b2c2d3}=101020203+\overline{a0b0c0d0}$$

Aplicamos el criterio por 7 al numeral de cifras numéricas

$$\underbrace{\underset{2\ 3\ 1}{1\,0\,1}}_{+}\underbrace{\underset{2\ 3\ 1}{0\,2\,0}}_{-}\underbrace{\underset{2\ 3\ 1}{2\,0\,3}}_{+}+\underbrace{\overline{a\,0\,b\,0\,c\,0\,d}}_{\overset{o}{7}+4\ \text{(del dato anterior)}}\times 10$$

$$3-6+7=4=\overset{o}{7}+4$$

Entonces la expresión queda así

$$\underbrace{101020203}+\overline{a\,0\,b\,0\,c\,0\,d}\times 10$$

$$\overset{o}{7}+4+\left(\overset{o}{7}+4\right)\times 10=\overset{o}{7}+4+\overset{o}{7}+40$$

$$=\overset{o}{7}+2$$

Por lo tanto, el residuo es 2.

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Podría ahorrar S/.200 diarios, pero cada mañana de sol gasto S/.90 en helados y cada mañana fría gasto S/.60 en café. Si ya tengo ahorrado S/.2580, ¿cuántos días ahorré?

A) 19 B) 20 C) 21
D) 22 E) 13

2. En una conferencia se observa que los 3/17 de las mujeres usan anteojos y los 5/8 de los varones no usan anteojos. Si el total de personas es 83, ¿cuántas personas en total no usan anteojos?

A) 58 B) 60 C) 62
D) 72 E) 48

3. Si $\overline{a321ba}$ es divisible por 15, calcule el máximo valor de $a+b$.

A) 10 B) 12 C) 13
D) 15 E) 11

4. Si $\overline{4b5ab32a}=\overset{\circ}{7}+3$, calcule a.

A) 10 B) 9 C) 8
D) 6 E) 3

5. Sea N el mayor número entero comprendido entre 3000 y 4000, tal que al ser dividido entre 18, 35 y 42 deja siempre un residuo igual a 11. ¿Cuál es la suma de las cifras de N?

A) 9 B) 18 C) 14
D) 20 E) 11

UNMSM 2010-II

6. Una empresa editora mandó a empacar un lote de libros. Si lo hacen de 5 en 5, de 6 en 6 o de 8 en 8, siempre sobran 3, por lo que deciden empacarlos de 9 en 9, así no sobra ninguno. ¿Cuántos libros mandó a empacar si el número de libros está comprendido entre 600 y 800?

A) 639 B) 693 C) 658
D) 603 E) 648

7. María Alejandra desea comprar polos y blusas, cuyos precios unitarios son S/.5 y S/.7, respectivamente. Si tiene S/.192, calcule la mayor cantidad de artículos que puede adquirir si compra por lo menos uno de cada prenda.

A) 28 B) 30 C) 31
D) 24 E) 38

8. Si $\overline{abca}=\overset{\circ}{35}$, además $a+b+c=13$, halle $a+b\times c$.

A) 30 B) 28 C) 24
D) 20 E) 18

9. Halle el residuo que se obtiene al dividir $\overline{c4b3ab1c2a}$ entre 11.

A) 1 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

10. ¿Cuántos numerales de la forma $\overline{3bcd}$ es divisible entre 65?

A) 15 B) 16 C) 14
D) 18 E) 19

11. ¿Cuántos términos múltiplos de 9 hay en la siguiente sucesión?

19; 30; 41; 52; ...; 580

A) 10 B) 8 C) 7
D) 6 E) 3

12. Determine el mayor número que sea menor que 2000, tal que al expresarlo en bases 5, 7 y 11 termina en 2; 5 y 3, respectivamente.

A) 1977 B) 1918 C) 1924
D) 1999 E) 1972

13. Con S/.63,60 se compraron 20 aves entre pavos, gallinas y pollos a razón por unidad de S/.17,5; S/.4,7 y S/.2, respectivamente. ¿Cuántos pollos se compraron?

A) 16 B) 12 C) 15
D) 18 E) 14

14. ¿Por cuál número es siempre divisible el numeral $\overline{abcabc}$ si $\overline{abc}$ es divisible por el mismo y la unidad?

A) 4 B) 5 C) 8
D) 9 E) 11

NIVEL INTERMEDIO

15. Halle el menor número de cuatro cifras, tal que al expresarlo en bases 3 y 2 sus últimas cifras son 12 y 111, respectivamente.

A) 1018 B) 1022 C) 1031
D) 1145 E) 1120

16. Si $\overline{aa52abc}$ al ser dividido entre 25 deja 2 de residuo y, al ser dividido entre 28, la división resulta ser exacta, calcule a.

A) 8 B) 2 C) 7
D) 4 E) 5

17. Un alumno pierde su carné; sin embargo, recuerda que su código tiene seis cifras, es divisible por 25, 9 y 11; además, la primera y la última cifras son iguales y todas las demás son diferentes. La cifra del segundo lugar es mayor que la cifra de cuarto lugar.

Halle el código del alumno y dé como respuesta la suma de sus tres últimas cifras.

A) 22 B) 20 C) 16
D) 14 E) 12

18. Si $\overline{abc}$ es divisible por 5, $\overline{bac}$ es divisible por 9 y $\overline{cba}$ es divisible por 11, calcule la suma de cifras de $\overline{abc}$.

A) 22 B) 24 C) 18
D) 16 E) 15

19. Se tiene un número formado por 89 cifras; las 51 primeras cifras son 8 y las restantes son 6. Halle el residuo al dividir el número entre 7.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

20. Si $\overline{76m9n}$ es múltiplo de 107, halle el máximo valor de $(m+n)$.

A) 17 B) 13 C) 11
D) 9 E) 15

UNMSM 2013-I

21. ¿Cuántos números de la forma $\overline{5a3b24}$ existen, tal que si se dividiera entre 11, el residuo sería 8; pero si se dividiera entre 9, el residuo por exceso sería 8?

A) 6 B) 8 C) 5
D) 7 E) 9

22. Sea $\overline{abcd}=\overset{\circ}{37}+5$;
además $\overline{dma}=\overline{7rs}+\overline{amd}$.
Calcule el máximo valor de $(c+d)$.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 12

23. Si $\overline{aba}=n(a+b)$ y $n=\overset{o}{7}+4$, calcule n si $a+b$ es lo menor posible.

A) 86 B) 87 C) 88
D) 89 E) 90

24. Se sabe que un numeral capicúa de cuatro cifras es múltiplo de 103. Halle la suma de cifras de dicho numeral.

A) 22 B) 21 C) 20
D) 19 E) 18

25. Calcule un número entero comprendido entre 70 000 y 80 000, tal que sea igual a 45 veces el producto de sus cifras. Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 27 B) 18 C) 45
D) 36 E) 24

26. Si $\overline{ab64c}=\overset{o}{36}$, calcule el máximo valor de $a+b+c$.

A) 8 B) 17 C) 26
D) 12 E) 10

27. ¿Cuál es el residuo al dividir $\overline{(32a14a)}^{458}$ entre 7?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 1

28. Sea $b-a=2$; además, la suma de los números naturales desde $\overline{ab}$ hasta $\overline{ba}$ es múltiplo de 7. Calcule b.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

29. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abbaa}$ son divisibles por 13?

A) 7 B) 6 C) 5
D) 8 E) 9

30. ¿Cuántos números múltiplos de 3 tienen cuatro cifras en los sistemas cuaternario, quinario y senario?

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

31. Si $\overline{abc}=27(a+b+c)$ y $\overline{abc}$ es máximo, calcule $a+b+c$.

A) 9 B) 15 C) 18
D) 21 E) 27

32. Si

$\overline{abcd}=\overset{o}{73}$; $\overline{cdab}=\overset{o}{11}$ y $\overline{bcda}=\overset{o}{5}$,

halle $a\cdot b\cdot c\cdot d$.

A) 40 B) 50 C) 60
D) 70 E) 80

33. Se tienen dos números consecutivos de tres cifras; sabiendo que son los menores posibles, el mayor es múltiplo de 19 y el menor es múltiplo de 15. Dé como respuesta la suma de cifras del mayor.

A) 15 B) 10 C) 16
D) 11 E) 13

34. Si $\overline{b(2a)ac}=\overset{o}{70}+38$,

calcule el máximo valor de $a+b+c$.

A) 10 B) 14 C) 15
D) 17 E) 18

35. El número $\overline{abcba}$ es $\overset{o}{175}$; además $b>a$. ¿Cuál es el residuo de dividir $\overline{acac...}$ de 59 cifras entre 11?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Clasificación de los números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$)

Capítulo XI

Objetivos

- Reconocer si un número es primo o compuesto.
- Aplicar las propiedades de los números primos en la resolución de los problemas.
- Reconocer si en un grupo sus números son primos entre sí (PESI).
- Conocer el teorema fundamental de la aritmética y analizar los divisores de un número entero positivo.

Cuando realizamos cálculos y requerimos que las cantidades resultantes sean exactas, debemos conocer ciertas propiedades de dichos números. Por ejemplo, una empresa que produce jabones debe diseñar cajas que habrán de contener una cantidad exacta de jabones, evaluando su costo y la facilidad de la distribución de los objetos dado un orden; otro ejemplo se da al dividir un terreno en parcelas, de tal forma que el crecimiento y la posterior cosecha de lo sembrado sean óptimos; cuantitativamente, los números primos son aplicados en la estadística, en cálculos de probabilidades, en ciertos experimentos (los cuales dan muchas posibilidades en la ubicación del electrón en un átomo); así como también se utilizan en las programaciones que se realizan en las computadoras. Podemos observar que el número 13 es primo y si invertimos el orden de sus cifras, resulta 31, el cual también es un número primo. Pero no todos los números primos cumplen con ello.

En este capítulo vamos a reconocer dicho conjunto de números y sus propiedades comunes. Veamos algunos conceptos básicos.

Números enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$)

Sea el conjunto de números enteros positivos

$$\mathbb{Z}^+=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; ...\}$$

Si analizamos los divisores de los números enteros positivos, tenemos

Números $\mathbb{Z}^+$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Divisores	1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	...
Cantidad de divisores	1	2	2	3	2	4	2	4	3	...

De acuerdo a la cantidad de divisores, los enteros positivos se clasifican de la siguiente manera:

NÚMEROS SIMPLES

Son aquellos números enteros positivos que tienen a lo más dos divisores.

La unidad

Posee un solo divisor que es el mismo.

Números primos

Son aquellos números enteros positivos que poseen exactamente dos divisores: la unidad y el mismo número.

Lista de números primos menores que 100

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	...				

Propiedades

1. La cantidad de números primos es infinita y no existe fórmula para determinar todos los números primos.
2. El único primo y par es el 2.
3. Los únicos números consecutivos y primos a la vez son el 2 y 3.
4. La única terna de números impares consecutivos y primos a la vez son 3; 5 y 7.
5. Si p es un número primo, se cumple que

$$p>2 \rightarrow p=\overset{o}{4}+1 \text{ o } p=\overset{o}{4}-1$$

$$p>3 \rightarrow p=\overset{o}{6}+1 \text{ o } p=\overset{o}{6}-1$$

Ejemplos

- $5=\overset{o}{4}-1$
- $13=\overset{o}{6}+1$
- $17=\overset{o}{4}+1$
- $29=\overset{o}{6}-1$

¿Cómo determinar si un número es primo?

- Se extrae la raíz cuadrada al número dado; si es exacta, se determina que el número no es primo; en caso contrario se hallan los números primos menores o iguales a la parte entera de la raíz.
- Luego se divide de menor a mayor dicho número entre cada número primo hallado.
- Si en dichas divisiones se obtiene al menos una división exacta, entonces el número no es primo, pero sí todas las divisiones son inexactas; entonces el número es primo.

Ejemplo

¿El número 149 es un número primo?

Se extrae la raíz cuadrada al número dado.

$$\sqrt{149}=12{,}20...$$

Se hallan los números primos menores o iguales a la raíz que son 2; 3; 5; 7 y 11.

Se divide 149 entre cada uno de los primos hallados.

$$149=\begin{cases}\overset{o}{2}+1\\ \overset{o}{3}+2\\ \overset{o}{5}+4\\ \overset{o}{7}+3\\ \overset{o}{11}+6\end{cases}$$

Como en ningún caso las divisiones son exactas, entonces 149 es un número primo.

NÚMEROS COMPUESTOS

Son aquellos números enteros que poseen más de dos divisores.

Ejemplos

4; 6; 8; 9; 12; ...

NOTA

Todo número compuesto admite al menos un divisor primo.

Números primos entre sí (PESI)

Se denominan también primos relativos o coprimos. Son aquellos números que tienen como único divisor en común a la unidad.

Ejemplos

1. ¿27; 15 y 8 son números PESI?

   Analizamos sus divisores

   27: 1; 3; 9; 27
   52: 1; 2; 4; 13; 26; 52
   77: 1; 7; 11; 77
   divisores

   Se observa que la unidad es el único divisor en común a dichos números.

   Por lo tanto, 57; 52 y 77 son números PESI.

2. ¿21; 15 y 18 son números PESI?

   21: 1; 3; 7; 21
   15: 1; 3; 5; 15
   18: 1; 2; 3; 6; 9; 18
   divisores

   Se observa que 1 y 3 son divisores comunes de dichos números.

   Por lo tanto, 21; 15 y 18 no son números, son PESI.

Observación

1. Dos o más números consecutivos siempre son PESI.

   Ejemplo

   Sean los números 8; 9 y 10.

   8: 1; 2; 4; 8
   9: 1; 3; 9
   10: 1; 2; 5; 10
   divisores

   Se observa que 1 es el único divisor en común de dichos números.

   Por lo tanto, 8; 9 y 10 son números PESI.

2. Dos o más números impares consecutivos siempre son PESI.

   Ejemplo

   21: 1; 3; 7; 21
   23: 1; 23
   25: 1; 5; 25
   divisores

   Se observa que 1 es el único divisor en común a dichos números.

   Por lo tanto, 21; 23 y 25 son números PESI.

3. Si a y b son PESI, entonces

   a y $a+b$ son PESI
   b y $a-b$ son PESI

   Ejemplo

   Si 8 y 15 son PESI, entonces

   - 8 y 23 son PESI
   - 8 y 7 son PESI

Teorema fundamental de la aritmética

Todo número entero mayor que la unidad se puede expresar como el producto de sus divisores primos diferentes elevados cada uno a exponentes enteros positivos. Llamado también como la descomposición canónica (DC).

Sea

$$\boxed{N = \underbrace{a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta}}_{\substack{\text{descomposicion canónica} \\ \text{(DC)}}}}$$

donde

- a; b y c: números primos
- α; β; θ: números enteros positivos

Ejemplos

- $36 = \underbrace{2^2 \cdot 3^2}_{\text{DC}}$
- $7200 = \underbrace{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2}_{\text{DC}}$
- $54\,000 = \underbrace{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^3}_{\text{DC}}$

Estudio de los divisores de un número entero positivo

Tabla de divisores

Ejemplo

Halle los divisores se 144.

$144 = 2^4 \cdot 3^2$

		divisores de 2^4				
		1	2^1	2^2	2^3	2^4
3^2	1	1	2	4	8	16
	3	3	6	12	24	48
	3^2	9	18	36	72	144

(cantidad de divisores)=(4+1)(2+1)=15

Cantidad de divisores (CD_N)

Si $N = \underbrace{a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\theta}}_{\text{DC}}$

entonces

$$\boxed{CD_N = (\alpha+1)(\beta+1)(\theta+1)}$$

Ejemplos

- $72 = \underbrace{2^3 \cdot 3^2}_{\text{DC}}$

  $CD_{(72)} = (4+1)(2+1) = 15$

- $540 = \underbrace{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}_{\text{DC}}$

  $CD_{(540)} = (2+1)(3+1)(1+1) = 24$

- $22\,000 = \underbrace{2^4 \cdot 5^3 \cdot 11}_{\text{DC}}$

  $CD_{(2200)} = (4+1)(3+1)(1+1) = 40$

Observación

$$36:\ \underbrace{\overbrace{1;\ \underbrace{2;\ 3}_{\substack{\text{divisores}\\ \text{primos}}};}^{\substack{\text{divisores}\\ \text{simples}}}\ \overbrace{4;\ 6;\ 9;\ 12;\ 18;}^{\substack{\text{divisores}\\ \text{compuestos}}}}_{\substack{\text{divisores}\\ \text{propios}}}\ 36$$

Se cumple que

- $CD_N = CD_{\text{simples}} + CD_{\text{compuestos}}$
- $CD_{\text{simples}} = CD_{\text{primos}} + 1$
- $CD_{\text{propios}} = CD_N - 1$

Suma de divisores (SD_N)

Si $N = \underbrace{a^{\alpha} \times b^{\beta} \times c^{\theta}}_{\text{DC}}$

entonces

$$SD_N = \left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1}-1}{c-1}\right)$$

Ejemplo

Calcule la suma de divisores de 144 y 540.

- $144 = 2^4 \times 3^2$

$$SD_{(144)} = \underbrace{(1+2+2^2+2^3+2^4)}_{SD_{(2^4)}}\underbrace{(1+3+3^2)}_{SD_{(3^2)}}$$

$$SD_{(144)} = \left(\frac{2^{4+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\right) = 403$$

- $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$

$$SD_{(540)} = \left(\frac{2^3-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^4-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right) = 1680$$

Suma de inversas de los divisores (SID_N)

$$SID_N = \frac{SD_N}{N}$$

Ejemplo

Halle la suma de inversas de los divisores de 36.

$$36 : \underbrace{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36}_{\text{divisores}}$$

$$SID_{(36)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$$

$$SID_{(36)} = \frac{36+18+12+9+6+4+3+2+1}{36}$$

$$SID_{(36)} = \frac{91}{36}$$

Producto de divisores (PD_N)

El producto de divisores de un número entero positivo se calcula así

$$PD_N = \sqrt{N^{CD_N}} = N^{\frac{CD_N}{2}}$$

Ejemplo

Halle el producto de divisores de 72.

$$72 = \underbrace{2^3 \times 3^2}_{\text{DC}} \rightarrow CD_{(72)} = 4 \times 3 = 12$$

Luego

$$PD_{(72)} = \sqrt{72^{12}} = 72^{\frac{12}{2}} = 72^6$$

Problema N.º 1

Si $N=2^{n-1}\times 54^{n}$ tiene 57 divisores compuestos, calcule el número de divisores de $\overline{(n-2)(n-3)}!$.

Resolución

Determinamos la descomposición canónica de N. Así tenemos

$$N=2^{n-1}\times(2\times 3^3)^n=2^{n-1}\times 2^n\times 3^{3n}$$

$$N=\underbrace{2^{2n-1}\times 3^{3n}}_{\text{DC}}$$

Se observa en esta descomposición canónica que N tiene dos divisores primos (2 y 3) y tres divisores simples (1; 2 y 3). Además se sabe

$$\boxed{CD_{(N)}=CD_{(\text{simples})}+CD_{(\text{compuestos})}}$$

$$\underset{60}{CD_{(N)}}=\underset{3}{CD_{(\text{simples})}}+\underset{\substack{57\\ \text{(por dato)}}}{CD_{(\text{compuestos})}}$$

$\rightarrow\ CD_{(N)}=60$

Planteamos

$CD_{(N)}=(2n-1+1)(3n+1)=60$

$$\cancel{2}\cdot n(3n+1)=\cancel{60}$$

$$n(3n+1)=3\times 2\times 5$$

$$n=3$$

Ahora reemplazamos

$\overline{(n-2)(n-3)}!=10!$ (cantidad de divisores)

Se tiene que

$$10!=1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10$$

$$10!=2^8\times 3^4\times 5^2\times 7$$

$$\therefore\ CD_{(10!)}=9\times 5\times 3\times 2=270$$

Problema N.º 2

Si $\overline{abab}_7$ es un número de diez divisores, calcule la suma de divisores del numeral $\overline{(a-1)ba}$.

Resolución

Descomponiendo en bloques el numeral $\overline{abab}_7$ se tiene que

$$\overline{abab}_7=\overline{ab}_7\times 7^2+\overline{ab}_7=49\times\overline{ab}_7+1\times\overline{ab}_7$$

$$=50\times\overline{ab}_7=2\times 5^2\times\overline{ab}_7$$

Se sabe además que el numeral tiene 10 divisores, pero $10=2\times 5$, entonces los exponentes de los factores primos de la descomposición canónica serán 1 y 4. Así tenemos

$$\overline{abab}_7=2\times 5^2\times\underbrace{\overline{ab}_7}_{\overline{ab}_7=25=5^2}=2\times 5^2\times 5^2=2^1\times 5^4$$

(para cumplir la condición)

Se observa que $2^1\times 5^4$ es un número que tiene 10 divisores, por lo tanto

$$\overline{ab}_7=25=34_7$$

$$a=3\ \wedge\ b=4$$

Reemplazamos en el numeral

$$\overline{(a-1)ba}=243=3^5$$

Ahora calculamos la suma de divisores de $243=3^5$

Así tenemos

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{divisores}\end{pmatrix}=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5$$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{divisores}\end{pmatrix}=\frac{3^6-1}{3-1}=364$$

Problema N.° 3

¿Entre cuántos números se puede dividir 617, de manera que el residuo en todos los casos sea 17?

Resolución

Por algoritmo de la división inexacta se tiene que si

$$\begin{array}{r|l} 617 & d \\ \hline 17 & q \end{array} \quad \rightarrow \quad 617 = \underbrace{d \times q}_{\overset{\circ}{d}} + 17$$

Como queremos determinar los valores del divisor (d), entonces proponemos el módulo $d(\overset{\circ}{d})$. Así se tiene

$$617 = \overset{\circ}{d} + 17$$

$$600 = \overset{\circ}{d}$$

Se observa que d es un divisor de 600; por lo tanto, determinamos los divisores de 600.

Se sabe que $600 = \underbrace{2^3 \times 3 \times 5^2}_{\text{DC}}$

Elaboramos la tabla de divisores

		divisores de 2^3			
	1	1	2	4	8
divisores de 3^1	1	1	2	4	8
	3	3	6	12	24
divisores de 5^3	5	5	10	20	40
	15	15	30	60	120
	25	25	50	100	200
		75	150	300	600

Los valores seleccionados para d serán mayores que 17, porque el divisor es mayor que el residuo; entonces

$$\underbrace{d\!: 20;\ 24;\ 25;\ 30;\ 40;\ 50;\ 60;\ 75;\ 100;\ 120;\ 150;\ 200;\ 300 \text{ y } 600}_{14 \text{ valores}}$$

Por lo tanto, 617 se puede dividir entre 14 números que cumplen la condición.

Problema N.° 4

Calcule la suma de los divisores compuestos de 1200.

Resolución

En primer lugar se necesita la descomposición canónica del número. Así tenemos que

$$1200 = \underbrace{2^3 \times 3 \times 5^2}_{\text{DC}}$$

Ahora calculamos la suma de todos los divisores de 1200. Así

$$SD_{(1200)} = \frac{2^5-1}{2-1} \times \frac{3^2-1}{3-1} \times \frac{5^3-1}{5-1}$$

$$SD_{(1200)} = 31 \times 4 \times 31 = 3844$$

Además, observamos que los divisores simples son 1; 2; 3 y 5, y suman 11.

Por lo tanto, la suma de los divisores compuestos será

$$3844 - 11 = 3833.$$

Nota

$SD_{(N)} = SD_{(\text{simples})} + SD_{(\text{compuestos})}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. ¿Cuántos divisores no primos absolutos tiene el número 5400?

A) 90 B) 45 C) 48
D) 50 E) 60

2. ¿Cuántos ceros debe tener el número $N=4000...00$ para que admita 60 divisores compuestos?

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

3. Si $\overline{ab}$ es un número primo, ¿cuántos divisores tiene $\overline{abab}$?

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

4. Si $N=a^2\times(a+1)^3\times(2a+1)^2$ es la descomposición canónica de N, calcule cuántos divisores múltiplos de 15 tiene N.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 20 E) 14

5. ¿En cuántos sistemas de numeración el número 462 termina en la cifra 7?

A) 4 B) 6 C) 7
D) 5 E) 8

6. ¿Cuántos números positivos de la forma $\overline{ab1}$ tienen exactamente tres divisores?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

7. ¿Cuántos números de dos cifras menores que 50 existen, de modo que al sumar sus cifras resulta un número primo?

A) 10 B) 9 C) 11
D) 8 E) 7

8. La conjetura de GoldBach afirma: "Todo número par mayor que cuatro puede representarse como la suma de dos números primos". ¿De cuántos modos puede realizarse esto para el número 50, sin importar el orden de los sumandos?

A) 1 B) 3 C) 5
D) 4 E) 2

UNMSM 2004-II

9. Si el número 36 000 tiene N divisores cuadrados perfectos y la suma de sus divisores PESI con 15 es M, halle $M+N$.

A) 60 B) 48 C) 75
D) 84 E) 96

10. Si $N=245^n\cdot 175$ tiene 28 divisores que no son múltiplos de 35, calcule el valor de n.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 4 E) 8

NIVEL INTERMEDIO

11. Si el número $P=64^x\cdot 5^3\cdot 7^y$ tiene 24 divisores impares, ¿cuántos divisores de P terminan en cifra par diferente de cero?

A) $33x$ B) $34x$ C) $35x$
D) $36x$ E) $37x$

12. Si $36^1\times36^2\times36^3\times36^4\times...\times36^n$ tiene 960 divisores propios, calcule la cantidad de divisores impares de $36^n\times45^{n-2}$.

A) 60 B) 72 C) 56
D) 68 E) 78

13. Para averiguar si el numeral $\overline{abb}$ es primo, deben realizarse siete divisiones, de modo que cuando falte una división esta resulte ser exacta. ¿Cuál es el valor de $a+b$?

A) 11 B) 5 C) 8
D) 4 E) 10

14. ¿Cuántos números capicúas de cuatro cifras son PESI con 35?

A) 64 B) 72 C) 80
D) 84 E) 92

15. Si se cumple que
$\overline{aabc5}=a^3\times(a+c)^c\times(a-c)^c$ está descompuesto canónicamente, calcule la cantidad de divisores de dos cifras que tiene $\overline{abc}$.

A) 1 B) 5 C) 3
D) 4 E) 2

16. Se sabe que $28^{n+3}\times21^{2m}$ posee 1751 divisores compuestos y 1638 divisores que son divisibles entre 7. Calcule $m+n$.

A) 11 B) 6 C) 8
D) 10 E) 7

17. El número 15^n tiene la quinta parte de divisores de 30^n. Calcule la suma de los divisores no primos de $\overline{nnn}$.

A) 1024 B) 1022 C) 1114
D) 1604 E) 1728

18. Si $\overline{bb55}$ tiene 20 divisores, halle la suma de sus divisores.

A) 7812 B) 8712 C) 1872
D) 8217 E) 7281

19. El número $18A^2$ tiene 60 divisores siendo tres de ellos primos absolutos. Calcule el número de divisores compuestos de A^3 sabiendo que A es el menor posible.

A) 35 B) 60 C) 50
D) 45 E) 55

20. Halle el número entero de la forma $2^\alpha\times7^\beta$, sabiendo que al multiplicarlo por 14 se duplica la cantidad de sus divisores positivos y que, al dividirlo entre 4, el número de sus divisores positivos se reduce a la tercera parte.

A) 14 B) 56 C) 63
D) 28 E) 98

UNMSM 2010-II

21. Los cuatro primeros términos de una progresión aritmética creciente son números primos. Además, la suma del primero y del cuarto es 140. Halle el producto de las cifras del sexto término si el segundo acaba en cifra 7.

A) 40 B) 9 C) 32
D) 16 E) 24

22. Determine el número de tres cifras, tal que al descomponerlo canónicamente tenga como únicos factores primos absolutos a sus cifras que lo conforman. Dé como respuesta la suma de divisores múltiplos de 7.

A) 1300 B) 1344 C) 4130
D) 4300 E) 3140

23. Si $N=a^b\times\overline{a1}\times(a+2)^a\times b$ está descompuesto canónicamente, además tiene 44 divisores que no son primos absolutos, halle la suma de los divisores de $\overline{abab}$.

A) 6426 B) 6246 C) 5420
D) 5924 E) 4624

24. Si $\overline{abba}$ tiene 24 divisores, además $a+b=9$, calcule $a\times b$ sabiendo que es el menor posible.

A) 18 B) 16 C) 24
D) 20 E) 12

25. Si a un número de dos cifras significativas se le sumara 5, tendría 3 divisores; pero si se le restara 5, tendría 4 divisores. ¿Cuántos divisores tiene dicho número?

A) 5 B) 8 C) 2
D) 4 E) 6

26. Al construir la tabla de divisores de un número se obtiene una tabla de 3×3. Al multiplicar los divisores que se encuentran en una de las diagonales de dicha tabla resulta 216. ¿Cuántos divisores de una cifra posee el número?

A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

27. Calcule la suma de divisores del número entero de la forma $2^\alpha\times5^\beta$ sabiendo que al multiplicarlo por 20 se duplica la cantidad de sus divisores positivos y que, al dividirlo entre 4, el número de sus divisores positivos se reduce a la mitad.

A) 217 B) 468 C) 375
D) 465 E) 385

28. Si $N=9^n-9^{n-1}-9^{n-2}$ y tiene 32 divisores no primos, halle la cantidad de divisores múltiplos de 81 de N.

A) 20 B) 24 C) 26
D) 28 E) 30

29. Se sabe que n es el menor número primo, tal que su cuadrado disminuido en una unidad y dividido entre 8 da por cociente otro número primo. ¿Cuántos números primos se escriben con dos cifras en el sistema de base n?

A) 7 B) 8 C) 16
D) 12 E) 14

30. Determine los números enteros de N que no tengan otros factores primos que el 2 y 3, de modo tal que el número de divisores de N^2 sea el triple de los de N. Se pide la diferencia entre el mayor y el menor de los números.

A) 170 B) 180 C) 190
D) 200 E) 210

31. La suma de divisores de 20^n es p^2; además, p es un número primo. ¿Cuántos divisores simples tiene $p+n$?

A) 6 B) 5 C) 3
D) 4 E) 2

32. Dada la descomposición canónica de $N=a^m\times b^n\times c^p$. Si dividimos N entre a, se eliminan 42 divisores, y si dividimos N entre b, se suprimen 30. Calcule la cantidad de divisores en N que sean múltiplos de $a\times b\times c$.

A) 120 B) 124 C) 130
D) 135 E) 144

33. ¿Cuántos divisores tiene el número $N=p^{a}\times q^{a+6}$ para que su raíz cúbica tenga 15 divisores si p y q son primos absolutos?

A) 67 B) 74 C) 89
D) 91 E) 96

34. Si un número de la forma $\overline{abac}$ posee 21 divisores, además $2a+2b+c=14$, calcule la suma de los divisores de $\overline{bac}$.

A) 190 B) 180 C) 220
D) 260 E) 270

35. Un número tiene 4 divisores simples cuya suma es 13; al ser multiplicado por 4 aumenta en 12 su cantidad de divisores, y al ser dividido por 3 disminuye en 10 dicha cantidad de divisores. Halle la cantidad de divisores propios.

A) 19 B) 29 C) 39
D) 49 E) 59

36. Si $13^2\times 68^n$ tiene el triple del número de divisores de 147×3^3, calcule n.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

37. Halle la cantidad de divisores que tiene $(10!)^2$.

A) 1530 B) 4320 C) 2295
D) 2550 E) 2265

38. Si $\overline{ab}$ y $\overline{ab}+12$ son PESI, ¿cuántos números $\overline{ab}$ cumplen dicha condición?

A) 60 B) 30 C) 45
D) 36 E) 42

39. Si $\overline{a7}$ es un número primo, determine la suma de valores de a.

A) 20 B) 23 C) 26
D) 27 E) 28

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Capítulo XII

Objetivos

- Determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de un conjunto de números enteros positivos.
- Conocer los métodos para calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.
- Aplicar las propiedades del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo en la resolución de los problemas.

Constantemente hacemos cálculos tales como obtener las dimensiones de un artículo, de un terreno, de una pieza mecánica, de una caja, etc.; encontrar las veces que coinciden las visitas periódicas a dos personas en un determinado lugar; buscar el volumen que debe tener un recipiente como máximo para que al vaciar en ellos un volumen de líquido no sobre ni falte.

Todo ello surge de la necesidad de obtener el menor costo posible, hacer que no haya desperdicios, o en todo caso este sea mínimo, con la intención de que en ciertos cálculos los resultados sean enteros.

Así, por ejemplo, se desea colocar losetas en el piso de una determinada sala, para esto se deben diseñar losetas, cuyas dimensiones sean tales que no haya la necesidad de cortarlas, o estos cortes sean mínimos; diseñar cajas (generalmente cúbicas) que puedan almacenar objetos, como jabones, cajas de fósforos, etc., tales que puedan contener la mayor cantidad de artículos posibles.

Máximo común divisor (MCD)

Dado un conjunto de números enteros positivos, el MCD es aquel número que cumple dos condiciones:

1. Es un divisor común del conjunto de dichos números.
2. Es el mayor valor posible.

Ejemplo

Dados los números 24; 36 y 60, halle el MCD de dichos números.

Números	Divisores
24	①; ②; ③; 4; ⑥; 12; 24
36	①; ②; ③; 4; ⑥; 9; 12; 18; 36
54	①; ②; ③; 4; 5; ⑥; 9; 18; 27; 54

Divisores comunes: 1; 2; 3; 6

$\therefore$ MCD(24; 36; 54)=6

OBSERVACIÓN

- El MCD está contenido en los números

$$\left.\begin{array}{l} 24=6\times 4 \\ 36=6\times 6 \\ 54=6\times 9 \end{array}\right\} \rightarrow \text{PESI}$$

- Los divisores comunes de un conjunto de números son divisores también del MCD de dichos números.

Mínimo común múltiplo (MCM)

Dado un conjunto de números enteros positivos, el MCM es aquel número que cumple dos condiciones:

1. Es un múltiplo común del conjunto de dichos números.
2. Es el menor valor posible.

Ejemplo

Dados los números 4; 3 y 6, halle el MCM de dichos números.

Números	Múltiplos
4	4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36...
3	3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36...
6	6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60...

Múltiplos comunes: 12; 24; 36; 48; 60; ...

$\therefore$ MCM(4; 3; 6)=12

Métodos para determinar el MCD y el MCM

POR DESCOMPOSICIÓN SIMULTÁNEA

Para el MCD

Se extraen los factores comunes hasta obtener números PESI. El producto de los factores extraídos es el MCD.

Ejemplo

Calcule el MCD de 84; 108 y 144.

$$\begin{array}{ccccc|c} 84 & - & 108 & - & 144 & 2 \\ 42 & - & 54 & - & 72 & 2 \\ 21 & - & 27 & - & 36 & 3 \\ 7 & - & 9 & - & 12 & \\ & & \text{PESI} & & & \end{array}$$

$\therefore$ MCD(84; 108; 144)=12

Para el MCM

Se extraen los factores comunes y luego los factores no comunes hasta obtener la unidad en cada una. El producto de los factores extraídos es el MCM de dichos números.

Ejemplo

Calcule el MCM de 84; 108 y 144.

$$\begin{array}{ccccc|c} 84 & - & 108 & - & 144 & 12 \\ 7 & - & 9 & - & 12 & 3 \\ 7 & - & 3 & - & 4 & 3 \\ 7 & - & 1 & - & 4 & 4 \\ 7 & - & 1 & - & 1 & 7 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

$\therefore$ MCD(84; 108; 144)=3024

POR DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

Para el MCD

Es el producto de todos sus divisores primos comunes elevados cada uno a su menor exponente.

Ejemplo

Sean los números

$A=2^4\times 3^2\times 5^3$ (DC)

$B=2^3\times 3^5\times 5^2$ (DC)

Entonces

$\text{MCD}(A; B)=2^3\times 3^2\times 5^2$

Para el MCM

Es el producto de todos sus divisores primos comunes y no comunes elevados cada uno a su mayor exponente.

Ejemplo

Sean los números

$A=2^4\times 3^2\times 5^3$ (DC)

$B=2^3\times 3^5\times 5^2$ (DC)

$\therefore$ $MCM(A; B)=2^4\times 3^5\times 5^3$

POR EL ALGORITMO DE EUCLIDES (SOLO PARA EL MCD DE DOS NÚMEROS)

Llamado también divisiones sucesivas. En una división inexacta, donde $D=d\times q+r$, se cumple que

$MCD(D; d)=MCD(d; r)$

Ejemplo

Calcule el MCD de 540 y 245.

Cocientes	2	4	1	9
540	245	50	45	5 ⟵ MCD
Residuos	50	45	5	0

- $540 \div 245 = 2$, residuo 50 ⟶ MCD(540; 245)=MCD(245; 50)
- $245 \div 50 = 4$, residuo 45 ⟶ MCD(245; 50)=MCD(50; 45)
- $50 \div 45 = 1$, residuo 5 ⟶ MCD(50; 45)=MCD(45; 5)
- $45 \div 5 = 9$, residuo 0 división exacta ⟶ MCD(45; 5)=5

$\therefore$ MCD(540; 245)=5

NOTA

Las divisiones se pueden realizar por defecto o por exceso.

Propiedades del MCD y del MCM

1. Si A y B son PESI, entonces
   - $MCD(A; B)=1$
   - $MCM(A; B)=A\times B$

Ejemplos

- $MCD(\underbrace{8; 15}_{\text{PESI}})=1$
- $MCM(\underbrace{8; 15}_{\text{PESI}})=8\times 15$

2. Si $A=\overset{o}{B}$, entonces
   - $MCD(A; B)=B$
   - $MCM(A; B)=A$

Ejemplos

- MCD(24; 6)=6
- MCM(24; 6)=24

3. Para dos números (A y B), se cumple que si $MCD(A; B)=d$

   $A=d\cdot p$

   $B=d\cdot q$ (p y q son PESI)

   entonces

   $MCM(A; B)=d\cdot p\cdot q$

Ejemplo

Si MCD(54; 36)=18

$54=18\times 3$

$36=18\times 2$ PESI

entonces MCM(54; 36)=18×3×2

Problema N.º 1

Se cumple que MCD($\overline{ab}$; 240)=15. ¿Cuántos valores toma $\overline{ab}$?

Resolución

Del dato MCD($\overline{ab}$; 240)=15, se cumple que

son PESI

$$240 = 15 \times p = 15 \times 16$$

$$\overline{ab} = 15 \times q = 15 \times q$$

Tomará valores impares porque es PESI con 16.

Luego

$\overline{ab}=15\times q$ (debe ser un numeral de 2 cifras)

$\quad$ 1; 3; 5

$\overline{ab}$: 15; 45; 75

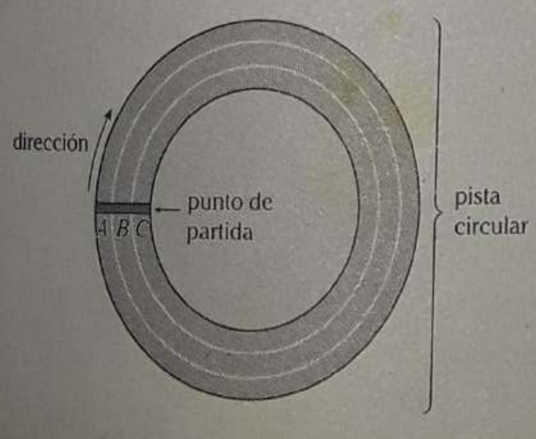
Por lo tanto, $\overline{ab}$ toma tres valores.

Problema N.º 2

En una pista circular, tres atletas corren en una misma dirección. El primero demora 10 s en dar una vuelta; el segundo, 11 s, y el tercero, 12 s. ¿Cuántos minutos tardarán en pasar juntos por el punto de partida por segunda vez?

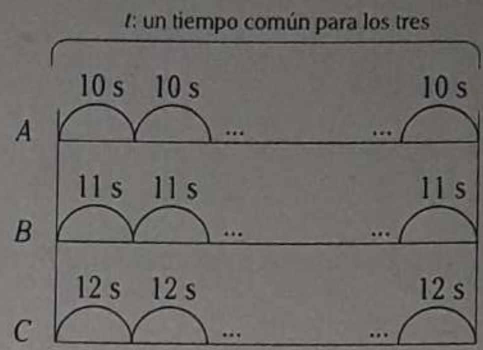
Resolución

Se sabe que



- $t_A = 10$ s
- $t_B = 11$ s
- $t_C = 12$ s

tiempo que emplean en dar una vuelta



t debe ser mínimo para saber en qué tiempo pasan juntos por primera vez.

Entonces se tiene que

$$t = \text{MCM}(10; 11; 12) = 1320 \text{ s}$$

Por lo tanto, para que vuelvan a pasar por segunda vez tardarán

$$2 \times 1320 = 2640 \text{ s} = 44 \text{ min.}$$

Problema N.º 3

Al calcular el MCD de dos enteros positivos por el método del algoritmo de Euclides, se obtuvo como cocientes a 2; 1; 3 y 2, además la diferencia de dichos números es 192. Calcule la suma de dichos números.

Resolución

En el cálculo del MCD de dos números (A y B) por el método del algoritmo, donde $A > B$, proponemos que MCD(A; B)=d. Entonces por dato y reconstruyendo el algoritmo tenemos

Cocientes	2	1	3	2
A=25d	B=9d	7d	2d	d
Residuos	7d	2d	d	0

Además $A-B=16d=192$

$$d=12$$

$\therefore \quad A+B=25d+9d=34d=34\times 12=408$

Problema N.º 4

Si $A=\underbrace{44\ldots4_9}_{18\text{ cifras}}$ y $B=\underbrace{44\ldots4_9}_{24\text{ cifras}}$,

determine la suma de cifras del MCD(A; B) en base 10.

Resolución

Se sabe que

$$A=\underbrace{44\ldots4_9}_{18\text{ cifras}} \rightarrow 2A=\underbrace{88\ldots8_9}_{18\text{ cifras}}$$

$$B=\underbrace{44\ldots4_9}_{24\text{ cifras}} \rightarrow 2B=\underbrace{88\ldots8_9}_{24\text{ cifras}}$$

Donde

$$2A=9^{18}-1$$
$$2B=9^{24}-1$$

Por propiedad

$$\text{MCD}(2A;\,2B)=9^{\text{MCD}(18;\,24)}$$

$$\text{MCD}(2A;\,2B)=9^6-1=888888_9$$

Por propiedad, si a todos los números se les divide entre 2, entonces al MCD también se le divide entre 2.

Entonces

$$\text{MCD}(A;\,B)=444444_9$$

$$\text{MCD}(A;\,B)=\frac{1}{2}(888888_9)$$

$$\text{MCD}(A;\,B)=\frac{1}{2}(9^6-1)=\frac{1}{2}(531\,440)$$

$$\rightarrow \text{MCD}(A;\,B)=\underbrace{265\,720}_{\substack{\text{suma de}\\ \text{cifras}=22}}$$

Por lo tanto, la suma de cifras en base 10 del MCD de A y B es 22.

Problema N.º 5

Si MCD(A; $2B$)=120 y
MCM($2A$; $4B$)=4800,
calcule la suma de cifras de $A\times B$.

Resolución

Tenemos que

- MCD(A; $2B$)=120
- MCM($2A$; $4B$)=4800

Dividiendo entre 2 tenemos

$$\text{MCM}(A;\,2B)=2400$$

Luego por propiedad

$$\text{MCD}(A;\,2B)\times\text{MCM}(A;\,2B)=A(2B)$$

$$\overset{60}{\cancel{120}}\times 2400=\overset{1}{\cancel{2}}A\times B$$

Resolviendo se tiene que

$$A\times B=144\,000$$

Por lo tanto, la suma de cifras de $A\times B$ es 9.

NIVEL BÁSICO

1. Si A es seis veces el valor de B y la suma de MCM y MCD de ambos números es 105, ¿cuál es la diferencia de A y B?

A) 65 B) 72 C) 75
D) 60 E) 40

2. ¿Cuántos números menores que 264 tienen con 144 un MCD igual a 24?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

3. ¿Cuántos múltiplos comunes de cuatro cifras tienen los números 42; 35 y 63?

A) 16 B) 15 C) 14
D) 13 E) 12

4. Si $\text{MCD}\left(\overline{a9a}; \overline{abc}; \overline{(a+1)b}\right)=13$, calcule $a+b+c$.

A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 18

5. Al calcular el MCD de dos números mediante el algoritmo de Euclides, los cocientes sucesivos fueron 3; 4; 2 y 3. Si la suma de los dos primeros residuos es 120, halle la media aritmética de los números.

A) 786 B) 480 C) 560
D) 360 E) 840

6. Un comerciante tiene tres cajas de galletas sueltas en 1224; 1368 y 1080 unidades. Desea venderlas en paquetes pequeños de igual cantidad de galletas que estén contenidos exactamente en cada una de las cajas. ¿Cuál es el menor número de paquetes que se obtiene sin desperdiciar galletas?

A) 19 B) 31 C) 42
D) 51 E) 60

7. ¿Cuántas cifras tiene el MCD de los números $20^{70}; 30^{80}; 40^{90}; 50^{100}$?

A) 70 B) 71 C) 83
D) 74 E) 90

8. Si

$\text{MCM}(2A; 10B)=\text{MCD}(30A; 150B)=600$,

calcule $A\times B$.

A) 1200 B) 1500 C) 1350
D) 1560 E) 1150

9. Al calcular el MCD de dos números mediante el algoritmo de Euclides, se obtuvieron como cocientes 2; 3; 4 y 2, y como máximo común divisor 15; además la segunda división se realizó por exceso. Calcule el número de divisores de la suma de dichos números.

A) 24 B) 28 C) 30
D) 36 E) 45

10. Al calcular el MCD de dos números por el algoritmo de Euclides, se obtuvo como dos primeros residuos 132 y 60. Si la suma de los cocientes obtenidos es 9, halle la diferencia de los números.

A) 120 B) 132 C) 135
D) 150 E) 160

11. Si MCD($77A$; $11B$)=88 y
MCM($35A$; $5B$)=2100,
calcule $A\times B$.

A) 480
B) 636
C) 426
D) 542
E) 1075

12. En un paradero, cada 18 min pasa un bus y cada 4 min, un auto. Si a las 8 h pasaron juntos un bus y un auto, ¿cuántos autos, únicamente, han pasado hasta las 11 h?

A) 45 B) 40 C) 48
D) 30 E) 36

13. Calcule el mayor de dos números sabiendo que su MCD es 12 y la diferencia de sus cuadrados 7344.

A) 315 B) 84 C) 300
D) 400 E) 120

NIVEL INTERMEDIO

14. Sean $A=60\times15^n$ y $B=15\times60^n$. Si tienen 44 divisores compuestos en común, determine la cantidad de divisores propios de B.

A) 78 B) 79 C) 80
D) 81 E) 82

15. Dos números naturales difieren en cuatro unidades. Si el producto de su mínimo común múltiplo con su máximo común divisor es 96, halle la suma de dichos números.

A) 22 B) 24 C) 36
D) 18 E) 20

UNMSM 2010-I

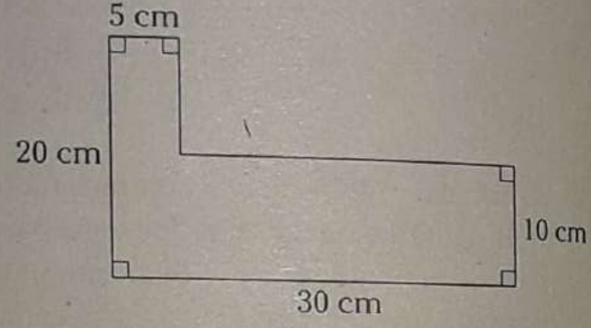
16. Se tiene un campo rectangular de 3150 m y 1848 m. Calcule el menor número de estacas que se deben colocar alrededor de su perímetro para que, estando entre sí, haya una en cada esquina.

A) 230 B) 130 C) 238
D) 328 E) 140

17. Se tienen tres recipientes conteniendo vino en cantidades de 168 L; 264 L y 192 L. Cada uno de los contenidos se distribuirán en bidones de la misma capacidad entera de litros; además, el número de bidones es mínimo. ¿Cuánto se necesita invertir en la compra de dichos bidones si la docena de dichos bidones es S/.132?

A) S/.286 B) S/.294 C) S/.300
D) S/.280 E) S/.292

18. ¿Cuántas losetas cuadradas, todas iguales, se necesitarán como mínimo para cubrir totalmente el piso de la figura mostrada?



A) 10 B) 16 C) 12
D) 14 E) 6

UNMSM 2007-I

19. La diferencia entre dos números es ocho veces su MCD y su producto es 330 veces su MCD. Halle la suma de los números.

A) 100 B) 120 C) 130
D) 135 E) 140

20. Se tienen
$A=60^n\times 45$
$B=15\times 20^n$
Sabiendo que dichos números poseen 40 divisores comunes, calcule el menor múltiplo común de $\overline{nn}$; $\overline{(2n)(2n)}$ y $\overline{(3n)(3n)}$.

A) 166 B) 136 C) 138
D) 128 E) 132

21. Si
$\text{MCM}(\overline{abba};\ \overline{4ba})=\text{MCM}(3\times\overline{4ba};\ 5\times\overline{abba})$,
calcule el máximo valor de $a\times b$.

A) 15 B) 20 C) 25
D) 30 E) 35

22. Al calcular el MCD de dos números mediante el algoritmo de Euclides, los cocientes sucesivos son 4; 3; 2 y 2, además, la primera y la tercera división se realizaron por exceso. Sabiendo que dichos números son los menores posibles y que su suma es $\overset{\circ}{91}$, calcule la diferencia de los números.

A) 77 B) 180 C) 210
D) 287 E) 451

23. Desde un mismo punto de una pista circular de N metros de longitud, tres ciclistas parten juntos con velocidades de 6 m/s; 8 m/s y 10 m/s, respectivamente. Cuando pasan juntos por séptima vez por el punto de partida, el más veloz ha recorrido 21 km más que el menos veloz. Calcule N.

A) 1500 B) 1000 C) 1200
D) 1450 E) 1400

24. Al calcular el MCD de $\overline{abc}$ y $\overline{mnp}$ mediante las divisiones sucesivas, se obtuvieron los cocientes sucesivos 2; 3; 4 y 6, además, la suma de los números es $\overline{5de}$. Halle la diferencia de los números.

A) 200 B) 216 C) 236
D) 240 E) 212

25. Determine el valor de n sabiendo que el MCM de los números $N_1=72^n\times 30$ y $N_2=4\times 90^n$ tienen 144 divisores.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

26. Se quiere almacenar chocolates en barras, en 3 compartimientos diferentes conteniendo 2115; 10575 y 36495 g de chocolate, respectivamente. ¿Cuál debe ser el mayor peso de la barra para realizar el almacenamiento con barras del mismo peso?

A) 49
B) 47
C) 45
D) 35
E) 55

UNMSM 2006-II

27. Determine la diferencia de dos números sabiendo que uno de ellos posee 14 divisores y los otros, 15 divisores; además el MCD de ellos es 12.

A) 120 B) 125 C) 130
D) 132 E) 140

28. Al calcular el MCD de los números $\overline{b(b+3)a}$ y $\overline{(3a)(8+b)}$ por el algoritmo de Euclides, se obtienen los cocientes sucesivos 1; 2 y 4. Calcule el $\text{MCM}_{(\overline{aaa};\ \overline{bbb})}$.

A) 111 B) 222 C) 333
D) 444 E) 666

29. ¿Cuántos números de tres cifras existen tal que con su CA tenga como MCD a 200?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

30. Se tienen pequeños ladrillos de dimensiones 10; 15 y 5. ¿Cuál es el menor número de ladrillos que hará falta para poder formar un cubo compacto?

A) 18 B) 24 C) 36
D) 60 E) 120

31. En una pista circular de 600 m se encuentran tres ciclistas sobre el punto *A*. Si parten simultáneamente con velocidades de 50; 60 y 75 m/min cada uno, calcule luego de qué tiempo volverán sobre el mismo punto *A* por segunda vez.

A) 2 h
B) 3 h
C) 4 h
D) 5 h
E) 6 h

32. Un empleado trabaja cinco días seguidos y descansa el sexto día. Si empieza a trabajar el lunes, ¿cuántos días, como mínimo, tiene que trabajar para que llegue a descansar el domingo?

A) 40 B) 36 C) 54
D) 48 E) 41

33. Un comerciante de vino tiene tres barriles de vino de 540; 960 y 1260 litros cada uno. Si desea vender este vino en recipientes todos iguales, cuyas capacidades están comprendidas entre 25 y 48 litros, además están contenidos exactamente en los tres barriles, calcule la cantidad de recipientes que se utilizarán.

A) 92 B) 140 C) 100
D) 84 E) 98

34. En la platea de un cine, por concepto de entradas se ha recaudado en tres días S/.3690; S/.2160 y S/.1350, respectivamente. Determine cuántas personas, como máximo, han asistido en los tres días sabiendo que el precio de la entrada es el mismo y está comprendido entre S/.10 y S/.20.

A) 480 B) 420 C) 560
D) 540 E) 400

35. Se tienen tres reglas de 864 mm de longitud cada una; la primera está dividida en $\frac{24}{29}$ mm; la segunda, en $\frac{16}{25}$ mm, y la tercera, en $\frac{18}{23}$ mm. Si se superponen de modo que coincidan en su extensión, ¿cuántas veces coincidirán las marcas de sus divisiones entre las tres?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

Fracciones y números decimales

Capítulo XIII

Objetivos

- Conocer y manejar el concepto de las fracciones.
- Reconocer las clases de fracciones y sus propiedades.
- Comprender cómo las fracciones generan los números decimales exactos e inexactos periódicos puros y mixtos.

Los conocimientos matemáticos iniciales en el campo numérico hallaron su forma de expresarse mediante el uso de los números naturales que facilitaban el conteo de cantidades y la medida de magnitudes, con los que se podía operar para resolver situaciones de la vida diaria (agregar, reunir, quitar, calcular lo que falta, sumar iteradamente, obtener el valor de varias veces algo, repartir, averiguar cuántas veces una cantidad contiene o está contenida en otra...), cuyos modelos son, precisamente, las cuatro operaciones aritméticas.

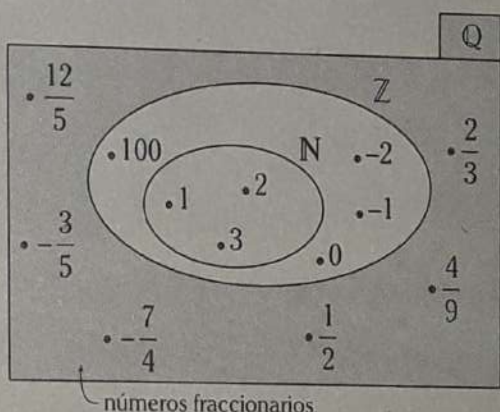
Pero entre estas mismas situaciones cotidianas existen, y existieron siempre, otras, tales como los repartos de herencias, bienes y tierras, o el pago de tributos, diezmos e impuestos, y otras más en las que, además de las cantidades enteras implicadas, aparecía un nuevo elemento a considerar: la relación entre la parte (la porción de tierra recibida, el monto del tributo o impuesto pagado...) y el todo (la superficie total de la tierra a repartir, el total de los bienes poseídos...). Como la parte y el todo venían denotados por números naturales, se requería una nueva expresión (un nuevo tipo de número) para indicar esa relación entre dos números naturales.

Este es el significado cultural primigenio de la fracción: la expresión numérica de la relación entre una parte y el todo.

Números fraccionarios

Son aquellos números racionales que no son enteros.

Gráficamente



Fracción

Son aquellos números fraccionarios, cuyos términos son positivos.

Ejemplos

$$\underbrace{\frac{2}{3};\ \frac{15}{4};\ \frac{11}{23};\ \frac{1}{2}}_{\text{Son fracciones.}} \qquad \underbrace{\frac{-1}{4};\ \frac{5}{-9};\ \frac{24}{3};\ \frac{0}{5}}_{\text{No son fracciones.}}$$

En general

> Sea F una fracción.
>
> $F=\dfrac{N}{D}$ ← numerador / ← denominador

Donde

$N\in\mathbb{Z}^+;\ D\in\mathbb{Z}^+;\ N\neq\overset{\circ}{D}$

Clasificación

Por su valor respecto de la unidad

Propia	Impropia
$\dfrac{N}{D}<1\leftrightarrow N<D$	$\dfrac{N}{D}>1\leftrightarrow N>D$
Ejemplos $\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{11};\dfrac{13}{40};\dfrac{8}{29}$	*Ejemplos* $\dfrac{5}{2};\dfrac{8}{3};\dfrac{19}{5};\dfrac{20}{7}$

Observación

Toda fracción impropia se puede expresar como una fracción mixta.

Ejemplos

- $\dfrac{7}{2}=3+\dfrac{1}{2}=3\dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{41}{5}=8+\dfrac{1}{5}=8\dfrac{1}{5}$

Por su denominador

Decimal	Ordinario
Cuando el denominador es una potencia de 10. Es decir $D=10^k\ (k\in\mathbb{Z}^+)$	Cuando el denominador es potencia de 10. Es decir $D\neq10^k\ (k\in\mathbb{Z}^+)$
Ejemplos $\dfrac{3}{10};\dfrac{11}{10^2};\dfrac{29}{10^3}$	*Ejemplos* $\dfrac{7}{15};\dfrac{31}{20};\dfrac{4}{17}$

Por los divisores comunes

Irreductible	Reductible
$\dfrac{N}{D}$ > Son PESI.	$\dfrac{N}{D}$ > No son PESI.
Es decir, $\text{MCD}(N;D)=1$	Es decir, $\text{MCD}(N;D)\neq1$
Ejemplos $\dfrac{11}{8};\dfrac{15}{17};\dfrac{20}{37};\dfrac{3}{4}$	*Ejemplos* $\dfrac{16}{20};\dfrac{27}{45};\dfrac{90}{28}$

Observación

A partir de una fracción irreductible, se pueden obtener fracciones equivalentes a ella.

Ejemplos

- $\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{8}{12}=...=\dfrac{2k}{3k}\quad(k\in\mathbb{Z}^+)$
- $\dfrac{3}{7}=\dfrac{6}{14}=\dfrac{9}{21}=\dfrac{12}{28}=...=\dfrac{3n}{7n}\quad(n\in\mathbb{Z}^+)$

Por el grupo de fracciones

Homogénea	Heterogénea
Todas las fracciones tienen el mismo denominador.	Al menos uno de los denominadores es diferente a los demás.
Ejemplos $\dfrac{1}{8};\dfrac{5}{8};\dfrac{11}{8}$	*Ejemplos* $\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{4};\dfrac{13}{7}$

Propiedades

1. Sean $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ fracciones irreductibles.

   Si $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=k$ ← número entero $\quad(k\in\mathbb{Z}^+)$

   entonces $\boxed{b=d}$

2. Sean $\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}$ fracciones irreductibles. Se cumple que

- $\text{MCD}\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}\right)=\frac{\text{MCD}(a;c;e)}{\text{MCM}(b;d;f)}$

- $\text{MCM}\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}\right)=\frac{\text{MCM}(a;c;e)}{\text{MCD}(b;d;f)}$

3. Si $f_1=\frac{a}{b}<1 \wedge f_2=\frac{a+n}{b+n} \rightarrow f_1<f_2 \quad (n\in\mathbb{Z}^+)$

4. Si $f_1=\frac{a}{b}>1 \wedge f_2=\frac{a+n}{b+n} \rightarrow f_1>f_2 \quad (n\in\mathbb{Z}^+)$

Números decimales

Son números que resultan de dividir los términos de una fracción en el sistema decimal.

Ejemplo

$$\frac{17}{4}=\underbrace{4}_{\text{parte entera}}\,,\,\underbrace{25}_{\text{parte decimal}}$$

coma decimal

Clasificación

Número decimal exacto

Una fracción irreductible genera un número decimal exacto cuando el denominador tenga como únicos divisores primos al 2 y/o 5.

Ejemplos

- $\frac{3}{4}=\frac{3}{2^2}=0{,}75$

- $\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}=0{,}625$

- $\frac{11}{25}=\frac{11}{5^2}=0{,}44$

- $\frac{9}{40}=\frac{9}{2^3\times 5}=0{,}225$

Nota

El número de cifras en la parte decimal es igual al mayor exponente del factor primo 2 o 5 que contiene el denominador de la fracción irreductible.

Ejemplo

$$\frac{11}{2^4\times 5^{9}}=0,\underbrace{\overline{abc\ldots n}}_{9\text{ cifras}}$$

Se observa que el mayor exponente de 2 y 5 es 9; por lo tanto, genera nueve cifras en la parte decimal.

Fracción generatriz

Ejemplos

- $0{,}13=\frac{13}{100}$

- $0{,}248=\frac{248}{1000}$

- $0{,}2163=\frac{2163}{10\,000}$

En general

$$0,\underbrace{\overline{abc\ldots x}}_{k\text{ cifras}}=\frac{\overline{abc\ldots x}}{\underbrace{1000\ldots 00}_{k\text{ ceros}}}$$

Número decimal inexacto

a. **Periódico puro**

Una fracción irreductible genera un número decimal inexacto periódico puro cuando su denominador no tiene como divisores primos al 2 ni al 5.

Ejemplos

- $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots=0{,}\widehat{6}$

- $\frac{5}{11}=0{,}\widehat{45}$

- $\dfrac{2}{37}=0,\widehat{054}$

- $\dfrac{5}{27}=0,\widehat{185}$

- $\dfrac{3}{7}=0,\widehat{428571}$

NOTA

El número de cifras en la parte decimal periódica es igual a la cantidad de cifras del menor numeral formado por cifras nueve.

$$9=3^2$$
$$99=3^2\times 11$$
$$999=3^3\times 37$$
$$9999=3^2\times 11\times 101$$
$$99999=3^2\times 41\times 271$$
$$999999=3^3\times 7\times 11\times 13\times 37$$

Ejemplo

$\dfrac{5}{37}=0,\widehat{135}$ (tres cifras en el periodo)

Observamos que el denominador 37 está contenido en 999, que posee tres cifras.

Fracción generatriz

Ejemplos

- $0,\widehat{29}=\dfrac{29}{99}$

- $0,\widehat{428}=\dfrac{428}{999}$

- $0,\widehat{6031}=\dfrac{6031}{9999}$

En general

$$0,\underbrace{\widehat{abc\ldots x}}_{k\text{ cifras}}=\frac{\overline{abc\ldots x}}{\underbrace{999\ldots 99}_{k\text{ cifras}}}$$

b. Periódico mixto

Una fracción irreductible genera un número decimal inexacto periódico mixto cuando el denominador tiene como divisores primos al 2 y/o 5, además de otros factores primos.

Ejemplos

- $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2\times 3}=0,1666\ldots=0,1\widehat{6}$

- $\dfrac{3}{44}=\dfrac{3}{2^2\times 11}=0,068181\ldots=0,06\widehat{81}$

- $\dfrac{1}{275}=\dfrac{1}{5^2\times 11}=0,00\widehat{36}$

NOTA

Para determinar el número de cifras de la parte no periódica se considera el criterio del decimal exacto, y de la parte periódica se considera el criterio del decimal periódico puro.

Fracción generatriz

Ejemplos

- $0,21\widehat{4}=\dfrac{214-2}{990}$

- $0,83\widehat{46}=\dfrac{8346-83}{9900}$

- $0,21\widehat{567}=\dfrac{21567-21}{99\,900}$

En conclusión

$$0,\overline{abc}\widehat{de}=\frac{\overline{abcde}-\overline{abc}}{99\,000}$$

Problema N.° 1

¿Cuántas fracciones existen mayores que 7/20, cuyos numeradores son 15, además dichas fracciones son propias e irreductibles?

Resolución

Sean $\frac{15}{D}$ las fracciones, tal que

- $\underbrace{D \text{ es PESI con } 15}_{\text{Porque la fracción es irreductible.}} \rightarrow D \neq \overset{\circ}{3} \vee \overset{\circ}{5}$

- $\frac{15}{D} < 1$, porque la fracción es propia, entonces $15 < D$.

- Además $\underbrace{\frac{7}{20} < \frac{15}{D}} < 1$

$$7D < 15 \times 20$$
$$7D < 300$$
$$D < 42,\widehat{85714}$$

Se sabe que los valores que se tomarán para D son enteros positivos y PESI con 15.

$$15 < D < 42,8...$$

$$D: \underbrace{16; 17; 19; 22; 23; 26; 28; 29; 31; 32; 34; 37; 38; 41}_{\text{14 valores para } D}$$

Por lo tanto, hay 14 fracciones.

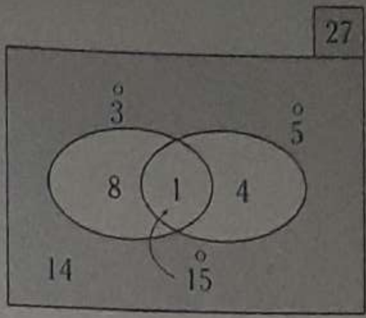
Otra forma

Se sabe que

$$\overbrace{15 < D < 42,8...}$$

$$\underbrace{16\ ;\ 17\ ;\ 18\ ;\ 19\ ;\ ...\ ;\ 41\ ;\ 42}$$

De estos 27 valores ($42 - 15 = 27$) se eliminan los números que son $\overset{\circ}{3}$ y $\overset{\circ}{5}$, porque deben ser PESI con 15.



> **Observación**
> En la parte sombreada se encuentran los valores que toma D.

Por lo tanto, hay 14 fracciones.

Problema N.° 2

El señor Eduardo da del total de dinero obtenido en la venta de su chacra, en el pueblo de Chalhuas, a su hijo mayor 1/3 más S/.300; de lo que le queda, 2/5 más S/.160 le dio al segundo, y de lo que le queda, 2/7 más S/.80 le dio al último. Si todavía le sobró S/.20, ¿cuál fue el precio de venta de la chacra?

Resolución

Sea x el precio de venta de la chacra del señor Eduardo.

	Lo que corresponde a cada hijo	Lo que queda
Hijo mayor	$\frac{1}{3}x + 300$	$\frac{2}{3}x - 300$
Segundo hijo	$\frac{2}{5}\left[\frac{2}{3}x - 300\right] + 160$	$\frac{3}{5}\left[\frac{2}{3}x - 300\right] - 160$
Último hijo	$\frac{2}{7}\left\{\frac{3}{5}\left[\frac{2}{3}x - 300\right] - 160\right\} + 80$	$\frac{5}{7}\left\{\frac{3}{5}\left[\frac{2}{3}x - 300\right] - 160\right\} - 80$

Por dato se sabe que al final le queda S/.20, entonces planteamos que

$$\frac{5}{7}\left\{\frac{3}{5}\left[\frac{2}{3}x-300\right]-160\right\}-80=20$$

$$\frac{5}{7}\left\{\frac{3}{5}\left[\frac{2}{3}x-300\right]-160\right\}=100$$

$$\frac{3}{5}\left[\frac{2}{3}x-300\right]-160=140$$

$$\frac{3}{5}\left[\frac{2}{3}x-300\right]=300$$

$$\frac{2}{3}x-300=500$$

$$\frac{2}{3}x=800 \rightarrow x=1200$$

Por lo tanto, el precio de la venta de la chacra fue de S/.1200.

Problema N.º 3

Si $\frac{81}{97}=0,\widehat{ab...cd}$, halle $a+b+c+d$.

Resolución

Primero calculamos los valores de a y b. Dividiendo 81 entre 97, se tiene

$$\begin{array}{rl} 810 & \underline{|97} \\ \underline{776} & 0,83... \\ 340 & \ \downarrow\downarrow \\ \underline{291} & \ a\ b \\ 49 & \end{array}$$

$\rightarrow\quad a=8 \wedge b=3$

Ahora calculamos los valores de c y d. Utilizando la fracción generatriz y trabajando con las últimas cifras de las operaciones indicadas, tenemos

$$\frac{81}{97}=\frac{\overline{ab...cd}}{99...99}$$

$$\underbrace{81\times(99...999)}=97\times(\overline{...cd})$$
$$...99919=97\times(\overline{...cd})$$

Construyendo la multiplicación, se tiene

$$\begin{array}{r} \overline{...cd}\ \times \\ 97 \\ \hline 89 \\ 3 \\ \hline ...99919 \end{array}$$

- $\underset{\substack{\downarrow \\ 7}}{d}\times 7=...9 \rightarrow 7\times 7=49$

- $9\times \underset{\substack{\downarrow \\ 7}}{d}=63 \rightarrow d=7$

- $7\times \underset{\substack{\downarrow \\ 7}}{c}+4=...8 \rightarrow c=2$

$\therefore\quad a+b+c+d=8+3+2+7=20$

Problema N.º 4

Si se cumple que

$$\frac{5}{b}=0,\overline{(b+2)3} \quad \text{y} \quad \frac{b}{\overline{aa}}=0,\bar{c}\widehat{de},$$

halle $a+b+c+d+e$.

Resolución

Hallamos la fracción generatriz en cada caso de los números decimales inexactos periódicos mixtos.

- $\frac{5}{b}=0,\overline{(b+2)3}$

$$\frac{5}{b}=\frac{\overline{(b+2)3}-(b+2)}{90}=\frac{83-8}{90}=\frac{5}{6}$$

Como b es una cifra y debe generar una cifra en la parte no periódica y una cifra periódica en el decimal, se tiene

$b=2\times 3$ (sí) $\quad b=2\times 9$ (no)

$b=5\times 3$ (no) $\quad b=5\times 9$ (no)

El valor de $b=6$, porque debe tener una cifra donde el factor 2 garantiza una cifra en la parte no periódica y el 3 garantiza una cifra en la parte periódica.

Reemplazando el valor de b en la segunda expresión, se tiene que

- $\frac{6}{\underbrace{\overline{aa}}}=0,\overline{c}\widehat{de}=\frac{\overline{cde}-c}{990}$

$\overline{aa}=11\times 4=44$ (se va a simplificar)

$\overline{aa}=\underbrace{11}\times 5=110$ (no cumple)

Se sabe que el factor 11 garantiza las dos cifras del periodo.

Entonces se tiene

$$\frac{6}{44}=\frac{3}{22}=0,1\widehat{36}=0,\overline{c}\widehat{de}$$

$$\begin{array}{l|l} 30 & 22 \\ \hline \;\;80 & 0,136... \\ \;\;140 & \\ \;\;\;\;8 & \end{array}$$

Luego

$a=4;\ c=1;\ d=3\ \text{ y }\ e=6$

$\therefore\ a+b+c+d+e=4+6+1+3+6=20$

Problema N.º 5

Sabiendo que $\frac{\overline{a2}}{\overline{ab}}=0,\widehat{mnp}$, calcule la suma de valores de $m+n+p$.

Resolución

Tenemos

$$\frac{\overline{a2}}{\overline{ab}}=0,\widehat{mnp}$$

Expresamos el número decimal periódico puro a su fracción generatriz.

$$\frac{\overline{a2}}{\overline{ab}}=\frac{\overline{mnp}}{999}$$

Se sabe que $999=27\times 37$

- Si $\overline{ab}=27\ \rightarrow\ \frac{22}{27}=\frac{\overline{mnp}}{999}$

  $\overline{mnp}=814$

  Luego

  $m+n+p=13$

- Si $\overline{ab}=37\ \rightarrow\ \frac{32}{37}=\frac{\overline{mnp}}{999}$

  $\overline{mnp}=864$

  Luego

  $m+n+p=18$

Por lo tanto, la suma de valores de $(m+n+p)$ es 31.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles cuya diferencia de términos es 6 son mayores que 2/13 pero menores que 6/7?

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 17

2. La suma de dos fracciones irreductibles es 3. Si la suma de sus numeradores es 18, ¿cuántas parejas de fracciones cumplen dicha condición?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

3. Halle la fracción equivalente 4/7 sabiendo que el producto de sus términos es el menor número que tiene 18 divisores.

A) 12/21 B) 12/35 C) 13/21
D) 17/35 E) 17/21

4. Halle la fracción de menores términos que sea equivalente a 432/720, tal que la suma de sus términos sea múltiplo de 5 y la diferencia de los mismos sea divisible entre 8, y luego dé como respuesta el numerador.

A) 90 B) 120 C) 60
D) 45 E) 72

5. ¿Cuántos valores puede tomar x si $\frac{24}{x}$ es mayor que 8/11, además es propia e irreductible?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

6. De un balde con leche, que está lleno 1/3 de lo que no está lleno, se extrae una capacidad igual a 1/8 de lo que no está lleno. ¿Qué parte de la leche se ha sacado?

A) 3/4 B) 3/8 C) 7/11
D) 5/7 E) 5/8

7. Al examen de un curso de matemática, solo asistieron 3/4 del número total de alumnos matriculados. De los que asistieron, aprobaron los 3/5 y desaprobaron 30. ¿Cuántos alumnos matriculados hay en dicho curso?

A) 100 B) 75 C) 180
D) 80 E) 120

UNMSM 2010-I

8. De un recipiente completamente lleno de alcohol, se extrae la tercera parte y se reemplaza por agua. Si luego se extrae la quinta parte del volumen y nuevamente se reemplaza por agua, ¿qué fracción del volumen del recipiente será agua al final?

A) 8/15 B) 2/5 C) 3/5
D) 11/15 E) 7/15

9. El caño A puede llenar la mitad de un estanque en 4 h, y el caño B puede llenar la tercera parte, también, en 4 h. ¿En cuánto tiempo llenará el estanque si ambos caños se dejan abiertos simultáneamente?

A) 4 h 48 min
B) 3 h 38 min
C) 4 h
D) 5 h
E) 2h 28 min

10. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles mayores a 1/12 y con denominador 144 existen?

A) 22
B) 39
C) 28
D) 42
E) 44

11. Si $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=5,1\widehat{6}$,
determine la suma de los posibles valores que toma $(a+b)$. Considere que a y $b \in \mathbb{Z}^{+}$.

A) 81
B) 50
C) 65
D) 70
E) 54

12. Si $\frac{\overline{ab}}{3}+\frac{\overline{ba}}{5}=48,1\widehat{3}$, calcule $a+b$.

A) 15
B) 12
C) 14
D) 17
E) 16

NIVEL INTERMEDIO

13. Un padre da del total de su fortuna a su hijo mayor 1/3 más S/.300; de lo que le queda 2/5 más S/.160 le dio al segundo, y de lo que le queda, 2/7 más S/.80 le dio al último. Si todavía le queda S/.20, ¿cuál era la fortuna del padre?

A) S/.3000
B) S/.2400
C) S/.1200
D) S/.7000
E) S/.7200

14. Dada la fracción $\frac{\overline{ab}}{3}+\frac{\overline{ba}}{5}=48,1\widehat{3}$, ¿cuántas cifras en la parte periódica y no periódica origina $f=\frac{a-b}{\overline{bb0}}$?

A) 6 y 3
B) 1 y 7
C) 6 y 1
D) 7 y 3
E) 7 y 2

15. Un tanque puede llenarse por dos bombas A y B en 20 minutos; por las bombas A y C en 30 minutos y por las bombas B y C en 40 minutos. ¿En cuántos minutos podrá llenar el tanque la bomba B?

A) 24
B) 48
C) 35
D) 36
E) 42

UNMSM 2008-II

16. Si $0,a\widehat{b}+0,\overline{ba}=0,77\widehat{5}$,
calcule $a+b$.

A) 7
B) 12
C) 6
D) 8
E) 4

17. ¿Cuál es el valor de $m+n$ si
$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+...+\frac{1}{m\times n}=\frac{18}{37}$?

A) 56
B) 62
C) 68
D) 70
E) 72

18. Una librería tiene para la venta un cierto número de libros. Primero vende las 3/5 partes y después le hacen un pedido de los 7/8 de lo que queda, pero, antes de servir este pedido, se le malogran 240 libros. En consecuencia, enviando todos los libros que le quedan, solo cubre los 4/5 de la cantidad pedida. ¿Cuántos de libros se vendieron?

A) 2000
B) 1760
C) 1740
D) 1320
E) 2200

19. Halle las tres últimas cifras del periodo que origina la siguiente fracción 27/49, y dé la suma de dichas cifras.

A) 17
B) 18
C) 19
D) 22
E) 24

20. Determine cuántas fracciones propias e irreductibles de numerador 110 existen, tales que sean mayores que $\frac{23}{37}$.

A) 15 B) 14 C) 13
D) 12 E) 10

21. Determine una fracción equivalente a 415 sabiendo que el producto de sus dos términos es el menor número que tiene 18 divisores, y luego dé como respuesta la suma de sus términos.

A) 20 B) 18 C) 24
D) 16 E) 21

22. Halle una fracción equivalente a $0,\widehat{4}$, tal que su numerador está comprendido entre 40 y 50, y el denominador entre 100 y 125, y luego dé como respuesta la suma de los dígitos de ambos números.

A) 18 B) 19 C) 10
D) 21 E) 22

23. Un padre reparte entre sus cuatro hijos S/.7200 de la siguiente manera: a Alberto le dio 1/3 de lo que le dio a Benito; a Carlos, 4/5 de lo que le dio a Alberto, y a Daniel, 6/5 de lo que le dio a Carlos. ¿Cuánto recibió Carlos?

A) S/.850 B) S/.900 C) S/.950
D) S/.1000 E) S/.1050

24. ¿Cuántas fracciones impropias e irreductibles de denominador 35 son menores que $11,\widehat{54}$?

A) 124 B) 254 C) 112
D) 132 E) 144

25. Si

$$\frac{0,a\overline{(a-1)(a-2)}}{2}+\frac{0,(a-1)\overline{a}}{2}=\frac{329}{1980}$$

Donde la barra indica la parte periódica del número. ¿Cuál es el valor de a?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

UNMSM 2005-I

26. La fracción propia $\frac{N}{M}$ genera una cifra no periódica y cinco cifras periódicas; además $N+M=85$. Calcule $M-N$.

A) 79 B) 45 C) 70
D) 59 E) 65

27. La fracción irreductible $\frac{\overline{(a-1)(c+2)}}{\overline{abc}}$ genera un decimal periódico mixto con cuatro cifras en el periodo y una cifra en la parte no periódica. Calcule la suma de cifras del denominador más la suma de cifras del numerador.

A) 15 B) 17 C) 18
D) 20 E) 21

28. Una persona sale de compras y gasta los 3/7 de su dinero más S/.20 en el supermercado; después 1/2 de lo que le queda menos S/.10 en una tienda de regalos y, finalmente, 1/2 de lo restante en una librería. Si le quedan S/.12, ¿cuánto dinero tenía al salir de casa?

A) S/.96
B) S/.102
C) S/.88
D) S/.84
E) S/.120

29. Se cumple que

$$\frac{27}{4000^2}=0,\underbrace{\overline{ab...yx}}_{n\text{ cifras}}$$

Calcule $a+b+x+y+n$.

A) 22 B) 15 C) 18
D) 28 E) 24

30. Si $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible, además

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2,6\widehat{mn}$, calcule $a+b+m+n$.

A) 18 B) 20 C) 26
D) 25 E) 23

31. De los tres caños que fluyen a un estanque, uno puede llenarlo en 36 h, otro en 30 h y el tercero en 20 h. Halle el tiempo que los tres caños juntos tardarán en llenar un tercio del estanque.

A) 9 h B) 3 h C) 6 h
D) 5 h E) 12 h

32. Se cumple que

$$\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}=\overline{a(c-5)},\widehat{dc}$$

Determine la suma de cifras periódicas del número decimal que se obtiene al dividir $\overline{ab}$ entre $\overline{cd}$.

A) 18 B) 10 C) 12
D) 15 E) 20

33. Si la fracción irreducible $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}}$ genera el número decimal $m,m\widehat{(a+1)6}$, determine el valor de $a+b+c+m$.

A) 21 B) 16 C) 10
D) 15 E) 20

34. Si la fracción irreducible $\frac{\overline{a3}}{\overline{bb}}$ genera un número decimal de la forma $0,\overline{5c}\widehat{c7}$, calcule el valor de $a+b+c$.

A) 7 B) 6 C) 8
D) 11 E) 9

35. Sean

$$A=\frac{1}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{7}{10^5}+...$$

$$B=\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{5}{10^4}+...$$

Calcule $A+B$.

A) 0,43 B) $0,3\widehat{9}$ C) $0,4\widehat{3}$
D) $0,3\widehat{42}$ E) $0,3\widehat{92}$

Potenciación y radicación

Capítulo XIV

OBJETIVOS

- Aplicar el teorema fundamental de la potenciación para que un número entero positivo sea una potencia perfecta de grado *n*.
- Conocer los criterios de inclusión y exclusión de los cuadrados y cubos perfectos.
- Aplicar las propiedades de radiación en la resolución de problemas.

Nuestras actividades diarias, comerciales, laborales y educativas están relacionadas a las cantidades, por ende a los números, a sus operaciones y métodos para realizar ciertos cálculos.

En el presente capítulo se considera también determinar el valor de un número elevado a un exponente dado, el cual en la actualidad lo pueden realizar las calculadoras, así como calcular la raíz cuadrada o raíz cúbica de un número. Además, vamos a conocer aspectos básicos de ciertos cálculos y formas prácticas para resolver problemas.

Potenciación

Es la representación simplificada de una multiplicación, donde todos los factores son iguales.

Sea

$$P=\underbrace{k\times k\times k\times \ldots \times k}_{n\text{ factores}}=k^n$$

$$\boxed{P=k^n}$$

donde

- P: potencia perfecta de grado n
- k: base
- n: exponente $(n\in\mathbb{Z}^+)$

Ejemplos

- $5\times 5\times 5=5^3$ (potencia perfecta de grado 3)
- $3\times 3\times 3\times 3=3^4$ (potencia perfecta de grado 4)

TEOREMA FUNDAMENTAL

Para que un número sea una potencia perfecta de grado n, es condición necesaria y suficiente que todos los exponentes de los factores primos en su descomposición canónica sean múltiplos de n.

Si

$$k=\underbrace{a^{\alpha}\times b^{\beta}\times c^{\theta}}_{\text{DC}}$$

entonces

$$\boxed{k^n=\underbrace{a^{n\alpha}\times b^{n\beta}\times c^{n\theta}}_{\text{DC}}}$$

donde

- k^n: potencia perfecta de grado n

Ejemplos

- $A=\underbrace{2^{10}\times 3^{15}\times 5^{30}}_{DC}$

  Es una potencia perfecta de grado 5, porque los exponentes de su DC son múltiplos de 5.

- $B=\underbrace{3^{12}\times 7^{18}\times 11^{24}}_{DC}$

  Es una potencia perfecta de grado 6, porque los exponentes de su DC son múltiplos de 6.

Cuadrado perfecto

Un número es un cuadrado perfecto si en su descomposición canónica los factores primos están elevados a exponentes múltiplos de 2.

$$k^2=\underbrace{a^{2\alpha}\times b^{2\beta}\times c^{2\theta}}_{DC}$$

Ejemplos

- $k^2=2^{4}\times 3^{6}\times 5^{10}$; $\overset{\circ}{2}$
- $k^2=3^{10}\times 7^{22}\times 11^{62}$; $\overset{\circ}{2}$

Cubo perfecto

Un número es un cubo perfecto si en su descomposición canónica los factores primos están elevados a exponentes múltiplos de 3.

$$k^3=\underbrace{a^{3\alpha}\times b^{3\beta}\times c^{3\theta}}_{DC}$$

Ejemplos

- $k^3=\underbrace{2^{6}\times 3^{15}\times 5^{21}}_{DC}$; $\overset{\circ}{3}$
- $k^3=3^{18}\times 5^{30}\times 11^{33}$; $\overset{\circ}{3}$

Criterios de inclusión y exclusión de cuadrados y cubos perfectos

Por su última cifra

k	k^2	k^3
...0	...0	...0
...1	...1	...1
...2	...4	...8
...3	...9	...7
...4	...6	...4
...5	...5	...5
...6	...6	...6
...7	...9	...3
...8	...4	...2
...9	...1	...9

En conclusión

- $\overline{abcde}=k^2 \rightarrow e$ diferente de 2; 3; 7 y 8.
- $\overline{abcde}=k^3 \rightarrow e\in\{0; 1; 2; ...; 9\}$

Por su terminación en cifras cero

Ejemplos

- $20^2=400$
- $300^2=90\,000$
- $12\,000^2=144\,000\,000$
- $30^3=27\,000$
- $400^3=64\,000\,000$
- $120^3=144\,000$

En conclusión

- $\overline{\underbrace{abc...x}_{m^2}\underbrace{000...0}_{n\text{ ceros}}}=k^2 \wedge n=\overset{\circ}{2}$
- $\overline{\underbrace{abc...x}_{m^3}\underbrace{000...0}_{n\text{ ceros}}}=k^3 \wedge n=\overset{\circ}{3}$

Por su terminación en cifra 5

Ejemplos

- $25 = \underbrace{6}_{2\times 3}25$
- $35^2 = \underbrace{12}_{3\times 4}25$
- $45^2 = \underbrace{20}_{4\times 5}25$
- $125^2 = \underbrace{156}_{12\times 13}\,25$
- $15^3 = 3375$
- $25^3 = 15\,625$
- $35^3 = 42\,875$
- $45^3 = 91\,125$

En conclusión

- $\overline{ab...5}^2 = \overline{\underbrace{xy...z}_{n(n+1)}25}$
- $\overline{ab...n5}^2 = \begin{cases} ...25; & n \text{ es par} \\ ...75; & n \text{ es impar} \end{cases}$

Por criterio de divisibilidad por 4

k	k^2	k^3
$\overset{\circ}{4}$	4	$\overset{\circ}{4}$
$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}+1$
$\overset{\circ}{4}+2$	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}$
$\overset{\circ}{4}+3$	$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}-1$

En conclusión

Si $N=k^2 \rightarrow N=\overset{\circ}{4}$ o $N=\overset{\circ}{4}+1$

Si $N=k^3 \rightarrow N=\overset{\circ}{4}$ o $N=\overset{\circ}{4}-1$

Radicación

Es una operación matemática inversa a la potenciación que consiste en que dos números, llamados índice y radicando, permiten calcular el tercer número, llamado raíz, el cual es elevado al índice para que reproduzca el radicando. Así tenemos

$$\boxed{k=\sqrt[n]{N} \leftrightarrow N=k^n}$$

donde

- N: radicando
- k: raíz
- n: índice

Ejemplos

- $\sqrt{100}=10 \leftrightarrow 100=10^2$
- $\sqrt{81}=9 \leftrightarrow 81=9^2$
- $\sqrt{324}=18 \leftrightarrow 324=18^2$

Raíz cuadrada

Exacta

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & k \\ \hline 0 & \end{array} \leftrightarrow \boxed{N=k^2}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{144} & 12 \\ \hline 0 & \end{array} \leftrightarrow 144=12^2$$

Inexacta

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} \sqrt{N} & k \\ \hline r_d & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \sqrt{N} & k+1 \\ \hline r_e & \end{array}$
$N=k^2+r_d$	$N=(k+1)^2-r_e$

Propiedades

1. $r_{mín.}=1$
2. $r_{máx.}=2k$
3. $r_d+r_e=2k+1$

Ejemplo

Por defecto	Por exceso
$\sqrt{230}\,\lfloor 15$, $r_d=5$	$\sqrt{230}\,\lfloor 16$, $r_e=26$
$230=15^2+5$	$230=16^2-26$

Raíz cúbica

Exacta

$\sqrt[3]{N}\,\lfloor k$, 0 $\leftrightarrow$ $\boxed{N=k^3}$

Ejemplo

$\sqrt[3]{125}\,\lfloor 5$, 0 $\leftrightarrow$ $125=5^3$

Inexacta

Por defecto	Por exceso
$\sqrt[3]{N}\,\lfloor k$, r_d	$\sqrt[3]{N}\,\lfloor k+1$, r_e
$N=k^3+r_d$	$N=(k+1)^3-1$

Propiedades

1. $r_{mín.}=1$
2. $r_{máx.}=3k(k+1)$
3. $r_d+r_e=3k(k+1)+1$

Ejemplo

Por defecto	Por exceso
$\sqrt[3]{829}\,\lfloor 9$, $r_d=100$	$\sqrt[3]{829}\,\lfloor 10$, $r_e=171$
$829=9^3+100$	$829=10^3-171$

¿Sabía que...?

El símbolo de la raíz cuadrada $(\sqrt{\ })$ fue introducido en 1525 por el matemático Christopher Rudolff para representarlo en su libro *Coss*, siendo el primer tratado de álgebra escrito en alemán vulgar. El signo no es más que una forma estilizada de la letra *r* minúscula para hacerla más elegante, alargándola con un trazo horizontal hasta adoptar el aspecto actual. Representa la palabra latina *radix*, que significa 'raíz'.

Problemas Resueltos

Problema N.° 1

¿Cuántos términos en la siguiente sucesión son cuadrados perfectos?

$24\times 1;\ 24\times 2;\ 24\times 3;\ ...;\ 24\times 3000$

Resolución

Dada la sucesión, hallamos el término general

$24\times 1;\ 24\times 2;\ 24\times 3;\ ...;\ 24\times 3000$

$$\boxed{t_n=24n}$$

Donde

$1\leq n\leq 3000$

Luego

$24n=k^2$

$\underbrace{2^3\times 3\times(2\times 3\times p^2)}=k^2$

Para que los términos sean cuadrados perfectos, los exponentes de su DC deben ser $\overset{o}{2}$.

Entonces

$n=2\times 3\times p^2$

$1\leq n\leq 3000$

$1\leq 2\times 3\times p^2\leq 3000$

$0,1\widehat{6}\leq p^2\leq 500$

$p:\underbrace{1;\ 2;\ 3;\ 4;...;\ 22}_{22\text{ valores}}$

Por lo tanto, hay 22 términos cuadrados perfectos.

Problema N.° 2

Si $\overline{abcde}=\overline{ad5}^2$, ¿cuántos cuadrados perfectos hay entre $\overline{ac}$ y $\overline{deb}$?

Resolución

Aplicamos la regla práctica cuando un numeral que termina en 5 se eleva al cuadrado.

$$\overline{ad5}^2=\overline{abc\underset{2}{d}\underset{5}{e}}$$

$$\overline{\underbrace{a2}5}^2=\overline{\underbrace{abc}25}\quad (\text{I})$$

De (I)

$$\overline{\underset{1}{a}\underset{2}{2}}\times\overline{\underset{1}{a}\underset{3}{3}}=\overline{\underset{1}{a}\underset{5}{b}\underset{6}{c}}\quad (\text{regla práctica})$$

$\rightarrow\ a=1\ \wedge\ b=5$

Ahora determinamos los números cuadrados perfectos (k^2) que cumplen la condición

$\overline{ac}<k^2<\overline{deb}$

$16<k^2<255$

Los valores de k: $\underbrace{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ ...;\ 15}_{11\text{ valores}}$

Por lo tanto, existen 11 números cuadrados entre 16 y 255.

Problema N.° 3

Al extraer la raíz cuadrada a un número, se observa que al residuo por exceso le falta 23 unidades para ser igual al residuo por defecto, y a este le falta 26 unidades para ser el máximo. Halle el número.

Resolución

Sea N el número. Planteamos lo siguiente:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{l\|l} \sqrt{N} & k \\ \hline r_d & \end{array}$	$\begin{array}{l\|l} \sqrt{N} & k+1 \\ \hline r_e & \end{array}$

Por dato tenemos

- $r_e + 23 = r_d$ (I)
- $r_d + 26 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{residuo máximo}}}{2k}$ (II)

Sumando (I) y (II) obtenemos

$$\underbrace{r_d + r_e}_{2k+1} + 23 + 26 = r_d + 2k \rightarrow r_d = 50$$

En (II) obtenemos $k=38$

$$\therefore \quad N = 38^2 + 50 = 1494$$

Problema N.º 4

Al extraer la raíz cuadrada de $\overline{64ab5}$ se obtuvo residuo máximo. Calcule $a+b$.

Resolución

Se tiene por condición del problema

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\overline{64ab5}} & k \\ \hline r_{\text{máx.}}: 2k & \end{array}$$

Luego

$$\overline{64ab5} = k^2 + 2k$$

$$\overline{64ab5} = (k+1)^2 - 1$$

$$\overline{64ab6} = (k+1)^2$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 65536 & 256 \ \times \\ 64516 & 254 \ \checkmark \end{array} \Bigg\} \text{ por terminación de cifra}$$

$$\rightarrow \quad a=5 \ \wedge \ b=1$$

$$\therefore \quad a+b=6$$

Problema N.º 5

¿Cuántos números de la forma $\overline{abcd00}$ son cubos perfectos?

Resolución

Se tiene $\overline{\underbrace{abc}_{P^3}d00} = k^3$ y se observa que $d=0$, puesto que la cantidad de ceros en cubo es múltiplo de 3.

Además $\overline{abc} = P^3$ y los valores que cumplen para P son P: 5; 6; 7; 8; 9

Por lo tanto, hay cinco números que cumplen dicha condición.

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Al calcular el menor número múltiplo de 5, tal que al sumarle sus 3/11 se convierta en un cuadrado perfecto, determine la suma de cifras.

A) 12
B) 13
C) 14
D) 15
E) 16

2. En la siguiente sucesión:
72×1; 72×2; 72×3; ...; 72×1779; 72×1800,
¿cuántos términos son cuadrados perfectos?

A) 28 B) 29 C) 30
D) 31 E) 32

3. Si $\overline{abba}_5$ es una potencia perfecta de grado 3, calcule $a+b$.

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

4. Sabiendo que el número $\overline{9bcad00}$ es un cubo perfecto divisible por 3 y 7, calcule $a+b+c$.

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 9

5. Si $\overline{2abc5}$ es un cuadrado perfecto, halle la suma de valores de $a+b+c$.

A) 18 B) 20 C) 16
D) 23 E) 25

6. Si $\overline{ab4c0}$ tiene una cantidad impar de divisores, calcule la suma de valores de $a+b+c$.

A) 15 B) 12 C) 24
D) 37 E) 32

7. Si $\overline{aabb}$ es un cuadrado perfecto, halle $a+b$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

8. Al extraer la raíz cuadrada de N se obtiene 14 de residuo; pero al sumarse 78, su raíz aumenta en dos unidades y el residuo sería máximo. Calcule N.

A) 270 B) 220 C) 183
D) 210 E) 239

9. Al extraer la raíz cuadrada de $\overline{64ab5}$ se obtuvo residuo máximo. Calcule $a+b$.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

10. ¿Cuántos números que terminan en cifra ocho comprendidos entre 403 y 5634 cumplen que al extraer su raíz cuadrada se obtiene residuo máximo?

A) 11 B) 12 C) 13
D) 10 E) 14

11. A un número se le resta 631 y resulta un cubo perfecto. Halle el menor número, y luego indique el producto de cifras.

A) 63 B) 66 C) 33
D) 36 E) 38

12. Al extraer la raíz cuadrada de N se obtuvo 55 como raíz; además, el residuo por exceso excede en 15 al residuo por defecto. Halle la suma de cifras de N.

A) 19 B) 13 C) 25
D) 12 E) 15

NIVEL INTERMEDIO

13. Si al extraer la raíz cúbica de $\overline{a(b+5)b3}$ se obtiene residuo mínimo, calcule b^2+a^2.

A) 28 B) 34 C) 32
D) 42 E) 24

14. Si $\overline{778abc}$ es un cubo perfecto, calcule $a+b+c$.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 21 E) 22

15. Si $\overline{ab5c(a-4)0}$ es un cuadrado perfecto, halle la suma de cifras del valor de la raíz sabiendo que esta es divisible entre 11.

A) 12 B) 15 C) 16
D) 10 E) 13

16. Calcule el número por el cual hay que dividir al número 108 675 para que el resultado sea un cuadrado perfecto.

A) 438 B) 483 C) 834
D) 389 E) 393

17. ¿Cuántos cuadrados perfectos hay entre los números 3200 y 8600?

A) 63 B) 36 C) 46
D) 56 E) 26

18. Halle la parte entera de la raíz cúbica de un número sabiendo que si se le añade 1261, su raíz cúbica aumenta en una unidad manteniendo el mismo residuo.

A) 20 B) 18 C) 17
D) 16 E) 19

19. ¿Cuántos números de tres cifras tienen la raíz cuadrada y la raíz cúbica con el mismo residuo no nulo?

A) 52 B) 53 C) 54
D) 55 E) 56

20. Si a un número entero se le suma 325, su raíz aumenta en tres unidades y el residuo sería el doble. Si el residuo original fue 4, calcule el número.

A) 2708 B) 2870 C) 2778
D) 2476 E) 2266

21. Julio desea visitar a su amigo Francisco y recuerda que la avenida se llama Jorge Lancero, pero no recuerda exactamente el número; sin embargo, recordó que Francisco comentó en algún momento que es un número de cuatro cifras, que es un cuadrado perfecto y que las dos primeras forman un cuadrado perfecto y las dos últimas cifras también. Calcule la suma de las cifras del número de la casa de Francisco.

A) 16 B) 24 C) 20
D) 18 E) 22

22. ¿Cuántos cuadrados perfectos de tres cifras existen en la base 11?

A) 25 B) 26 C) 27
D) 28 E) 62

23. Para pavimentar un patio cuadrado se emplean losetas de 50×50 cm. Si el patio tuviera un metro más por cada lado, se hubiera necesitado 140 losetas más. ¿Cuántos metros mide cada lado del patio?

A) 14,50 B) 16,0 C) 12,50
D) 15,50 E) 17,0

24. Si $\overline{571abc}=\overline{bd}^3$, calcule $a+b+c+d$.

A) 20 B) 22 C) 24
D) 25 E) 30

25. ¿Cuál es el menor número entero que al sumar su 1/5, con su 1/3 y con su 1/4 se obtiene un cuadrado perfecto?

A) 2704 B) 2466 C) 2074
D) 2646 E) 2820

26. Al extraer la raíz cuadrada de N por defecto, la suma de sus términos es 218; pero si se realiza por exceso, la suma sería 240. Calcule la suma de cifras de N.

A) 4 B) 2 C) 10
D) 12 E) 8

27. ¿Cuántos numerales de tres cifras existen tales que al extraer la raíz cuadrada su residuo excede en 10 a su raíz?

A) 18 B) 21 C) 20
D) 22 E) 23

28. En un patio de forma cuadrada se colocarán mayólicas cuadradas. Hay dos tipos de mayólicas (A y B) en igual cantidad, pero de diferentes dimensiones. Si se colocan las del tipo A, sobra un millar de estas; pero si se colocan las del tipo B, se utilizarán el doble de mayólicas por lado que la anterior y faltarían 200 de su mismo tipo. ¿Cuál es el número total de mayólicas que se tiene?

A) 1600 B) 2800 C) 2400
D) 3600 E) 2600

29. Un terreno de forma cuadrada está sembrado con árboles equidistantes entre sí por 2 m. Se sabe que en el interior hay 1841 árboles más que en el perímetro. ¿Cuál es dicho perímetro?

A) 386 B) 342 C) 366
D) 368 E) 382

30. Si $13\times\overline{abcabc}$ es cuadrado perfecto, calcule la suma de los dos menores valores de $\overline{abc}$.

A) 693 B) 308 C) 1001
D) 639 E) 803

31. Sea N el menor número de cuatro cifras significativas y las tres últimas cifras son consecutivas. Si al extraer la raíz se observa que es exacta y dicha raíz es un número capicúa, ¿cuántos números menores que N existen tales que al extraerle la raíz cuarta se obtiene residuo máximo?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

32. Al extraer la raíz cuadrada de $\overline{(2a)baa4}$ por exceso se obtiene residuo mínimo. Halle $a+b$.

A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

33. ¿Cuántos numerales de cuatro cifras cumplen que al extraer su raíz cuadrada esta termina en 2 y el residuo es 40?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 6

34. ¿Cuántos números enteros menores que 400 y múltiplos de 4 existen, tales que al extraer su raíz cuadrada, el residuo y la raíz son iguales?

A) 8 B) 4 C) 5
D) 9 E) 10

35. Si al extraer la raíz cuadrada de $\overline{mnmn}$ se obtiene una raíz que es el doble del residuo que es igual a $\overline{mn}$, determine la raíz cuadrada de $\overline{(m+1)(n+1)}$.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

36. Si $\overline{abcd000}$ tiene una cantidad impar de divisores, ¿cuántos números $\overline{abcd}$ cumplen con dicha condición?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 E) 24

37. Si $\overline{aa}^3=\overline{ab0caa}$, además $\overline{bca}$ es un cubo perfecto, calcule $a+b+c$.

A) 18 B) 15 C) 22
D) 24 E) 12

38. ¿Cuántos números que se representan con tres cifras en el sistema quinario resultan ser potencias perfectas de grado 2?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Análisis combinatorio

Capítulo XV

Objetivos

- Aplicar los principios fundamentales de conteo en situaciones concretas.
- Determinar el número de ordenamientos que se pueden realizar con una parte o con todos los elementos de un conjunto.
- Determinar la cantidad de subconjuntos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos de un conjunto.

Podemos considerar al análisis combinatorio como el conjunto de procedimientos y técnicas que nos permiten determinar el número de subconjuntos que pueden formarse a partir de un conjunto dado. Tiene por objeto analizar y determinar el número de posibles ordenamientos o selecciones con los elementos de un conjunto bajo ciertas restricciones; por ejemplo, ¿de cuántas formas diferentes se pueden ordenar cinco personas en una fila?, ¿de cuántas maneras diferentes se puede elegir de un grupo de seis personas a cuatro para formar un comité?, ¿cuántos códigos de seis cifras diferentes se pueden formar con las cifras 0; 1; 2; 3; ...; 9? Ya en el siglo XII surgieron escritos sobre distintas situaciones que se relacionan con analizar las variaciones musicales y, en la medicina, para hallar las combinaciones de sabores diferentes posibles. Todo lo moderno de la combinatoria se da con Blas Pascal, quien en 1654 desarrolla y establece relaciones entre los coeficientes del desarrollo de la potencia del binomio con los números combinatorios.

Concepto

Es la rama de la matemática que estudia los diversos arreglos o selecciones que podemos formar con los elementos de un conjunto dado, los cuales nos permiten resolver muchos problemas prácticos.

Principios fundamentales de conteo

Principio de adición

Si el evento A ocurre de m maneras diferentes y el evento B ocurre de n maneras diferentes, entonces los eventos A o B (no ambos en forma simultánea) ocurren de $m+n$ maneras diferentes.

Ejemplos

1. Para viajar de Lima a Cusco se disponen de 6 líneas aéreas y 4 líneas terrestres. ¿De cuántas maneras diferentes se puede viajar de Lima a Cusco?

Resolución

Se observa que para viajar de Lima a Cusco solo es necesario escoger una línea aérea o bien una línea terrestre.

$$\underbrace{6}_{\text{líneas aéreas}} \overset{\text{o}}{+} \underbrace{4}_{\text{líneas terrestres}} = 10$$

Por lo tanto, hay 10 maneras diferentes para viajar de Lima a Cusco.

2. Mario va a comprar el repuesto de un automóvil que se vende en 5 tiendas de La Victoria, 4 tiendas de Los Olivos y 7 tiendas de Breña. ¿De cuántas maneras diferentes puede adquirir el repuesto?

Resolución

Se observa que Mario puede comprar dicho repuesto solo en una de las tiendas de los tres distritos.

$$\underbrace{5}_{\text{tiendas La Victoria}} \overset{\text{o}}{+} \underbrace{4}_{\text{tiendas Los Olivos}} \overset{\text{o}}{+} \underbrace{7}_{\text{tiendas Breña}} = 16$$

Por lo tanto, Mario podrá adquirir dicho repuesto de 16 maneras diferentes.

Principio de multiplicación

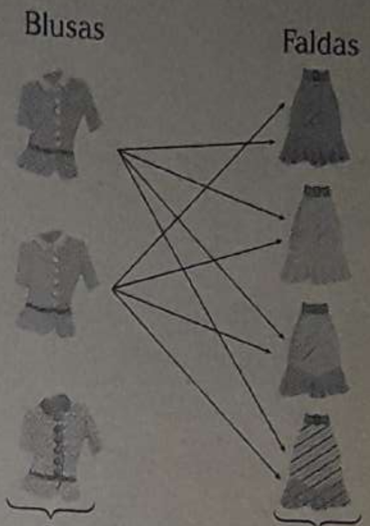
Si el evento A ocurre de m maneras diferentes y el evento B ocurre de n maneras diferentes, entonces los eventos A y B (forma simultánea o uno seguido de otro) se podrán realizar de $m \times n$ maneras diferentes.

Ejemplo

Si Érika tiene 3 blusas distintas y 4 faldas diferentes, ¿de cuántas maneras se puede vestir de manera adecuada?

Resolución

Para vestirse, Érika debe escoger una blusa y una falda, es decir, ambas prendas.



$$3 \times 4 = 12$$

Por lo tanto, hay 12 maneras diferentes para que Érika se vista.

Factorial de un número

Es el producto de todos los números enteros positivos y consecutivos desde la unidad e inclusive hasta n.

Se denota $n!$

Ejemplos

- $1! = 1$
- $2! = 1 \times 2$
- $3! = 1 \times 2 \times 3$
- $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$

$$\boxed{n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (n-1) \times n}$$

También

$7! = 7 \times 6 \times 5!$

$12! = 12 \times 11 \times 10!$

Nota

Por convención se asume que $0! = 1$.

Permutación

Es los diferentes arreglos u ordenamientos que se pueden realizar con una parte o con todos los elementos de un conjunto.

Permutación lineal

Es los diferentes arreglos que se hacen en una línea referencial.

Ejemplo

¿De cuántas maneras diferentes se ordenan A, B, C y D tomados de dos en dos?

Resolución

Tenemos cuatro elementos: A, B, C y D.

AB	BA	CA	DA
AC	BC	CB	DB
AD	BD	CD	DC

Por lo tanto, hay 12 maneras diferentes de ordenar A, B, C y D.

Otra forma

$$(\text{n.}^\circ \text{ de maneras}) = 4 \times 3 = 12$$

Además, se puede expresar

$$P_2^4 = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

En general

> La permutación de n elementos tomados de k en k se calcula así
>
> $$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!};\quad 1 \le k \le n$$

Nota

$$P_n^n = n!$$

Permutación circular

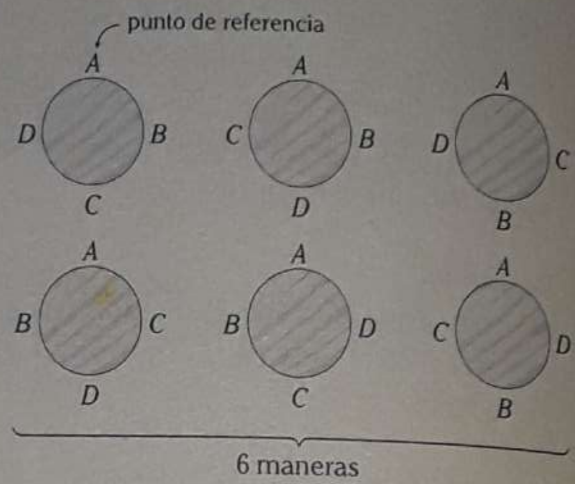
Es un arreglo y ordenamiento de elementos alrededor de un objeto o punto de referencia.

Ejemplo

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 4 personas alrededor de una mesa circular?

Resolución

Sean A, B, C y D las personas que se van a ubicar alrededor de la mesa.



$$\therefore \quad P_C^4 = (4-1)! = 3! = 6$$

En general

> La permutación circular de n elementos se calcula así
>
> $$P_C(n) = P_C^n = (n-1)!$$

Permutación lineal con elementos repetidos

Es un ordenamiento lineal cuyos elementos no todos son distintos entre sí, es decir, hay elementos que se repiten.

Ejemplo

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar en una fila dos fichas iguales de color azul y dos fichas iguales de color blanco?

Resolución

Sean las fichas A, A, B y B.

$AABB$	$ABAB$	$ABBA$
$BBAA$	$BABA$	$BAAB$

Se observa que hay 6 maneras diferentes de ordenar.

Otra forma

$$P^{4}_{(2;2)} = \frac{\overbrace{4!}^{AABB}}{2!\times 2!} = 6\ .$$

En general

El número de permutaciones en fila con n elementos, donde

r_1: número de elementos de la 1.ª clase

r_2: número de elementos de la 2.ª clase

r_3: número de elementos de la 3.ª clase

⋮

r_k: número de elementos de la k clase

se denotan y se calculan así

$$P^{n}_{(r_1;r_2;r_3;\ldots;r_k)} = \frac{n!}{r_1\times r_2\times r_3\times\ldots\times r_k}$$

Donde

$$r_1+r_2+r_3+\ldots+r_k \le n$$

Combinación

Es los diferentes grupos que se pueden formar con una parte o todos los elementos de un conjunto determinado sin considerar el orden de los agrupados.

Ejemplo

¿De cuántas maneras diferentes se pueden agrupar A, B, C y D al tomar de 2 en 2?

Resolución

Se tienen cuatro elementos, los cuales se agrupan de 2 en 2.

AB	AC	AD
BC	BD	
CD		

Se observa que hay 6 maneras diferentes de agrupar de 2 en 2.

Otra forma

Es una combinación de 4 elementos que se toman de 2 en 2 y se obtiene así

$$C^{4}_{2} = \frac{4!}{(4-2)!\times 2!} = 6$$

En general

La combinación de n elementos tomados de k en k se calcula así

$$C^{n}_{k} = \frac{n!}{(n-k)!\times k!}$$

Propiedades

- $C^{n}_{1} = n$
- $C^{n}_{n} = 1$
- $C^{n}_{k} = C^{n}_{(n-k)}$
- $C^{n}_{0} + C^{n}_{1} + C^{n}_{2} + C^{n}_{3} + \ldots + C^{n}_{n} = 2^{n}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

En un salón de clase formado por 18 damas y 12 varones, se desea escoger a una pareja mixta de estudiantes para presentar un baile de marinera en el aniversario del colegio. ¿De cuántas maneras diferentes se puede escoger dicha pareja?

Resolución

Para presentar el baile de marinera se necesita

(1 varón) y (1 dama)

$$\underbrace{\text{Formas de escoger un varón de los 12 varones}}_{12} \times \underbrace{\text{Formas de escoger un dama de las 18 damas}}_{18}$$

Aplicando el principio de la multiplicación se tiene que el total de formas diferentes de escoger la pareja de baile es $12 \times 18 = 216$.

Problema N.º 2

¿Cuántos números de tres cifras significativas se pueden escribir en el sistema decimal sin que las cifras 1 y 5 aparezcan juntas?

Resolución

Se cumple que

$$\left(\begin{array}{c}\text{la cantidad de}\\ \text{números de tres}\\ \text{cifras significativas}\\ \text{en que 1 y 5 no}\\ \text{aparezcan juntos}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{total de}\\ \text{números de}\\ \text{tres cifras}\\ \text{significativas}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{números de tres}\\ \text{cifras significati-}\\ \text{vas en que 1 y 5}\\ \text{aparezcan juntos}\end{array}\right)$$

Primero calculamos el total de números de 3 cifras significativas.

$$\begin{array}{ccc} \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 \\ \hline \multicolumn{3}{l}{9\times9\times9=729} \end{array}$$

Donde a, b y c son diferentes de cero.

Ahora calculamos todos los números de tres cifras en que 1 y 5 aparezcan juntos.

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{a15} & ; & \overline{a51} & ; & \overline{15c} & ; & \overline{51c} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & \cancel{1} & & 1 & & 1 \\ 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cancel{5} & & 5 & & 5 & & 5 \\ 6 & & 6 & & 6 & & 6 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{9}_{8} & & \underbrace{9}_{8} & & \underbrace{9}_{9} & & \underbrace{9}_{9} \end{array}$$

total: 8+8+9+9=34

Luego reemplazamos los valores obtenidos en la relación inicial.

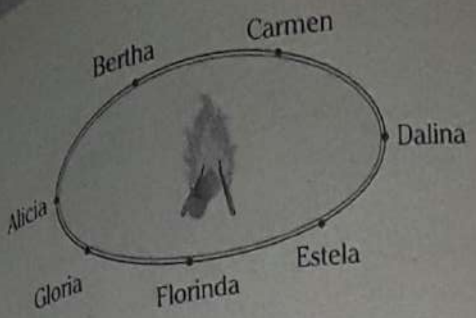
Por lo tanto, la cantidad de números de tres cifras significativas en que 1 y 5 no aparezcan juntos es 729−34=695.

Problema N.º 3

Alicia, Bertha, Carmen, Dalina, Estela, Florinda y Gloria desean sentarse alrededor de una fogata. ¿De cuántas maneras diferentes podrían realizarlo si Alicia y Dalina no quieren estar juntas?

Resolución

Primero calculamos el total de formas, en el cual siete personas se pueden sentar alrededor de una fogata.



$$P_C(7) = 6! = 720$$

Ahora calculamos los casos cuando Alicia y Dalina están juntas.

Entonces se tendrán que ordenar 6 elementos en forma circular 5!, pero se debe multiplicar por 2!, porque es el ordenamiento de Alicia y Dalina, entonces se tiene

$$5! \times 2! = 120 \times 2 = 240$$

Pero para calcular lo que nos piden lo hacemos de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{c}\text{Alicia y Dalina}\\ \text{no están juntas.}\end{array}\right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{total de}\\ \text{casos}\end{array}\right)}_{720} - \underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{n.º de casos cuando}\\ \text{Alicia y Dalina están}\\ \text{juntas}\end{array}\right)}_{240}$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Alicia y Dalina}\\ \text{no están juntas.}\end{array}\right) = 720 - 240 = 480$$

Problema N.º 4

Jazmín tiene 10 amigas y desea invitar a 6 de ellas a una reunión. ¿De cuántas maneras diferentes podría realizarlo si entre dichas amigas hay tres en particular que no se llevan bien, por lo tanto no pueden asistir a una misma reunión ni dos ni las tres de ellas juntas?

Resolución

Por dato se tiene que

$$\text{Jazmín}: \overbrace{A_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ A_7\ \underbrace{A_8\ A_9\ A_{10}}_{\substack{\text{Ellas no pueden}\\ \text{asistir a una misma}\\ \text{reunión.}}}}^{\text{amigas}}$$

Entonces para que Jazmín pueda realizar la invitación podría ser

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{Cuando las amigas no}\\ \text{se llevan bien, no son}\\ \text{invitadas.}\end{array}\right)}_{C_6^7} \text{ o } \underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{Cuando en el grupo de las 6}\\ \text{invitadas participa solo una de}\\ \text{ellas, ya sea } A_8 \text{ o } A_9 \text{ o } A_{10}\text{, en}\\ \text{estos casos solo se escogerían}\\ \text{a 5 amigas para completar el}\\ \text{grupo (son 3 casos).}\end{array}\right)}_{3 \times C_5^7}$$

$$C_6^7 + 3 \times C_5^7$$

Desarrollando las combinatorias, se tiene

$$\frac{7!}{1! \times 6!} + 3 \times \frac{7!}{2! \times 5!}$$

$$\frac{7 \times \cancel{6!}}{1 \times \cancel{6!}} + 3 \times \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{1 \times 2 \times \cancel{5!}}$$

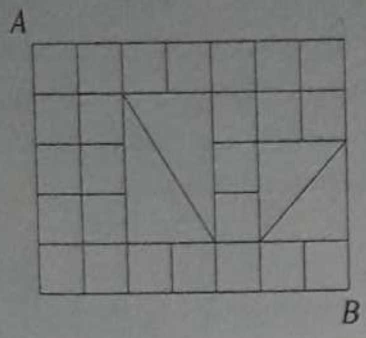
$$\rightarrow\ 7 + 63 = 90$$

Por lo tanto, Jazmín tiene 90 formas diferentes para poder invitar a 6 de sus 10 amigas con las respectivas condiciones.

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. De la siguiente figura:



¿de cuántas maneras se puede ir de *A* hasta *B* sin retroceder?

A) 192 B) 184 C) 196
D) 187 E) 189

2. Un artículo se vende en tres mercados; en el primero se tienen disponibles 5 tiendas, en el segundo 4 y en el tercero 6 tiendas. ¿De cuántas maneras se puede elegir una tienda para comprar dicho artículo?

A) 10
B) 17
C) 15
D) 16
E) 18

3. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse 6 personas en una banca de capacidad para 4 personas?

A) 240 B) 360 C) 288
D) 280 E) 420

4. ¿De cuántas formas 3 varones y 3 mujeres pueden ubicàrse en una fila si las mujeres no quieren sentarse una al costado de la otra?

A) 36 B) 48 C) 54
D) 72 E) 144

5. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en un estante 3 libros iguales de geometría, 2 libros iguales de álgebra y 2 libros diferentes de biología?

A) 350 B) 420 C) 360
D) 540 E) 480

6. Se tienen tres cajas vacías. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden distribuir cuatro juguetes en dichas cajas si no es necesario que todas las cajas contengan algún juguete?

A) 15 B) 18 C) 21
D) 35 E) 81

7. ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un dodecágono regular?

A) 240 B) 180 C) 120
D) 220 E) 196

8. Álex y Ana quieren escuchar en la misma carpeta el seminario de aritmética. Si este se realiza en 6 locales diferentes, cada local de 5 pisos y 8 aulas en cada piso y 10 carpetas por aula y cada carpeta para 4 personas, ¿de cuántas maneras diferentes podrán escuchar el seminario?

A) 18 800 B) 9600 C) 14 000
D) 10 800 E) 28 800

9. César, Javier y cuatro amigos van al cine y encuentran seis asientos libres en la misma fila. Si César y Javier no quieren estar juntos, determine el número de maneras que se pueden ubicar en la fila.

A) 480 B) 240 C) 120
D) 720 E) 360

10. Cuatro parejas de enamorados van de campamento. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar alrededor de una fogata de modo que los hombres y las mujeres queden alternados y cada pareja no se separe, respectivamente?

A) 144; 84 B) 72; 96 C) 108; 84
D) 144; 96 E) 72; 84

11. Seis amigos van de campamento y se ubican alrededor de una fogata. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si Andrea y Emily nunca se sientan juntas?

A) 120 B) 36 C) 20
D) 72 E) 48

NIVEL INTERMEDIO

12. En un plano existen n puntos, en el que no hay más de dos que sean colineales y con los cuales se forman segmentos, tal que el número de estos es igual a $5n$. Halle el valor de n.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 15

UNMSM 2010-I

13. ¿Cuántos números de siete cifras se pueden formar cuyo producto de cifras sea 105?

A) 120 B) 105 C) 210
D) 420 E) 240

14. ¿Cuántas palabras con o sin sentido se pueden formar con todas las letras de la palabra PATATAS?

A) 1680 B) 840 C) 420
D) 680 E) 1260

15. María lavó 3 chompas, 3 pantalones y 2 blusas todos diferentes. Determine de cuántas formas podrá ordenar en el colgador todas las ropas que lavó en los siguientes casos:

I. Las blusas siempre deben estar en los extremos.
II. Las prendas del mismo tipo siempre deben estar juntas.

A) 1440; 216
B) 720; 432
C) 720; 216
D) 1440; 144
E) 1440; 432

16. En un examen de matemáticas de 10 preguntas, un alumno deberá responder por lo menos cuatro de las 5 primeras preguntas y de las 5 últimas debe responder solo 3. ¿De cuántas maneras distintas tiene de escoger las preguntas que va a responder?

A) 40 B) 60 C) 120
D) 80 E) 100

17. Se tienen 15 fichas numeradas del 1 al 15. El un juego consiste en extraer al azar 3 fichas; se gana cuando todas las fichas extraídas son pares o todas son impares. ¿Cuántas jugadas posibles son las ganadoras?

A) 81 B) 455 C) 70
D) 91 E) 90

18. Un estudiante tiene a disposición 10 cursos que puede llevar en el presente ciclo de la universidad, de los cuales 3 son repetidos. ¿De cuántas maneras podrá escoger 6 cursos para llevar en el ciclo si la universidad condiciona a que lleve por lo menos 2 de los cursos reprobados?

A) 70 B) 120 C) 105
D) 280 E) 140

19. ¿Cuántos partidos deben programarse en un campeonato de fútbol de dos ruedas en el que intervienen 12 equipos?

A) 142 B) 124 C) 120
D) 108 E) 132

UNMSM 2004-II

20. Con cuatro números positivos y seis números negativos todos diferentes, ¿cuántas parejas de números se pueden formar de tal forma que su producto de ellos sea positivo?

A) 90 B) 45 C) 15
D) 30 E) 21

21. ¿De cuántas maneras 3 argentinos, 4 peruanos y 3 brasileños pueden sentarse, ordenadamente, en una mesa redonda de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?

A) 1648 B) 1724 C) 1872
D) 1728 E) 1964

22. En una competencia de ciclismo participan 10 corredores y se premiarán a los tres primeros puestos si no hay empates. ¿De cuántas maneras diferentes se puede premiar?

A) 120 B) 360 C) 720
D) 1440 E) 480

23. De un grupo de 5 varones y 3 mujeres se formará un comité integrado por cuatro personas, donde debe haber al menos una mujer. ¿Cuántos comités diferentes se puede formar?

A) 48 B) 65 C) 36
D) 72 E) 60

24. Por fiestas de fin de año, un padre de familia desea repartir 10 regalos entre sus tres hijos; de modo que el mayor recibe 5 regalos, el intermedio 3 y el menor 2. ¿De cuántas maneras diferentes puede realizar el reparto?

A) 12 060 B) 5040 C) 2250
D) 2520 E) 1440

25. ¿Cuántos códigos diferentes se pueden formar utilizando 2 vocales diferentes seguidos de 3 dígitos diferentes?

A) 14 400
B) 18 000
C) 10 008
D) 12 000
E) 16 240

26. En los cuatro primeros pisos de un edifico viven 4 familias, una en cada piso. Además estas familias están conformadas por 4; 6; 5 y 8 personas, respectivamente. Si se quiere elegir al azar a dos personas que se encuentren en pisos que no sean contiguos, ¿cuántas parejas distintas se pueden obtener?

A) 100
B) 120
C) 110
D) 112
E) 124

27. En un aula se desea formar un comité compuesto por un presidente, un vicepresidente y un vocal. ¿De cuántas maneras se puede formar dicho comité si para ocupar dichos cargos hay 8 candidatos?

A) 540 B) 448 C) 360
D) 336 E) 420

28. De un grupo de 8 personas se quiere escoger un grupo de 5 personas para abordar un bote con cuatro remos y con un timón. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar en el bote sabiendo que de las 8 personas solo 3 pueden llevar el timón?

A) 4032
B) 2520
C) 1680
D) 840
E) 2020

29. Un código de colores con barras tiene 6 colores para pintar 4 barras, pero dos barras consecutivas no pueden tener el mismo color ni se pueden repetir los colores. ¿Cuántos códigos diferentes se pueden formar?

A) 900 B) 750 C) 360
D) 600 E) 720

30. Doce amigos salen de campamento y disponen de 3 carpas; una para capacidad de 6 personas, otra de 4 y la última de 2. ¿Cuál es la cantidad de maneras diferentes en que pueden organizarse para dormir?

A) 720 B) 6930 C) 1980
D) 924 E) 13860

31. Una moneda se lanza 10 veces, dando como resultado 3 caras y 7 sellos. ¿De cuántas formas podría haber ocurrido esto?

A) 120 B) 720 C) 360
D) 240 E) 60

32. Una caja contiene 5 tarjetas rojas, 4 blancas y 2 azules. Calcule de cuántas formas se pueden elegir 4 tarjetas de forma que

I. por lo menos 2 sean rojas.
II. ninguna sea roja.

A) 215; 30 B) 215; 15 C) 150; 30
D) 150; 15 E) 215; 60

33. La barra de una cafetería tiene ocho asientos en una fila. Si cinco personas, desconocidas entre sí, ocupan lugares al azar, ¿de cuántas maneras diferentes pueden quedar los tres asientos desocupados restantes?

A) 140 B) 70 C) 56
D) 210 E) 840

34. Se quiere formar una asamblea constituyente de 4 miembros y se tienen 12 congresistas. Halle cuántas formas hay de formar el comité si dos de ellos no pueden ir al mismo tiempo.

A) 495 B) 450 C) 240
D) 210 E) 200

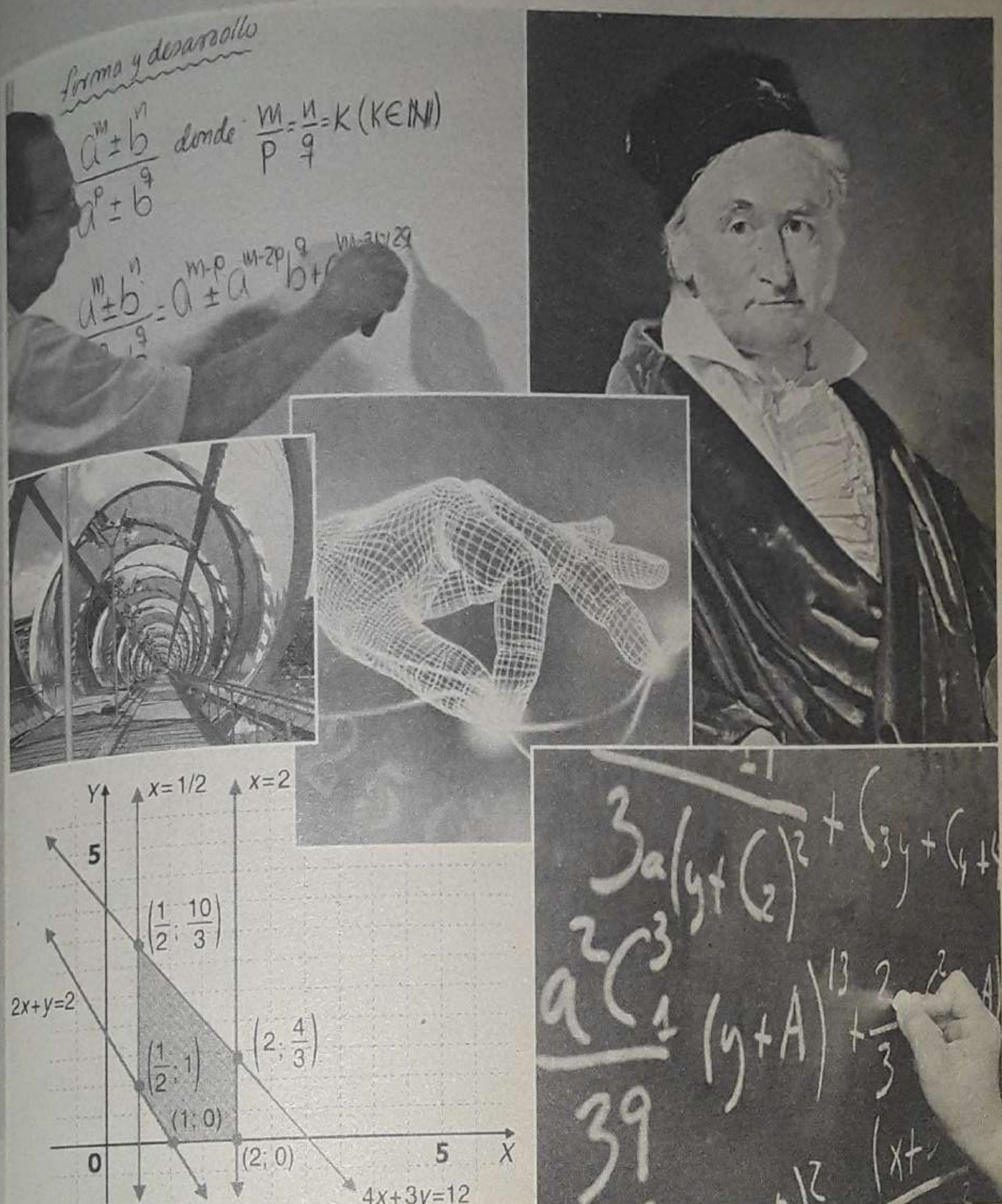
UNMSM 2006-I

35. Una familia está compuesta por 10 integrantes, incluidos los padres. ¿Cuántas fotografías distintas se pueden tomar si en la foto solo deben salir 5 personas y deben estar siempre los padres en la foto?

A) 6720 B) 30 240 C) 1344
D) 2016 E) 6048

Bibliografía

- ✓ CARRANZA, César. *Álgebra*. Lima: Editorial Studium, 1990.
- ✓ CHARLES, Miller D. *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. Décima edición. México D. F.: Editorial Pearson Addison Wesley, 2006.
- ✓ CORBALAN, Fernando. *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Editorial GRAO, de IRIF, S. L., 2006.
- ✓ GENTILE, Enzo. *Aritmética elemental*. Washington: OEA, 1985.
- ✓ INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. *Aritmética, análisis del número y sus aplicaciones*. Lima: Lumbreras Editores, 2012.
- ✓ PETTERSON. *Teoría de la aritmética*. México D. F.: Editorial Limusa, 1991.
- ✓ SEYMON LIPSCHUIZ. *Teoría de conjuntos y temas afines*. México D. F.: Editorial Mc Graw-Hill, 1991.



ÁLGEBRA

César Velásquez Michue / Phflucker Coz Flores

Conjuntos numéricos y leyes de exponentes

Capítulo I

OBJETIVOS

- Identificar, denotar y resolver situaciones reales, aplicando las propiedades y técnicas propias de los conjuntos numéricos.
- Transformar números y expresiones usando leyes de exponentes referidas a la potenciación y la radicación.

En las diversas actividades diarias siempre está presente la idea de cantidad. Veamos algunos ejemplos.

1. Usualmente cuando se le pregunta a un niño, de aproximadamente tres años, acerca de su edad, nos responderá usando los dedos, ello nos representa una cantidad natural.
2. Cuando en verano pedimos una gaseosa helada, ¿a qué temperatura estará? Responderemos usando un número entero negativo.
3. Supongamos que estamos en una pollería, cuando la mamá reparte las partes del pollo, ¿qué parte nos tocó? A esta pregunta responderemos usando los números fraccionarios.

Frecuentemente estos conjuntos numéricos están representados de la siguiente forma

$\mathbb{Q}$: $...; -\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{6}; ...$

$\mathbb{Z}$: $...; -3; -2; -1; 0;$

$\mathbb{N}$: $1; 2; 3; 4; ...$

Conjuntos numéricos

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

Está formado por todos aquellos números que utilizamos para contar $\mathbb{N}=\{1; 2; 3; 4; 5; ...\}$

También tenemos $\mathbb{N}_0=\{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$.

Pares $= \{2; 4; 6; 8; ...\}$, los números pares se denotan por $2n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Impares $= \{1; 3; 5; 7; ...\}$, los números impares se denotan por $2n-1$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z}=\{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$$

También tenemos

Enteros positivos: $\mathbb{Z}^+=\{1; 2; 3; ...\}$

Enteros negativos: $\mathbb{Z}^-=\{...; -3; -2; -1\}$

Enteros no negativos: $\mathbb{Z}_0^+=\{0; 1; 2; 3; ...\}$

Enteros no positivos: $\mathbb{Z}_0^-=\{...; -3; -2; -1; 0\}$

Conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\Big/ a; b\in\mathbb{Z} \wedge b\neq 0\right\}$$

Ejemplos

- $4=\dfrac{8}{2}$ es un número racional
- $0{,}5=\dfrac{1}{2}$ es un número racional

Conjunto de los números irracionales ($\mathbb{Q}'$)

$\mathbb{Q}'=\mathbb{I}=\{x/x$ es un número decimal infinito no periódico que no se puede expresar como una división de dos enteros$\}$.

Ejemplos

- $\sqrt{2}=1{,}4142...$
- $\sqrt{3}=1{,}7320...$
- $\sqrt{5}=2{,}2360...$
- $e=2{,}7182...$
- $\pi=3{,}1415...$

Conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)

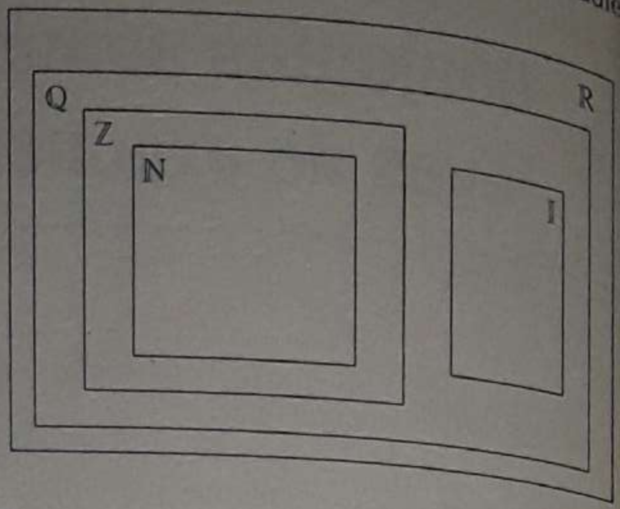
$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$$

También tenemos

$\mathbb{R}^+$ (reales positivos)

$\mathbb{R}^-$ (reales negativos)

Gráficamente según el diagrama de Venn Euler se tiene



Leyes de exponentes

Es un conjunto de teoremas y definiciones que tratan el estudio de los exponentes y las relaciones que se dan entre ellos.

Potenciación

Notación

$$b^n=c$$

donde

- b: base($b\in\mathbb{R}$)
- n: exponente ($n\in\mathbb{Z}$)
- c: resultado de la potencia

Ejemplos

- 4^{-6}, aquí la base es el número 4 y el exponente es -6.
- 2^{9^7}, aquí la base es el número 2 y el exponente es 9^7.

Definiciones

a. Exponente natural

$$b^n=\begin{cases} b;\ \text{si } n=1 \\ \underbrace{b\cdot b ... b}_{n\text{ veces}};\ \text{si } n\geq 2\end{cases}$$

Ejemplos

- $8^1=8$
- $6^2=6\cdot 6=36$
- $(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$
- $-9^2=-(9^2)=-(9\cdot 9)=-81$

NOTA

- $(-b)^n$, aquí n afecta a $-b$.
- $-b^n$, aquí n afecta solo a b.

b. Exponente cero

$$b^0=1;\ \forall\, b \text{ no nulo}$$

Ejemplos

- $7^0=1$
- $\sqrt{13}^{\,0}=1$
- $(-12)^0=1$

NOTA

0^0 no está definido.

c. Exponente negativo

$$b^{-n}=\frac{1}{b^n};\ b\neq 0 \wedge n\in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplos

- $4^{-3}=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{64}$
- $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$

OBSERVACIÓN

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n;\ a\neq 0 \wedge b\neq 0$$

Ejemplo

- $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{-7}=\left(\dfrac{6}{5}\right)^7$

NOTA

0^{-2} y 0^{-1} no están definidos.

Teoremas

- $b^m\cdot b^n=b^{m+n}$
- $\dfrac{b^m}{b^n}=b^{m-n};\ b\neq 0$
- $(b^m)^n=b^{m\cdot n}$
- $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n};\ b\neq 0$

Ejemplos

- $3^6\cdot 3^5=3^{6+5}=3^{11}$
- $x^3\cdot x^2\cdot x^4=x^{3+2+4}=x^9$
- $n^{n+7}=n^n\cdot n^7$
- $\dfrac{2^{12}}{2^9}=2^{12-9}=2^3=8$
- $\dfrac{x^{x+5}}{x^{4-x}}=x^{(x+5)-(4-x)}=x^{2x+1}$
- $(3^4)^5=3^{4\cdot 5}=3^{20}$
- $\left((x^2)^3\right)^4=x^{2\cdot 3\cdot 4}=x^{24}$
- $15^7=(5\cdot 3)^7=5^7\cdot 3^7$
- $\left(\dfrac{x}{3}\right)^6=\dfrac{x^6}{3^6}$

OBSERVACIÓN

- $(x^a)^b=(x^b)^a$
- $(x^a\cdot y^b)^n=x^{a\cdot n}\cdot y^{b\cdot n}$
- $\left(\dfrac{x^a}{y^b}\right)^n=\dfrac{x^{a\cdot n}}{y^{b\cdot n}}$

Ejemplos

- $(7^2)^5 = (7^5)^2$
- $(x^4 \cdot y^2)^9 = x^{36} \cdot y^{18}$
- $\left(\dfrac{x^3}{y^5}\right)^2 = \dfrac{x^6}{y^{10}}$

NOTA

Cuando se tenga exponentes sucesivos de la forma $a^{b^{c^d}}$ se sugiere desarrollar de arriba hacia abajo de dos en dos.

Ejemplo

- $2^{5^{3^0}} = 2^{5^1} = 2^5 = 32$

RADICACIÓN EN LOS REALES

Notación

$$\boxed{\sqrt[n]{b} = c}$$

donde

- n: índice ($n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq 2$)
- b: radicando
- c: raíz n-ésima de b

Definiciones

- Si $b>0$ y n es un número par, existe un único c positivo tal que $c^n=b$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ y n es un número impar, existe un único c que tiene el mismo signo de b tal que $c^n=b$.

De las definiciones tenemos

$$\boxed{\sqrt[n]{b} = c \leftrightarrow c^n = b}$$

Ejemplos

- $\sqrt[3]{-27} = -3$ porque $(-3)^3 = -27$
- $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$
- $\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$

NOTA

- $\sqrt{0} = 0$
- $\sqrt{-1}$ no existe en $\mathbb{R}$ por definición.

Exponente fraccionario

$$\boxed{b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}}$$

Ejemplos

- $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$
- $7^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{7}$

NOTA

Si $\sqrt[n]{b}$ está definido en los reales,

se cumple $\boxed{b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b}^{\,m} = \sqrt[n]{b^m}}$

Ejemplos

- $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81}^{\,3} = 3^3 = 27$
- $(-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{-8}^{\,5} = (-2)^5 = -32$

Si hacemos que $m=n$, tendremos $\sqrt[n]{b}^{\,n} = b$.

Ejemplos

- $\sqrt[7]{-8}^{\,7} = -8$
- $\sqrt[4]{\sqrt{2}}^{\,4} = \sqrt{2}$

Teoremas

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, deben existir $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[m]{a}$ en $\mathbb{R}$.
- $\sqrt[n]{b^n} = \begin{cases} b \text{ si } n \text{ es impar} \\ |b| \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$

Ejemplos

- $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\cdot 9}=\sqrt[3]{27}=3$
- $\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{\dfrac{64}{2}}=\sqrt[5]{32}=2$
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[3\cdot 4]{5}=\sqrt[12]{5}$
- $\sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|=2$

Regla práctica

$$\sqrt[m]{x^a\cdot\sqrt[n]{x^b\cdot\sqrt[p]{x^c}}}=x^{\frac{(an+b)p+c}{mnp}}$$

Ejemplo

$$\sqrt[3]{x^5\cdot\sqrt{x^3\cdot\sqrt[5]{x^2}}}=x^{\frac{(5\cdot 2+3)5+2}{3\cdot 2\cdot 5}}=x^{\frac{67}{30}}$$

Observación

1. Determine el valor de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$

Resolución

En estos tipos de preguntas se sugiere igualarlo a una letra.

Sea $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$, luego hacer lo siguiente $x=\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}_{x}}$

de donde tendremos $x=\sqrt{2+x}$.

Ahora debemos elevar al cuadrado $x^2=\sqrt[2]{2+x}^{\,2}\ \rightarrow\ x^2=2+x$

de donde se tiene

$$x^2-x-2=0$$

$$\begin{array}{cc} x & -2 \\ x & 1 \end{array}$$

De aquí tenemos $x=2 \vee x=-1$, pero se sabe que $x>0$ por definición de la raíz cuadrada.

2. $\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[5]{y}}=\sqrt[3]{x}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[5]{y}}}_{\text{raíz de raíz}}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[15]{y}$

En general tenemos $\boxed{\sqrt[m]{x\cdot\sqrt[n]{y\cdot\sqrt[p]{z}}}=\sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[m\cdot n]{y}\cdot\sqrt[m\cdot n\cdot p]{z}}$

Ejemplo

$\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{b\cdot\sqrt{c}}}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{b}\cdot\sqrt[12]{c}$

3. Si $x^{x^5}=5$, calcule x.

Resolución

En este tipo de preguntas se sugiere formar en el segundo miembro una forma sucesiva

$$x^{x^5}=5=\sqrt[5]{5}^{\,5}=\sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^{\,5}}$$

Comparando tenemos $x=\sqrt[5]{5}$

En general, si $x^{x^{\cdot^{\cdot^{x^n}}}}=n\ \rightarrow\ x=\sqrt[n]{n}$

Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Si $2^{64}=a^a$ y $\sqrt{3}^{54}=(3b)^b$, halle $3a+2b$.

UNMSM 2010-II

Resolución

Al transformar el primer dato

$$2^{64}=2^{4\cdot 16}=(2^4)^{16}=16^{16}$$

tendremos $16^{16}=a^a$, de donde $a=16$.

En el segundo dato $\sqrt[2]{3}^{2\cdot 27}=(3b)^b$

elevamos al cubo $3^{27}=(3b)^b$

$$(3^3)^{27}=(3b)^{3b} \rightarrow 27^{27}=(3b)^{3b}$$

de donde $3b=27 \rightarrow b=9$

$\therefore\ 3(16)+2(9)=66$

Problema N.° 2

Si $x=3^{2^{k^2+1}}$, donde k es un número entero no nulo, entonces cuál es el valor de $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}$.

UNMSM 2010-II

Resolución

Recordemos que $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{4}}$.

Reemplazamos el dato en lo pedido

$$\left(3^{2^{k^2+1}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(3^{2^{k^2+1}}\right)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{2^{k^2+1}}{2}}+3^{\frac{2^{k^2+1}}{2^2}}$$

división de bases iguales

$$=3^{2^{k^2}}+3^{2^{k^2-1}} \text{ factorizando } 3^{2^{k^2-1}}$$

tenemos que: $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=3^{2^{k^2-1}}\cdot\left(3^{2^{k^2-1}}+1\right)$.

Problema N.° 3

Si x es un número positivo, tal que

$$\sqrt[3]{x^3\sqrt{x^2\sqrt{\sqrt{x}}}}=x^{\left(\frac{4}{a}\right)^{-1}} \text{ y } \frac{7(3^{b-1})}{9^{b+1}-2(3^{2b})}=3^b,$$

halle la suma $a+b$.

UNMSM 2009-II

Resolución

Aplicamos la regla práctica

$$\sqrt[3]{x^3\cdot\sqrt[2]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^1}}}=x^{\frac{a}{4}} \rightarrow x^{\frac{33}{24}}=x^{\frac{a}{4}}$$

de donde

$$\frac{33}{24}=\frac{a}{4} \rightarrow a=\frac{11}{2}$$

De la segunda condición

$$\frac{7\cdot 3^{b}\cdot 3^{-1}}{\underbrace{9^b\cdot 9-2\cdot 9^b}_{7\cdot 9^b}}=3^b$$

tenemos $\dfrac{\cancel{7}\cdot 3^{-1}}{\cancel{7}\cdot 9^b}=1$

$\rightarrow\ 3^{-1}=9^b$

dando forma $3^{-1}=3^{2b}$ de donde

$$2b=-1 \rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ a+b=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}=\frac{10}{2}=5$$

Problema N.° 4

Si $\left(\dfrac{7^{15}-7^n}{7^{n-4}-7^3}\right)^{\frac{1}{8}}=7$, halle la suma de las cifras de n.

UNMSM 2007-I

Resolución

Elevando al exponente 8 obtenemos

$$\frac{7^{15}-7^n}{\boxed{7^{n-4}-7^3}}=7^8 \rightarrow 7^{15}-\boxed{7^n}=7^{n+4}-\boxed{7^{11}}$$

$$7^{15}+7^{11}=7^{n+4}+7^n$$

$$\rightarrow\ 7^{11}\cancel{(7^4+1)}=7^n\cancel{(7^4+1)}$$

$$7^{11}=7^n$$

de donde $n=11$

$\therefore\ \sum$cifras de $n=2$

NIVEL BÁSICO

1. Si

$$M=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}-9^0 \text{ y}$$

$$N=(-2)^3+2^{-2}+(-9)^0,$$

calcule el valor de $2M-4N$.

A) 132 B) 194 C) 156
D) 198 E) 100

2. ¿Cuál de los siguientes números es un cuadrado perfecto?

A) 2^3 B) 5^6 C) 7^5
D) 6^7 E) 15

3. Si al efectuar $2\cdot4\cdot8\cdot16\cdot32\cdot64$ se obtiene 2^b, indique el valor de b.

A) 42 B) 21 C) 20
D) 18 E) 15

4. Indique el valor de $\left\{\frac{5^{27}}{5^{25}}-\left(\frac{3^{31}}{3^{29}}+\frac{2^{29}}{2^{25}}\right)\right\}^5$.

A) 0 B) 1 C) 32
D) 243 E) 5^{10}

5. Señale el exponente de x luego de reducir

$$\frac{(x^5)^4\cdot(x^2)^3}{(x^3)^6}.$$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

6. Al reducir la expresión $\left(\frac{x^4\cdot y^2}{x^5\cdot y^3}\right)^2\cdot\left(\frac{x^6\cdot y^2}{x^2\cdot y^5}\right)^{-1}$,

se obtiene $x^a\cdot y^b$. Calcule $a+b$.

A) -5 B) 7 C) 14
D) -1 E) -2

7. Al dividir $(8^5)^5$ por $4^8\cdot2^8$ obtenemos

A) 8^{17} B) 8^7 C) 2^{34}
D) 4^{17} E) 8^{32}

8. Si $2^{b+3}=5$, indique el valor de 4^b.

A) $\frac{25}{8}$ B) $\frac{25}{16}$ C) $\frac{25}{64}$
D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{5}{8}$

9. Al efectuar $(125^5)^4-(25^5)^6$ se obtiene

A) 100. B) 75. C) 50.
D) 5. E) 0.

10. Sean x e y números enteros tal que verifican $2^x\cdot3^y=1296$. Según ello calcule $x+y$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

11. Señale el equivalente reducido de $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$.

A) $\frac{1}{4}$ B) 2^6 C) $\frac{1}{2}$
D) 1 E) 2

12. Reduzca $\dfrac{2^{5^{1^{2013}}}}{\left(\left(\ldots\left((8^{-3})^{-2}\right)\ldots\right)^4\right)^5}$.

A) 2 B) $\frac{2}{3}$ C) 32
D) $\frac{3}{5}$ E) 8

13. Calcule el valor de $2^{25^{8^{-3^{-1}}}}$.

A) 32 B) 25 C) 1024
D) 512 E) $\sqrt{2}$

14. Reduzca $\dfrac{\sqrt[10]{2^{5x+2}}}{\sqrt[10]{2^{12+5x}}}$.

A) 2 B) $\dfrac{1}{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt[5]{2}$ E) 1

15. Al reducir $\sqrt{5\cdot\sqrt[3]{7\cdot\sqrt[4]{2}}}$ obtenemos $5^{a}\cdot 7^{b}\cdot 2^{c}$, según ello determine el valor de $a+b+c$.

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{17}{24}$ C) $\dfrac{1}{24}$
D) 1 E) 32

16. Si $\sqrt[m]{\sqrt[n]{2}}=\sqrt[m+n]{2}$, determine $\sqrt[m]{5}^{\,n}$.

A) $\dfrac{1}{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) 5
D) 25 E) $\sqrt[4]{5}$

17. Si $\left(x^{3}\cdot\sqrt[3]{x}\right)^{m}$ se reduce a x^{10}, calcule el valor de m.

A) 6 B) $\dfrac{1}{3}$ C) 9
D) 1 E) 3

18. Si $\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x^{3}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}}}$ se transforma a $x^{\frac{a}{b}}$, indique el valor de $b-a$, donde a y b son primos entre sí.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

19. Si $\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{4}\sqrt{4}}=n$, determine el equivalente reducido de $\sqrt[n]{n\cdot\sqrt{n}}$.

A) 3 B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt[4]{3}$
D) 9 E) $\sqrt[3]{9}$

20. Reduzca $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{24}}{\sqrt{6}+\sqrt{54}}$.

A) $\dfrac{1}{4}$ B) 3 C) 6
D) $\dfrac{3}{4}$ E) $\dfrac{1}{2}$

NIVEL INTERMEDIO

21. ¿Cuál de las alternativas representa un divisor de $3^{4}\cdot 4^{3}\cdot 5^{3}$?

A) 42 B) 85 C) 45
D) 17 E) 105

22. Halle el valor de x en $4^{x+1}=\left(\dfrac{1}{8}\right)^{1-x}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

23. Reduzca la expresión $\dfrac{2^{x+2013}+2^{x+2010}}{2^{x+2013}+2^{x+2012}}$.

A) 1 B) $\dfrac{3}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$
D) $\dfrac{9}{2}$ E) $\dfrac{9}{4}$

24. Señale qué número no supera a $\dfrac{2^{2003}\cdot 9^{1001}}{4^{1001}\cdot 3^{2003}}$.

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 2
D) $\dfrac{4}{3}$ E) 1

25. Indique el exponente de x^3 en x^{3^4}.

A) 81 B) 4 C) 9
D) 27 E) 3

26. Si se cumple que $a^b=b^{-a}=3$,

determine el valor de $\dfrac{a^{3b}+b^{-2a}}{a^{-b}}$.

A) 12 B) 36 C) $\dfrac{1}{3}$
D) 27 E) 108

27. La suma de los dígitos del producto $2^{2011}\cdot 5^{2013}$ es

A) 25. B) 26. C) 7.
D) 28. E) 2013.

28. Si

$a=\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5...}}}$ y

$b=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2...}}}$,

calcule

$\sqrt{2ab-\sqrt{2ab-\sqrt{2ab-...}}}$.

A) 5 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

29. Si

$a=\sqrt{3\sqrt[4]{2}}$; $b=\sqrt[4]{2\sqrt{3}}$,

determine el valor de a^8-b^8.

A) 100 B) 150 C) 140
D) $2\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{6}$

30. Teniendo en cuenta que $x^{x^{2}-3}=5$,

calcule $x\cdot x^{x^2}$.

A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) 1
D) 5^3 E) 5^2

31. Si se cumple que $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\left(\dfrac{2012}{2013}\right)^{2013}$,

determine el valor de 2014+x.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 2013 E) 2027

32. Los números enteros a y b verifican

$$\sqrt[a+b]{\frac{\sqrt[b]{ab^{-1}}}{\sqrt[a]{a^{-1}b}}}=5a\sqrt[2]{\frac{1}{5}}$$

Determine el menor valor positivo de b si a es un número primo.

A) 10 B) 15 C) 5
D) 25 E) 35

33. Si se sabe que $2^{3x}\cdot\sqrt[x]{8^{4x+7}}=8^{\frac{28}{x}}$, podemos afirmar, con respecto a x, que

A) es un número par.
B) es primo.
C) es múltiplo de cinco.
D) es divisible por 6.
E) existen dos valores para x.

34. Si se cumple que

$(2x+y)^{x-y}=16$ y

$\sqrt[x-y]{2304}=12x^2+12xy+3y^2$,

indique el valor de x+2013y.

A) 2012^0+1 B) 2014 C) 2013^2+1
D) $1+2013\cdot 2012$ E) 2015

35. Si se tiene que

$$x^{\sqrt{x}}=\sqrt[3\sqrt{y}]{\frac{65536}{\left(y\cdot\sqrt[3]{y}\right)^2}},$$

determine el valor de $x^3\cdot y^2$.

A) 1024 B) 2048 C) 65 536
D) 32 768 E) 4096

Polinomios

Capítulo II

Objetivos

- Identificar y denotar un polinomio de acuerdo a su definición.
- Conocer la forma general de un polinomio en una variable y en sus casos particulares.
- Conocer la teoría de grados y los polinomios especiales.

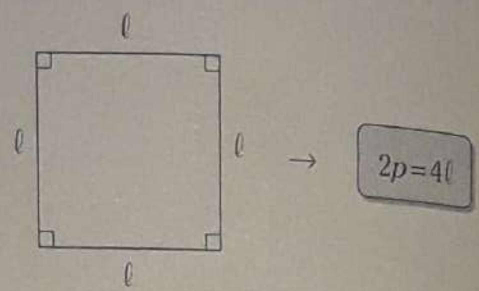
En matemáticas, generalmente usamos símbolos para representar elementos arbitrarios de un conjunto. Por lo tanto, la notación $x \in \mathbb{R}$ significa que x es un número real, aunque no especifique un número real en particular. Un símbolo literal que se usa para representar cualquier elemento de un conjunto dado se denomina **variable**. Las últimas letras del alfabeto tales como w, x, y, z se emplean a menudo como variables. En cambio, el numeral que se utiliza para indicar un elemento fijo de un conjunto numérico se llama **constante**. Por ejemplo, 5 representa únicamente al número cinco.

En este capítulo vamos a suponer que todas las variables representan números reales. En algunos casos debemos restringir el conjunto de valores permitidos por una variable a algún subconjunto de $\mathbb{R}$, por ejemplo, cuando trabajamos con la **expresión algebraica** $P_{(x)} = \sqrt{x}$; si queremos garantizar la existencia de la expresión $P_{(x)}$, entonces x debe ser no negativo ($x \geq 0$). El subconjunto de $\mathbb{R}$ donde se encuentran los valores permitidos para la variable x de la expresión $P_{(x)}$ se llama dominio de P.

Nociones previas

Ideas

1. La fórmula que permite calcular el perímetro ($2p$) de un cuadrado de lado ℓ es 4ℓ. Así, si



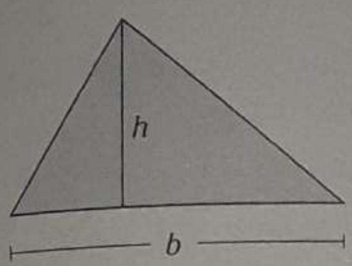
Cálculo del perímetro

Valor de ℓ	Perímetro ($2p$)
$\ell=1$	$2p=4\times1=4$
$\ell=2$	$2p=4\times2=8$
$\ell=1/2$	$2p=4\times\frac{1}{2}=2$
$\ell=\sqrt{3}$	$2p=4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
$\vdots$	$\vdots$

Ahora se puede observar que ℓ puede asumir varios valores, es decir, los valores de ℓ varían, mientras que el número cuatro es fijo y constante, debido a ello se le designará un nombre a cada elemento de la fórmula mencionada, así

$$2p=4\ell \begin{cases} \ell\text{: variable} \\ 4\text{: constante} \\ 4\ell\text{: expresión matemática} \end{cases}$$

2. La fórmula para calcular el área de una región triangular es $\mathbb{A}=\frac{1}{2}b\times h$, es decir, si



Tenemos

$$\boxed{\mathbb{A}=\frac{1}{2}b\times h} \rightarrow \begin{cases} b \text{ y } h\text{: variables} \\ 1/2\text{: constante} \\ \frac{1}{2}b\times h\text{: expresión matemática} \end{cases}$$

Ahora también se nota que b y h pueden asumir diferentes valores:

- La **variable** es un símbolo o letra que puede asumir diferentes valores en una expresión matemática.
- La **constante** es un número o letra que representa a un valor fijo en una expresión matemática.
- La **expresión matemática** es aquel conjunto de números, símbolos o letras que están ligados a través de una o más operaciones matemáticas.

Notación matemática

Permite diferenciar a la variable o variables de la constante o constantes en una expresión matemática.

Ejemplos

1. En la expresión matemática

   $P_{(x)}=4x^3$

   - Su variable es x.
   - Su constante es 4.

2. En la expresión matemática

   $E_{(x;\,y)}=5xy^2-2bx$

   - Sus variables son x e y.
   - Sus constantes son 5 y $-2b$.

3. En la expresión matemática

   $f_{(4x-1)}=2x+1$

   - Su variable es $4x-1$.

Valor numérico

Es el resultado que se obtiene cuando a la variable o variables se les reemplaza por un valor en particular.

Ejemplos

1. Sea $f_{(x)}=x^2+x+1$

   Para $x=2$ se tiene

   $f_{(2)}=2^2+2+1=4+3$

   $f_{(2)}=7$

   Concluimos que 7 es el valor numérico de f para $x=2$.

2. Si $Q_{(x;\,y)}=\frac{x}{y}+x+y$,

   su valor numérico para $x=8$ e $y=2$ se obtiene así

   $Q_{(8;\,2)}=\frac{8}{2}+8+2=4+10$

   $\therefore\ Q_{(8;\,2)}=14$

Nota

No siempre está definido el valor numérico de una expresión matemática.

Si $Q_{(x;\,y)}=\frac{x}{y}+x+y$, ahora para $x=5$ e $y=0$ se tiene

$$Q_{(5;\,0)}=\frac{5}{0}+5+0$$

No está definido, lo que implica que $Q_{(5;\,0)}$ no esté definido.

Aplicación 1

Si $P_{(x)}=x^5-x+2$,

calcule $P_{(10)}+P_{(-10)}$.

Resolución

En $P_{(x)}=x^5-x+2$ evaluamos para

$x=10 \rightarrow P_{(10)}=10^5-10+2=10^5-8$

$x=-10 \rightarrow P_{(-10)}=(-10)^5-(-10)+2=-10^5+12$

Luego

$$P_{(10)}+P_{(-10)}=10^5-8+\left(-10^5+12\right)$$

$$=\cancel{10^5}-8-\cancel{10^5}+12$$

$\therefore\ P_{(10)}+P_{(-10)}=2$

Aplicación 2

Si $M_{(x;\,y)}=x^2-y^2+1$, calcule $M_{(10;\,5)}$.

Resolución

En $M_{(x;\,y)}=x^2-y^2+1$ evaluamos para $x=10$ e $y=5$.

$M_{(10;\,5)}=10^2-5^2+1=100-25+1$

$\therefore\ M_{(10;\,5)}=76$

Cambio de variable

La variable de una expresión matemática puede ser cambiada por otra variable, pasando a depender la expresión de la nueva variable, es decir

$$\boxed{\text{Si } P_{(x)} \xrightarrow[\text{se tiene}]{\text{al cambiar } x \text{ por } y} P_{(y)}}$$

Ejemplos

1. Si $P_{(x)}=2x+1$, ahora al cambiar x por y se tiene

   $P_{(y)}=2y+1$

2. Si $Q_{(x)}=x+4$ y cambiamos x por $m+1$, se obtiene

   $Q_{(m+1)}=m+1+4$

   $\therefore\ Q_{(m+1)}=m+5$

Aplicación 3

Si $P_{(x)}=x^2+2$, halle $P_{(y)}$; $P_{(2m)}$ y $P_{(n+1)}$.

Resolución

Hacemos los cambios requeridos en la expresión $P_{(x)}=x^2+2$.

1.° Cambiamos x por y

$P_{(y)}=y^2+2$

2.° Cambiamos x por $2m$

$P_{(2m)}=(2m)^2+2$

$P_{(2m)}=4m^2+2$

3.° Cambiamos x por $n+1$

$P_{(n+1)}=(n+1)^2+2$

$P_{(n+1)}=n^2+2n+1+2$

$\therefore\ P_{(n+1)}=n^2+2n+3$

Aplicación 4

Si $f_{(2x-3)}=2x$, halle $f_{(x)}$.

Resolución

En este caso se buscará formar la variable $(2x-3)$ en el segundo miembro de la expresión, para ello se restará y sumará 3, así

$$f_{(2x-3)}=2x=2x-3+3$$

$$f_{(2x-3)}=(2x-3)+3$$

Ahora cambiamos $2x-3$ por x, se obtiene

$$f_{(x)}=x+3$$

TÉRMINOS SEMEJANTES

Son expresiones matemáticas de un término que solo se diferencian en sus constantes, que no deben ser nulas.

Ejemplos

1. Sean los términos

   $t_{(x;y)}=6x^3y^2$; $P_{(x;y)}=-5x^4y^3$ y

   $f_{(x;y)}=-\sqrt{2}x^3y^2$

   De estos, son semejantes $t_{(x;y)}$ y $f_{(x;y)}$, los cuales tienen iguales variables y exponentes de sus respectivas variables.

2. Dados los términos

   $A_{(x;y)}=6x^{-2}y^5$

   $B_{(x;y)}=\dfrac{7}{2}x^3y^{-6}$

   $C_{(x;y)}=-16x^{-2}y^5$

   Son términos semejantes.

   $D_{(x;y)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^6y^{-3}$

Definición de polinomio

Se denomina polinomio a la expresión matemática que cumpla lo siguiente:

- Para su variable, o variables, solo están permitidas las operaciones de adición, sustracción y/o multiplicación o una combinación de estas pero en un número finito de veces.
- El exponente o los exponentes de su variable o variables son números enteros y positivos.

Ejemplos

1. $P_{(x;y)}=x^2y^3+6x^3y^4$ se lee: "Polinomio P de variables x e y", o simplemente: "P de x e y".
2. $f_{(t)}=4t^2+6t^3$ se lee: "Polinomio f de variable t", o simplemente: "f de t".

OBSERVACIÓN

- La expresión matemática $P_{(x;y)}=x^2y+3xy^{-2}$ no es polinomio, pues el exponente de la variable y es negativo.
- La expresión matemática $f_{(x)}=x^2+2\sqrt{x}-3$ no es polinomio, pues su única variable está afectada por un radical.
- La expresión matemática $g_{(x)}=1+x+x^2+x^3+...$ no es polinomio, pues tal número de veces que se da la adición para la variable no es finito.

Aplicación 5

Si la expresión matemática

$P_{(x;y)}=x^{n-2}y^4+2x^{\frac{n}{2}}y^3-3y^{5-n}$ representa a un polinomio, calcule el valor de n.

Resolución

Por ser un polinomio, todos sus exponentes de las variables deben ser números enteros y positivos, así

$$\underbrace{(n-2)\in\mathbb{Z}^+}_{(I)} \quad y \quad \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)\in\mathbb{Z}^+}_{(II)} \quad y \quad \underbrace{(5-n)\in\mathbb{Z}^+}_{(III)}$$

Ahora de (II) se observa que n debe ser par para que $\left(\frac{n}{2}\right)$ sea entero.

- Si $n=2$, solo cumplen (II) y (III) pero no (I).
- Si $n=4$, cumple las tres condiciones.
- Si n es seis o los demás pares solo cumplen (I) y (II) mas no (III), entonces se concluye que $n=4$ y el polinomio es $P_{(x;\,y)}=x^2y^4+2x^2y^3-3y$.

Nota

A los polinomios que presentan de uno hasta cuatro términos se les da un nombre específico, así

- **Monomio:** polinomio de un solo término
- **Binomio:** polinomio de dos términos
- **Trinomio:** polinomio de tres términos
- **Cuatrinomio:** polinomio de cuatro términos

Ejemplos

- $B_{(x;\,y)}=6x^2y^3+y^8$ binomio
- $M_{(x;\,y;\,z)}=\frac{2}{3}x^2y^4z^6$ monomio
- $T_{(x)}=\sqrt{2}x^4-4x^2-5x$ trinomio
- $Q_{(x;\,y)}=x^3-x^2y+6xy^2-y^3$ cuatrinomio

Polinomio en una variable

Este polinomio se caracteriza por presentar una sola variable, y al exponente mayor de dicha variable lo llamaremos grado del polinomio.

En particular a los polinomios en una variable desde grado uno hasta grado cuatro se les asignará un nombre específico, así

Nombre	Forma genérica	Coeficientes	Término independiente	Ejemplos
Polinomio lineal o de primer grado	$P_{(x)}=ax+b;\ a\neq 0$	a y b	b	$P_{(x)}=2x+3$ $Q_{(x)}=-x+5$
Polinomio cuadrático o de segundo grado	$P_{(x)}=ax^2+bx+c;\ a\neq 0$	a; b y c	c	$P_{(x)}=4x^2-x+2$ $f_{(x)}=x^2+3$
Polinomio cúbico o de tercer grado	$P_{(x)}=ax^3+bx^2+cx+d;\ a\neq 0$	a; b; c y d	d	$P_{(x)}=x^3+2x^2+3x+4$ $f_{(x)}=2x^3+4x-7$
Polinomio cuártico o de cuarto grado	$P_{(x)}=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e;$ $a\neq 0$	a; b; c; d y e	e	$P_{(x)}=x^4+2x^3+x^2-x+2$ $f_{(x)}=x^4-2x^2+3$

NOTA

Al coeficiente que acompaña a la variable con mayor exponente se le denomina coeficiente principal y no puede ser nulo.

1. Dado el polinomio cúbico
   $P_{(x)}=4x^3+6x^2-8x+13.$
   - Su coeficiente principal es 4.
   - Sus coeficientes son 4; 6; −8 y 13.
   - Su término independiente es 13.

2. Dado el polinomio
   $Q_{(x)}=12x^2+3x-13x^4-7.$
   - Su coeficiente principal es −13.
   - Sus coeficientes son 12; 3; −13 y −7.
   - Su término independiente es −7.

Forma general de un polinomio en una variable

$$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}\ldots+a_{n-1}x+a_n;\ a_0\neq 0$$

donde

- Su grado es n ($n\in\mathbb{Z}^+$).
- Su coeficiente principal es a_0.
- Sus coeficientes son $a_0; a_1; a_2; \ldots; a_n$.
- Su término independiente es a_n (no depende de la variable).

Ejemplo

En el polinomio

$P_{(x)}=15x^5+4x^4-6x^3+5x^2-7x-\sqrt{2}$

- Su grado es 5.
- Su coeficiente principal es 15.
- Sus coeficientes son 15; 4; −6; 5; −7 y $-\sqrt{2}$.
- Su término independiente es $-\sqrt{2}$.

Aplicación 6

Determine el polinomio cuadrático cuyo coeficiente principal es 3, su término independiente es el doble del coeficiente principal y la suma de coeficientes es 5.

Resolución

Sea el polinomio cuadrático $P_{(x)}=ax^2+bx+c$; $a\neq 0$.

Por datos

- $a=3$
- $c=2\times 3=6$
- $\underset{3}{a}+b+\underset{6}{c}=5 \rightarrow b=5-9 \rightarrow b=-4$

$\therefore\ P_{(x)}=3x^2-4x+6$

NOTA

Dado el polinomio

$P_{(x)}=6x^3+4x^2+5x-10$, diremos que

- 6 es su coeficiente principal y $6x^3$ es su término cúbico.
- 4 es su coeficiente cuadrático y $4x^2$ es su término cuadrático.
- 5 es su coeficiente lineal y $5x$ es su término lineal.
- −10 es su término independiente.

DEFINICIONES

Polinomio mónico

Es aquel polinomio en una variable de grado mayor o igual a uno, cuyo coeficiente principal es la unidad.

Por ejemplo, veamos el siguiente cuadro:

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	¿Es mónico?
$P_{(x)}=x^4-3x^2+6x-1$	4	1	sí
$Q_{(x)}=5x^2+3x+x^3+2$	3	1	sí
$f_{(x)}=2+3x-6x^3+x^5$	5	1	sí
$H_{(x)}=-x^3+6x^2+3x-7$	3	−1	no
$M_{(x)}=x^3+2x^2+3x^4-3x-2$	4	3	no

Polinomio constante

Es aquel polinomio en una o más variables; además no depende de la variable y su forma es

$$P_{(x)}=b;\ b\in\mathbb{R}$$

Ahora

1. Si $b\neq 0$, se dice que el polinomio $P_{(x)}=b$ es de grado 0, así por ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} P_{(x)}=5 \\ P_{(x)}=-\dfrac{3}{2} \\ P_{(x)}=\sqrt{2} \end{array}\right\}\text{Son polinomios constantes de grado 0. Y no se escribe dicho grado.}$$

Además

Si

$$P_{(x)}=5 \rightarrow \begin{cases} P_{(1)}=5 \\ P_{(-3)}=5 \\ P_{\left(\frac{1}{2}\right)}=5 \\ P_{(\sqrt{2})}=5 \\ \vdots \end{cases}$$

Como se observa, el valor numérico del polinomio es la misma constante para cualquier valor que se le asigna a su variable.

2. Si $b=0$, se dice que el polinomio $P_{(x)}=0$ es idénticamente nulo y su grado no está definido.

   Cuando $P_{(x)}$ es un polinomio idénticamente nulo, también lo podemos denominar polinomio nulo y lo denotaremos así $P_{(x)}\equiv 0$.

   Si

$$P_{(x)}\equiv 0 \rightarrow \begin{cases} P_{(2)}=0 \\ P_{(-3)}=0 \\ P_{\left(\frac{1}{3}\right)}=0 \\ P_{(\sqrt{5})}=0 \\ \vdots \end{cases}$$

Como se observa, el valor numérico del polinomio nulo siempre es cero para cualquier valor que se le asigne a su variable.

Nota

Dado el polinomio $P_{(x)}=Ax^2+Bx+C$, diremos que $P_{(x)}\equiv 0$ si y solo si $A=0$; $B=0$ y $C=0$.

Aplicación 7

Si el polinomio

$$P_{(x)}=\left(a^a-26\right)x^2+4x-2$$

es mónico, calcule $P_{(a)}$.

Resolución

Como el polinomio es mónico se cumple que

$$a^a-26=1$$

$$a^a=27 \rightarrow a^a=3^3$$

$$\rightarrow a=3$$

Luego el polinomio es $P_{(x)}=x^2+4x-2$.

Nos piden

$$P_{(a)}=P_{(3)}=3^2+4\times 3-2$$

$$\therefore\ P_{(a)}=19$$

Aplicación 8

Calcule $P_{(2013)}$

si $P_{(1)}+P_{(2)}+P_{(3)}+\ldots+P_{(10)}=50$, además P es un polinomio constante.

Resolución

Si P es un polinomio constante, entonces es de la forma $P_{(x)}=b$, lo que implica que

$$P_{(1)}=b;\ P_{(2)}=b;\ P_{(3)}=b;\ \ldots;\ P_{(10)}=b$$

Al reemplazar en el dato, tenemos

$$\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{10 \text{ sumandos}}=50$$

$$10b=50 \rightarrow b=5$$

Luego el polinomio es

$$P_{(x)}=5$$

$$\therefore\ P_{(2013)}=5$$

Aplicación 9

Si el polinomio

$P_{(x)}=(m-3)x^2+(n-m-1)x+(r-n)$

es idénticamente nulo, calcule el valor de $m+n+r$.

Resolución

Como $P_{(x)}\equiv 0$

$\rightarrow (m-3)x^2+(n-m-1)x+r-n\equiv 0$ de donde

- $m-3=0 \rightarrow m=3$
- $n-m-1=0 \rightarrow n=m+1=4$
- $r-n=0 \rightarrow r=n=4$

$\therefore\ m+n+r=3+4+4=11$

Propiedades

Dado el polinomio

$P_{(x)}=Ax^3+Bx^2+Cx+D;\ A\neq 0$, se cumple lo siguiente:

1. La suma de coeficientes es $P_{(1)}=A+B+C+D$.
2. El término independiente es $P_{(0)}=D$.

NOTA

Esta propiedad es general para todo polinomio de grado mayor o igual que uno.

Ejemplos

1. Sea el polinomio $P_{(x)}=5x^3+6x-3$.
   - La suma de coeficientes es $P_{(1)}=5+6-3=8$.
   - El término independiente es $P_{(0)}=-3$.
2. Sea el polinomio $P_{(x-3)}=x^2+x+2$.

   Aquí aparentemente la suma de coeficientes es $1+1+2=4$ y el término independiente es 2, lo cual es incorrecto debido a que la variable es $x-3$ y la suma de coeficientes y el término independiente se calculan así

   - Cálculo de la suma de coeficientes

     $$\begin{aligned} x-3&=1\\ x&=4 \end{aligned} \rightarrow P_{(1)}=4^2+4-2=18$$

   - Cálculo del término independiente

     $$\begin{aligned} x-3&=0\\ x&=3 \end{aligned} \rightarrow P_{(0)}=3^2+3-2=10$$

Aplicación 10

Si en el polinomio $P_{(x)}=4(x+1)^n-n(x-1)$ se cumple que la suma de coeficientes más el término independiente es $36+n$, ¿cuánto es el valor de n?

Resolución

Por dato $P_{(1)}+P_{(0)}=36+n$ (I)

Ahora en $P_{(x)}=4(x+1)^n-n(x-1)$ evaluamos para

$$x=1 \rightarrow P_{(1)}=4(2)^n-n(0)=4\cdot 2^n$$

$$x=0 \rightarrow P_{(0)}=4(1)^n-n(-1)=4+n$$

Reemplazamos en (I)

$$4\cdot 2^n+4+\cancel{n}=36+\cancel{n} \rightarrow 4\cdot 2^n=32$$

$$\rightarrow 2^2\cdot 2^n=2^5 \rightarrow 2^{n+2}=2^5$$

$$\rightarrow n+2=5$$

$$\therefore\ n=3$$

Teoría de grados

El grado es la característica que presenta todo polinomio no nulo, y cuando este tiene dos o más variables, se presentan dos tipos de grados tales como el grado relativo y el grado absoluto.

Para monomios no constantes

Grado relativo (GR)

Es el exponente de cada una de las variables.

Grado absoluto (GA)

Es la suma de todos los exponentes de las variables.

Ejemplos

1. En el siguiente monomio $M_{(x;\ y)}=65x^4y^5$
   $GR_x=4$ se lee: "Grado relativo respecto a x".
   $GR_y=5$ se lee: "Grado relativo respecto a y".
   $GA_{(M)}=4+5=9$ se lee: "Grado absoluto del monomio M".

2. Del monomio
   $A_{(x;\ y;\ z)}=-3b^3x^5y^6z^7;\ b\neq 0,$
   se tiene
   $GR_x=5$; $GR_y=6$; $GR_z=7$ y $GA_{(A)}=5+6+7=18$.

Nota

Como la letra b no es variable, entonces su exponente no se puede considerar como un grado relativo.

Para polinomios de dos o más términos

Grado relativo

Es el mayor de los exponentes de cada una de las variables.

Grado absoluto

Para ubicarlo se calcula el grado absoluto de cada término y el mayor es el grado absoluto del polinomio.

Ejemplo

Sea el polinomio

$$P_{(x;\ y;\ z)}=\underbrace{5x^2y^3z^5}_{t_1}-\underbrace{12x^4y^2z^6}_{t_2}+\underbrace{15x^3y^7z}_{t_3}$$

Ahora se tiene:

- El mayor exponente de x es 4 $\rightarrow$ $GR_x=4$
- El mayor exponente de y es 7 $\rightarrow$ $GR_y=7$
- El mayor exponente de z es 6 $\rightarrow$ $GR_z=6$

También

$$GA_{(t_1)}=2+3+5=10$$
$$GA_{(t_2)}=4+2+6=12$$
$$GA_{(t_3)}=3+7+1=11$$

Por lo tanto, $GA_{(P)}=12$ es el grado absoluto del polinomio.

Polinomios especiales

Polinomio homogéneo

Este polinomio de dos o más variables con términos no semejantes posee el mismo grado absoluto en todos sus términos.

Ejemplo

Sea el polinomio

$$P_{(x;\ y)}=\underbrace{3x^8}_{8}+\underbrace{4x^3y^5}_{8}-\underbrace{x^6y^2}_{8}$$

$GA_{(P)}=8\quad 8\quad 8$

Como se observa, el polinomio es homogéneo ya que presenta el mismo grado absoluto en todos sus términos; dicho grado absoluto también es conocido como grado de homogeneidad del polinomio.

Aplicación 11

Calcule $(a+b)$ si el grado de homogeneidad del polinomio $P_{(x;\,y)}=x^{a-1}y^4+x^4y^{b-2}+5y^{n+1}$ es 7.

Resolución

Por dato, el polinomio es homogéneo y su grado de homogeneidad es 7, es decir

$$a-1+4=7\ ;\ 4+b-2=7\ ;\ n+1=7$$

$$\rightarrow\quad a=4\ ;\ b=5\ ;\ n=6$$

$$\therefore\quad a+b=9$$

Polinomio ordenado

Cuando el polinomio depende de una sola variable se dice que está ordenado si sus exponentes de la variable van aumentando o disminuyendo.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=5x^4+3x^3+x-6$ está ordenado en su forma decreciente puesto que sus exponentes van disminuyendo.
2. El polinomio $f_{(x)}=7-x^2+3x^3-x^5+3x^7$ está ordenado en forma creciente puesto que sus exponentes van aumentando.

Observación

Cuando el polinomio depende de dos o más variables para ver si está ordenado, se analiza cada variable.

Ejemplo

El polinomio

$P_{(x;\,y)}=3y+4xy^2+3x^3y^4-5x^6y^3-7x^8$

está ordenado en forma creciente respecto a la variable x y desordenado con respecto a la variable y.

Polinomio completo

Un polinomio en una variable es completo si presenta a todos los exponentes de la variable, desde el mayor exponente dado hasta el uno, incluyendo el término independiente.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=2x^2-6x+3x^3+7$ es completo de grado 3 y está desordenado.
2. El polinomio $Q_{(x)}=3x^5-6x^4+2x^3-4x^2-5x-10$ es completo y ordenado en forma decreciente, cuyo grado es 5.

Observación

Cuando el polinomio depende de dos o más variables, para ver si está completo se analizará respecto a cada variable.

Ejemplo

El polinomio $P_{(x;\,y)}=3x^4-2xy+6x^2y^2+5y^3$ está completo y ordenado en forma creciente pero respecto a la variable y.

Polinomios idénticos

Los polinomios P y Q en la misma variable y del mismo grado n, son idénticos si tienen el mismo valor numérico para por lo menos $(n+1)$ valores diferentes que se le asigna a su variable.

Ejemplo

Sean los polinomios

$$P_{(x)}=x^2-6x+9\ \text{ y }\ Q_{(x)}=(x-3)^2$$

$$\text{Si } x=1\ \rightarrow\ P_{(1)}=4\ \text{ y }\ Q_{(1)}=-4$$

$$\text{Si } x=0\ \rightarrow\ P_{(0)}=9\ \text{ y }\ Q_{(0)}=9$$

$$\text{Si } x=3\ \rightarrow\ P_{(3)}=0\ \text{ y }\ Q_{(3)}=0$$

$$\vdots\qquad\quad \vdots\qquad\quad \vdots$$

Como los polinomios son de grado 2 y tienen el mismo valor numérico para por lo menos tres valores diferentes que se le asigne a su variable, entonces P y Q son idénticos y se les representa así

$$P_{(x)}\equiv Q_{(x)} \text{ se lee: “}P\text{ es idéntico a }Q\text{”.}$$

Aplicación 12

Calcule $a+b+c$ si los polinomios

$P_{(x)}=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$ y

$Q_{(x)}=(x^2+1)(x-2)(x-3)$ son idénticos.

Resolución

Por dato $P_{(x)}\equiv Q_{(x)}$, es decir

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+6\equiv(x^2+1)(x-2)(x-3)$$

Como piden $(a+b+c)$, este valor se obtiene si lo evaluamos para $x=1$; así

$$1+a+b+c+6=(1+1)(-1)(-2)$$

$$a+b+c+7=4$$

$\therefore\quad a+b+c=-3$

Propiedad

Los polinomios

$P_{(x)}=Ax^2+Bx+C$ y $Q_{(x)}=Mx^2+Nx+R$

son idénticos si y solo si

$A=M$
$B=N$
$C=R$

Nota

Esta propiedad es general, se cumple para polinomios idénticos de grado mayor o igual que uno.

Aplicación 13

Si los polinomios

$P_{(x)}=(a^a-2)x^2+3x+b-1$ y $Q_{(x)}=2x^2+(c^3-5)x+3$

son idénticos, calcule el valor de abc.

Resolución

Por dato $P_{(x)}\equiv Q_{(x)}$, es decir

$$(a^a-2)x^2+3x+b-1\equiv 2x^2+(c^3-5)x+3$$

de donde

- $a^a-2=2 \rightarrow a^a=4$

  $\rightarrow a^a=2^2 \rightarrow a=2$

- $3=c^3-5 \rightarrow c^3=8$

  $\rightarrow c=\sqrt[3]{8} \rightarrow c=2$

- $b-1=3 \rightarrow b=4$

$\therefore\quad abc=2\times4\times2=16$

Problema N.° 1

Si los términos dados

$t_{1(x;y)}=4^n x^{n-1}\cdot y^{m+2}$,

$t_{2(x;y)}=-20x^{n-1}y^4$ y

$t_{3(x;y)}=3^n xy^{m+2}$

son semejantes, entonces al efectuar $t_1+t_2+t_3$ cuánto se obtendrá.

Resolución

Como los tres términos son semejantes, entonces los exponentes de sus variables respectivas son iguales, así

respecto a x: $n-1=1 \rightarrow n=2$

respecto a y: $m+2=4 \rightarrow m=2$

Luego los términos son:

$$\left.\begin{array}{l} t_{1(x;y)}=16xy^4 \\ t_{2(x;y)}=-20xy^4 \\ t_{3(x;y)}=9xy^4 \end{array}\right\} +$$

$$t_{1(x;y)}+t_{2(x;y)}+t_{3(x;y)}=5xy^4$$

Problema N.° 2

Siendo g una expresión matemática tal que

$g_{(x)}=g(x-2)+g(x-3)$.

Si $g_{(1)}=3$ y $g_{(3)}=4$,

calcule $g(g_{(0)})$.

Resolución

Se tiene

$$g_{(x)}=g(x-2)+g(x-3)$$

Evaluando para $x=3$ tenemos

$$\underbrace{g_{(3)}}_{4}=\underbrace{g_{(1)}}_{3}+g_{(0)}$$

$$4=3+g_{(0)} \rightarrow g_{(0)}=1$$

Nos piden

$$g_{(g(0))}=g_{(1)}=3$$

> **Nota**
> La elección del valor de x para evaluar en una expresión dependiente de x se puede deducir por los datos que tenemos y lo que nos piden.

Problema N.° 3

Si $f_{(\sqrt{x}-2)}=2x+1$, entonces $f_{(x)}$ a cuánto será igual.

Resolución

Se tiene

$$f_{(\sqrt{x}-2)}=2x+1 \qquad \text{(I)}$$

Ahora sea $\sqrt{x}-2=y$

$$\sqrt{x}=y+2 \rightarrow x=(y+2)^2$$

Luego reemplazamos en (I) de manera conveniente; así

$$f_{(y)}=2(y+2)^2+1$$

$$f_{(y)}=2(y^2+4y+4)+1$$

$$f_{(y)}=2y^2+8y+9$$

Ahora cambiamos y por x

$$\therefore \quad f_{(x)}=2x^2+8x+9$$

Problema N.° 4

En el siguiente polinomio

$P_{(2x-1)}=(4x-1)^n-(4x-1)^5+2012$,

se obtiene que la suma de coeficientes es igual a su término independiente, ¿cuál será el valor de n?

Resolución

> **Nota**
> $P_{(1)}$ es la suma de coeficientes.
> $P_{(0)}$ es el término independiente.

Ahora en el polinomio

$$P_{(2x-1)}=(4x-1)^n-(4x-1)^5+2012$$

evaluamos para

$$x=1 \rightarrow P_{(1)}=3^n-(3)^5+2012$$

$$x=\frac{1}{2} \rightarrow P_{(0)}=\left(4\times\frac{1}{2}-1\right)^n-\left(4\times\frac{1}{2}-1\right)^5+2012$$

$$P_{(0)}=(1)^n-(1)^5+2012$$

$$P_{(0)}=\cancel{1}-\cancel{1}+2012=2012$$

Pero por dato, $P_{(1)}=P_{(0)}$. Reemplazando se tiene

$$3^n-3^5+\cancel{2012}=\cancel{2012}$$

$$3^n=3^5$$

$$\therefore\ n=5$$

Problema N.º 5

Si el polinomio

$P_{(x)}=n+(n+1)x^{n+6}+(n+2)x^{n+7}+...$

es completo y ordenado, calcule $P_{(1)}-P_{(-1)}$.

UNMSM 2009-II

Resolución

Se observa que los exponentes de la variable aumentan en forma consecutiva, lo que implica que el polinomio está ordenado en forma creciente y el segundo término debe ser el término lineal, es decir, su exponente es uno, así $n+6=1 \rightarrow n=-5$. Luego en el polinomio se tiene

$$P_{(x)}=-5-4x-3x^2-2x^3-x^4+\underbrace{0x^5+...}$$

Esto no puede ser, puesto que el polinomio es completo y ninguno de sus coeficientes puede ser cero.

Ahora en el polinomio

$$P_{(x)}=-5-4x-3x^2-2x^3-x^4$$

evaluamos para

$$x=1 \rightarrow P_{(1)}=-5-4-3-2-1$$

$$P_{(1)}=-15$$

$$x=-1 \rightarrow P_{(1)}=-5+4-3+2-1$$

$$P_{(-1)}=-3$$

$$\therefore\ P_{(1)}-P_{(-1)}=-15-(-3)=-12$$

Problema N.º 6

Sea P un polinomio cuya suma de coeficientes y término independiente son 10 y 8, respectivamente.

Además

$P_{(2x-3)}=P_{(x-2)}+5x+n$

Calcule n.

Resolución

Asignemos $x=2:\ \underbrace{P_{(1)}}_{\cancel{10}}=\underbrace{P_{(0)}}_{8}+\cancel{10}+n$

de donde

$$n=-8$$

Problema N.º 7

Sea $P_{(x)}=3x-2$. Halle $\underbrace{P_{(P...P_{(x)}...)}}_{28\text{ paréntesis}}$

Resolución

Veamos casos particulares

- $P_{(x)}=3x-2$; cambiamos x por $P_{(x)}$

  $P_{(P_{(x)})}=3(3x-2)-2=9x-8=3^2x-(3^2-1)$

- $P_{(P_{(x)})}=9x-8$; cambiamos x por $P_{(x)}$

$$P_{(P_{(P_{(x)})})}=9(3x-2)-8=27-26=3^3x-(3^3-1)$$

Concluimos que $\underbrace{P_{(P...P_{(x)}...)}}_{28\text{ paréntesis}}=3^{28}x-(3^{28}-1)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NIVEL BÁSICO

1. Calcule el valor de n^2+3^m sabiendo que los términos
$S_{1(x)}=4x^{3m-n}$,
$S_{2(x)}=20x^5$ y
$S_{3(x)}=100x^{3n-7}$
son semejantes.

A) 43 B) 90 C) 73
D) 25 E) 17

2. Dada la expresión matemática
$f_{(x)}=x^2$, calcule la raíz cuadrada de $f_{(4)}^{\;f_{(3)}^{\;f_{(0)}}}$.

A) 25
B) 16
C) 4
D) 2
E) 1

3. Dado $P_{(x-2)}=3x-4$,
calcule $P_{(4)}+P_{(-4)}$.

A) 24 B) −8 C) 4
D) 14 E) 0

4. Si $G_{(x)}=\dfrac{3x+1}{x-3}$, al evaluar $G\left(G\left(G_{(4)}\right)\right)$ se obtiene

A) 13. B) 10. C) 4.
D) $\dfrac{13}{2}$. E) 1.

5. Si $S_{(x-1;\,y)}=x^2-\left(\dfrac{1}{y}\right)^2$, calcule el valor de $S_{\left(100;\,\frac{1}{99}\right)}$.

A) 0 B) 198 C) 200
D) 199 E) 400

6. Sea el polinomio
$f_{(x)}=x(x-2)+2$. Entonces el valor de $f_{(\sqrt{2}+1)}$ es

A) 1. B) 2. C) $\sqrt{2}$.
D) 3. E) $\sqrt{3}$.

7. Dada la siguiente expresión $f_{(2x-1)}=2x$, calcule el valor de $f_{(5x)}+f_{(-5x)}$.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) 10

8. Dadas la expresiones matemáticas
$H_{(\sqrt{x+5})}=x$ y $H_{(x^2)}=x^n-m$,
calcule la raíz cuadrada de $m+n$.

A) 9 B) 16 C) 4
D) 3 E) 1

9. Halle el polinomio Q si
$P_{(x+2)}=x+6$ y $P_{(Q_{(x)})}=2x+8$.

A) $2x+4$
B) $x+4$
C) $x+2$
D) x
E) $2x+1$

10. Halle $G_{(3x)}$ si $G_{\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{(x+3)^2-2^3}{x}$.

A) $3x+1$
B) $3x+6$
C) $x+2$
D) $3x+2$
E) $3x-1$

11. Respecto a
$f_{(x)}=4x^2-x^3-17+3x$,
indique el valor de verdad de los siguientes enunciados:
I. El polinomio es cuadrático.
II. El coeficiente principal es –1.
III. El término independiente es 17.

A) VFV B) VFF C) FVF
D) VVV E) FFF

12. Si el polinomio lineal
$P_{(x)}=ax+b$ es mónico, además
$P_{(2)}=5$, halle $P_{(a+b)}$.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 9 E) 10

13. Del polinomio
$P_{(x)}=6x^3-7x^5+3x^2-4$,
indique lo incorrecto.

A) Su grado es 5.
B) Su término independiente es –4.
C) La suma de coeficientes es –2.
D) Su término cúbico es $6x^3$.
E) Su coeficiente principal es 7.

14. La suma de coeficientes del polinomio cuadrático
$P_{(x)}=ax^{b-2}+bx+a+1$
es 11. Entonces su término independiente es

A) 1. B) 2. C) 3.
D) 5. E) 4.

15. Calcule el grado del siguiente polinomio
$P_{(x)}=8x^{2n}+10x^{n+2}-17x^{n^2}+4n$
si su término independiente es 12.

A) 9 B) 6 C) 5
D) 4 E) 2

16. Si el grado absoluto del monomio
$M_{(x;\,y)}=4x^4\cdot y^{n+1}$ es 10, calcule el grado relativo a x en el siguiente monomio
$B_{(x;\,y)}=2^n x^{3n}\cdot y^{12}$.

A) 5 B) 6 C) 15
D) 18 E) 12

17. Calcule la suma entre el grado absoluto, el grado relativo a x y el grado relativo a y del siguiente polinomio.
$P_{(x;\,y)}=4x^2y^5-x^7y^3+5x^4y^4$

A) 24 B) 22 C) 19
D) 25 E) 37

18. Dados los polinomios
$P_{(x)}=2(x+3)+5$ y
$Q_{(x)}=ax+ab-3$.
Si $P_{(x)}\equiv Q_{(x)}$, calcule la suma de cifras de a^b.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 15

19. Calcule $ab+a-b$ si el polinomio
$P_{(x)}=3x^3+5x^a+x^b-4x-a$ es completo y su coeficiente principal es 5.

A) 14 B) 12 C) 11
D) 10 E) 8

20. Si el polinomio
$f_{(x)}=(a-1)x^2+(b-2)x+a+b-c$
es idénticamente nulo, calcule $m\times n$ para que el siguiente polinomio
$$P_{(x)}=x^{2a+b+c}+\underbrace{\ldots}_{\substack{n\\\text{términos}}}+x^{2b}+\underbrace{\ldots}_{\substack{m\\\text{términos}}}+c^2$$
sea completo y ordenado.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

NIVEL INTERMEDIO

21. Dada la expresión algebraica

$P_{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=x^{2012}-16x^{2008}+4,$

calcule el valor de $\left[P_{(3)}\right]^{P_{(-1)}}$.

A) 2^6
B) 2^8
C) 2^{10}
D) 2^5
E) 4^2

22. Si $S_{(4^x+5)}=16^x+9\cdot16^{-x}+1,$

determine el valor de $S_{(8)}$.

A) 91 B) 81 C) 18
D) 11 E) 10

23. Dadas las expresiones matemáticas

$S_{(x+3)}=x^2+4$ y $f_{(x)}+S_{(x+1)}=S_{(x+2)}$,

calcule el valor de

$f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(3)}+\ldots+f_{(10)}$.

A) 80 B) 85 C) 90
D) 95 E) 136

24. Dada la expresión matemática

$\Psi_{(x+1)}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$, determine el valor de

$\frac{\Psi_{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\Psi_{\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{2}$.

A) 1

B) x^2

C) $1+x$

D) $1+x^2$

E) $1+\frac{1}{x^2}$

25. Si $P_{(x^2)}=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{2}$,

simplifique $\frac{P_{(x^2+x-1)}}{P_{(x^2-x-1)}}$.

A) $x+1$ B) x C) $\frac{x+1}{x-1}$

D) $-x$ E) $\frac{x-1}{x+1}$

26. Si $f_{(x)}\cdot f^2_{\left(\frac{1}{x}\right)}=2x+3$, entonces $\left[f_{(x)}\cdot f_{\left(\frac{1}{x}\right)}\right]^3\cdot x$ es

A) $4x^2+5x+3$.
B) $4x^2+6x+9$.
C) $6x^2+13x+6$.
D) $13x^2+x+2$.
E) $x+5$.

27. Si el polinomio

$P_{(x;\,y)}=5x^{\frac{12}{a}}+21xy^{a-5}-(a-12)y^{12}$

se reduce a dos términos, indique el valor de $P_{(a;\,0)}$.

A) 0
B) 50
C) 60
D) 100
E) 80

28. Del siguiente trinomio cúbico

$P_{(x)}=(n+2)x^{n^2+2}+(n-1)x^2-n^3+1,$

se puede afirmar que

A) su coeficiente principal es 3.
B) su término independiente es 1.
C) su suma de coeficientes es 1.
D) el valor de n es 1.
E) el coeficiente del término cuadrático es 2.

29. En el polinomio

$f_{(2x-1)}=(4x-1)^n-(4x-1)^5+2013,$

se obtiene que la suma de coeficientes es igual a su término independiente. Entonces el valor de n es

A) 3
B) 5
C) 7
D) 4
E) 2

30. El polinomio

$P_{(x)}=(7x^2-3)^{n-3}(2x-1)^{n+1}+$

$(n^2x^3-9)^7(2x+3)^{n-17}+(5x-7n)(5x-1)^{2n-17}$

tiene como término independiente 112.

Halle n.

A) 13 B) 18 C) 16
D) 20 E) 12

UNMSM 2004-II

31. Si la suma de coeficientes del polinomio

$P_{(x)}=(x^2+1)(x^2+3)(x^2+7)...(x^2+2^n-1)$

es 2^{300}, ¿cuál es el grado de dicho polinomio?

A) 48 B) 50 C) 60
D) 24 E) 30

32. Del siguiente polinomio

$P_{(x;y)}=4x^{n-3}y^{n+2}+9x^{n+1}y^{5-n}+x^4y^{n-1}-y^{n^2},$

calcule el cociente entre su grado absoluto aumentado en n y la suma de grados relativos disminuido en la unidad.

A) 1 B) $\frac{11}{10}$ C) 2
D) 3 E) 4

33. Si los polinomios

$f_{(x)}=k+nx+x^3+(m+n)x^2+mx^3$ y $Q_{(x)}=\alpha x+3$

son idénticos, calcule el valor de $Q_{(Q(Q_{(-3)}))}$.

A) 0 B) 1 C) 8
D) 5 E) 6

34. Dado el polinomio $G_{(x)}=mx^2+nx+2012$, calcule m^2+n^2+2mn si se cumple que $G_{(x+1)}-G_{(x)}\equiv 12x+4$.

A) 1 B) 4 C) 9
D) 16 E) 25

35. Si se verifica la identidad

$$\frac{2-x}{x^3-2x^2-3x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-3}$$

para todo número real x distinto de -1; 0 y 3, halle el valor de abc.

A) $-\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{24}$ C) $\frac{3}{8}$
D) $-\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{6}$

36. Dada la secuencia de los siguientes polinomios

$f_{1(x)}=x$

$f_{2(x+1)}=x$

$f_{3(x+2)}=x$

$f_{4(x+3)}=x$

$\vdots$

entonces el valor de la expresión $f_{2010}(2013)$ será

A) 3
B) 4
C) 5
D) 10
E) 13

37. Dadas las expresiones matemáticas

$P_{(x^2-2x)}=x$ y $P_{(x)}=1+b\sqrt{x+c}$,

calcule el menor valor de $P_{(b+c)}$.

A) 0
B) $1+\sqrt{3}$
C) $1-\sqrt{3}$
D) 1
E) -1

38. Sean los polinomios P y f tales que

$P_{(x+f(x))}=6x+7$ y

$f_{(x+1)}=P_{(x)}+1$.

Si el coeficiente principal de P es positivo, calcule el valor de la expresión

$\sqrt{P_{(-1)}+f_{(11)}}$.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) 5

39. Dado el polinomio

$$P_{(x)}=\underbrace{(x-2)^{25}+(x-4)^{25}+(x-6)^{25}+\dots}_{n\text{ sumandos}},$$

calcule la suma de cifras de n si se cumple que $P_{(21)}=0$.

A) 2
B) 3
C) 5
D) 6
E) 12

40. Dado el polinomio

$$f_{(x)}=(\alpha^3+3\alpha-1)x^4+(\beta^3+3\beta^2+1)x^2+\theta^3+3\theta-1,$$

calcule $\dfrac{(\alpha-1)^3}{\alpha^2}+\dfrac{(\beta+1)^3}{\beta}+\dfrac{(\theta-1)^3}{\theta^2}$

si el polinomio $Q_{(x)}=m^3x^4+n^2x+P$ se anula para todo valor de su variable y $f_{(x)}\equiv Q_{(x)}$.

A) 12
B) 9
C) 6
D) -3
E) 3

41. Sea $P_{(x;y)}=\sqrt{x+2\sqrt{y}}$.

Calcule $P_{(3;2)}+P_{(7;12)}-P_{(5;6)}$.

A) 3
B) 2
C) 4
D) 5
E) 1

42. Si

$$f_{(x)}=\frac{2}{x^2+2x},$$

calcule $f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(3)}+\dots+f_{(28)}+\dfrac{1}{29}+\dfrac{1}{30}$.

A) $\dfrac{1}{2}$
B) 10
C) 29
D) 1
E) $\dfrac{3}{2}$

43. Teniendo en cuenta que

$P_{(x)}=cx^3+3x+(a-2)x^{n+1}+bx+a+b+c$

es cuadrático, carece de término lineal y es mónico, halle $P_{(1)}$.

A) 1
B) 0
C) -1
D) 2
E) 3

44. El polinomio $f_{(x)}=2+m+3x^{q-2}+5qx^{2m-6}$ es ordenado y completo.

Determine la suma de coeficientes de $f_{(x)}$.

A) 24
B) 25
C) 26
D) 23
E) 22

45. Si se cumple que

$$A_{(x)}=\begin{cases}2x+3; x<5\\ x^2-A_{(x)}; x\geq 5\end{cases}$$

calcule $A_{(3)}+A_{(7)}+A_{(A_{(1)})}$.

A) 46
B) 36
C) 66
D) 56
E) 26

Productos notables

Capítulo III

OBJETIVOS

- Efectuar multiplicaciones indicadas en forma directa.
- Aplicar productos notables en la resolución de problemas.
- Relacionar el álgebra con algunas situaciones geométricas.

En la Ingeniería Civil cuando hacemos la medición de áreas, distancia, volúmenes, fórmulas para hacer los materiales, frecuentemente utilizaremos los desarrollos de los productos notables.

También lo podemos observar en la geometría analítica debido a que forman parte de las ecuaciones cartesianas de las diferentes figuras que se denominan cónicas (circunferencia, elipse y parábola).

Multiplicación de expresiones matemáticas

Es aquella operación que presenta dos expresiones conocidas; $A_{(x)}$ y $B_{(x)}$ y debemos hallar una tercera $C_{(x)}$, denominada producto, es decir

$$A_{(x)} \cdot B_{(x)} = \underbrace{C_{(x)}}_{\text{producto}}$$

LEY DISTRIBUTIVA

$$a(b+c)=ab+ac$$

Ejemplos

1. $2x^3\left(x^5+6y^2\right)=2x^8+12x^3y^2$

También se cumple

$$(m+n)(p+q)=mp+mq+np+nq$$

2. $(x+3y)(5x-y)=5x^2-xy+15xy-3y^2=5x^2+14xy-3y^2$

Recuerde que el producto forma con sus factores una identidad, por lo cual podemos usar el símbolo $\equiv$.

Ejemplo

$$(x+2)\left(x^2-1\right)\equiv x^3+2x^2-x-2$$

OBSERVACIÓN

- El cuadrado de la suma de x e y se denota por $(x+y)^2$.
- La suma de cuadrados de x e y se denota por x^2+y^2.
- El cubo de la suma de x e y se denota por $(x+y)^3$.
- La suma de cubos de x e y se denota por x^3+y^3.

Tenga en cuenta que

$$(x+y)^n \neq x^n+y^n (n \in \mathbb{N}-\{1\})$$

es decir

$$\underbrace{(x+y)^2}_{\substack{\text{cuadrado de}\\ \text{la suma}}} \neq \underbrace{x^2+y^2}_{\substack{\text{suma de}\\ \text{cuadrados}}}$$

Productos notables

Son los resultados obtenidos en forma directa en una multiplicación sin necesidad de realizar dicha operación, ello sucede de acuerdo a la forma que presentan.

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLES

Producto de multiplicar dos binomios con un término en común

$$(x+a)(x+b) \equiv x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplos

- $(x+7)(x+6) \equiv x^2+(7+6)x+7\cdot 6 \equiv x^2+13x+42$
- $(x+8)(x-2) \equiv x^2+(8-2)x+8(-2) \equiv x^2+6x-16$
- $(x-5)(x+3) \equiv x^2+(-5+3)x+(-5)3 \equiv x^2-2x-15$
- $(x-4)(x-2) \equiv x^2+(-4-2)x+(-4)(-2) \equiv x^2-6x+8$

Desarrollo de un binomio elevado al cuadrado

$$(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2 \equiv a^2-2ab+b^2$$

Ejemplos

- $(x+3)^2 \equiv x^2+2x\cdot 3+3^2 \equiv x^2+6x+9$
- $(x+5)^2 \equiv x^2+2x\cdot 5+5^2 \equiv x^2+10x+25$
- $(x-4)^2 \equiv x^2-2x\cdot 4+4^2 \equiv x^2-8x+16$
- $(x-2)^2 \equiv x^2-2x\cdot 2+2^2 \equiv x^2-4x+4$

En ciertas preguntas será necesario realizar el procedimiento reverso.

Ejemplo

$$x^2+12x+36 \equiv (x+6)^2$$

$\sqrt{}\downarrow$ $\quad$ $\downarrow\sqrt{}$

x $\quad$ 6

$$4x^2-12xy+9y^2 \equiv (2x-3y)^2$$

$\sqrt{}\downarrow$ $\quad$ $\downarrow\sqrt{}$

$2x$ $\quad$ $3y$

Las consecuencias de este producto notable se denominan identidad de Legendre.

Identidad de Legendre

$$(a+b)^2+(a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$$
$$(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab$$

Ejemplos

- $(\sqrt{2}+3)^2+(\sqrt{2}-3)^2 \equiv 2\left(\sqrt{2}^2+3^2\right) \equiv 2(2+9) \equiv 22$
- $(5x+y)^2-(5x-y)^2 \equiv 4(5x)(y) \equiv 20xy$

NOTA

Sea $(a-b)^2=(b-a)^2$.
Si tenemos $(3-x)^2$ y lo cambiamos por $(x-3)^2$, el resultado es el mismo.

Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

Ejemplos

- $(x+6)(x-6) \equiv x^2-6^2 \equiv x^2-36$
- $(n+3)(n-3) \equiv n^2-3^2 \equiv n^2-9$
- $(p^3+1)(p^3-1) \equiv (p^3)^2-1^2 \equiv p^6-1$
- $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2) \equiv \sqrt{3}^2-2^2 \equiv -1$
- $x^4-y^4 \equiv (x^2)^2-(y^2)^2 \equiv (x^2+y^2)(x^2-y^2)$
  $\equiv (x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
- $x^2-100 \equiv x^2-10^2 \equiv (x+10)(x-10)$

Desarrollo de un trinomio elevado al cuadrado

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

Ejemplos

- $(x+y+1)^2 \equiv x^2+y^2+1+2(xy+y\cdot 1+1\cdot x)$
  $\equiv x^2+y^2+1+2(xy+y+x)$
- $(x^2-x-1)^2 \equiv (x^2)^2+(-x)^2+(-1)^2+$
  $+2\left(x^2(-x)+(-x)(-1)+(-1)x^2\right)$
  $\equiv x^4+x^2+1+2(-x^3+x-x^2)$
  $\equiv x^4-2x^3-x^2+2x+1$

Desarrollo de un binomio al cubo

Forma desarrollada

$$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 \equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ejemplos

- $(x+4)^3 \equiv x^3+3x^2\cdot 4+3x\cdot 4^2+4^3 \equiv x^3+12x^2+48x+64$
- $(x-2)^3 \equiv x^3-3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2-2^3 \equiv x^3-6x^2+12x-8$

Forma semidesarrollada

$$(a+b)^3 \equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 \equiv a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Ejemplos

- $(x+1)^3 \equiv x^3+1+3x(x+1)$
- $(x+2)^3 \equiv x^3+8+6x(x+2)$

Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv a^3-b^3$$

Ejemplos

- $(x+4)(x^2-x\cdot 4+4^2) \equiv x^3+4^3$
- $(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2) \equiv x^3-2^3$
- $x^3+27 \equiv x^3+3^3 \equiv (x+3)(x^2-3x+9)$
- $x^3-1 \equiv x^3-1^3 \equiv (x-1)(x^2+x+1)$

Desarrollo de un trinomio al cubo

$$(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$(a+b+c)^3 \equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

Ejemplos

- $(x+y+1)^3 = x^3+y^3+1+3(x+y)(y+1)(1+x)$
- $(x^2+x+1)^3 = (x^2)^3+x^3+1^3+$
  $+3(x^2+x)(x+1)(1+x^2)$
  $= x^6+x^3+1+3(x^2+x)(x+1)(1+x^2)$

Identidad de Argand

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) \equiv x^4+x^2+1$$
$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \equiv x^4+x^2y^2+y^4$$

Ejemplo

$$(b^4+b^2+1)(b^4-b^2+1) \equiv ((b^2)^2+b^2+1)((b^2)^2-b^2+1)$$
$$\equiv (b^2)^4+(b^2)^2+1 \equiv b^8+b^4+1$$

Identidad de Gauss

$$a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

Ejemplo

$$x^3+y^3+1^3-3xy(1) \equiv (x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)$$

IGUALDADES CONDICIONALES

Solo si $a+b+c=0$, se cumple

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$$
$$a^3+b^3+c^3=3abc$$
$$(ab+bc+ca)^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$

Aplicación 1

Si $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$, $b=1-\sqrt{3}$ y $c=1-\sqrt{2}$, calcule $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

Resolución

Sumando los valores de a, b y c tenemos $a+b+c=0$; por igualdad condicional tenemos $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Reemplazamos en lo pedido y tenemos

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3\cancel{abc}}{\cancel{abc}}$$

$$\therefore \quad \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3$$

Teorema

Sean $a; b \in \mathbb{R}$. Si $a^2+b^2=0 \rightarrow a=0 \wedge b=0$

Aplicación 2

Si $x; y \in \mathbb{R}$, además $(3x-1)^2+(y+2)^2=0$, halle x e y.

Resolución

Por teorema tenemos $\underbrace{3x-1=0}_{x=\frac{1}{3}} \wedge \underbrace{y+2=0}_{y=-2}$

Desarrollo de un binomio al cubo

Forma desarrollada

$$(a+b)^3\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3\equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ejemplos

- $(x+4)^3\equiv x^3+3x^2\cdot 4+3x\cdot 4^2+4^3\equiv x^3+12x^2+48x+64$
- $(x-2)^3\equiv x^3-3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2-2^3\equiv x^3-6x^2+12x-8$

Forma semidesarrollada

$$(a+b)^3\equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3\equiv a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Ejemplos

- $(x+1)^3\equiv x^3+1+3x(x+1)$
- $(x+2)^3\equiv x^3+8+6x(x+2)$

Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)\equiv a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)\equiv a^3-b^3$$

Ejemplos

- $(x+4)(x^2-x\cdot 4+4^2)\equiv x^3+4^3$
- $(x-2)(x^2+x\cdot 2+2^2)\equiv x^3-2^3$
- $x^3+27\equiv x^3+3^3\equiv(x+3)(x^2-3x+9)$
- $x^3-1\equiv x^3-1^3\equiv(x-1)(x^2+x+1)$

Desarrollo de un trinomio al cubo

$$(a+b+c)^3\equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$
$$(a+b+c)^3\equiv a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

Ejemplos

- $(x+y+1)^3=x^3+y^3+1+3(x+y)(y+1)(1+x)$
- $(x^2+x+1)^3=(x^2)^3+x^3+1^3+$
  $+3(x^2+x)(x+1)(1+x^2)$
  $=x^6+x^3+1+3(x^2+x)(x+1)(1+x^2)$

Identidad de Argand

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)\equiv x^4+x^2+1$$
$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)\equiv x^4+x^2y^2+y^4$$

Ejemplo

$$(b^4+b^2+1)(b^4-b^2+1)\equiv\left((b^2)^2+b^2+1\right)\left((b^2)^2-b^2+1\right)$$
$$\equiv(b^2)^4+(b^2)^2+1\equiv b^8+b^4+1$$

Identidad de Gauss

$$a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

Ejemplo

$$x^3+y^3+1^3-3xy(1)\equiv(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-y-x)$$

Igualdades condicionales

Solo si $a+b+c=0$, se cumple

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$$
$$a^3+b^3+c^3=3abc$$
$$(ab+bc+ca)^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$$

Aplicación 1

Si $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$, $b=1-\sqrt{3}$ y $c=1-\sqrt{2}$, calcule $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

Resolución

Sumando los valores de a, b y c tenemos $a+b+c=0$; por igualdad condicional tenemos $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Reemplazamos en lo pedido y tenemos

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{3\cancel{abc}}{3\cancel{abc}}$$

$$\therefore\quad \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=3$$

Teorema

Sean $a;b\in\mathbb{R}$. Si $a^2+b^2=0\ \rightarrow\ a=0\wedge b=0$

Aplicación 2

Si $x;y\in\mathbb{R}$, además $(3x-1)^2+(y+2)^2=0$, halle x e y.

Resolución

Por teorema tenemos $\underbrace{3x-1=0}_{x=\frac{1}{3}}\wedge\underbrace{y+2=0}_{y=-2}$

Problema N.º 1

Reduzca $(x+6)(x+3)-(x+4)(x+5)$.

Resolución

Efectuando cada término tenemos

$$\left(x^2+9x+18\right)-\left(x^2+9x+20\right)=-2$$

Problema N.º 2

Si $x^2+5x=1$,

determine el valor de $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

Resolución

La idea es ordenar convenientemente buscando generar la condición dada, para ello multiplicamos los dos extremos y los dos centrales.

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$$

Reemplazando el dato tenemos

$$(1+4)(1+6)=35$$

Problema N.º 3

Teniendo en cuenta que $2^x+3^y=4$ y $2^x\cdot 3^y=5$,

calcule 4^x+9^y.

Resolución

Se observa que $4^x=\left(2^x\right)^2;\ 9^y=\left(3^y\right)^2$.

Ello implicaría que nos conviene elevar al cuadrado la primera condición $\left(2^x+3^y\right)^2=4^2$.

Efectuamos

$$\left(2^x\right)^2+\left(3^y\right)^2+2\underbrace{\left(2^x\right)\left(3^y\right)}_{5}=16$$

de donde

$$4^x+9^y=6-10$$

$$\therefore\ 4^x+9^y=6$$

Problema N.º 4

Si $x+y=\sqrt{6+2\sqrt{7}}$ y $xy=\sqrt{7}$,

determine el valor de x^4+y^4.

Resolución

Elevamos al cuadrado la primera condición

$$(x+y)^2=\sqrt[2]{6+2\sqrt{7}}^{\,2}$$

Efectuamos

$$x^2+y^2+\cancel{2\sqrt{7}}=6+\cancel{2\sqrt{7}}\ \rightarrow\ x^2+y^2=6$$

Elevamos al cuadrado

$$\left(x^2+y^2\right)^2=6^2\ \rightarrow\ x^4+y^4+\underbrace{2x^2y^2}_{14}=36$$

$$\therefore\ x^4+y^4=22$$

Problema N.º 5

Si $n=(a+b)^2$ y $p=(a-b)^2$ entonces cuánto será $a\cdot b$.

Resolución

Restamos las dos condiciones

$$n-p=\underbrace{(a+b)^2-(a-b)^2}_{4ab}$$

de donde

$$a\cdot b=\frac{n-p}{4}$$

Problema N.º 6

Si $mx^2-mp^2=1$; $x-p=m$; $m\neq 0$,

determine $(x+p)^2$.

Resolución

Del primer dato extraemos

$$m\underbrace{\left(x^2-p^2\right)}=1$$

$$m(x+p)\underbrace{(x-p)}_{m}=1$$

de donde

$$x+p=\frac{1}{m^2}\ \rightarrow\ (x+p)^2=\frac{1}{m^4}$$

Problema N.º 7

Reduzca

$(\sqrt{3}-3)^3(\sqrt{3}+3)^4-(\sqrt{3}-3)^4(\sqrt{3}+3)^3$.

Resolución

Extraemos $(\sqrt{3}-3)^3(\sqrt{3}+3)^3$

$$[\underbrace{(\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+3)}_{\sqrt{3}^2-3^2}]^3[\underbrace{(\sqrt{3}+3)-(\sqrt{3}-3)}_{6}]$$

Tenemos

$(3-9)(6)$

$\therefore\ -36$

Problema N.º 8

Si se cumple

$(a+b)^3=a^3+b^3 \wedge ab\neq 0$,

halle

$\dfrac{(a+b)^2+a}{(a+b)^2+b}$.

Resolución

Desarrollamos el primer miembro

$$\cancel{a^3+b^3}+3ab(a+b)=\cancel{a^3+b^3}$$

$$\underbrace{3ab}_{\neq 0}(a+b)=0$$

de donde solo se cumple que $a+b=0$. Entonces tenemos que

$a=-b$

Reemplazando en lo pedido tenemos

$$\frac{0^2-b}{0^2+b}=-\frac{b}{b}=-1$$

Problema N.º 9

Reduzca

$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3$.

Resolución

Hacemos el siguiente cambio

$$\begin{array}{r} a+b-c=x \\ a-b+c=y \\ -a+b+c=z \\ \hline a+b+c=x+y+x \end{array} \ +$$

Tenemos

$$\underbrace{(x+y+z)^3}_{\cancel{x^3+y^3+z^3}+3(x+y)(y+z)(z+x)}-\cancel{x^3-y^3-z^3}$$

Reponiendo el cambio obtenemos

$3(2a)(2c)(2b)$

$\therefore\ 24abc$

Problema N.º 10

Si se cumple que $(m+n)^2=mn+1$,

halle el valor de $\dfrac{m^3+n}{n^3+m}$.

Resolución

Efectuando el dato

$m^2+n^2+2mn=mn=1$

$m^2+mn+n^2=1$

Multiplicamos por $(m-n)$

$(m-n)(m^2+mn+n^2)=m-n$

$m^3-n^3=m-n$

$m^3+n=n^3+m$

$$\therefore\ \frac{m^3+n}{n^3+m}=1$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Si $a^2+b^2=5ab$, determine el equivalente de a^4+b^4.

A) $25a^2b^2$
B) $23a^2b^2$
C) $5a^2b^2$
D) a^2b^2
E) $27a^2b^2$

2. Reduzca $\sqrt{(x-3)^2+12x}, x\in\mathbb{R}^+$.

A) $x-3$ B) $2x+1$ C) $6x+1$
D) $\sqrt{x+6}$ E) $x+3$

3. Si luego de reducir

$\sqrt[3]{a^5-\sqrt{a^{10}-b^9}}\cdot\sqrt[3]{a^5+\sqrt{a^{10}-b^9}}$; $ab\neq 0$,

tenemos que es equivalente a $a^m\cdot b^n$, determine $m+n$.

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 27

4. Si $a+\frac{1}{b}=4$ y $\frac{a^2b^2-1}{b^2}=32$, halle $a-\frac{1}{b}$.

A) 4 B) 8 C) 16
D) 32 E) 64

5. Si $a\cdot b=10$ y $a^2+b^2=28$, calcule $(a-b)^2$.

A) 2^3 B) 10^2 C) 2^4
D) 2 E) 2^2

6. Si $(1+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}+3)^2-(\sqrt{2}-3)^2=m+n\sqrt{2}$; $m;n\in\mathbb{Z}^+$, halle mn.

A) 39 B) 68 C) 42
D) 78 E) 156

7. Teniendo en cuenta que $e+e^{-1}=\sqrt[3]{7}$, calcule e^3+e^{-3}.

A) 7 B) 4 C) 3
D) $7-3\sqrt[3]{7}$ E) -14

8. Dado $x=1+\sqrt[3]{9}$, determine el valor de x^3-3x^2+3x-9.

A) 0 B) 10 C) 1
D) 8 E) $\sqrt[3]{2}$

9. Reduzca

$(a-b)(a^2+ab+b^2)-3ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

A) $(a+b)^3$
B) $(a-b)^3$
C) a^3-b^3
D) a^3+b^3
E) $a-b$

10. Si $a+b+c=1$ y $a^2+b^2+c^2=2012$, calcule $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$.

A) 2009 B) 2010 C) 2011
D) 2012 E) 2013

11. Calcule $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ si $x^2+5x=1$.

A) 34 B) 35 C) 36
D) 37 E) 38

12. La expresión $(3x+2y)(2x+3y)-(x+y)(x+5y)$ se reduce a $mx^2+nxy+py^2$. Determine el valor de $m+n+p$.

A) -13
B) 12
C) 9
D) 13
E) 7

13. Indique el valor de
$(\sqrt{5}-2)^3+(\sqrt{5}+2)^3+(-2\sqrt{5})^3$.

A) $-6\sqrt{5}$
B) $-3\sqrt{5}$
C) -6
D) 0
E) -3

14. Los números no nulos a; b; c verifican $(a+b)^3+c^3=0$.

Calcule $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

A) 2 B) -2 C) 3
D) -3 E) 1

15. Teniendo en cuenta que $m+n+p=0$,
calcule $\dfrac{(m+n)^2+(n+p)^2+(p+m)^2}{mn+np+pm}$.

A) 2 B) -2 C) 4
D) 6 E) 8

16. Los números reales x; y verifican $x^2+y^2+1=2y$. Calcule x^4+y^4+1.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

17. Determine los números naturales n para los cuales la igualdad $x^2-2x+1=n-4$ es absurda en $\mathbb{R}$.

A) $\{1; 2; 3\}$
B) $\{5; 6; 7;...\}$
C) $\{0; 1; 2\}$
D) $\{2; 3; 4\}$
E) $\{4; 5; 6;...\}$

18. Reduzca $(9^x+9^{-x})^2-(9^x-9^{-x})^2$.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) 8

19. Al reducir $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ obtenemos
$\sqrt[3]{x}^m+\sqrt[3]{x}^n+\sqrt[3]{x}^p$, $x\geq 2013$.

Determine el valor de $m+n+p$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

20. Los números reales a; b y c verifican la igualdad en $\mathbb{R}$ $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-2}+\sqrt{c-3}=0$.
Calcule $a+b+c$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

NIVEL INTERMEDIO

21. Determine el valor de $a-\dfrac{1}{a}$ $(a>1)$ si $a^2+\dfrac{1}{a^2}=38$.

A) 36
B) 6
C) 7
D) 4
E) 5

22. Indique el valor de x^2 si se cumple
$(x^x+3)^2-(x^x-3)^2=60\cdot 5^4$.

A) 9 B) 5 C) 25
D) 125 E) 81

23. Sean números no nulos a; b; c y d que verifican $a^2+b^2+c^2=d^2$;

además $\frac{a^2+b^2}{d+c}+\frac{c^2+a^2}{b+d}+\frac{b^2+c^2}{d+a}=0.$

Calcule $\frac{a+b+c}{d}$.

A) 4
B) −3
C) 1
D) 2
E) 3

24. Reduzca

$\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{a+b-c}+\frac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a-b-c}$.

A) $2c$ B) $2(a+b)$ C) 0
D) $2a$ E) $2b$

25. Teniendo en cuenta

$a+b+c=8 \wedge ab+bc+ca+=0$,

calcule $\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{2abc}$.

A) 16
B) −16
C) −8
D) 8
E) 2

26. Si $x \in \mathbb{R}^+$, reduzca $\frac{\sqrt{x^2+x^{-2}+6(x+x^{-1})+11}}{x+x^{-1}+3}$.

A) $x+\frac{1}{x}$

B) $x+\frac{1}{x}+3$

C) x

D) 1

E) 2

27. Determine el valor de $\frac{\sqrt{1266^2+2533-4^5}}{27}$.

A) 3 B) 9 C) 1
D) 6 E) 19

28. Si $\frac{(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha+1)}{\cos^3\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha}$ es equivalente a $\operatorname{sen}^n\alpha+\cos^n\alpha$, calcule n.

A) 1 B) 0 C) 3
D) 4 E) 2

29. Si $a+b=3$ y $(a-2)(b+1)=2$,

calcule $(a-2)^3+(b+1)^3$.

A) −2 B) −4 C) −6
D) 8 E) 5

30. Teniendo en cuenta que

$a^2=(b+c)^2$

$b^2=(c+a)^2$

$c^2=(a+b)^2$.

calcule $\frac{abc}{(b+c)^2a+(c+a)^2b+(a+b)^2c}$.

A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) −1
D) 1 E) $-\frac{1}{3}$

31. Si a; b y c son números reales que verifican

$a-b=\sqrt{2}$ y

$b-c=\sqrt{2}$,

calcule $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$.

A) −1 B) 3 C) 6
D) 12 E) 15

32. Teniendo en cuenta que $a=\frac{b}{2}-\sqrt{1-3\left(\frac{b}{2}\right)^2}$,

indique el valor de $\left\{\frac{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}{(a+b)^2-ab}\right\}^2$.

A) 64 B) 32 C) 16
D) 4 E) 1

33. El número real x verifica $x^2-\sqrt{3}x+1=0$.

Determine $\frac{(3+\sqrt{12})(x^5+1)^2}{x^{10}+1}$.

A) $\sqrt{3}+1$ B) $\sqrt{3}-1$ C) -1
D) 1 E) $3+\sqrt{3}$

34. Si se cumple
$x=(a^2-b^2)^2$ y
$y=(a^2-b^2)^3$,
Señale el valor de
$\sqrt[3]{x^9+y^6-x^3y^4}-\sqrt[3]{x^7+y^6-xy^4}$.

A) 0 B) 1 C) 3
D) 2 E) 4

35. Si
$x+y=2\sqrt[3]{a^2-b^2+1}$ y
$xy=5\left(\sqrt[3]{a^2-b^2+1}\right)^2$,

calcule $\sqrt{\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}}$.

A) $\frac{\sqrt{11}}{6}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{11}}{9}$
D) $\frac{\sqrt{31}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{31}}{4}$

36. Teniendo en cuenta que
$a+b+c=4$ y
$a^2+b^2+c^2=10$,
calcule el valor de
$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc$.

A) 14 B) 16 C) 8
D) 9 E) 3

37. Si el polinomio
$P_{(x)}=9x^2+(n+2)x+1$ es un trinomio cuadrado perfecto, determine el valor positivo de n.

A) 3 B) 4 C) 1
D) 5 E) 12

38. Sean x e y números reales tal que
$x^2+y^2+1=xy+y+x$. Según el dato, calcule x^y.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 9

39. Si $x^2+x+1=0$, calcule $\frac{x^5+1}{x}$.

A) 2 B) 1 C) -1
D) 0 E) $\frac{1}{2}$

40. Si $\frac{x+y+z}{y+z+w}+\frac{y+z+w}{x+y+z}=2$,

halle $\frac{x^5}{x^5+w^5}+\frac{x^{50}}{x^{50}+w^{50}}$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

División de polinomios

Capítulo IV

OBJETIVOS

- Aplicar la identidad fundamental de la división.
- Dividir polinomios aplicando los métodos de división (Horner-Ruffini).
- Calcular el resto de una división sin efectuar la operación.
- Conocer y aplicar los teoremas de la divisibilidad.
- Conocer y aplicar las propiedades de los cocientes notables.

Cuando aprendimos a dividir en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) vimos que esta operación presentaba el siguiente esquema:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline R & q \end{array}$$

Siendo $D \geq d$ y $R < d$, además $D \equiv d \cdot q + R$

donde

- D: dividendo
- d: divisor
- q: cociente
- R: residuo

Ejemplo

$$\begin{array}{l|l} 42 & 9 \\ \hline 6 & 4 \end{array}$$ aquí $D=42$; $d=9$; $q=4$ y $R=6$

luego $42=9 \cdot 4+6$

En forma análoga podemos trasladar estas consideraciones para dividir polinomios; donde las comparaciones indicadas anteriormente se realizan respecto al grado de los polinomios dividendo, divisor y residuo. Aquí se plantea la identidad fundamental de la división para polinomios $D_{(x)} \equiv d_{(x)} q_{(x)} + R_{(x)}$; llamada también algoritmo de Euclides.

Asimismo, debemos tener presente que los matemáticos Guillermo Horner y Paolo Ruffini fueron quienes desarrollaron y esquematizaron los métodos para efectuar dicha operación con los polinomios, aunque en el siglo XIII el matemático chino Chin Kin Shao desarrolló dicho esquema pero en forma rudimentaria.

División de polinomios

Dados los polinomios $D_{(x)}$ y $d_{(x)}$ de grados mayores o iguales a uno llamados dividendo y divisor, respectivamente, dividirlos tiene como finalidad encontrar dos nuevos y únicos polinomios llamados cociente $q_{(x)}$ y residuo $R_{(x)}$ de tal manera que se cumpla la siguiente identidad.

IDENTIDAD FUNDAMENTAL O ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

$$\boxed{D_{(x)} \equiv d_{(x)} q_{(x)} + R_{(x)}}$$

Donde $°[D] \geq °[d] \geq 1$ (condición indispensable)
$°[D]$ se lee: Grado del dividendo.

Ejemplo

Sean los polinomios $D_{(x)}=x^3+10$ y $d_{(x)}=x+2$.

Ahora aplicamos la identidad fundamental, y apoyados en la suma de cubos hallaremos el cociente y el residuo, así

$$x^3+10 \equiv x^3+8+2$$

$$x^3+10 \equiv x^3+2^3+2$$

$$\underbrace{x^3+10}_{D_{(x)}} \equiv \underbrace{(x+2)}_{d_{(x)}}(x^2-2x+4)+2$$

de donde $q_{(x)}=x^2-2x+2$ y $R_{(x)}=2$.

> **NOTA**
>
> Más adelante se verán métodos más elaborados para hallar el cociente y el residuo.

Clases de división

División exacta

Solo si $R_{(x)} \equiv 0$, se cumple que

$$\boxed{D_{(x)}=d_{(x)}q_{(x)}}$$

División inexacta

Solo si $R_{(x)} \not\equiv 0$, se cumple que

$$\boxed{D_{(x)}\equiv d_{(x)}q_{(x)}+R_{(x)}}$$

Aplicación 1

Calcule la suma de coeficientes del residuo de la división $\dfrac{x^4+x^2+3x+4}{x^2-x+1}$ si la suma de coeficientes de su cociente es 3.

Resolución

Se sabe que

$$D_{(x)} \equiv d_{(x)}\cdot q_{(x)}+R_{(x)} \qquad \text{(I)}$$

pero por dato se tiene

$$D_{(x)}=x^4+x^2+3x+4 \;\rightarrow\; d_{(x)}=x^2-x+1$$

Reemplazando en (I) se tiene

$$x^4+x^2+3x+4 \equiv (x^2-x+1)q_{(x)}+R_{(x)}$$

Ahora evaluando para $x=1$ se tiene

$$1+1+3+4=(1-1+1)q_{(1)}+R_{(1)}$$

$$9=(1)\underbrace{q_{(1)}}_{3 \,\leftarrow\, \text{suma de coeficientes del cociente}}+R_{(1)}$$

$$9=3+R_{(1)}$$

$$\therefore\; R_{(1)}=6 \leftarrow \text{suma de coeficientes del residuo}$$

Aplicación 2

Si la división $\dfrac{4x^3+x^2-ax+b}{x+1}$ es exacta, calcule $a+b$.

Resolución

Por dato se tiene

$$D_{(x)}=4x^3+x^2-ax+b \;\rightarrow\; d_{(x)}=x+1$$

Ahora por la identidad se tiene

$$4x^3+x^2-ax+b \equiv (x+1)q_{(x)};\; R_{(x)} \equiv 0$$

(división exacta)

Evaluando para $x=-1$ se tiene

$$-4+1+a+b=(-1+1)q(-1)$$

$$-3+a+b=0\cdot q(-1) \;\rightarrow\; -3+a+b=0$$

$$\therefore\; a+b=3$$

Propiedades de grados

A partir del grado de los polinomios dividendo y divisor se puede conocer el grado de los dos nuevos y únicos polinomios cociente y residuo.

1.° $°[q]=°[D]-°[d]$

2.° Solo si la división es inexacta
máx. $(°[R])=°[d]-1$

Ejemplo

En la división

$$\frac{3x^5-4x^3+x^2-6x+1}{x^2-2x+1} \begin{array}{l}\leftarrow D_{(x)}\\ \leftarrow d_{(x)}\end{array}$$

se tiene que $°[D]=5$ y $°[d]=2$

Luego

- $°[q]=5-2=3$, es decir, el cociente es de la forma $q_{(x)}=ax^3+bx^2+cx+d$.
- máx. $(°[R])=2-1=1$, es decir, el resto podría ser de la forma $R_{(x)}=ax+b$.

Métodos de división

CONSIDERACIONES

1. Los polinomios dividendo y divisor, por lo general, deben estar completos y ordenados en forma decreciente.
Si faltara algún término, este se representará con coeficiente cero.
2. Para dividir polinomios de manera práctica se trabajará solo con los coeficientes del dividendo y divisor, obteniéndose los coeficientes de los polinomios cociente y residuo, que también son completos y ordenados en forma decreciente.

Método de Guillermo Horner

Este es un método general para dividir polinomios.

Por ejemplo, consideremos los polinomios completos y ordenados.

$D_{(x)}=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e;\ a\neq 0$

$d_{(x)}=mx^2+nx+r;\ m\neq 0$

El esquema de Horner es el siguiente:

$$
\begin{array}{c|ccc:cc}
m & a & b & c & d & e \\
\hline
-n & & \square & \square & & \\
-r & & & \square & \square & \\
 & & & & \square & \square \\
\hline
 & a_0 & a_1 & a_2 & r_0 & r_1
\end{array}
$$

$\underbrace{a_0\ a_1\ a_2}_{\text{coeficientes del cociente}}\qquad \underbrace{r_0\ r_1}_{\text{coeficientes del residuo}}$

$q_{(x)}=a_0x^2+a_1x+a_2;\ R_{(x)}=r_0x+r_1$

OBSERVACIÓN

- El primer coeficiente del divisor $d_{(x)}$ mantiene su signo, los demás coeficientes cambian de signo.
- La línea (punteada) vertical que separa a los coeficientes del cociente con los coeficientes del resto se traza contando desde el último coeficiente del dividendo, cuyo número de espacios para los coeficientes del residuo lo determina el grado del divisor.

Aplicación 3

Efectúe la siguiente división

$$\frac{6x^4-x^3+12x^2+3x+2}{2x^2-x+3}.$$

Resolución

Como el dividendo y el divisor están completos y ordenados en forma decreciente, aplicamos el método de Horner.

$$
\begin{array}{c|ccc:cc}
 & \div & + & + & + & + \\
2 & 6 & -1 & 12 & 3 & 2 \\
\hline
1 & & 3 & -9 & & \\
 & & \div\overline{2} & 1 & -3 & \\
-3 & & & \div\overline{4} & & \\
 & & & & 2 & -6 \\
\hline
 & 3 & 1 & 2 & 2 & -4
\end{array}
$$

Luego

$q_{(x)}=3x^2+x+2$

$R_{(x)}=2x-4$

Aplicación 4

Halle el cociente y el resto de la división

$$\frac{12x^5-x-9x^3-x^2-1}{1+3x^2+6x^3}.$$

Resolución

Preparamos los polinomios dividendo y divisor para luego aplicar el método de Horner; así

$$\frac{12x^5+0x^4-9x^3-x^2-x-1}{6x^3+3x^2+0x+1}$$

Luego por Horner

6	12	0	−9	−1	−1	−1
−3		−6	0	−2		
0			3	0	1	
−1				3	0	1
	2	−1	−1	0	0	0

de donde

$q_{(x)}=2x^2-x-1$

$R_{(x)}=0$ (división exacta)

Regla de Paolo Ruffini

Es un caso particular del método de Horner y se aplica cuando el divisor es lineal, así $d_{(x)}=ax+b$; $a\neq 0$. Por ejemplo consideremos los polinomios

- Dividendo: $D_{(x)}=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E; A\neq 0$
- Divisor: $d_{(x)}=ax+b; a\neq 0$

El esquema de Ruffini es el siguiente:

$ax+b=0$	A	B	C	D	E
$x=-\frac{b}{a}$		$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
	A	M	N	P	K
$\div a$	q_0	q_1	q_2	q_3	residuo

$\underbrace{q_0\ q_1\ q_2\ q_3}_{\text{coeficientes del cociente}}$

Luego

$q_{(x)}=q_0x^3+q_1x^2+q_2x+q_3$

$R_{(x)}=k$

Aplicación 5

Efectúe la división $\frac{4x^4+3x^2-4x+3}{2x-1}$ y determine el cociente y el residuo.

Resolución

Utilizamos la regla de Ruffini

$2x-1=0$	4	0	3	−4	3
$x=\frac{1}{2}$		2	1	2	−1
$\times$	4	2	4	−2	2
$\div 2$	2	1	2	−1	

Luego

$q_{(x)}=2x^3+x^2+2x-1$

$R_{(x)}=2$

Aplicación 6

Halle el cociente y el residuo de la siguiente división

$$\frac{2x^3+x^2-8x+3}{x-2}.$$

Resolución

Aplicamos la regla de Ruffini

$x-2=0$	2	1	−8	3
$x=2$		4	10	4
$\times$	2	5	2	7

Luego

$q_{(x)}=2x^2+5x+2$

$R_{(x)}=7$

NOTA

Como el coeficiente principal del divisor es la unidad, entonces los coeficientes del cociente se obtienen en forma directa ya que resultarían los mismos al dividirlos por la unidad.

Teorema del resto

Este teorema tiene por finalidad hallar el resto de una división sin efectuarla (sin conocer el cociente).

ENUNCIADO DEL TEOREMA

El resto de dividir

$\frac{P_{(x)}}{ax+b}$ es $R=P_{\left(-\frac{b}{a}\right)}$

siendo $P_{(x)}$ un polinomio de grado mayor o igual a uno.

Ejemplos

- Si $\frac{P_{(x)}}{2x+3} \rightarrow R=P_{\left(-\frac{3}{2}\right)}$
- Si $\frac{P_{(x)}}{3x-4} \rightarrow R=P_{\left(\frac{4}{3}\right)}$
- Si $\frac{P_{(x)}}{x+4} \rightarrow R=P_{(-4)}$
- Si $\frac{P_{(x)}}{x-5} \rightarrow R=P_{(5)}$
- Si $\frac{P_{(x)}+2x}{x-2} \rightarrow R=P_{(2)}+4$
- Si $\frac{P_{(x)}}{x-\sqrt{5}} \rightarrow R=P_{(\sqrt{5})}$

Aplicación 7

Si el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $(x-1)$ es 5, calcule la suma de coeficientes del resto que se obtiene al dividir $P_{(x)}$ entre (x^2-1).

Resolución

Por dato

si $\frac{P_{(x)}}{x-1} \rightarrow R=P_{(1)}=5$

Sea $R_{(x)}$ el resto de la división $P_{(x)} \div (x^2-1)$, ahora por la identidad fundamental se tiene

$$P_{(x)} \equiv (x^2-1)q_{(x)}+R_{(x)}$$

Evaluamos para $x=1$, se tiene

$$P_{(1)}=(1^2-1)q_{(1)}+R_{(1)} \rightarrow \underbrace{P_{(1)}}_{5}=0+R_{(1)}$$

$\therefore$ $R_{(1)}=5$ (suma de coeficientes del residuo)

REGLA PRÁCTICA PARA HALLAR EL RESTO

1.° Si iguala a cero el divisor.

2.° Si el divisor es lineal, se despeja la variable, de lo contrario, se despeja una expresión conveniente.

3.° El valor de la variable o de la expresión se reemplaza en el dividendo y el resultado obtenido será el resto buscado.

OBSERVACIÓN

Tenga en cuenta que
máx. $°[R]=°[d]-1$

Aplicación 8

Halle el resto de la división

$$\frac{x^4-16x^2+6x+12}{x+4}.$$

Resolución

Aplicamos la regla práctica.

1.° $x+4=0$

2.° $x=-4$ (como el divisor es lineal, se despejó la variable)

3.° Reemplazamos en el dividendo para $x=-4$.

$R=(-4)^4-16(-4)^2+6(-4)+12$

$R=4^4-4^2\cdot4^2-24+12$

$R=4^4-4^4-12$

$R=-12$ (resto buscado)

Aplicación 9

Determine el resto de la división

$$\frac{x^8+x^4+3x^2+x+1}{x^2+3}.$$

Resolución

Aplicamos la regla práctica para calcular el resto.

1.° $x^2+3=0$

2.° $x^2=-3$ (No se despeja la variable, el divisor es no lineal).

3.° Ahora preparamos el dividendo para reemplazar $x^2=-3$.

$$D_{(x)}=x^8+x^4+3x^2+x+1$$

$$D_{(x)}=(x^2)^4+(x^2)^2+3x^2+x+1$$

Reemplazando se tiene el resto

$$R=(-3)^4+(-3)^2+3(-3)+x+1$$

$$R=81+\cancel{9}-\cancel{9}+x+1$$

$\therefore$ $R=x+82$ (resto pedido)

OBSERVACIÓN

Recuerde que

máx. $°[R]=°[d]-1$

$\therefore$ máx. $°[R]=2-1=1$

Aplicación 10

Calcule el resto de la división

$$\frac{x^{10}(x+2)^{10}+(x+1)^6-3}{x^2+2x-1}.$$

Resolución

Aplicamos la regla práctica

1.° $x^2+2x-1=0$

2.° $x^2+2x=1$ (No se despeja la variable, el divisor es no lineal).

3.° Ahora preparamos el dividendo para reemplazar $x^2+2x=1$.

$$D_{(x)}=x^{10}(x+2)^{10}+(x+1)^6-3$$

$$D_{(x)}=[x(x+2)]^{10}+[(x+1)^2]^3-3$$

$$D_{(x)}=[\underbrace{x^2+2x}_{1}]^{10}+[\underbrace{x^2+2x+1}_{1}]^3-3$$

$$R=(1)^{10}+(2)^3-3$$

$$R=1+8-3$$

$\therefore$ $R=6$

Divisibilidad de polinomios

Si f y P son polinomios tal que $°[P]\geq°[f]\geq1$, diremos que P es divisible por f si la división $P\div f$ es exacta.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=x^3-3x-2$ es divisible por $f_{(x)}=x-2$, pues, en efecto, la división $\frac{P_{(x)}}{f_{(x)}}=\frac{x^3-3x-2}{x-2}$ es exacta.

   Por teorema del resto

   1.° $x-2=0$

   2.° $x=2$

   3.° $R=2^3-3\times2-2$

   $R=0$

2. El polinomio $P_{(x)}=x^3-x+2$ no es divisible por $f_{(x)}=x-1$, pues, en efecto, la división $\frac{P_{(x)}}{f_{(x)}}=\frac{x^3-x+2}{x-1}$ no es exacta.

   Por teorema del resto

   1.° $x-1=0$

   2.° $x=1$

   3.° $R=1^3-1+2$

   $R=2\neq0$ (división no exacta)

Aplicación 11

Si el polinomio $P_{(x)}=x^4-5x^3+mx+n$ es divisible por $f_{(x)}=x-1$, calcule el valor de $m+n$.

Resolución

Como $P_{(x)}$ es divisible por $f_{(x)}$, entonces la división $\frac{x^4-5x^3+mx+n}{x-1}$ es exacta.

Luego, por teorema del resto

1.° $x-1=0$

2.° $x=1$

3.° $R=1^4-5\times 1^3+m+n=0$ (división exacta)

$\rightarrow\ 1-5+m+n=0$

$\therefore\ m+n=4$

Teoremas

1. Un polinomio $P_{(x)}$ de grado mayor o igual a dos es divisible separadamente por $(x-a)$ y por $(x-b)$ con $a\neq b$, si y solo si $P_{(x)}$ es divisible por $(x-a)(x-b)$.
2. Si al dividir un polinomio $P_{(x)}$ de grado mayor o igual a dos, separadamente por $(x-a)$ y por $(x-b)$ con $a\neq b$, se obtiene el mismo resto R; entonces al dividir $P_{(x)}$ por $(x-a)(x-b)$, también se obtiene el mismo resto R.

Aplicación 12

Si el polinomio $P_{(x)}$ es de tercer grado y mónico, que además es divisible separadamente por $(x-1)$ y $(x+1)$, calcule el término independiente de $P_{(x)}$ sabiendo, además, que el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $(x-2)$ es 15.

Resolución

Nos piden el término independiente de $P=P_{(0)}$.

Por datos

- Si $P_{(x)}$ es divisible por $(x-1)$ y $(x+1)$, entonces será divisible por $(x-1)(x+1)$, es decir $\dfrac{P_{(x)}}{(x-1)(x+1)}$ es exacta.

  Ahora por identidad de la división

  $P_{(x)}\equiv(x-1)(x+1)\cdot Q_{(x)}$ (I)

- $P_{(x)}$ es de grado 3 y mónico, lo que implica que $Q_{(x)}=x+b$.

  Además, por dato, en $\dfrac{P_{(x)}}{x-2}$ su resto es $R=P_{(2)}=15$.

Luego reemplazando $Q_{(x)}$ en (I) tenemos

$P_{(x)}\equiv(x-1)(x+1)(x+b)$

Ahora evaluamos para $x=2$

$P_{(2)}=(1)(3)(2+b)=15\ \rightarrow\ 2+b=5$

$\rightarrow\ b=3$

Finalmente, el polinomio es

$P_{(x)}=(x-1)(x+1)(x+3)$

$\therefore\ P_{(0)}=(-1)(1)(3)=-3$

Aplicación 13

Si al dividir el polinomio $P_{(x)}$ separadamente por $(x-2)$ y por $(x+3)$ se obtiene el mismo resto 5, calcule el resto de dividir $\dfrac{P_{(x)}}{x^2+x-6}$.

Resolución

Por datos

- En $\dfrac{P_{(x)}}{x-2}$ su resto es $R_1=5$
- En $\dfrac{P_{(x)}}{x+3}$ su resto es $R_2=5$

Por teorema 2

En $\dfrac{P_{(x)}}{\underbrace{(x-2)(x+3)}_{x^2+x-6}}$ su resto es $R=5$

es decir, en $\dfrac{P_{(x)}}{x^2+x-6}$ su resto es $R=5$.

Por lo tanto, el resto pedido es $R=5$.

Cocientes notables (CN)

Son los cocientes que se obtienen de manera directa, es decir, sin efectuar la operación de división.

Las divisiones que generan cocientes notables son de la forma

$$\frac{x^n-y^n}{x-y};\ \frac{x^n-y^n}{x+y};\ \frac{x^n+y^n}{x+y}\ \text{y}\ \frac{x^n+y^n}{x-y};\ n\in\mathbb{Z}^+\wedge n\neq 1$$

Como se observa, se presentan cuatro casos.

Obtención del cociente notable

Caso 1

Calculemos el cociente de la división $\dfrac{x^n-y^n}{x-y}$; para ello nos apoyaremos en los productos notables, así

- $x^2-y^2=(x+y)(x-y) \rightarrow \dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$

  Es decir, $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$

- $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

  $\rightarrow \dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$

  Es decir, $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2$

Siguiendo la misma idea se tiene que

$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3$$

$$\frac{x^5-y^5}{x-y}=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$$

$$\frac{x^6-y^6}{x-y}=x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$$

$$\vdots$$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+x^{n-4}y^3+\ldots+y^{n-1}$$

Ahora si $y=1$ se reemplaza en las divisiones anteriores, se obtienen también los cocientes de manera directa.

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1 \rightarrow \frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$$

$$\frac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2+x+1$$

$$\frac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\frac{x^6-1}{x-1}=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\vdots$$

$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1$$

También en la división $\dfrac{x^{12}-1}{x^2-1}$ si hacemos $x^2=y$, tendremos $\dfrac{y^6-1}{y-1}=y^5+y^4+y^3+y^2+y+1$; luego reponiendo x^2 por y tenemos que

$$\frac{x^{12}-1}{x^2-1}=\underbrace{x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1}_{\text{Los exponentes de } x \text{ disminuyen de 2 en 2 que es el grado del divisor.}}$$

Entonces bajo la misma idea se tiene que

$$\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$$

$$\frac{x^{20}-1}{x^5-1}=x^{15}+x^{10}+x^5+1$$

Aplicación 14

Simplifique K si

$$K=\frac{x^{11}+x^{10}+x^9+\ldots+x+1}{x^3+x^2+x+1}$$

Resolución

Veamos de qué divisiones se generan los cocientes notables del numerador y denominador de la expresión a simplificar.

$$x^{11}+x^{10}+x^9+\ldots+x+1=\frac{x^{12}-1}{x-1}$$

$$x^3+x^2+x+1=\frac{x^4-1}{x-1}$$

Ahora reemplazando en K, tenemos

$$K=\frac{\frac{x^{12}-1}{x-1}}{\frac{x^4-1}{x-1}}=\frac{(x^{12}-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^4-1)}=\frac{x^{12}-1}{x^4-1}$$

$\therefore\ K=x^8+x^4+1$

Propiedades

1. Se sabe que

$$\boxed{\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}}$$

De donde se cumple:

- El cociente generado en variables x; y es un polinomio homogéneo.
- El número de términos del cociente notable es n.
- El término del lugar K se calcula con la siguiente fórmula:

$$\boxed{t_K=x^{n-K}y^{K-1}}$$

Ejemplos

- El término del lugar 5 del cociente de la división

  $\frac{x^{12}-y^{12}}{x-y}$ es $t_5=x^{12-5}\cdot y^{5-1}$

  $\rightarrow\ t_5=x^7y^4$

- El término del lugar 10 del cociente de la división $\frac{x^{18}-y^{18}}{x-y}$ es

  $t_{10}=x^{18-10}\cdot y^{10-1}\ \rightarrow\ t_{10}=x^8y^9$

- El término del lugar 23 del cociente de la división $\frac{x^{31}-1}{x-1}$ es

  $t_{23}=x^{31-23}\cdot 1^{23-1}\ \rightarrow\ t_{23}=x^8$

2. Las divisiones de la forma $\frac{x^r\pm y^m}{x^a\pm y^b}$ generan cociente notable solo si se cumple que $\frac{r}{a}=\frac{m}{b}=n;\ n\in\mathbb{Z}^+$.

Donde n representa el número de términos del cociente notable.

Ejemplos

- La división $\frac{x^{40}-y^{30}}{x^4-y^3}$ genera cociente notable, pues $\frac{40}{4}=\frac{30}{3}=10$, y su número de términos es 10.

- La división $\frac{x^{15}-y^{15}}{x^2-y^2}$ no genera cociente notable, pues $\frac{15}{2}=\frac{15}{2}\notin\mathbb{Z}^+$ (El número de términos no puede ser fracción).

Nota

Para los tres casos restantes también el cociente notable se puede obtener de manera directa en forma similar que el primer caso. Pero sí tener en cuenta que la división puede ser exacta o inexacta; cuando el divisor es de la forma $(x+y)$, los signos de los términos del cociente notable se alternan iniciando con el signo positivo, así

- $\frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-y^4$
- $\frac{x^6-y^6}{x+y}=x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$
- $\frac{x^8-1}{x+1}=x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$
- $\frac{x^{12}-1}{x^2+1}=x^{10}-x^8+x^6-x^4+x^2-1$

Aplicación 15

Calcule el término del lugar 14 del cociente notable que genera la división $\dfrac{x^{30}-y^{30}}{x+y}$.

Resolución

N.º de términos: $n=30$

El término del lugar 14 tiene posición par y su signo es negativo, luego aplicando la fórmula se tiene

$$t_{14}=-x^{30-14}y^{14-1}$$

$$\therefore \quad t_{14}=-x^{6}y^{13}$$

> **NOTA**
> Ha sido necesario determinar el signo del término del lugar 14 debido a la forma de su divisor $(x+y)$.

Aplicación 16

Halle el término del lugar 10 del cociente notable que genera la división $\dfrac{x^{80}-y^{80}}{x^{4}-y^{4}}$.

Resolución

N.º de términos:

$$n=\frac{80}{4}=\frac{80}{4}=20 \;\rightarrow\; n=20.$$

Dando la forma en la división se tiene

$$\frac{(x^{4})^{20}-(y^{4})^{20}}{(x^{4})-(y^{4})}\text{; luego}$$

$$t_{10}=(x^{4})^{20-10}\cdot(y^{4})^{10-1}$$

$$\rightarrow \quad t_{10}=(x^{4})^{10}\cdot(y^{4})^{9}$$

$$\therefore \quad t_{10}=x^{40}\cdot y^{36}$$

Aplicación 17

Si la división $\dfrac{x^{P}-y^{507}}{x^{3}-y^{P}}$ genera cociente notable, halle el número de términos.

Resolución

Si la división genera cociente notable, se cumple $\dfrac{P}{3}=\dfrac{507}{P}=$ N.º de términos.

También

$$P^{2}=3\times 507 \;\rightarrow\; P^{2}=1521$$

$$\rightarrow\; P=\sqrt{1521}$$

$$\rightarrow\; P=39$$

Por lo tanto, el número de términos es $\dfrac{P}{3}=\dfrac{39}{3}=13.$

RESUMEN DE LOS CUATRO CASOS PARA LA OBTENCIÓN DEL COCIENTE NOTABLE

Caso	Cociente notable	Resto
$\dfrac{x^{n}-y^{n}}{x-y}$	$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^{2}+\ldots+y^{n-1}$	nulo $\forall\, n\in\mathbb{N}$
$\dfrac{x^{n}-y^{n}}{x+y}$	$x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^{2}-\ldots-y^{n-1}$ $x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^{2}-\ldots+y^{n-1}$	• nulo si n es par • $-2y^{n}$ si n es impar
$\dfrac{x^{n}+y^{n}}{x+y}$	$x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^{2}-\ldots+y^{n-1}$ $x^{n-1}-x^{n-2}y^{2}+x^{n-3}y^{2}-\ldots-y^{n-1}$	• nulo si n es par • $2y^{n}$ si n es impar
$\dfrac{x^{n}+y^{n}}{x-y}$	$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^{2}+\ldots+y^{n-1}$	$2y^{n}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$

Problema N.º 1

¿Cuál será el resto de efectuar la siguiente división $\dfrac{x^5-3x^4+x-1}{(x-3)(x-1)}$?

Resolución

Se tiene

$$\frac{x^5-3x^4+x-1}{(x-3)(x-1)}\begin{matrix}\leftarrow D_{(x)}\\ \leftarrow d_{(x)}\end{matrix}$$

de donde se observa que

$$°\left[D_{(x)}\right]=5 \text{ y } °\left[d_{(x)}\right]=2$$

Entonces máx. $°\left[R_{(x)}\right]=2-1=1$, lo que implica que su resto es de la forma $R_{(x)}=ax+b$.

Ahora por la identidad fundamental se tiene

$$x^5-3x^4+x-1 \equiv (x-3)(x-1)q_{(x)}+ax+b$$

Luego evaluamos para valores de x que ayuden a anular el cociente que no es de nuestro interés por ahora, así

Si $x=3 \rightarrow \underbrace{3^5-3^1\cdot 3^4}_{0}+3-1=0+3a+b$

$2=3a+b$ (I)

Si $x=1 \rightarrow 1^5-3\cdot 1^4+\underbrace{1-1}_{0}=0+a+b$

$-2=a+b$ (II)

Ahora se tiene

$$\left.\begin{array}{r}3a+b=2\\ a+b=-2\end{array}\right\}(-)\downarrow$$
$$2a=4$$
$$\rightarrow a=2$$

Reemplazamos en (II)

$-2=2+b \rightarrow b=-4$

Finalmente el resto pedido es

$R_{(x)}=2x-4$

Problema N.º 2

Calcule el valor de $\sqrt{b(1-a)}$ si la siguiente división $\dfrac{bx^4+ax^3+5x^2+4}{2x^2-3x+2}$ es exacta.

Resolución

En este caso se puede aplicar el método de Horner para dividir, pero ordenaremos los polinomios dividendo y divisor en forma creciente, esto es posible solo en divisiones exactas, así

$$\frac{4+0x+5x^2+ax^3+bx^4}{2-3x+2x^2}$$

2	4	0	5	a	b
3		$\frac{6}{6}$	-4		
-2			$\frac{9}{10}$	-6	
				15	-10
	2	3	5	0	0

división exacta $\rightarrow R(x)\equiv 0$

- $a+9=0$
  $\rightarrow a=-9$
- $b-10=0$
  $\rightarrow b=10$

Luego

$$\sqrt{b(1-a)}=\sqrt{10(1-(-9))}$$
$$=\sqrt{10(10)}=\sqrt{100}$$
$$=10$$

Problema N.° 3

Calcule el resto de la siguiente división

$\dfrac{x^{30}-mx+1}{x-1}$ si la suma de coeficientes del cociente es 20.

Resolución

En este caso se aplicará la regla de Ruffini para dividir, debido a que el divisor es lineal, así

- $x-1=0 \;\rightarrow\; x=1$

$$\begin{array}{c|cccccccc|c} & \multicolumn{8}{c|}{\overbrace{\hspace{6cm}}^{\text{Hay 31 coeficientes.}}} & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -m & 1 \\ \hline x=1 & \downarrow & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-m \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (1-m) & 2-m \end{array}$$

Por dato

$$\underbrace{1+1+1+...+1}_{\text{29 sumandos}}+(1-m)=20$$

$$29+1-m=20 \;\rightarrow\; m=10$$

Luego

$$R_{(x)}=2-m=2-10=-8$$

Problema N.° 4

Si el polinomio $P_{(x)}$ se divide por $(x-2)$, el cociente es x^2+2x+1 y el residuo es r. Pero si $P_{(x)}$ se divide por $(x-4)$, el residuo es $(-r)$. ¿Cuál es el valor de r?

UNMSM 2009-II

Resolución

Por datos

- $\dfrac{P_{(x)}}{x-2}$ da por cociente x^2+2x+1 y resto r.

  Por la identidad fundamental

  $$P_{(x)}\equiv(x-2)(x^2+2x+1)+r \qquad \text{(I)}$$

- $\dfrac{P_{(x)}}{x-4}$ da por resto $-r$.

  Por teorema del resto

  $$P_{(4)}=-r$$

Ahora en (I) se evaluará para

$$x=4 \;\rightarrow\; \underbrace{P_{(4)}}=(2)(4^2+8+1)+r$$

$$-r=2(25)+r$$

$$-2r=50$$

$$r=-25$$

Problema N.° 5

Si el cociente notable que genera la división $\dfrac{x^{30}-y^m}{x^n-y^2}$ tiene 10 términos, halle el valor de $(m+n)$.

UNMSM 2001

Resolución

Como la división genera cociente notable se cumple que

$$\frac{30}{n}=\frac{m}{2}=10\;\left(\begin{array}{c}\text{número de}\\ \text{términos}\end{array}\right)$$

de donde

$$30=10n \;\text{ y }\; m=2\cdot 10$$

$$n=3 \;\text{ y }\; m=20$$

$$\therefore\; m+n=23$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Si al dividir el polinomio $P_{(x)}$ entre $2x^2+2x+1$ da por cociente x^2-x+1 y por resto $2x+1$, calcule la suma de coeficientes aumentado de su término independiente de $P_{(x)}$.

A) 2 B) 7 C) 9
D) 6 E) 8

2. Calcule el valor de $a+b+c$ si la siguiente división

$(ax^3+bx^2+cx+4)\div(x^2+x+1)$

es exacta y el cociente obtenido tiene por suma de coeficientes 5.

A) 15 B) 11 C) 10
D) 9 E) 7

3. Si el cociente de la siguiente división

$$\frac{2x^{2n+1}+3x^{n+1}-x^{n-1}+6}{x^{n+2}-2x^{n-1}+3}$$

es de cuarto grado, ¿cuánto será el máximo grado para el residuo considerando que la división es inexacta?

A) 2 B) 3 C) 5
D) 6 E) 7

4. Realice la división

$$\frac{x^2+4x^4-15x+1}{2x^2-1-3x}$$

y determine la suma del cociente con su residuo.

A) $2x^2+3x+6$
B) $2x^2+24x+12$
C) $2x^2+9x+13$
D) $2x^2+24x+13$
E) $2x^2+9x+12$

5. Calcule $(a-b)$ si la siguiente división

$$\frac{9x^4-x^2+b+ax}{2x-4+3x^2}$$ es exacta.

A) 2 B) -2 C) 18
D) 28 E) 38

6. Determine el valor de mn si $(7x+1)$ es el resto de la siguiente división

$$\frac{9x^5-x^3+10x^2+mx+n}{2-x+3x^2}.$$

A) 5 B) 6 C) 8
D) 14 E) 19

7. Si al efectuar la siguiente división

$$\frac{x^5+ax^2+bx+c}{(x-1)^2}$$

se obtuvo que el término independiente del cociente y el residuo son 6 y 0, respectivamente, ¿cuál es el valor de a^c?

A) 1 B) 8 C) 27
D) 64 E) 6^6

8. Calcule b^2+c^2 si $4x$ es el resto de la división

$$\frac{2ax^3+3ax^2+3-2bx^2}{ax^2+c-bx};\ a\neq 0.$$

A) 2 B) 5 C) 13
D) 25 E) 26

9. Luego de efectuar la división $\dfrac{2x^4+3x+1}{x-1}$, determine la suma del cociente y su residuo.

A) $2x^3+2x^2+2x+5$
B) $2x^3+x^2+2x+11$
C) $2x^3+2x^2+x+10$
D) $2x^3+x^2+x+11$
E) $2x^3+2x^2+2x+11$

10. Calcule a^2+a+1 si la siguiente división

$\dfrac{4x^4+3x^2+a}{2x-1}$ es exacta.

A) -1 B) 1 C) 3
D) 5 E) 7

11. Si la suma de coeficientes del cociente de la división $\dfrac{27x^3+18x^2-9ax+14}{3x-1}$ es -3, calcule el resto.

A) -7 B) 7 C) -5
D) 5 E) 41

12. Calcule a^2 si en la división

$\dfrac{ax^4-(2+a)x^3+(a^2+2)x^2-5}{ax-2}$

la suma de los coeficientes del cociente es igual a su residuo.

A) 1 B) 4 C) 9
D) 16 E) 25

13. Si los restos de dividir el polinomio $P_{(x)}$ entre $x-2$ y x^2-3x+2 son 5 y $R_{(x)}$, respectivamente, calcule $R_{(2)}$.

A) 15 B) 32 C) 31
D) 33 E) 30

14. El resto de la siguiente división

$\dfrac{(3x-4)^4+x^4-1}{x-2}$ es

A) 2. B) 3. C) 4.
D) 5. E) 10.

15. Si r es el resto de la siguiente división

$\dfrac{(x+2)^{2^n}+3xP_{(x^2)}+9P_{(6-x)}}{x+3}$; $n\in\mathbb{Z}^+$,

calcule r^3+r^2+r+1.

A) 0 B) 1 C) 4
D) 5 E) -5

16. El resto de la siguiente división

$\dfrac{2x^{17}+3x^{16}-5x^2+2}{x^2-1}$ es

A) $5x-3$. B) $2x+2$. C) 2.
D) $2x$. E) $2x+1$.

17. Si el polinomio $P_{(x)}$ es divisible separadamente por $(x-2)$ y $(x+2)$, ¿cuál será el resto de la división $P_{(x)}\div(x^2-4)$?

A) x B) $2x$ C) 2
D) 1 E) 0

18. Si al dividir el polinomio $P_{(x)}$ entre $(x-3)$; $(x+2)$ y $(x+3)$ separadamente se obtuvo el mismo resto igual a 7, ¿cuánto es el resto de dividir $P_{(x)}$ entre (x^2-9)?

A) 7 B) 5 C) 3
D) $x-1$ E) $2x-1$

19. Si el polinomio $P_{(x)}=ax^4+b$ es divisible por (x^2-1), calcule el valor de $a+b$.

A) 2 B) 1 C) -1
D) 0 E) -2

20. ¿Cuál de las divisiones generó el siguiente cociente notable $x^8+x^6+x^4+x^2+1$?

A) $\dfrac{x^9-1}{x-1}$ B) $\dfrac{x^9-1}{x^2-1}$ C) $\dfrac{x^{10}-1}{x-1}$

D) $\dfrac{x^{10}-1}{x^2+1}$ E) $\dfrac{x^{10}-1}{x^2-1}$

21. Calcule $\frac{m}{n}$ si la siguiente división $\frac{x^m - y^n}{x^6 - y^2}$ genera un cociente notable de 20 términos.

A) 3 B) 4 C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{4}$ E) 5

22. Determine el número de términos del cociente notable que genera la siguiente división $\frac{x^{n-2} - y^{n+2}}{x^3 - y^4}$.

A) 14 B) 12 C) 8
D) 6 E) 4

23. Si al efectuar la división $\frac{x^{2n-6} - y^{25}}{x^{n-6} - y^5}$ se genera un cociente notable, ¿cuál es el valor de n?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

24. Del cociente notable que genera la división $\frac{\left(x^{2^2}\right)^5 - \left(y^5\right)^{2^2}}{x - y}$, calcule $\frac{t_{10}}{t_{12}}$.

A) x^2y^2 B) $\frac{x^2}{y}$ C) $\left(\frac{x}{y}\right)^2$
D) $\left(\frac{y}{x}\right)^2$ E) $\frac{y}{x^2}$

25. Calcule el grado relativo a y en el término central del cociente notable que genera la siguiente división $\frac{x^{5^2} - y^{5^2}}{x - y}$.

A) 15 B) 14 C) 12
D) 10 E) 13

NIVEL INTERMEDIO

26. Si el polinomio
$P_{(x)} = ax^5 + bx^4 + cx^3 + 2x^2 - x + 1$ es divisible por el producto de $(nx - m)$ y $(x^2 - 1)$, determine $(a+b+c)^{-b}$.

A) -8 B) 27 C) $-\frac{1}{27}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $-\frac{1}{8}$

27. Si la siguiente división

$$\frac{(x+1)^{10} + x^{15} - ax + 2}{x^2 + x}$$

deja por resto a $R_{(x)} = 2x + b$, calcule el valor de $a + b$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

28. A partir del esquema de Horner mostrado

2	6	m	n	p	1
1		*	*		
			*	*	
-2				*	*
	*	1	*	1	5

calcule $\sqrt{mn + p}$.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

29. Si la siguiente división

$$\frac{ax^5+bx^4-x^3+7x^2-5x-12}{3x^2+x-4}$$

es exacta, calcule $a\cdot b$.

A) 24 B) 30 C) 32
D) 35 E) 40

30. Luego de efectuar la división $\dfrac{6x^4}{2x^2-2x-3m}$, el resto obtenido es $42x+36m$. Calcule la suma de coeficientes del cociente.

A) 6 B) 12 C) 15
D) 17 E) 18

31. Si el polinomio $P_{(x)}=x^{10}-ax+b$ al ser dividido por $(x-1)^2$ da un residuo nulo, entonces el valor de $a\cdot b$ es

A) 1. B) 9. C) 10.
D) 90. E) 100.

32. Si la siguiente división

$\dfrac{a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5}{x-a_1}$ es exacta,

además

$a_m\cdot a_n=a_{m+n}$ con $m; n\in\mathbb{Z}^+$ y $m\neq n$,

calcule el valor de $\dfrac{a_1^5}{a_5}$; $a_1\neq 0$.

A) −4 B) 1 C) 2
D) −7 E) −5

33. Si el resto de $\dfrac{P_{(x)}}{x-2}$ es 5, ¿cuánto es el resto en $\dfrac{(x^2+1)P_{(x)}}{x-2}$?

A) 5 B) 25 C) 10
D) 15 E) 24

34. El cociente de dividir un polinomio de tercer grado entre $(2x-1)$ es (x^2+2x-3) y el resto de dividir dicho polinomio entre $(2x+1)$ es 1. Halle el resto que se obtiene al dividir dicho polinomio entre $(2x-1)$.

A) 4,5 B) 3,5 C) 2,5
D) −1,5 E) −6,5

35. Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ entre (x^2-1) se obtiene $-2x+4$ de residuo, y al dividirlo entre x^2-x-2 se obtiene $8x+14$ de residuo. Determine el residuo que se obtendría al dividir $P_{(x)}$ entre x^3-2x^2+2.

A) $10x^2-2x-6$
B) $10x^2+2x+6$
C) $-10x^2-2x+6$
D) $-10x^2+6x-2$
E) $10x^2+6x-2$

UNMSM 2008-I

36. Se sabe que el polinomio

$P_{(x)}=x^{n+2}+Ax^{n+1}+ABx^n$; $n\in\mathbb{Z}^+$

es divisible por

$\phi_{(x)}=x^2-(A+B)x+AB$; $AB\neq 0$.

Calcule el valor que asume $\dfrac{A}{B}$.

A) 0,5 B) 2 C) −1
D) −0,5 E) 0

37. Sea $P_{(x)}$ un polinomio de tercer grado que es divisible separadamente por $(x-1)$ y $(x-3)$, además $P_{(5)}=152$ y al dividir $P_{(x)}$ entre $(x-4)$ el resto es 48. Determine $P_{(2)}$.

A) 5 B) −10 C) −20
D) 10 E) 20

38. Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ de tercer grado separadamente entre $(x-2)$ y $(x-5)$ se obtiene el mismo resto 4. Halle $P_{(6)}$ si la suma de coeficientes y el término independiente de $P_{(x)}$ son 16 y 24, respectivamente.

A) 36
B) 32
C) 30
D) 40
E) 34

39. Si el polinomio $P_{(x)}$ de tercer grado es divisible separadamente entre $(3x+1)$ y $(x-2)$, además el resto de dividir $P_{(x)}$ entre $(x-5)$ y $(x-1)$ es 48 y -20, respectivamente, calcule $P_{(3)}$.

A) -90
B) 10
C) 90
D) 30
E) 60

40. Halle el valor de
$E=1+\sqrt[8]{2}+\sqrt[8]{2^2}+\sqrt[8]{2^3}+\ldots+\sqrt[8]{2^{47}}$.

A) $\dfrac{68\sqrt[8]{2}}{2}$
B) $53(\sqrt{2}-1)$
C) $\dfrac{63}{\sqrt[8]{2}-1}$
D) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{63}$
E) $\dfrac{\sqrt[8]{2}-1}{63}$

UNMSM 2004-I

41. Si la división $\dfrac{x^{40}-243}{x^n-\sqrt{3}}$

genera cociente notable, halle el grado del término $t_{(n+4)}$.

A) 6
B) 8
C) 10
D) 16
E) 12

42. La división
$$\frac{x^{3m}-y^{3n}}{x^3-y^3}$$
genera un cociente notable donde el término de lugar 7 es x^9y^a. Determine el valor de $n+m+a$.

A) 22
B) 38
C) 32
D) 48
E) 16

43. Halle el término central del cociente notable que se obtiene al efectuar $\dfrac{x^{3n+6}+y^{6n+5}}{x^{n-2}+y^{2n-5}}$.

A) $-x^9y^{15}$
B) $-x^7y^{18}$
C) $-x^9y^{20}$
D) x^9y^{15}
E) x^7y^{18}

44. Si en la división
$\dfrac{x^4}{(x-a)(x-b)}$ el residuo es 1, halle el menor valor de $a+b$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) -3
E) -2

45. Si la división
$\dfrac{x^4+(P+2m)x+q-1}{x^2+mx-1}$ es exacta, indique la relación correcta.

A) $P+q=0$
B) $P^2-q^3=0$
C) $P^2+q^3=0$
D) $P^3+q^2=0$
E) $P^3-q^2=0$

46. Dado el polinomio
$f_{(x)}=x^5+(3\sqrt{2}-2)x^3-2\sqrt{2}x+7$,
calcule el valor numérico para $x=\sqrt{2}-1$.

A) 6
B) 7
C) 8
D) $6+\sqrt{2}$
E) $6-\sqrt{2}$

47. Dado $P_{(x)}=x^8+bx^3+c$, si el producto de los restos obtenidos al dividir $P_{(x)}$ entre (x^4+2) y (x^4+1), respectivamente, es $18x^2-63x+54$, calcule el mayor valor del término independiente.

A) 8
B) 12
C) 4
D) 3
E) 5

48. Un polinomio de sexto grado tiene raíz cúbica exacta, además es divisible separadamente por $(x-5)$ y $(x+3)$, y al dividirlo por $(x-7)$ su resto es 64 000. Luego el término independiente de dicho polinomio es

A) 15^3. B) 8^3. C) -15^3.
D) -30^3. E) -6^3.

49. Si $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$ es desarrollado como cociente notable, se encuentra un término racional. Diga cuál es ese término.

A) 2 B) 4 C) $\dfrac{1}{2}$
D) $\dfrac{1}{4}$ E) 1

50. Calcule el término de lugar $(n-5)$ del cociente notable que se obtiene al efectuar

$$\frac{(a+b)^{15}-(a-b)^{2n+1}}{6a^2b+2b^3}.$$

A) $(a+b)^{15}(a-b)^3$
B) $(a+b)^9(a-b)^3$
C) $(a+b)^7(a-b)^5$
D) $(a+b)^{10}(a-b)^3$
E) $(a+b)^8(a-b)^6$

51. Calcule la suma de coeficientes del resto de la siguiente división

$$\frac{8x^5+10x^4+ax^3+2bx^2+ax+4b}{2x^3+x-1}$$

si los coeficientes del cociente disminuyen de uno en uno.

A) 8 B) 3 C) 7
D) 6 E) 10

52. Si la suma de coeficientes del cociente que genera la división

$$\frac{x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}{x-1}$$

es 435, entonces valor de n es

A) 29. B) 30. C) 31.
D) 35. E) 15.

53. Sea $P_{(x)}$ un polinomio divisible por $(x+1)$, y al dividirlo por (x^2+x) se obtiene como cociente a $Q_{(x)}=x^2-3$ y un resto $R_{(x)}$. Si $R_{(4)}=10$, halle el coeficiente del término lineal de $P_{(x)}$.

A) -3 B) -5 C) -1
D) 1 E) 3

54. Calcule el grado absoluto del término central del cociente notable que genera la siguiente división

$$\frac{x^m-y^{3m-15}}{x-y^2}.$$

A) 14
B) 18
C) 21
D) 28
E) 35

Factorización de polinomios

Capítulo V

OBJETIVOS

- Factorizar un polinomio sobre los conjuntos enteros ($\mathbb{Z}$) y racionales ($\mathbb{Q}$).
- Identificar un polinomio y/o factor primo sobre $\mathbb{Z}$ y sobre $\mathbb{Q}$.
- Conocer los diversos métodos para factorizar un polinomio.

La factorización es una herramienta muy útil empleada en el proceso matemático de transformar un polinomio de manera conveniente para resolver algún problema. El término factorización proviene de la palabra "factorar", la cual aplicada a un polinomio consiste en descomponerlo en una multiplicación indicada de sus factores primos sobre un determinado conjunto numérico.

De los productos notables sabemos que

$$\underbrace{(x+1)(x^2-x+1)}_{\text{factores}}=\underbrace{x^3+1}_{\text{producto}}$$

Entonces, el problema ahora es "Dado el polinomio producto, hallar los factores que lo originan". Si conseguimos estos factores, habremos factorizado el polinomio así

Si $P_{(x)}=x^3+1$, entonces $P_{(x)}=(x+1)(x^2-x+1)$ está factorizado.

En el presente capítulo estudiaremos los aspectos teóricos más importantes de la factorización de polinomios (sobre los conjuntos de números enteros: $\mathbb{Z}$ y números racionales: $\mathbb{Q}$) y sus aplicaciones.

Factorización sobre $\mathbb{Z}$

NOCIONES PRELIMINARES

Polinomio definido sobre $\mathbb{Z}$

Un polinomio está definido sobre $\mathbb{Z}$ si todos sus coeficientes son enteros.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=4x^3-2x^2+3x-7$ está definido sobre $\mathbb{Z}$, pues sus coeficientes: 4; −2; 3 y −7 son enteros.

2. El polinomio $S_{(x;y)}=2x^2-\frac{3}{4}xy+y^3$ no está definido sobre $\mathbb{Z}$, pues $-\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}$.

   Nótese que todos los coeficientes: 2; $-\frac{3}{4}$ y 1 son racionales, entonces podemos decir que $S_{(x;y)}$ está definido sobre $\mathbb{Q}$.

Factor algebraico

Sean $P_{(x)}$ y $f_{(x)}$ dos polinomios tales que $°[P]\geq°[f]>0$. Decimos que $f_{(x)}$ es factor algebraico de $P_{(x)}$ si la división $P_{(x)}\div f_{(x)}$ es exacta.

Ejemplos

1. Dado el polinomio $f_{(x)}=(x+2)(x-3)$, nótese que $f_{(x)}=x+2$ y $g_{(x)}=x-3$ son factores algebraicos de $P_{(x)}$.

2. Dado el polinomio $P_{(x)}=x(x+1)(x-1)$, sus factores algebraicos son

   $x; x+1; x-1; x^2+x; x^2-x; x^2-1$ y x^3-x.

Aplicación 1

Si $f_{(x)}=x+2$ es un factor algebraico del polinomio $P_{(x)}=x^3+ax+2$, calcule el valor de a.

Resolución

Como $f_{(x)}$ es factor algebraico de $P_{(x)}$, entonces la división $\dfrac{x^3+ax+2}{x+2}$ es exacta.

Lo que implica que el residuo $R_{(x)}=P_{(-2)}=0$

$\rightarrow\ (-2)^3+a(-2)+2=0$

$\rightarrow\ -8-2a+2=0\ \rightarrow\ a=-3$

Corolario

- Todo factor algebraico es no constante.
- Un polinomio de grado positivo es factor algebraico de sí mismo.

Polinomio primo o irreductible

Si un polinomio (no constante) no se puede expresar como una multiplicación de factores algebraicos definidos sobre $\mathbb{Z}$; es decir, no se puede descomponer sobre $\mathbb{Z}$, diremos que el polinomio es primo o irreductible sobre $\mathbb{Z}$.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=x^2-3$ es primo sobre $\mathbb{Z}$.
   Nótese que $P_{(x)}=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ pero $\sqrt{3}\notin\mathbb{Z}$.

2. El polinomio $Q_{(x)}=x^2-4$ no es primo sobre $\mathbb{Z}$. En efecto, $Q_{(x)}=(x+2)(x-2)$.

3. El polinomio $R_{(x)}=x^2-2$ es primo sobre $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$, podemos decir que $R_{(x)}$ es primo sobre $\mathbb{Q}$.
   Nótese que

   $$R_{(x)}=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\text{ pero }\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}.$$

Algunos polinomios primos sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son

- $f_{(x)}=x^2+x+1$
- $g_{(x)}=x^2-x+1$
- $h_{(x)}=x^2+1$
- $F_{(x;\,y)}=x^2+xy+y^2$
- $G_{(x;\,y)}=x^2-xy+y^2$
- $H_{(x;\,y)}=x^2+y^2$

Teorema 1

Todo polinomio lineal con coeficientes enteros es primo sobre $\mathbb{Z}$ y sobre $\mathbb{Q}$.

Ejemplos

1. El polinomio lineal $P_{(x)}=3x+2$ es primo sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.
2. $L_{(x;\,y)}=2x+3y-1$ es un polinomio lineal, entonces es primo sobre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

Factor primo sobre $\mathbb{Z}$

Sea $f_{(x)}$ un factor algebraico de un polinomio $P_{(x)}$ sobre $\mathbb{Z}$ y $f_{(x)}$ primo sobre $\mathbb{Z}$. Diremos que $f_{(x)}$ es un factor primo de $P_{(x)}$ si sus coeficientes son primos entre sí (PESI).

Ejemplo

El polinomio $f_{(x)}=3x-1$ es un factor primo de $P_{(x)}=3x^2+2x-1$ sobre $\mathbb{Z}$.

En efecto

- $f_{(x)}$ es un factor algebraico de $P_{(x)}$.

  $$\frac{3x^2+2x-1}{3x-1}\ \rightarrow\ R=P_{\left(\frac{1}{3}\right)}=3\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\left(\frac{1}{3}\right)-1=0$$

- $f_{(x)}=3x-1$ es un polinomio lineal, entonces es primo sobre $\mathbb{Z}$.
- $f_{(x)}=3x-1$ tiene sus coeficientes 3 y -1 son PESI.

Factorización

Es el proceso por el cual un polinomio se expresa como una multiplicación de sus factores primos (o potencias de sus factores primos) sobre un determinado conjunto numérico.

Ejemplo

El polinomio $P_{(x)}=2(x+1)^2(2x-1)(x^2+1)$ está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

Aplicación 2

Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$

$f_{(x)}=x^4-5x^2+4$.

Resolución

Escribimos el polinomio así

$$f_{(x)}=x^4-x^2-4x^2+4$$

$$f_{(x)}=x^2(x^2-1)-4(x^2-1)$$

$$f_{(x)}=(x^2-4)(x^2-1)$$

Nótese que el polinomio está expresado como una multiplicación, pero aún no está factorizado. Sus factores (x^2-4) y (x^2-1) todavía se pueden descomponer.

Como $x^2-4=(x+2)(x-2)$ y $x^2-1=(x+1)(x-1)$.

Entonces $P_{(x)}=(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

Ahora, si el polinomio $P_{(x)}$ está factorizado sobre $\mathbb{Z}$, pues puede expresarse como una multiplicación de sus factores primos sobre $\mathbb{Z}$.

Conteo de factores primos

El número de factores primos de un polinomio (factorizado sobre $\mathbb{Z}$) se obtiene contando los factores primos que se encuentran como base de una potencia y que contienen al menos una variable.

Ejemplos

1. El polinomio factorizado sobre $\mathbb{Z}$ $P_{(x)}=5^2(x-1)^2(x+2)^3(x-3)$ tiene tres factores primos: $x-1$; $x+2$; $x-3$.

2. El polinomio factorizado sobre $\mathbb{Z}$ $Q_{(x;\ y)}=3x^2(2x-y)^3(x+1)^2(x^2+y^2)$ tiene cuatro factores primos, tres lineales: x; $2x-y$; $x+1$ y un cuadrático: x^2+y^2.

Métodos para factorizar

Existen diversos métodos para factorizar polinomios, entre ellos tenemos los siguientes:

Método del factor común y/o agrupación

Se aplica en polinomios donde todos sus términos tienen una o más variables y/o constantes comunes.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x;\ y)}=2x^2y+xy^2$ definido sobre $\mathbb{Z}$ muestra variables x e y que se repiten, las que deben extraerse elevadas a su menor exponente. Así $P_{(x;\ y)}=xy(2x+y)$, con lo cual el polinomio está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

2. El polinomio definido sobre $\mathbb{Z}$ $P_{(x;\ y)}=3x^2+3xy-2xy^2-2y^3$ no muestra un factor común en todos sus términos, pero podemos agrupar convenientemente los términos donde sí hay factor común. Así

$$P_{(x;\ y)}=3x^2+3xy-2xy^2-2y^3$$

$$P_{(x;\ y)}=3x(x+y)-2y^2(x+y)$$

$$P_{(x;\ y)}=(3x-2y^2)(x+y)$$

con lo que P está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

Método de las identidades

Aquí utilizamos las identidades de los productos notables para factorizar polinomios.

Ejemplos

1. En el polinomio $Q_{(x)}=x^4-1$ aplicamos diferencia de cuadrados.

   $Q_{(x)}=(x^2)^2-1^2=(x^2+1)(x^2-1)$

   $Q_{(x)}=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

   con lo cual Q está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

2. En el polinomio $R_{(x;\,y)}=x^3+y^3$ aplicamos suma de cubos.

   $R_{(x;\,y)}=x^3+y^3$

   $R_{(x;\,y)}=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

   con lo cual R está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

Método del aspa simple

Se aplica para factorizar polinomios de las formas

$$\boxed{P_{(x)}=Ax^{2n}+Bx^n+C}\quad \text{o}$$

$$\boxed{P_{(x;\,y)}=Ax^{2m}+Bx^my^n+Cy^{2n}}$$

donde $ABC\neq 0 \wedge \{m;n\}\subset\mathbb{N}$.

Esquema y procedimiento

$$P_{(x;\,y)}=Ax^{2m}+Bx^my^n+Cy^{2n}$$

$$\begin{array}{ccc} A_1x^m & & C_1y^n \\ & \times & \\ A_2x^m & & C_2y^n \end{array}$$

Debe cumplirse

$A_1x^m\cdot A_2x^m=Ax^{2m}$

$C_1y^n\cdot C_2y^n=Cy^{2n}$

$A_1x^mC_2y^n+A_2x^mC_1y^n=Bx^my^n$

Luego los factores se toman en forma horizontal.

Así

$$P_{(x;\,y)}=(A_1x^m+C_1y^n)(A_2x^m+C_2y^n)$$

Ejemplos

1. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$ $P_{(x)}=3x^2-4x-15$.

   Esquema y procedimiento

   $$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{3}{l}{3x^2-4x-15} & & \\ 3x & & 5 & \rightarrow & 5x \\ & \times & & & \\ x & & -3 & \rightarrow & -9x \\ \hline & & & & -4x \end{array}\; +$$

   Luego

   $P_{(x)}=(3x+5)(x-3)$ está factorizado.

2. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$ $Q_{(x;\,y)}=6x^2+xy-2y^2$.

   Esquema y procedimiento

   $$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{3}{l}{6x^2+xy-2y^2} & & \\ 3x & & 2y & \rightarrow & 4xy \\ & \times & & & \\ 2x & & -y & \rightarrow & -3xy \\ \hline & & & & xy \end{array}\; +$$

   Luego

   $Q_{(x;\,y)}=(3x+2y)(2x-y)$ está factorizado.

NOTA

Cuando un trinomio cuadrático definido sobre $\mathbb{Z}$ no admite el aspa simple, entonces diremos que no es factorizable.

Ejemplo

$$R_{(x)}=x^2-2x-1$$

$$\begin{array}{ccc} x & ? & -1 \\ & \times & \\ x & & 1 \end{array}$$

En consecuencia, $R_{(x)}=x^2-2x-1$ es primo sobre $\mathbb{Z}$.

Método del aspa doble

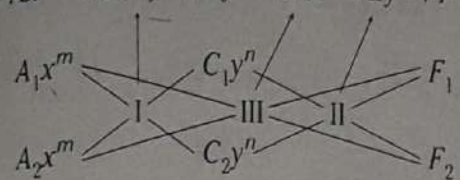
Se aplica para factorizar polinomios de dos variables y de seis términos de la forma

$$P_{(x;\,y)}=Ax^{2m}+Bx^{m}y^{n}+Cy^{2n}+Dx^{m}+Ey^{n}+F$$

donde $m; n \in \mathbb{N}$.

Esquema y procedimiento

$$P_{(x;\,y)}=Ax^{2m}+Bx^{m}y^{n}+Cy^{2n}+Dx^{m}+Ey^{n}+F$$



Debe cumplirse que

I. $A_1x^m\cdot C_2y^n+A_2x^mC_1y^n=Bx^my^n$

II. $C_1y^n\cdot F_2+C_2y^n\cdot F_1=Ey^n$

III. $A_1x^m\cdot F_2+A_2x^m\cdot F_1=Dx^m$

Luego los factores se toman en forma horizontal. Así

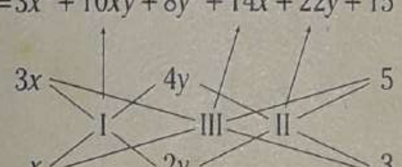
$$P_{(x;\,y)}=\left(A_1x^m+C_1y^n+F_1\right)\left(A_2x^m+C_2y^n+F_2\right)$$

Ejemplos

1. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$
$P_{(x;\,y)}=3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+15.$

Esquema y procedimiento

$$P_{(x;\,y)}=3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+15$$



Verificamos

I. $3x\cdot 2y+x\cdot 4y=10xy$

II. $4y\cdot 3+2y\cdot 5=22y$

III. $3x\cdot 3+x\cdot 5=14x$

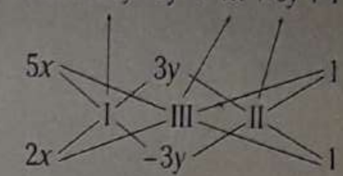
Luego

$P_{(x;\,y)}=(3x+4y+5)(x+2y+3)$ está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

2. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$
$Q_{(x;\,y)}=10x^2-9xy-9y^2+7x+1.$

Esquema y procedimiento

$$Q_{(x;\,y)}=10x^2-9xy-9y^2+7x+0y+1$$



Luego

$Q_{(x;\,y)}=(5x+3y+1)(2x-3y+1)$ está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

Observación

Cuando en el polinomio falta algún término, debemos "completar" con cero por cada término que falte.

Método del aspa doble especial

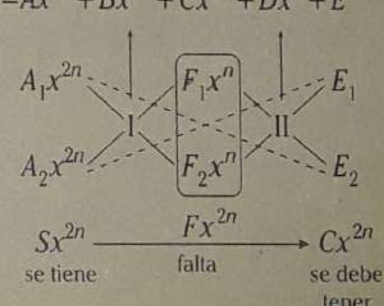
Se aplica para factorizar polinomios de cinco términos y de una variable, de la forma

$$P_{(x)}=Ax^{4n}+Bx^{3n}+Cx^{2n}+Dx^{n}+E$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

Esquema y procedimiento

$$P_{(x)}=Ax^{4n}+Bx^{3n}+Cx^{2n}+Dx^{n}+E$$



Debe cumplirse

$$Sx^{2n}=A_1x^{2n}E_2+A_2x^{2n}E_1$$

$$Sx^{2n}+Fx^{2n}=Cx^{2n}$$

Luego los factores se toman en forma horizontal.

Así

$$P_{(x)}=\left(A_1x^{2n}+F_1x^n+E_1\right)\left(A_2x^{2n}+F_2x^n+E_2\right)$$

Si estos factores no son primos, se factorizan por aspa simple.

Ejemplos

1. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$

   $P_{(x)}=2x^4+5x^3+3x^2+x-1.$

   Esquema y procedimiento

   $$P_{(x)}=2x^4-5x^3+3x^2+x-1$$

   $$\begin{array}{ccc} 2x^2 & \boxed{-x} & -1 \\ x^2 & \boxed{-2x} & 1 \end{array}$$

   $$x^2 \xrightarrow{2x^2} 3x^2$$

   Se tiene $2x^2-x^2=x^2$.

   Se debe tener $3x^2$.

   Falta $2x^2$ ⟵ cantidad a descomponerse

   $\rightarrow\ P_{(x)}=(2x^2-x-1)(x^2-2x+1)$

   $$\begin{array}{cc} 2x & 1 \\ x & -1 \end{array}$$

   $\rightarrow\ P_{(x)}=(2x+1)(x-1)(x-1)^2$

   Luego

   $P_{(x)}=(2x+1)(x-1)^3$ está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

2. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$

   $Q_{(x)}=x^4+3x^3-x-3.$

   Esquema y procedimiento

   $$Q_{(x)}=x^4+3x^3+0x^2-x-3$$

   $$\begin{array}{ccc} x^2 & \boxed{2x} & -3 \\ x^2 & \boxed{x} & 1 \end{array}$$

   $$-2x^2 \xrightarrow{2x^2} 0x^2$$

   Se tiene $-3x^2+x^2=-2x^2$.

   Se debe tener $0x^2$.

   Falta $2x^2$ ⟵ cantidad a descomponerse

   $\rightarrow\ Q_{(x)}=(x^2+2x-3)(x^2+x+1)$

   $$\begin{array}{cc} x & 3 \\ x & -1 \end{array}$$

   Entonces

   $Q_{(x)}=(x+3)(x-1)(x^2+x-1)$ está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

FACTORIZACIÓN SOBRE $\mathbb{Q}$

Ahora vamos a factorizar polinomios con coeficientes racionales; es decir, si un polinomio reductible tiene coeficientes racionales, entonces sus factores también deben tener estos coeficientes.

Por ejemplo, el polinomio $P_{(x)}=2x^2-\frac{1}{2}$ tiene coeficientes: $2; -\frac{1}{2}$ racionales; entonces $P_{(x)}$ está definido sobre Q, luego se factoriza así

$$P_{(x)}=2x^2-\frac{1}{2}=2\left(x^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow\ P_{(x)}=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Teorema 2

Sea $P_{(x)}=ax^2+bx+c$; $abc\neq 0$ de coeficientes racionales enteros. $P_{(x)}$ es factorizable sobre Q si su discriminante $\Delta=b^2-4ac$ es un cuadrado perfecto $(\Delta=k^2; k\in\mathbb{Z}^+)$.

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=2x^2-x-3$ tiene discriminante $\Delta=(-1)^2-4(2)(-3)$.

   $\Delta=25$: es un cuadrado perfecto.

   $\rightarrow P_{(x)}=2x^2-x-3$ es factorizable sobre Q.

   Entonces, por aspa simple

   $P_{(x)}=2x^2-x-3$

   $2x \quad -3$

   $x \quad 1$

   $\therefore\ P_{(x)}=(2x-3)(x+1)$

2. El polinomio $R_{(x)}=5x^2-x+6$ tiene discriminante $\Delta=(-1)^2-4(5)(6)$.

   $\Delta=-119$: no es cuadrado perfecto.

   $\rightarrow R_{(x)}=5x^2-x+6$ no es factorizable sobre Q. Entonces, es primo sobre Q.

Raíz de un polinomio

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de grado $n \geq 1$.

Si $P_{(a)}=0$, entonces el número a es raíz del polinomio P.

Ejemplos

1. En el polinomio $P_{(x)}=2x^2-x-1$ se observa que $P_{(1)}=2\cdot 1^2-1-1=0$.
   Entonces, 1 es raíz del polinomio P.

2. En el polinomio $Q_{(x)}=2x^3-x^2-4x+2$ se observa que

   $$Q_{\left(\frac{1}{2}\right)}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}\right)+2=0$$

   $$Q_{(\sqrt{2})}=2\cdot\sqrt{2}^3-\sqrt{2}^2-4\cdot\sqrt{2}+2=0$$

   Entonces, $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{2}$ son raíces de Q.

NOTA

Solo nos van a interesar las raíces racionales.

¿Cómo determinar las posibles raíces racionales?

Sea $P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n;\ a_0\cdot a_n \neq 0$.

Las posibles raíces racionales (P.R.R) de P están dadas por

$$\text{P.R.R}=\pm\left\{\frac{\text{divisores de } |a_n|}{\text{divisores de } |a_0|}\right\}$$

Por ejemplo, para el polinomio $P_{(x)}=2x^4-x^3-14x^2-5x+6$ se tiene

$$\text{P.R.R}=\pm\left\{\frac{\text{divisores de (6)}}{\text{divisores de (2)}}\right\}$$

$$\text{P.R.R}=\pm\left\{\frac{1;2;3;6}{1;2}\right\}$$

$$\text{P.R.R}=\pm\left\{1;2;3;6;\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{P.R.R}=\left\{1;-1;2;-2;3;-3;6;-6;\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right\}$$

Si el polinomio $P_{(x)}=2x^4-x^3-14x^2-5x+6$ tiene alguna raíz racional, necesariamente debe estar en este conjunto.

Corolario

Si $a_0=1$ (polinomio mónico), entonces

$$\text{P.R.R}=\pm\{\text{divisores de } |a_n|\}$$

Método de los divisores binómicos

Se aplica para factorizar polinomios de grado $n \geq 2$ de una variable y que admitan al menos un factor lineal.

En el procedimiento de este método utilizaremos el siguiente teorema.

Teorema 3 (teorema del factor)

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de grado $n \geq 1$.
a es raíz de $P_{(x)} \leftrightarrow (x-a)$ es factor de $P_{(x)}$.

Corolario

$P_{(x)}=(x-a)\cdot q_{(x)}$; de donde $q_{(x)}=\dfrac{P_{(x)}}{x-a}$. Ahora hallamos $q_{(x)}$ aplicando la regla de Ruffini.

Por ejemplo, en el polinomio

$P_{(x)}=x^3-7x+6$ se observa que

$P_{(2)}=2^3-7\cdot 2+6=0$

→ 2 es una raíz de $P_{(x)}$.

→ $(x-2)$ es un factor de $P_{(x)}$.

→ $P_{(x)}=(x-2)\cdot q_{(x)}$

Aplicación 3

Factorice el polinomio sobre Q

$P_{(x)}=x^3-3x+2$.

Resolución

Nótese que $P_{(1)}=1^3-3\cdot 1+2=0$

→ 1 es una raíz de $P_{(x)}$.

→ $(x-1)$ es un factor de $P_{(x)}$.

→ $P_{(x)}=(x-1)\cdot q_{(x)}$ (I)

→ $q_{(x)}=\dfrac{P_{(x)}}{x-1}$

Hallamos $q_{(x)}$ aplicando la regla de Ruffini

	1	0	−3	2
1	↓	1	1	−2
	1	1	−2	0

→ $q_{(x)}=x^2+x-2$ (II)

De reemplazar (II) en (I) se tiene

→ $P_{(x)}=(x-1)\cdot(x+2)(x-1)$

Por lo tanto, $P_{(x)}=(x-1)^2\cdot(x+2)$ está factorizado sobre Q.

Teorema 4

Todo polinomio cúbico sobre Q
$P_{(x)}=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$; $a_0\neq 0$ que no admite raíz racional no es factorizable sobre Q.

Ejemplo

El polinomio $P_{(x)}=x^3+3x+1$ es mónico, luego sus posibles raíces racionales son los divisores de 1: P.R.R={1; −1}

$$P_{(1)}=1^3+3\cdot 1+1=5\neq 0$$

$$P_{(-1)}=(-1)^3+3(-1)+1=-3\neq 0$$

Como el polinomio $P_{(x)}$ no tiene raíz racional, entonces no es factorizable sobre Q, así $P_{(x)}=x^3+3x+1$ es primo sobre Q.

Aplicación 4

Factorice el polinomio sobre Q

$S_{(x)}=x^4+2x^3+3x^2+7x+2$.

Al aplicar el aspa doble especial se observa que $S_{(x)}$ no se puede factorizar por este método, entonces aplicamos el método de los divisores binómicos.

$$S_{(-2)}=(-2)^4+2(-2)^3+3(-2)^2+7(-2)+2=0$$

→ −2 es una raíz de $S_{(x)}$.

→ $(x+2)$ es un factor de $S_{(x)}$.

→ $S_{(x)}=(x+2)\cdot q_{(x)}$ (I)

→ $q_{(x)}=\dfrac{S_{(x)}}{x+2}$

Hallamos $q_{(x)}$ aplicando la regla de Ruffini

	1	2	3	7	2
−2		−2	0	−6	−2
	1	0	3	1	0

→ $q_{(x)}=x^3+3x+1$ (II)

Luego de reemplazar (II) en (I) se tiene

$S_{(x)}=(x-2)(x^3+3x+1)$ está factorizado sobre Q.

Aplicación 5

Factorice el polinomio sobre Q.

$R_{(x)}=2x^5+x^4-7x^3-5x^2-4x+4$

Resolución

Aplicamos el método de los divisores binómicos.

$$\text{P.R.R}=\pm\left\{\frac{\text{divisores de }4}{\text{divisores de }2}\right\}$$

$$\text{P.R.R}=\pm\left\{\frac{1;2;4}{1;2}\right\}=\pm\left\{1;2;4;\frac{1}{2}\right\}$$

Como $R_{(2)}=2\cdot2^5+2^4-7\cdot2^3-5\cdot2^2-4-2+4=0$

$\rightarrow$ 2 es una raíz de $R_{(x)}$.

$\rightarrow$ $(x-2)$ es un factor de $R_{(x)}$.

$\rightarrow$ $R_{(x)}=(x-2)q_{(x)}$ (I)

$\rightarrow$ $q_{(x)}=\dfrac{R_{(x)}}{x-2}$

Hallamos $q_{(x)}$ aplicando la regla de Ruffini

	2	1	−7	−5	−4	4
2		4	10	6	2	−4
	2	5	3	1	−2	0

$\rightarrow$ $q_{(x)}=2x^4+5x^3+3x^2+x-2$

Factorizamos $q_{(x)}$ por aspa doble especial.

$$\begin{array}{ccc} 2x^4+5x^3+3x^2+x-2 & & \\ 2x^2 & 3x & -2 \\ x^2 & x & 1 \end{array}$$

$$0x^2 \xrightarrow{3x^2} 3x^2$$

$\rightarrow$ $q_{(x)}=(2x^2+3x-2)(x^2+x+1)$

$$\begin{array}{cc} 2x & -1 \\ x & 2 \end{array}$$

Entonces

$$q_{(x)}=(2x-1)(x+2)(x^2+x+1) \qquad \text{(II)}$$

Luego de reemplazar (II) en (I) se tiene

$R_{(x)}=(x-2)(2x-1)(x+2)(x^2+x+1)$ está factorizado sobre Q.

Aplicación 6

¿Cuántos factores primos lineales admite el polinomio $P_{(x)}=x^6-2x^4-11x^2+12$?

Resolución

Como los exponentes de la variable disminuyen de dos en dos, se puede hacer el siguiente cambio de variable

$y=x^2$; luego se tiene

$P=y^3-2y^2-11y+12$, aquí

$$\text{P.R.R}=\pm\left\{\frac{1;2;3;4;6;12}{1}\right\}$$

$$\text{P.R.R}=\pm\{1;2;3;4;6;12\}$$

Ahora $P_{(1)}=0$, lo que implica que $(y-1)$ es factor. Luego por Ruffini

	1	−2	−11	12
$y=1$	↓	1	−1	−12
	1	−1	−12	0

$\rightarrow$ $P=(y-1)(y^2-y-12)$

$$\begin{array}{cc} y & 3 \\ y & -4 \end{array}$$

$\rightarrow$ $P=(y-1)(y+3)(y-4)$ pero $y=x^2$

$\rightarrow$ $P_{(x)}=(x^2-1)(x^2+3)(x^2-4)$

$\rightarrow$ $P_{(x)}=(x+1)(x-1)(x^2+3)(x+2)(x-2)$

Por lo tanto, el número de factores primos lineales es 4.

Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$

$S_{(a;\,b)}=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$.

Resolución

Escribimos el polinomio convenientemente

$$S_{(a;\,b)}=\underbrace{a^3+3a^2b+2ab^2}+\underbrace{a^2b+3ab^2+2b^3}$$

$$S_{(a;\,b)}=a(a^2+3ab+2b^2)+b(a^2+3ab+2b^2)$$

$$S_{(a;\,b)}=(a^2+3ab+2b^2)(a+b)$$

$$\begin{array}{ll} a & 2b \\ a & b \end{array}$$

$$S_{(a;\,b)}=(a+2b)(a+b)(a+b)$$

$$\therefore\ S_{(a;\,b)}=(a+2b)(a+b)^2$$

Problema N.° 2

¿Cuántos factores primos sobre $\mathbb{Q}$ tiene el polinomio $P_{(x)}$?

$$P_{(x)}=(x^2-x+2)^2-10x(x-1)-4$$

Resolución

Escribimos el polinomio así

$$P_{(x)}=(x^2-x+2)^2-10(x^2-x)-4$$

hacemos $x^2-x=t$, luego

$$P=(t+2)^2-10t-4$$

$$P=t^2+4t+\cancel{4}-10t-\cancel{4}$$

$$P=t^2-6t$$

$$P=t(t-6)$$

$$P_{(x)}=(x^2-x)(x^2-x-6)$$

$$\begin{array}{ll} x & -3 \\ x & 2 \end{array}$$

$$P_{(x)}=x(x-1)(x-3)(x+2)$$

Por lo tanto, el polinomio $P_{(x)}$ tiene cuatro factores primos sobre $\mathbb{Q}$.

Problema N.° 3

Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$

$Q_{(x)}=2x^3-x^2+x+1$.

Resolución

Como Q es un polinomio cúbico, lo factorizaremos por el método de los divisores binómicos.

Evaluamos $Q_{(x)}=2x^3-x^2+x+1$ en

$$x=-\frac{1}{2}:\ Q_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=2\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1$$

$$\rightarrow\ Q_{\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1=0$$

Luego, $-\dfrac{1}{2}$ es una raíz de Q.

Entonces $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ es un factor de Q.

$$\rightarrow\ Q_{(x)}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot q_{(x)} \qquad \text{(I)}$$

Aplicamos la regla de Ruffini para hallar $q_{(x)}$.

	2	−1	1	1
$-\frac{1}{2}$	↓	−1	1	−1
	2	−2	2	0

$$\rightarrow\ q_{(x)}=2x^2-2x+2$$

En (I)

$$Q_{(x)}=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)$$

$$\rightarrow\ Q_{(x)}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot(x^2-x+1)$$

$$\rightarrow\ Q_{(x)}=(2x+1)(x^2-x+1)$$

Problema N.° 4

Factorice el polinomio sobre Q
$R_{(x)}=x^4+4$.

Resolución

Escribimos el polinomio así

$$R_{(x)}=\underbrace{x^4+4x^2+4}-4x^2$$

$$R_{(x)}=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2$$

$$R_{(x)}=\left(x^2+2+2x\right)\left(x^2+2-2x\right)$$

$$R_{(x)}=\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$$

Nótese que los polinomios (x^2+2x+2) y (x^2-2x+2) son primos sobre Q (no admiten aspa simple), luego $R_{(x)}$ está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

Otra forma

Factorizaremos $R_{(x)}=x^4+4$ por aspa doble especial, así

$$R_{(x)}=x^4+0x^3+0x^2+0x+4$$

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & 2x & & 2 \\ x^2 & & -2x & & 2 \\ 4x^2 & \xrightarrow{-4x^2} & & & 0x^2 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{se tiene} & & \text{falta} & & \text{se debe tener} \end{array}$$

Luego

$$R_{(x)}=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

Problema N.° 5

Factorice el polinomio sobre Q
$S_{(x)}=x^5+x+1$.

Resolución

Nótese que $S_{(x)}=x^5+x+1$ no admite raíces racionales, luego no es factorizable por el método de los divisores binómicos.

Para su factorización escribimos el polinomio así

$$S_{(x)}=\underbrace{x^5-x^2}+x^2+x+1$$

$$S_{(x)}=x^2\left(x^3-1\right)+\left(x^2+x+1\right)$$

$$S_{(x)}=x^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)+\left(x^2+x+1\right)$$

$$S_{(x)}=\left(x^2+x+1\right)\left[x^2(x-1)+1\right]$$

$$S_{(x)}=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$$

Nótese que

- $f_{(x)}=x^2+x+1$ no admite aspa simple, entonces es primo sobre Q.
- $g_{(x)}=x^3-x^2+1$ no admite raíz racional, entonces es primo sobre Q.

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Dado el polinomio $P_{(x)}=2x^3-ax+b$ definido sobre $\mathbb{Z}$, si $f_{(x)}=x+1$ es un factor algebraico de P, calcule el valor de $a+b$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) −2 E) −1

2. Indique cuál de los siguientes polinomios no está definido sobre $\mathbb{Q}$.

A) $f_{(x)}=2x+1$
B) $g_{(x)}=x-\sqrt{4}$
C) $h_{(x)}=\frac{1}{3}x+2$
D) $f_{(x)}=x^2-\sqrt{9}$
E) $G_{(x)}=1-\sqrt{2}x^2$

3. Indique cuál de los siguientes polinomios es irreductible sobre $\mathbb{Q}$.

A) $f_{(x)}=x^2-\frac{1}{4}$
B) $g_{(x)}=x^2-2x+1$
C) $h_{(x)}=x^3+8$
D) $F_{(x)}=x^2-x+1$
E) $G_{(x)}=x^4+4$

4. Indique cuál de los siguientes polinomios no está factorizado sobre $\mathbb{Z}$.

A) $P_{(x)}=4(x^2+1)(x+2)(x-3)$
B) $Q_{(x)}=(2x-1)^2(x^2+x+1)$
C) $R_{(x)}=5(x+4)(x^2+4)(x^4+4)$
D) $S_{(x)}=-2(x-1)^4(3x+2)$
E) $T_{(x)}=3x^2(2x+1)(x-5)^2(x^2+2)$

5. ¿Cuál de los siguientes polinomios no es un factor algebraico de $S_{(x)}=x^3-4x$?

A) $f_{(x)}=x^2+2$
B) $g_{(x)}=x^2-2x$
C) $h_{(x)}=x^2+2x$
D) $F_{(x)}=x^2-4$
E) $G_{(x)}=x$

6. ¿Cuántos factores primos sobre $\mathbb{Z}$ tiene el polinomio $P_{(x)}=x^2(x+2)^2(x+1)^3$?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

7. Indique un factor primo del polinomio sobre $\mathbb{Z}$.

$F_{(a;\,b)}=2a^4b-2a^3b+4a^3b^2-4a^2b$

A) $f_{(a;\,b)}=ab$
B) $g_{(a;\,b)}=a-2b$
C) $h_{(a)}=a^2$
D) $f_{(a;\,b)}=a+b$
E) $g_{(a)}=a-1$

8. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$

$P_{(x;\,y)}=4+2xy-(x^2+y^2)$

e indique un factor primo.

A) $f_{(x)}=x-y+2$
B) $g_{(x;\,y)}=x+y-1$
C) $h_{(x;\,y)}=x+y-2$
D) $F_{(y)}=x-y+2$
E) $G_{(x;\,y)}=x-y$

9. Respecto al polinomio sobre $\mathbb{Z}$
$Q_{(a;b)}=a^3-a^2b-ab^2+b^3$,
indique lo correcto.

A) Tiene tres factores primos.
B) Un factor primo es cuadrático.
C) La suma de sus factores primos es cero.
D) Tiene dos factores primos.
E) Es un polinomio irreductible.

10. Si $f_{(x;y)}$ es un factor primo del polinomio $P_{(x;y)}=x^4-6y^2+x^2y$, calcule el mayor valor de $f_{(1;-1)}$.

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

11. Dado el esquema de factorización (por aspa simple) del polinomio sobre $\mathbb{Z}$
$P_{(x)}=3x^2+5x+2$

$$\begin{array}{cc} nx & 2 \\ x & m \end{array}$$

calcule el valor de $m-n$.

A) 3
B) -2
C) 1
D) 2
E) -1

12. Indique un factor primo del polinomio
$Q_{(x;y)}=2x^2+3y^2-5xy-9x+13y+4$.

A) $f_{(x;y)}=2x-3y-1$
B) $f_{(x;y)}=x+y-4$
C) $f_{(x;y)}=2x+3y-1$
D) $f_{(x;y)}=x-y+4$
E) $f_{(x;y)}=x+y+4$

13. Respecto al polinomio sobre $\mathbb{Z}$
$R_{(x;y)}=(x+2y)(x-2y)+12y-9$,
indique lo correcto.

A) Si $f_{(x;y)}$ es un primo, entonces $f_{(1;1)}=1$.
B) La suma de sus factores primos es $2x$.
C) La diferencia de sus factores primos es 1.
D) Es irreductible.
E) Un factor primo es $f_{(x;y)}=x+2y+3$.

14. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$
$P_{(x)}=x^4+3x^3+4x^2+4x-6$
e indique un factor primo.

A) $f_{(x)}=x^2+x-3$
B) $f_{(x)}=x^2+2x+2$
C) $f_{(x)}=x^2+2x-1$
D) $f_{(x)}=x^2+x-2$
E) $f_{(x)}=x^2+2x-2$

15. Si $f_{(x)}=x^2+ax+b$ es un factor del polinomio $P_{(x)}=x^3-x-6$ sobre $\mathbb{Q}$, calcule el valor de $f_{(m)}$. Considere que m es la raíz entera de P.

A) 7
B) 9
C) 11
D) 12
E) 13

16. Si $S_{(x)}$ es la suma de los factores primos del polinomio $F_{(x)}=2x^4-5x^3+3x^2-x-2$ sobre $\mathbb{Z}$, indique un factor primo de S.

A) $f_{(x)}=2x$
B) $f_{(x)}=x-2$
C) $f_{(x)}=2x-1$
D) $f_{(x)}=x+2$
E) $f_{(x)}=-x$

17. Factorice el polinomio sobre Q
$P_{(x)}=3x^3-2x^2-3x+2$ e indique el factor primo de mayor suma de coeficientes.

A) $f_{(x)}=3x-2$
B) $f_{(x)}=x-1$
C) $f_{(x)}=3x-2$
D) $f_{(x)}=x+2$
E) $f_{(x)}=x+1$

18. Respecto al polinomio sobre Q
$R_{(x)}=x^3+3x-1$,
indique lo incorrecto.

A) No admite raíces racionales.
B) Es irreductible.
C) No es factorizable.
D) Tiene tres raíces racionales.
E) Es primo.

19. Factorice el polinomio sobre Q
$S_{(x)}=x^4+2x^2+9$ e indique un factor primo.

A) $f_{(x)}=x^2+2x+3$
B) $f_{(x)}=x^2-2x-3$
C) $f_{(x)}=x^2+2x-3$
D) $f_{(x)}=x^2+x-3$
E) $f_{(x)}=x^2-x+3$

20. ¿Cuál de los siguientes polinomios no es un factor primo de
$P_{(x)}=x^5-2x^4-3x^3-x^2+2x+3$?

A) $f_{(x)}=x-1$
B) $f_{(x)}=x+1$
C) $f_{(x)}=x-3$
D) $f_{(x)}=x^2-x+1$
E) $f_{(x)}=x^2+x+1$

NIVEL INTERMEDIO

21. Indique cuántos factores primos tiene el polinomio
$Q_{(x;\,y)}=3^2\cdot x^3y^2(x+1)^2(x^2+y^2)(2y-1)^3$ sobre Z.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

22. Si $f_{(x)}=x-1$ es un factor algebraico del polinomio $P_{(x)}=2x^3-ax^2+b^2-2$, además $P_{(0)}=2$, calcule el menor valor de $a+b$.

A) 6
B) 4
C) −2
D) 0
E) 2

23. Indique un factor primo del polinomio sobre Q
$P_{(x)}=(a^2-1)x^2+2x-1;\ a\geq 2$.

A) $f_{(x)}=(a-1)x-1$
B) $f_{(x)}=x-1$
C) $f_{(x)}=x+1$
D) $f_{(x)}=(a-1)x+1$
E) $f_{(x)}=(a+1)x+1$

24. Factorice el polinomio sobre Q
$R_{(x;\,y)}=x^3-3xy+y^3+1$
e indique un factor primo.

A) $f_{(x;\,y)}=x+y-1$
B) $f_{(x;\,y)}=x+y+1$
C) $f_{(x)}=x^2+1$
D) $f_{(x)}=xy+y+x$
E) x^2+xy+y^2

25. Si el trinomio $P_{(x)}=mx^2-(2m+1)x+m$ admite al menos un factor primo sobre $\mathbb{Z}$, calcule el menor valor positivo de m.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 9 E) 12

26. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Q}$
$S_{(x;y)}=x^4+2x^3y+4x^2y^2+3xy^3-4y^4$
e indique un factor primo.

A) $f_{(x;y)}=x^2+xy+y^2$
B) $f_{(x;y)}=x^2+xy-2y^2$
C) $f_{(x;y)}=x^2-xy+y^2$
D) $f_{(x;y)}=x^2+xy-y^2$
E) $f_{(x;y)}=x^2-xy+2y^2$

27. Indique el factor primo común de los siguientes polinomios sobre $\mathbb{Z}$.
$P_{(a;b)}=3a^2+5ab+2b^2+c(8a+7b)+5c^2$
$Q_{(a;b)}=a^2+b^2-(2c)^2+2ab-3c(a+b)$

A) $f_{(a;b)}=a+b+c$
B) $g_{(a;b)}=a+b-4c$
C) $h_{(a;b)}=a+b$
D) $F_{(a;b)}=a-b+c$
E) $G_{(a;b)}=a-2b+c$

28. Si $f_{(a;b)}$ es un factor primo sobre $\mathbb{Z}$ del polinomio $Q_{(a;b)}=4a^2b^2+2ab(a+b)+5ab+a+b+1$, calcule el mayor valor de $f_{(-1;1)}$.

A) −2 B) −1 C) 0
D) 1 E) 2

29. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Q}$
$P_{(x)}=x^4+16x-12$ e indique la mayor suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

A) 9 B) 7 C) 5
D) 3 E) 1

30. Si $f_{(x)}=Ax+B$ es un factor primo del polinomio $P_{(x)}=3x^3+11x^2+3x-2$ sobre $\mathbb{Z}$, indique lo correcto.

A) $f_{(1)}=0$
B) $f_{(-1)}=1$
C) $f_{(2)}=6$
D) $f_{(0)}=-1$
E) $f_{\left(\frac{2}{3}\right)}=4$

31. Respecto al polinomio sobre $\mathbb{Q}$
$R_{(x)}=x^3-18x-27$, indique lo correcto.

A) No admite raíz racional.
B) No es factorizable.
C) Tiene tres raíces racionales.
D) Si $f_{(x)}$ es un factor primo, entonces $f_{(5)}=1$.
E) Un factor primo es $g_{(x)}=x^2-3x-9$.

32. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$
$f_{(x)}=3x^4+x^3+9x^2-1$
e indique un factor primo.

A) $P_{(x)}=x+1$
B) $Q_{(x)}=3x+1$
C) $R_{(x)}=x^2+3x-1$
D) $S_{(x)}=x^3-3x-1$
E) $U_{(x)}=3x-1$

33. Factorice el polinomio sobre $\mathbb{Z}$
$g_{(x)}=3x^5+x^4+12x+4$ e indique el factor primo de mayor suma de coeficientes.

A) $P_{(x)}=3x+2$
B) $Q_{(x)}=x^4+4$
C) $R_{(x)}=3x+1$
D) $S_{(x)}=x^2+2x+2$
E) $U_{(x)}=x^2-2x+2$

Números complejos

Capítulo VI

OBJETIVOS

- Estudiar un nuevo campo numérico denominado el campo complejo, que desempeña un papel importante en la resolución de ecuaciones polinomiales.
- Conocer las propiedades de los números complejos.
- Desarrollar la habilidad operativa con los números imaginarios, específicamente con la unidad imaginaria.

Al resolver la ecuación $x^2=9$ veremos $x=3$ $\vee$ $x=-3$, pero si tenemos $x^2=-1$, vemos que es imposible en $\mathbb{R}$, ya que tendremos $x=\pm\sqrt{-1}$, donde $\sqrt{-1}$ no está definido en los reales y por ello hay la necesidad de extender los reales al estudio de los números complejos para poder resolver $x^2=-1$.

Cantidades imaginarias

Son aquellos números que resultan de extraer la raíz de índice par a un número negativo. Por ejemplo $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt[4]{-3}$; ...

De todos ellos, el más importante es $\sqrt{-1}$, al cual se le denomina unidad imaginaria y se le denota de la siguiente manera:

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$ notación de Euler

DEFINICIONES

Si $i=\sqrt{-1}$, se define

$$\boxed{i^0=1 \mid i^1=i}$$

Propiedad

Si i es la unidad imaginaria, se cumple que

$$\boxed{i^2=-1}$$

Ahora a partir de las definiciones y la propiedad dadas se pueden obtener las potencias de la unidad imaginaria.

POTENCIAS NATURALES DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$i^1=i$	$i^5=i$	$i^9=i$	$i^{13}=i$
$i^2=-1$	$i^6=-1$	$i^{10}=-1$	$i^{14}=-1$
$i^3=-i$	$i^7=-i$	$i^{11}=-i$	$i^{15}=-i$
$i^4=1$	$i^8=1$	$i^{12}=1$	$i^{16}=1$

Se podría seguir hallando las potencias de i, pero de lo encontrado se desprenden las siguientes propiedades.

PROPIEDADES

- $i^{\overset{o}{4}}=1$; $\overset{o}{4}$: múltiplo de cuatro
- $i^{\overset{o}{4}+1}=i$
- $i^{\overset{o}{4}+2}=-1$
- $i^{\overset{o}{4}+3}=-i$
- $i^1+i^2+i^3+i^4=0$
- $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^{\overset{o}{4}}=0$

Ejemplos

- $i^{49}=i^{48+1}=i^{\overset{o}{4}+1}=i$
- $i^{86}+i^{84+2}+i^{\overset{o}{4}+2}=-1$
- $i^{256}=i^{\overset{o}{4}}=1$
- $i^{63}=i^{60+3}=i^{\overset{o}{4}+3}=-i$
- $i+i^2+i^3+\ldots+i^{20}=0 \leftarrow \overset{o}{4}$
- $\underbrace{i+i^2+i^3+\ldots+i^{80}}_{0}+\underbrace{i^{81}}_{i}=1 \quad (80 \leftarrow \overset{o}{4};\ 81 \leftarrow \overset{o}{4}+1)$
- $i+i^2+i^3+\ldots+i^{200}=0 \leftarrow \overset{o}{4}$

RESULTADOS IMPORTANTES

Desarrollando operaciones con i obtenemos resultados importantes que nos permitirán simplificar pasos en la resolución de los problemas.

Ejemplo

$$(1+i)^2=1^2+2(1)(i)+i^2=-1$$

$$(1+i)^2=\cancel{1}+2i-\cancel{1}$$

$$\therefore\ (1+i)^2=2i$$

Es decir se tienen:

1. $(1+i)^2=2i$
2. $(1-i)^2=-2i$
3. $(1+i)^4=(1-i)^4=-4$
4. $\dfrac{1+i}{1-i}=i$; $\dfrac{1-i}{1+i}=i$
5. $i^{-1}=\dfrac{1}{i}=-i$

Aplicación 1

Calcule z^4 si $z=\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^8}+i^{98}$.

Resolución

$$z=\frac{(1+i)^8}{(1-i)^8}(1+i)+i^{96+2}$$

$$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8(1+i)+i^{\overset{o}{4}+2}$$

$$z=(i)^8(1+i)+(-1)$$

$$z=i^{\overset{o}{4}}(1+i)-1 \;\rightarrow\; z=1(1+i)-1$$

$$z=\cancel{1}+i-\cancel{1}=i$$

$$\therefore\ z^4=i^4=1$$

Aplicación 2

Calcule E^2+E+1 si $E=\left[1+\dfrac{(1+i)^2}{2}\right]^4-\left[1+\dfrac{(1-i)^2}{2}\right]^4$.

Resolución

$$E=\left[1+\frac{2i}{2}\right]^4-\left[1+\frac{-2i}{2}\right]^4$$

$$E=(1+i)^4-(1-i)^4=-4-(-4)$$

$$E=-4+4 \;\rightarrow\; E=0$$

Luego

$$E^2+E+1=0^2+0+1$$

$$\therefore\ E^2+E+1=1$$

Número complejo (forma binómica o algebraica)

Un número complejo se define de la forma $z=a+bi$, donde $a; b \in \mathbb{R}$; $i=\sqrt{-1}$.

Además se define así

- Parte real de z: $\text{Re}(z)=a$
- Parte imaginaria de z: $\text{Im}(z)=b$

Ejemplos

- $z=5+6i \rightarrow \begin{cases} \text{Re}(z)=5 \\ \text{Im}(z)=6 \end{cases}$
- Sea el número complejo $w=-2+8i$, tenemos que $\text{Re}(w)=-2 \wedge \text{Im}(w)=8$

Igualdad de números complejos

Si $a+bi=c+di \rightarrow a=c \wedge b=d$, donde $a; b; c; d \in \mathbb{R}$

Ejemplo

Si $(x-1)+2i=6+(y+5)i$, donde $x; y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\underbrace{x-1=6}_{x=7} \wedge \underbrace{2=y+5}_{y=-3}$$

Adición y multiplicación con números complejos

Sean los números complejos $z=a+bi \wedge w=c+di$.

Adición

$$z+w=a+bi+c+di$$

$$z+w=(a+c)+(b+d)i$$

Multiplicación

$$z\cdot w=(a+bi)(c+di)$$

$$z\cdot w=ac+adi+bci+bdi^2; \boxed{i^2=-1}$$

$$z\cdot w=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ejemplo

Sean $z=3+i \wedge w=2+5i$, tenemos

1.º $z+w=(3+i)+(2+5i) \rightarrow z+w=5+6i$

2.º $z\cdot w=(3+i)\cdot(2+5i)=6+15i+2i+5i^2=-1$

$\rightarrow z\cdot w=(6-5)+(15+2)i$

$\rightarrow z\cdot w=1+17i$

Clases de números complejos

Número complejo real

Sea el número complejo $z=a+bi$, donde $a; b \in \mathbb{R}$; será complejo real solo si $b=0$, es decir, $z=a+0i=a$.

Observación

Si $a=0$, tenemos que $z=0+0i=0$, denominado complejo nulo.

Número complejo imaginario puro

Sea el número complejo $z=a+bi$, donde $a; b \in \mathbb{R}$ será complejo imaginario puro solo si $a=0$ y $b\neq 0$, es decir, $z=0+bi=bi$.

Aplicación 3

Determine $n \in \mathbb{R}$ tal que $(2+i)(n+i)$ es un complejo real.

Resolución

Efectuamos por propiedad distributiva

$$(2+i)(n+i)=2n+2i+ni+i^2=-1$$

Ahora tenemos

$$(2+i)(m+i)=(2n-1)+(n+2)i$$

Como es complejo real

$\rightarrow\ n+2=0$

$\therefore\ n=-2$

Relaciones entre números complejos

Sea el número complejo $z=a+bi$, donde $a; b \in \mathbb{R}$.

El conjugado de z

Denotado por $\bar{z}$, se define $\bar{z}=a-bi$.

El opuesto de z

Denotado por z^*, se define $z^*=-z=-a-bi$.

Ejemplos

- Si $z=2-9i \rightarrow \bar{z}=2+9i \wedge z^*=-2+9i$
- Si $w=-7+i \rightarrow w^*=7-i \wedge \bar{w}=-7-i$
- Si $z_1=5+4i \rightarrow \begin{cases} \bar{z}_1=5-4i \\ z_1^*=-5-4i \end{cases}$

Módulo de un número complejo

Sea el número complejo $z=a+bi$, a; $b \in \mathbb{R}$, el módulo de z denotado por $|z|$ se determina por

$$\boxed{|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

Geométricamente tiene el siguiente significado

- Si $z=-2+i \rightarrow |z|=\sqrt{(-2)^2+1^2} \rightarrow |z|=\sqrt{5}$
- Si $w=3+4i \rightarrow |w|=\sqrt{3^2+4^2} \rightarrow |w|=5$

Propiedades

Sean $z; w \in \mathbb{C}$

- $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$
- $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$
- $|z^n|=|z|^n;\ n\in\mathbb{N}$
- $|\sqrt[n]{z}|=\sqrt[n]{|z|};\ n\in\mathbb{N}-\{1\}$
- $|z|=|\bar{z}|=|z^*|$
- $z\cdot\bar{z}=|z|^2$

Aplicación 4

Calcule el valor de a^2+b^2 si se cumple que $3+4i=(1+\sqrt{3}i)(a-bi);\ a; b\in\mathbb{R}$.

Resolución

Aplicando el módulo en ambos miembros de la igualdad.

$$|3+4i|=|(1+\sqrt{3}i)(a-bi)|$$

Por teorema

$$|3+4i|=|1+\sqrt{3}i||a-bi|$$

Por definición del módulo

$$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}\sqrt{a^2+(-b)^2}$$

$$\sqrt{25}=\sqrt{4}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{5}{2}=\sqrt{a^2+b^2} \text{ (elevamos al cuadrado)}$$

$$\therefore\ a^2+b^2=\frac{25}{4}$$

Problemas Resueltos

Problema N.º 1

Sea $z=3+2i$. Determine $\bar{z}+2z^*$.

Resolución

Como $z=3+2i$, tenemos

$$\bar{z}=3-2i \rightarrow z^*=-3-2i$$

Reemplazando en lo pedido obtenemos

$$\bar{z}+2z^*=(3-2i)+2(-3-2i)$$

$$=3-2i-6-4i$$

de donde se tiene

$$\bar{z}+2z^*=-3-6i$$

Problema N.º 2

Reduzca

$(2+i)(2-i)+(1+i)(1-i)+(3+i)(3-i)$.

Resolución

Por diferencias de cuadrados se tiene

$$(2+i)(2-i)=2^2-i^2=4+1=5$$

$$(1+i)(1-i)=1^2-i^2=1+1=2$$

$$(3+i)(3-i)=3^2-i^2=9+1=10$$

Nos piden

$$5+2+10=17$$

Problema N.º 3

Si $a+bi=(2+3i)^2$, $a; b \in \mathbb{R}$, determine $|(a+5)+bi|$.

Resolución

Del dato

$$a+bi=4+2(2)(3i)+(3i)^2$$

$$a+bi=4+12i+9i^2=-1$$

$$a+bi=(4-9)+12i$$

$$a+bi=-5+12i$$

de donde $a=-5 \wedge b=12$

Nos piden $|(a+5)+bi||0+12i|=12$

Problema N.º 4

Si $z=\dfrac{(\sqrt{2}+i)^{2n}}{(1+\sqrt{2}i)^{n-3}}$ tal que $|z|=27$, calcule n.

Resolución

Del dato, tomando el módulo en ambos miembros

$$|z|=\left|\frac{(\sqrt{2}+i)^{2n}}{(1+\sqrt{2}i)^{n-3}}\right|$$

Aplicando propiedades del módulo tenemos

$$|z|=\frac{|\sqrt{2}+i|^{2n}}{|1+\sqrt{2}i|^{n-3}} \rightarrow 27=\frac{\sqrt{3}^{2n}}{\sqrt{3}^{n-3}}$$

$$27=\sqrt{3}^{n+3} \rightarrow 3^3=3^{\frac{n+3}{2}}$$

de donde

$$\frac{n+3}{2}=3$$

$\therefore \quad n=3$

Problema N.º 5

Si $(x-i)$ es un factor del polinomio $P_{(x)}=x^3-2x^2+ax+b$ con $a; b \in \mathbb{R}$, calcule $2a+3b$.

Resolución

Por dato tenemos $x^3-2x^2+ax+b \equiv (x-i)q_{(x)}$.

Evaluamos para $x=i$

$$\underbrace{i^3}_{-i}-2\underbrace{i^2}_{-1}+ai+b=0$$

$$-i+2+ai+b=0$$

de donde tenemos

$$(b+2)+(a-1)i=0$$

Por ser complejo nulo se tiene

$$\underbrace{b+2=0}_{b=-2} \wedge \underbrace{a-1=0}_{a=1}$$

$$\therefore \quad 2a+3b=\underbrace{2(1)+3(-2)}_{-4}$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Determine el valor de verdad (V) o (F) falsedad de las siguientes proposiciones.
   I. En $\mathbb{C}: \sqrt{9} = \pm 3$
   II. En $\mathbb{C}: \sqrt{-16}$ no está definido.
   III. En $\mathbb{C}: i^2 = 1$
   ($\mathbb{C}$: conjunto de números complejos)

   A) FFF B) VFF C) VVV
   D) VFV E) VVF

2. Señale el equivalente reducido de
   $i^{10} + i^{40} + i^{2012} + i^{2013}$.

   A) 0 B) $1+i$ C) $1-i$
   D) 1 E) $2-2i$

3. Indique el valor de
   $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2012} + i^{2013}$.

   A) -1
   B) 1
   C) 0
   D) i
   E) $-i$

4. Sea $P_{(x)} = x^2 - 2x + n$; $n \in \mathbb{R}$.
   Si $P_{(1-i)} = 0$, determine $P_{(1+i)}$.

   A) -1 B) $1-i$ C) $1+i$
   D) $2i$ E) 0

5. Teniendo en cuenta que $f_{(x)} = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$,
   calcule $f_{(i)}$.

   A) $-3-4i$
   B) $-3+4i$
   C) $-4-3i$
   D) 0
   E) i

NIVEL INTERMEDIO

6. Si $\dfrac{a+bi}{1+i} = 1-i$ con $a; b \in \mathbb{R}$,
   calcule $a^2 + b^2$.

   A) 2 B) 4 C) 16
   D) 9 E) 25

7. Determine el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones.
   I. Si $z = 2+9i \rightarrow \bar{z} = -2+9i$
   II. Si $\omega = 4-i \rightarrow \omega^* = 4+i$
   III. Si $x = 1+i \rightarrow x^2 = 2i$

   A) VVV
   B) FVV
   C) FFV
   D) FFF
   E) FVF

8. Si $z = (n^2 - 9) + (n+3)i$ es un número complejo nulo, calcule n^3, $n \in \mathbb{R}$.

   A) 27 B) -27 C) -8
   D) 8 E) -1

9. Si $z = |2-i| + \sqrt{5}i$,
   determine z^2.

   A) 10 B) $10i$ C) $\sqrt{2}$
   D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt{10}$

10. Si $\overline{\omega} = a + bi$ es el conjugado de
    $\omega = (2+3i)(1+i)$,
    determine $\overline{2a + \frac{b}{5}i}$ con $a; b \in \mathbb{R}$.

    A) $-2-i$ B) $-2+i$ C) $2-i$
    D) $-1+5i$ E) $10-i$

Teoría de ecuaciones

Capítulo VII

Objetivos

- Resolver ecuaciones de grado superior aplicando métodos adecuados como la factorización.
- Establecer relaciones entre los coeficientes de una ecuación con sus respectivas raíces.
- Resolver ecuaciones diversas utilizando convenientemente las teorías.

Una gran variedad de problemas relacionados con la economía, ingeniería, biología, etc., requieren la utilización de modelos matemáticos para su compresión y desarrollo. Se van a presentar situaciones donde según ciertos resultados será necesario determinar el valor o valores de las variables que intervienen para la adecuada toma de decisiones.

En la economía, supongamos que las funciones de demanda y oferta están dadas por $D_{(p)}=25-3p$ y $S_{(p)}=-5+2p$, respectivamente.

Para determinar el precio de equilibrio de un cierto bien, necesitamos conocer la resolución de una ecuación de primer grado.

Ecuación

Es aquella igualdad entre dos expresiones matemáticas de tal manera que al menos en una de ellas aparezca la variable que ahora se denominará incógnita.

Ejemplos

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 2x^3=5x+1 \\ \bullet\ \sqrt{x-1}+\sqrt[3]{1-x}=0 \\ \bullet\ x+\dfrac{1}{x}=2 \end{array}\right\}\ \text{ecuaciones de incógnita } x$$

Solución de una ecuación

Es el valor que adquiere la variable o incógnita que al reemplazarlo en la ecuación original se obtiene una igualdad numérica verdadera.

Ejemplo

En la ecuación $3^x+4^x=5^x$

Una solución es el número 2, porque al reemplazar $x=2$ tenemos $\underbrace{3^2+4^2}_{25}=\underbrace{5^2}_{25}$.

En este caso también diremos que $x=2$ verifica a la ecuación, en cambio $x=1$ no es solución, porque al reemplazar en la ecuación tenemos

$$\underbrace{3^1+4^1}_{7}=\underbrace{5^1}_{5}$$

En este caso diremos que $x=1$ no verifica a la ecuación.

Conjunto solución (CS)

Es aquel conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación. Si la ecuación no tiene solución, el conjunto solución es el vacío.

$$\boxed{\text{Si } ab=0 \ \rightarrow\ a=0 \vee b=0}$$

Ejemplo

De la ecuación $(x-5)(x+1)=0$

tenemos $\underbrace{x-5=0}_{x=5} \vee \underbrace{x+1=0}_{x=-1}$

$\rightarrow$ CS=$\{5; -1\}$

¿Qué significa resolver una ecuación?

Resolver una ecuación significa determinar el CS.

Ejemplo

En la ecuación $3x-5=10$ al despejar la incógnita se tiene $x=5$

$\therefore$ CS=$\{5\}$

Clasificación de las ecuaciones

De acuerdo a su forma

Ecuaciones algebraicas

Se denominan así a las ecuaciones polinomiales, fraccionarias e irracionales.

Ejemplos

- $x^3+1=x^2$ • $\dfrac{x-1}{x}=8$ • $\sqrt{x}+x=\dfrac{1}{x}$

Ecuaciones no algebraicas o trascendentes

Estas ecuaciones están formadas por las ecuaciones logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, entre otras.

Ejemplos

- $5^x=x+2$ • $x+\operatorname{sen}x=1$ • $\log_x 2=3$

De acuerdo al número de soluciones

Ecuación compatible

Es aquella ecuación que admite solución y se subdivide:

a. **Ecuación compatible determinada**

Presenta una cantidad finita de soluciones.

Ejemplo

La ecuación $x^3=16x$ tiene como soluciones a los números $0; 4; -4$, es decir, CS=$\{0; 4; -4\}$.

b. **Ecuación compatible indeterminada**

Presenta infinitas soluciones.

Ejemplo

La ecuación $x^0=1$ tiene infinitas soluciones, las cuales son: $2; \dfrac{1}{2}; -2; 3; \dfrac{3}{5}; \ldots$

Es decir, $CS=\left\{2; \dfrac{1}{2}; -2; 3; \dfrac{3}{5}; \ldots\right\}$

Ecuación incompatible

Es aquella ecuación que no tiene solución.

Ejemplo

La ecuación $0x=-1$ no tiene solución, es decir, CS=ϕ.

Estudio de la ecuación paramétrica de la forma $ax=b$

Aquí x es la incógnita y los parámetros son a y b.

- Si $a\neq 0$, tendremos $x=\dfrac{b}{a}$, es decir, la ecuación es compatible determinada y tiene solución única.
- Si $a=0 \wedge b=0$, tendremos $0x=0$, es decir, la ecuación es compatible indeterminada y tiene infinitas soluciones.
- Si $a=0 \wedge b\neq 0$, tendremos $0x=b$, es decir, la ecuación no tiene solución y es inconsistente o incompatible.

Aplicación 1

Si la ecuación $(n-6)x=(p+4)$ tiene infinitas soluciones. Halle el valor de n y p.

Resolución

Como la ecuación tiene infinitas soluciones, se cumple que

$$\underbrace{n-6=0}_{n=6} \wedge \underbrace{p+4=0}_{p=-4}$$

Ecuaciones equivalentes

Son aquellas ecuaciones en la misma incógnita que tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplos

- Si $(x-6)^2(x-2)=0 \rightarrow CS=\{2; 6\}$
- Si $x^2+12=8x \rightarrow CS=\{2; 6\}$

Ahora se observa que las ecuaciones son equivalentes, pues tienen igual conjunto solución.

Definiciones

Raíz de un polinomio

Es el valor que adquiere la variable que anula al polinomio.

$$c \text{ es raíz de } P_{(x)} \leftrightarrow P_{(c)}=0;\ \left[P_{(x)}\right]^0 \geq 1$$

Ejemplo

Una raíz de $P_{(x)}=x^2-9$ es el número 3, debido a que $P_{(3)}=0$.

Raíz de multiplicidad

El número c es una raíz de multiplicidad $k (k \geq 2)$ del polinomio $P_{(x)} \leftrightarrow P_{(x)}=(x-c)^k \cdot q_{(x)}, q_{(c)} \neq 0$.

Ejemplo

Del polinomio $P_{(x)}=(x-5)^2(x-1)^3(x+6)$ tenemos

- 5 es una raíz de multiplicidad 2 o doble
- 1 es una raíz de multiplicidad 3 o triple
- -6 es una raíz simple

Es decir, las raíces son 5; 5; 1; 1; 1 y -6.
En total son 6 raíces.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio $P_{(x)}$ de grado no nulo con cualquier tipo de coeficientes numéricos tiene al menos una raíz.

Corolario

Todo polinomio $P_{(x)}$ de grado n $(n \geq 1)$ tiene exactamente n raíces, entre raíces simples y múltiples.

Ejemplo

El polinomio $P_{(x)}=x^5+x+8$ es de grado 5 y tiene exactamente 5 raíces.

Ecuaciones polinomiales

Son aquellas ecuaciones formadas únicamente por polinomios. Si los polinomios se reducen, debe quedar al menos un polinomio de grado uno.

Ejemplos

- $3x+5=0$ (ecuación lineal)
- $x^2+6x=16x+1$ (ecuación cuadrática)
- $x+x^2+x^3=8+x^2$ (ecuación cúbica)

Definición

En toda ecuación polinomial a la solución o soluciones también se le denomina raíz o raíces.

Ejemplos

- En la ecuación
  $(x-2)(x+3)=0$
  sus soluciones son: $x=2$ y $x=-3$
  sus raíces son; $x=2$ y $x=-3$
  $\rightarrow CS=\{2; -3\}$

- En la ecuación
  $(x-5)^3(x+7)=0$
  sus soluciones son: 5 y -7
  sus raíces son: $\left.\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=5 \\ x_3=5 \end{array}\right\}$ 5 es una raíz triple
  $x_4=-7$ (raíz simple)

  $\rightarrow CS=\{5; -7\}$

NOTA

- Los subíndices que utilizamos para representar a las raíces nos permiten saber cuántas raíces hay, y también se cumple que el grado de la ecuación polinomial indicará el número exacto de raíces que la ecuación presenta.
- Las raíces de una ecuación polinomial pueden ser iguales mientras que las soluciones no y por ello se cumple que
  N.º de soluciones ≤ N.º de raíces

Ecuación lineal

Forma general: $\boxed{ax+b=0;\ a\neq 0}$

donde x es la incógnita.

Ejemplos

- $3x+5=0$
- $2x-1=8(x+1)$

Su resolución implica despejar la incógnita para dar el conjunto solución.

Aplicación 2

Resuelva $3x-2=x+5$

Resolución

Tenemos

$$3x-2=x+5$$

$$3x-x=5+2 \rightarrow 2x=7$$

de donde $x=\dfrac{7}{2}$

$$\therefore\ CS=\left\{\frac{7}{2}\right\}$$

Ecuación cuadrática

Forma general: $\boxed{ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0}$

donde x es la incógnita.

Ejemplos

- $3x^2+8x+5=0$
- $x^2-x-30=0$
- $x^2+5=0$

¿Cómo resuelvo una ecuación cuadrática?

Es recomendable expresarla en su forma general, luego factorizamos o usamos la fórmula general.

Por factorización

Se puede utilizar la diferencia de cuadrados o el aspa simple por lo general.

Aplicación 3

Resuelva $x^2+8=9x$.

Resolución

$$x^2-9x+8=0$$

$$\begin{array}{ll} x & -8 \\ x & -1 \end{array}$$

$$(x-8)(x-1)=0$$

$$x_1=8 \ \vee\ x_2=1$$

de donde $CS=\{8;\ 1\}$

Por fórmula general

Sea la ecuación $ax^2+bx+c=0;\ a\neq 0$.

Luego las dos raíces son

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se define como discriminante a la expresión b^2-4ac y se denota por $\Delta=b^2-4ac$.

Aplicación 4

Resuelva $3x^2-5x-1=0$.

Resolución

Se observa que $a=3$; $b=-5$; $c=-1$.

Reemplazamos en la fórmula general

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(-1)}}{2(3)}=\frac{5\pm\sqrt{37}}{6}$$

de donde

$$x_1=\frac{5+\sqrt{37}}{6};\ x_2=\frac{5-\sqrt{37}}{6}$$

$$\therefore\quad CS=\left\{\frac{5+\sqrt{37}}{6};\frac{5-\sqrt{37}}{6}\right\}$$

Naturaleza de las raíces

Sin necesidad de resolver la ecuación cuadrática, podemos determinar si las dos raíces son reales o imaginarias.

Sea $ax^2+bx+c=0$ una ecuación cuadrática de coeficientes reales y $\Delta=b^2-4ac$. Se cumple:

- $\Delta>0 \leftrightarrow$ las raíces son reales y diferentes.
- $\Delta=0 \leftrightarrow$ las raíces son reales e iguales.
- $\Delta<0 \leftrightarrow$ las raíces son no reales, es decir, son imaginarias y conjugadas.

Nota

Las dos raíces son reales $\leftrightarrow \Delta\geq 0$.

Propiedades de raíces

Sean x_1; x_2 raíces de $ax^2+bx+c=0$.

Suma de raíces

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

Producto de raíces

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Ejemplo

Sean x_1; x_2 raíces de

$5x^2+3x+7=0$

$$\rightarrow\ x_1\cdot x_2=-\frac{3}{5}\ \wedge\ x_1x_2=\frac{7}{5}$$

Nota

Cuando nos piden o tenemos como dato la diferencia de raíces, se sugiere aplicar la segunda identidad de Legendre

$$(x_1+x_2)^2-(x_1-x_2)^2=4x_1x_2.$$

Reconstrucción de una ecuación cuadrática

Si x_1; x_2 son las raíces, tendremos

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

Ejemplo

La ecuación cuadrática de raíces $x_1=2$ y $x_2=6$

$$x^2-(2+6)x+2\cdot 6=0$$

$$\therefore\quad x^2-8x+12=0$$

Definiciones

Sean x_1; x_2 raíces de la ecuación

$ax^2+bx+c=0$; $a\neq 0$

Son raíces simétricas

Si y solo si $x_1=-x_2$, de donde se obtiene $\boldsymbol{b=0}$.

Son raíces recíprocas

Si y solo si $x_1=\dfrac{1}{x_2}$, de donde se obtiene $\boldsymbol{a=c}$.

Teorema de las ecuaciones equivalentes

Si las ecuaciones cuadráticas de coeficientes no nulos

$$ax^2+bx+c=0$$
$$mx^2+nx+p=0$$

son equivalentes (tienen el mismo CS), se cumple

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$$

Ejemplo

Sean las ecuaciones

$x^2-2x+5=0$

$3x^2-6x+15=0$

Como $\frac{1}{3}=\frac{-2}{-6}=\frac{5}{15}$, entonces ambas ecuaciones son equivalentes.

Teorema de Cardano

Permite relacionar las raíces de una ecuación polinomial con sus coeficientes.

Para grado tres

Sean $x_1; x_2; x_3$ raíces de

$$\underset{(-)}{a}x^3\underset{(+)}{+b}x^2\underset{(-)}{+c}x+d=0$$

Suma de raíces

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

Suma de productos binarios

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}$$

Producto de raíces

$$x_1x_2x_3=\frac{-d}{a}$$

Ejemplos

1. Sean
   $x_1; x_2; x_3$ raíces de $2x^3+5x^2+7x+9=0$
   (–) (+) (–)

   Se cumple

   - $x_1+x_2+x_3=-\frac{5}{2}$
   - $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{7}{2}$
   - $x_1x_2x_3=-\frac{9}{2}$

2. Sea $4x^3-3x^2-8x-11=0$ de raíces $x_1; x_2; x_3$
   (–) (+) (–)

   Tenemos

   $$x_1+x_2+x_3=\frac{3}{4}$$

   $$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{-8}{4}=-2$$

   $$x_1x_2x_3=\frac{11}{4}$$

Para grado cuatro

Sean $x_1; x_2; x_3; x_4$ raíces de

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

(–) (+) (–) (+)

Suma de raíces

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{-b}{a}$$

Suma de productos binarios

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4=\frac{c}{a}$$

Suma de productos ternarios

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_2x_3x_4=\frac{-d}{a}$$

Producto de raíces

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}$$

Ejemplo

Sea $5x^4-2x^3+9x^2+7x-6=0.$
(–) (+) (–) (+)

Se cumple

- $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{2}{5}$
- $x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4=\frac{9}{5}$
- $x_1x_2x_3+x_1x_3x_4+\ldots+x_2x_3x_4=-\frac{7}{5}$
- $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4=\frac{-6}{5}$

Teoremas de la paridad de raíces

- Si $a+bi$, $b \neq 0 \wedge a; b \in \mathbb{R}$, es una raíz de una ecuación polinomial de coeficientes reales, entonces el número $a-bi$ también es otra de las raíces de dicha ecuación polinomial.
- Si $a+\sqrt{b}$, con $\sqrt{b} \in \mathbb{I} \wedge a; b \in \mathbb{Q}$, es una raíz de una ecuación polinomial de coeficientes racionales, entonces el número $a-\sqrt{b}$ también es otra de las raíces de dicha ecuación polinomial.
- Si $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, con $\sqrt{a}; \sqrt{b}; \sqrt{ab} \in \mathbb{I}$, es raíz de una ecuación polinomial con coeficientes racionales, entonces los siguientes números $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; $-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$; $-(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ también son raíces de dicha ecuación polinomial.

Ecuación bicuadrada

Forma general: $\boxed{ax^4+bx^2+c=0}$ con $abc \neq 0$.

Resolución de una ecuación bicuadrada

Por factorización

Aplicación 5

Resuelva $4x^4-401x^2+100=0$.

Resolución

$$4x^4-401x^2+100=0$$

$$\begin{array}{lcl} 4x^2 & & -1 \\ x^2 & & -100 \end{array}$$

$$(x^2-100)(4x^2-1)=0$$

Tenemos

$$x^2=\frac{1}{4} \vee x^2=100$$

$$x=\pm\frac{1}{2} \vee x=\pm 10$$

de donde

$$CS=\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 10; -10\right\}$$

Por cambio de variable

Aplicación 6

Resuelva $x^4-4x^2+1=0$.

Resolución

Cambiando $x^2=y$ (I)

tendremos $y^2-4y+1=0$

Por fórmula general de una ecuación cuadrática

$$y=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

Reemplazamos en (I)

$$x^2=2+\sqrt{3} \vee x^2=2-\sqrt{3}$$

de donde

$$CS=\left\{\sqrt{2+\sqrt{3}}; -\sqrt{2+\sqrt{3}}; \sqrt{2-\sqrt{3}}; -\sqrt{2-\sqrt{3}}\right\}$$

Observación

Las raíces de una ecuación bicuadrada son simétricas dos a dos, es decir, son de la forma α; –α; β; –β.

Propiedad de raíces de una ecuación bicuadrada

Sean α; –α; β; –β raíces de $ax^4+bx^2+c=0$ con $abc \neq 0$.
(–) (+)

Tenemos

1. $\alpha^2+\beta^2=-\dfrac{b}{a}$
2. $\alpha^2 \cdot \beta^2=\dfrac{c}{a}$

Ejemplo

Si α; –α; β; –β son raíces de $2x^4+7x^2+9=0$, se cumple
(–) (+)

$$\alpha^2+\beta^2=-\frac{7}{2} \wedge \alpha^2 \cdot \beta^2=\frac{9}{2}$$

Problema N.° 1

Para que en la ecuación $px^2+10x-2=0$, una de las raíces sea $\frac{1}{8}$, cuál deberá ser el valor de p.

UNMSM 2010-II

Resolución

Por definición de solución, reemplazamos

$$x=\frac{1}{8}$$

Se verifica la igualdad

$$p\left(\frac{1}{8}\right)^2+10\left(\frac{1}{8}\right)-2=0$$

de donde

$$p=48$$

Problema N.° 2

Dada la ecuación con raíces complejas $3x^2+(m+2)x+m=-2$, halle el máximo valor entero que puede tomar m.

UNMSM 2007-II

Resolución

Expresamos en su forma general

$$3x^2+(m+2)x+(m+2)=0$$

Como tiene raíces complejas (no reales)

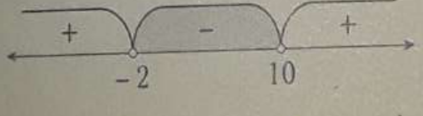
$$\rightarrow\ \Delta<0$$

$$(m+2)^2-4(3)(m+2)<0$$

Factor común

$$\underbrace{(m+2)(m+2-12)<0}_{(m+2)(m-10)<0}$$

Por puntos críticos



El máximo valor entero es 9.

Problema N.° 3

Si a; b y c son raíces de la ecuación $x^3-2x^2+3x-4=0$.

Halle

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

UNMSM 2007-II

Resolución

Por Cardano tenemos

$$a+b+c=2;\ ab+bc+ca=3;\ abc=4$$

Damos forma a lo pedido

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}$$

Reemplazamos y tendremos

$$\therefore\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{4}$$

Otra forma

Permutando todos los coeficientes, tenemos la ecuación

$$-4x^3+3x^2-2x+1=0$$

de raíces

$$\frac{1}{a};\ \frac{1}{b}\ \text{y}\ \frac{1}{c}.$$

Aplicando suma de raíces

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

Problema N.° 4

Si a; b y c son raíces de la ecuación $x^3-px^2+qx-r=0$ donde $r\neq 0$, halle el valor de

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

UNMSM 2011-I

Resolución

Permutando los coeficientes, tendremos la ecuación $-rx^3+qx^2-px+1=0$ de raíces $\frac{1}{a};\frac{1}{b};\frac{1}{c}$.

Por suma de raíces

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{q}{r}$$

Elevamos al cuadrado

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\left(\frac{q}{r}\right)^2$$

Efectuamos

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\underbrace{\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}\right)}_{\text{suma de productos binarios}}=\frac{q^2}{r^2}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{-p}{-r}\right)=\frac{q^2}{r^2}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-2\frac{p}{r}=\frac{q^2}{r^2}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{q^2}{r^2}+2\left(\frac{-p}{-r}\right)$$

$$\rightarrow\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{q^2}{r^2}-\frac{2p}{r}=\frac{q^2-2pr}{r^2}$$

Problema N.º 5

Sea $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Indique el polinomio cuya raíz es α^2.

UNMSM 2011-I

Resolución

Como $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{5}$, elevamos al cuadrado

$$\alpha^2=7+2\sqrt{10}$$

Reconstruyendo la ecuación cuadrática de raíces

$$x_1=\alpha^2=7+2\sqrt{10}$$

$x_2=7-2\sqrt{10}$ (por paridad de raíces)

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

$$x^2-14x+\underbrace{(7+2\sqrt{10})(7-2\sqrt{10})}_{7^2-40}=0$$

$$\therefore\ x^2-14x+9=0$$

Problema N.º 6

Dada la ecuación polinomial

$(x+3)(x+1)^2(2x-6)^3=0$,

halle $\alpha-\beta$ si α es la suma de raíces y β es la suma de soluciones.

Resolución

Tenemos CS$=\{-3;-1;3\}$ de donde

suma de soluciones $=\underbrace{-3-1+3}_{-1}$

$\rightarrow\ \beta=-1$

Además

-3 es una raíz simple.

-1 es una raíz doble.

3 es una raíz triple.

de donde

suma de raíces$=\underbrace{-3-1-1+3+3+3}_{4}$

$\rightarrow\ \alpha=4$

$\therefore\ 4-(-1)=5$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Si el número 3 es solución de $2^x+b=12$, calcule b.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. La ecuación $(a-2)x=b^2-9$ de incógnita x es compatible e indeterminada. Indique el menor valor de $a+b$.

A) 5
B) −1
C) 1
D) −5
E) 2

3. Resuelva la ecuación lineal
$$(n-1)x^2+\frac{3x}{n+1}+\frac{x-1}{\frac{1}{2n}}=n^2+1.$$

A) $\left\{\frac{8}{7}\right\}$ B) $\left\{\frac{1}{7}\right\}$ C) $\{2\}$
D) $\{0\}$ E) $\left\{\frac{12}{7}\right\}$

4. Al resolver ecuaciones lineales $ax+b=a$ y $bx+b=a$, Dante se da cuenta que son equivalentes. Según ello, señale la alternativa verdadera.

A) $a+b=1$ B) $ab=1$ C) $\frac{a}{b}=1$
D) $a=8b$ E) $2a+b=1$

5. Teniendo en cuenta que $f_{(x)}=2x+2013$, resuelva la ecuación $f_{(f_{(x)})}=f_{(x+2013)}$.

A) $\{0\}$ B) $\{2013\}$ C) $\{1\}$
D) $\{2013^2\}$ E) ϕ

6. Las ecuaciones lineales $ax+b=28$ y $bx+a=8$ tienen el mismo $CS=\{3\}$. Determine $a+b$.

A) 12 B) 9 C) 10
D) 36 E) 120

7. Si m y n son raíces de la ecuación cuadrática $(a-5)x^3+2x^2+x-1=0$, calcule m^a+n^a.

A) 2 B) $\frac{1}{32}$ C) $\frac{33}{22}$
D) $\frac{31}{32}$ E) $-\frac{31}{32}$

8. El número −1 es una solución de $ax^2+bx+c=0$. Determine la otra solución, $(a\neq 0)$.

A) $\frac{c}{a}$ B) $-\frac{b}{a}$ C) $\frac{c}{b}$
D) $-\frac{c}{a}$ E) 1

9. Si la ecuación $(x+1)(x-1)=2x$ tiene una solución de la forma $\frac{1+\sqrt{a}}{b}$, halle $a+b$.

A) 3 B) 1 C) 2
D) 4 E) 5

10. Si x_1; x_2 son raíces de $x^2+(x+1)(a+1)=8x$, indique el valor de $x_1+x_2+x_1x_2$.

A) $3a-1$
B) $a+2$
C) 7
D) 8
E) $2a-8$

11. Teniendo en cuenta que a y b son raíces de $2013x^2-2012x+2011=0$, calcule $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

A) 0 B) $\frac{2012}{2011}$ C) $\frac{2013}{2012}$
D) 1 E) 2013

12. Los números x_1 y x_2 son raíces de $x^2-\sqrt{8}x+1=0$.
Determine el valor de $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

A) $\sqrt{8}$ B) 62 C) 10
D) 8 E) 6

13. La ecuación cuadrática $x^2+(a^2-9)x+a^2=0$ tiene raíces simétricas. Indique el conjunto solución.

A) $\{-3; 3\}$ B) $\{3i; -3i\}$ C) $\{i; -i\}$
D) $\left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$ E) $\{-9; 9\}$

14. Si la ecuación $8x^2+(b-1)x+(b+1)=0$ tiene raíces recíprocas, halle la suma de estas.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $-\frac{3}{4}$
D) $-\frac{1}{4}$ E) $-\frac{5}{8}$

15. Al resolver la ecuación $9x^2-(a+4)x+\frac{a}{2}=0$ se encuentra que tiene raíz múltiple.
Determine $\frac{\text{máximo valor de } a}{\text{mínimo valor de } a}$.

A) 4 B) 8 C) 10
D) 16 E) $\frac{1}{4}$

16. Forme una ecuación cuadrática cuyas raíces sean la suma y el producto de raíces de $x^2-3x+7=0$.

A) $x^2-10x+25=0$
B) $x^2+10x+25=0$
C) $(x-3)^2=0$
D) $x^2-7x+3=0$
E) $x^2-10x+5=0$

17. Si la ecuación cúbica $x^3+(a-1)x^2+bx+a=0$ verifica que la suma de todas sus raíces es 8, indique el valor del producto de todas sus raíces.

A) -7 B) 7 C) 8
D) -8 E) -9

18. Halle $b+c$ si $2+i$ es una raíz de la ecuación cúbica $x^3-5x^2+bx+c=0$ ($b; c \in \mathbb{R}$).

A) 5 B) -5 C) 4
D) -4 E) -6

19. Si el número $\sqrt{5}+1$ es una raíz de la ecuación $x^3+ax^2+bx+12=0$ de coeficientes enteros, calcule el valor de a.

A) -5 B) 5 C) -2
D) -1 E) 6

20. Resuelva la ecuación bicuadrada $x^4=120x^2+121$.

A) $\{11; -11; 1; -1\}$
B) $\{\sqrt{11}; -\sqrt{11}; i; -i\}$
C) $\{11; -11; i; -i\}$
D) $\{11i; -11i; 1; -1\}$
E) $\{11; -11; 2i; -2i\}$

NIVEL INTERMEDIO

21. Si la ecuación paramétrica $n^2(x-1)+3n=nx+2$ de incógnita x es incompatible, determine el valor de n.

A) -1
B) 0
C) 2
D) -2
E) 1

22. Teniendo en cuenta que r_1 y r_2 son raíces de $2x^2-8x+\sqrt{3}=0$, calcule $(r_1-r_2)^2$.

A) $8-\sqrt{3}$
B) 0
C) $16-2\sqrt{3}$
D) 16
E) 4

23. Las raíces de la ecuación $x^2-42x+n=0$ son números primos. Indique cuántos valores adquiere n.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

24. Si la ecuación cuadrática $\left(\frac{n}{2}+1\right)x^2-8x+2013=0$ tiene como conjunto solución $\left\{\frac{m-2}{m+1}; \frac{3}{1+m}\right\}$, halle el valor de n.

A) -8
B) 6
C) -18
D) 14
E) 16

25. Las ecuaciones cuadráticas $ax^2+bx+c=0$ y $ax^2+mx+n=0$, con $m+c \neq 0$, tienen como conjunto solución $\{r; s\}$ y $\{2r; 2s\}$, respectivamente. Determine el valor de $\frac{b+2n}{m+c}$.

A) 2
B) 1
C) $\frac{1}{12}$
D) 4
E) 0

26. Si a; b; c son raíces de la ecuación $x^3-2x^2+3x-1=0$, determine la ecuación cúbica de raíces ab; bc; ca.

A) $x^3-3x^2-2x-1=0$
B) $x^3+3x^2+2x+1=0$
C) $x^3-3x^2+2x-1=0$
D) $x^3-3x^2+2x+1=0$
E) $x^3+3x^2+2x-1=0$

27. Determine una ecuación bicuadrada que tiene como dos raíces a los números $\sqrt{9}+1$ y -3^2.

A) $x^4-13x^2+36=0$
B) $x^4-97x^2+1296=0$
C) $x^4+97x^2+1296=0$
D) $x^4-2013x^2+1296=0$
E) $x^4-97x^2+1206=0$

28. Si a; b; c son raíces de $6x^3+12x-2013=0$, calcule el valor de $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$.

A) 2013
B) -8
C) -12
D) 2
E) -4

29. Sean x_1; x_2; x_3 raíces de $x^3-\tan 15^\circ x^2+\tan 15^\circ x-8=0$.
Indique el valor de $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$.

A) 7
B) -8
C) -7
D) -9
E) $2\tan 15^\circ$

30. El polinomio $P_{(x)}=x^3+ax^2+bx+2$ tiene la propiedad de que la media aritmética de sus raíces, el producto de sus raíces y la suma de sus coeficientes son iguales. Determine el valor de b.

A) -11
B) 8
C) 5
D) -10
E) -9

31. Forme una ecuación cuadrática cuyas raíces sean los cuadrados de la suma y de la diferencia de raíces de
$2x^2+2(m+n)x+(m^2+n^2)=0$.

A) $x^2-4mnx-(m^2-n^2)^2=0$
B) $x^2-2mnx+(m^2-n^2)^2=0$
C) $x^2-x+mn=0$
D) $x^2-x-(m^2-n^2)^2=0$
E) $x^2-4mx+4n=0$

32. Si la ecuación $x^2-4x\cos\theta+\cot\theta=0$ tiene raíz múltiple, calcule la medida de θ en radianes $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

A) $\frac{\pi}{16}$
B) $\frac{\pi}{12} \vee \frac{5\pi}{12}$
C) $\frac{\pi}{12} \vee \frac{\pi}{3}$
D) $\frac{\pi}{12}$
E) $\frac{3\pi}{4}$

33. Indique el número de soluciones reales que tiene la siguiente ecuación
$(x-5)^5+(x-4)^4=1$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

34. Señale el número de raíces reales que tiene
$x^8+x^{40}=2x^{48}$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

35. Si $(x;\ y)$ es el único par de componentes reales que verifica
$(4x^2+6x+4)(4y^2-12y+25)=28$, halle $x+y$.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 8
D) $\frac{3}{4}$ E) 0

36. Sean x_1 y x_2 raíces reales de
$x^2-(n-2)x+(n^2+3n+5)=0$.
Determine el máximo valor de $x_1^2+x_2^2$.

A) 25 B) 6 C) 9
D) 19 E) 18

37. Si x_1 y x_2 son raíces de $x^2-x-1=0$, calcule
$x_1^2-x_2^2$.

A) $\pm\sqrt{3}$ B) ± 5 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\pm\sqrt{5}$

38. Si las ecuaciones cuadráticas
$ax^2+5x=8$
$2x^2+bx=3$
son equivalentes, determine $3a+8b$.

A) 29
B) 30
C) 31
D) 32
E) 33

Sistema de ecuaciones lineales

Capítulo VIII

Objetivos

- Buscar aplicar la resolución de ecuaciones lineales desarrolladas en el tema anterior.
- Interpretar a través del sistema de ecuaciones los problemas relacionados con actividades cotidianas.
- Analizar la compatibilidad e incompatibilidad de un sistema.

Los sistemas de ecuaciones lineales fueron ya resueltos por los babilonios, quienes designaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida.

Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

1/4 anchura+longitud=7 manos

longitud+anchura=10 manos

En la actualidad también se presentan problemas donde la longitud, la anchura, el área, el volumen, el número de objetos, la edad de una persona, la cantidad de dinero, entre otras cosas, también son desconocidas o incógnitas, las cuales comúnmente son representadas con las últimas letras del abecedario; así, por ejemplo, el sistema de ecuaciones lineales que nos permite resolver el siguiente problema: "un ganadero vende 15 animales entre reses y ovejas, si cada oveja la vende a S/.120.00, mientras cada res la vende al séxtuple del costo de dos ovejas y el ganadero recibe en total S/.15 000 ¿Cuántas reses vendió?"

Del ejemplo tenemos que

$$\begin{cases} x+y=15 \\ 120x+1440y=15\,000 \end{cases}$$

Donde x es el número de ovejas e y es el número de reses. Como se puede observar, los sistemas de ecuaciones lineales han sido estudiados y utilizados desde hace siglos para resolver problemas que el hombre tenía y sigue teniendo en los diferentes campos de la vida relacionados con la matemática, motivo más que suficiente para hacer la revisión del marco teórico y la aplicación práctica de este tema.

Sistema de ecuaciones lineales

Está formado por dos o más ecuaciones lineales con dos o más incógnitas.

Ejemplos

1. $\begin{cases} 3x+5y=16 \\ 4x-y=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 3x+2y+4z=5 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$

Solución de un sistema de ecuaciones

Es aquella colección numérica correspondiente a la colección de incógnitas que verifican en forma simultánea a cada una de las ecuaciones del sistema y, por ende, al sistema de ecuaciones.

Ejemplos

1. El siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x+y=10 \\ x+y=6 \end{cases}$$

se verifica cuando $x=2$ e $y=4$, entonces la colección (2; 4) es su solución.

2. El siguiente sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=9 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

se verifica para $x=1$; $y=-1$; $z=3$, entonces la colección (1; –1; 3) es su solución.

Conjunto solución de un sistema (CS)

Está conformado por todas las soluciones que tiene el sistema. Cuando el sistema no tiene solución, su conjunto solución es el conjunto vacío.

Ejemplos

1. En el sistema

$$\begin{cases} 5x+7y=15 \\ 3x-9y=9 \end{cases}$$

(3; 0) es su única solución, entonces CS={(3; 0)}.

2. El sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=9 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$$

tiene por solución a (1; –1; 3), entonces CS={1; –1; 3}.

3. El sistema

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x+y=5 \end{cases}$$

no tiene solución, entonces CS=ϕ.

Clasificación de un sistema de acuerdo al número de soluciones

SISTEMA DE ECUACIONES

- Compatible o consistente (presenta al menos una solución)
  - Compatible determinado (presenta un número finito de soluciones)
  - Compatible indeterminado (presenta infinitas soluciones)
- Incompatible o inconsistente (no presenta soluciones, es decir, CS=ϕ)

Ejemplos

1. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x+5y=13 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

es compatible determinado porque CS={(2; 1)}.

2. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+3y=15 \end{cases}$$

es compatible indeterminado porque CS={(0; 5), (5; 0), (2; 3), (6; –1), ...}.

3. El siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2y+x=10 \end{cases}$$

es incompatible o inconsistente porque CS=ϕ.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Forma

$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$$

Métodos de resolución

a. Por sustitución

Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y reemplazarla en la otra ecuación.

Aplicación 1

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x+y=5 & \text{(I)} \\ x+2y=1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolución

De (I): $y=5-2x$ (III)

Reemplazamos en (II):

$x+2(5-2x)=1$ de donde $x=3$; además, en (III) $y=-1$

Luego, tenemos $CS=\{(3;-1)\}$. Por lo tanto, el sistema tiene solución única.

b. Por igualación

Consiste en despejar de las dos ecuaciones la misma incógnita para luego igualarlas.

Aplicación 2

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x+2y=3 & \text{(I)} \\ 2x+4y=6 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolución

De (I)

$$x=3-2y \qquad \text{(III)}$$

De (II)

$$x=\frac{6-4y}{2} \qquad \text{(IV)}$$

Igualando las ecuaciones (III) y (IV)

$$3-2y=\frac{6-4y}{2}$$ de donde $6-4y=6-4y$

Reduciendo obtenemos $0y=0$, se cumple $\forall y$

si $y=2$ en (III): $x=-1$

si $y=0$ en (III): $x=3$

si $y=-1$ en (III): $x=5$

tendremos $CS=\{(-1;2), (3;0), (5;-1), ...\}$, el sistema tiene infinitas soluciones.

c. Por reducción

Consiste en sumar o restar ambas ecuaciones buscando eliminar una incógnita.

Aplicación 3

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x+y=1 & \text{(I)} \\ 6x+2y=5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolución

La primera ecuación por (II)

$$\begin{cases} 6x+2y=2 \\ 6x+2y=5 \end{cases} (-)$$

$$0x=-3$$

Se tiene una ecuación que nunca se verifica, es decir, $x\in\phi$; en consecuencia, tendremos $CS=\{\ \}$. Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

Teorema

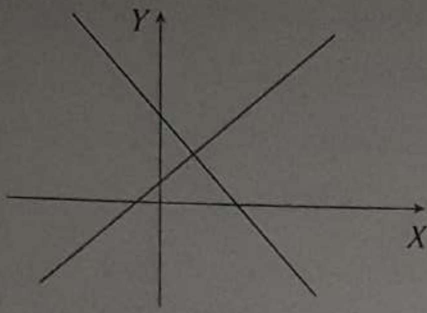
Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$$

1. El sistema es compatible determinado

$\rightarrow \ \dfrac{a}{m} \neq \dfrac{b}{n}$

Gráficamente se tiene

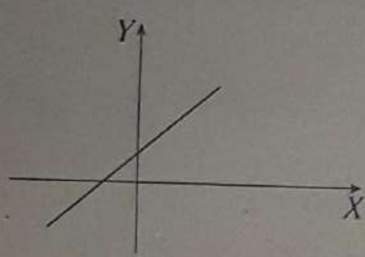


las rectas se cortan en un solo punto.

2. El sistema es compatible indeterminado

$\rightarrow \ \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{p}$

Gráficamente se tiene

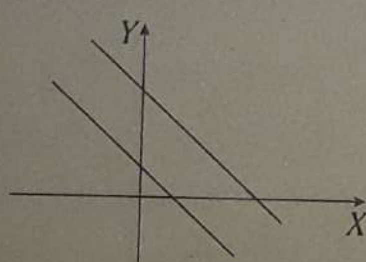


Las rectas coinciden en todos sus puntos.

3. El sistema es incompatible

$\rightarrow \ \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} \neq \dfrac{c}{p}$

Gráficamente se tiene



Las rectas nunca se cortan, son paralelas.

Aplicación 4

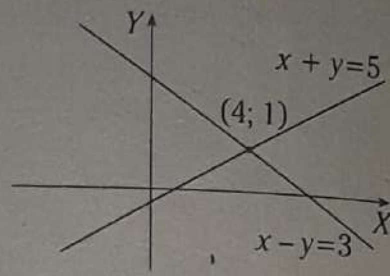
Resuelva

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$$

Resolución

Aquí tenemos $\dfrac{1}{1} \neq -\dfrac{1}{1}$, por lo tanto, el sistema tiene solución única y CS=$\{(4;\,1)\}$.

Gráficamente tenemos



Las rectas se cortan en un solo punto y dicho punto es la solución del sistema.

Aplicación 5

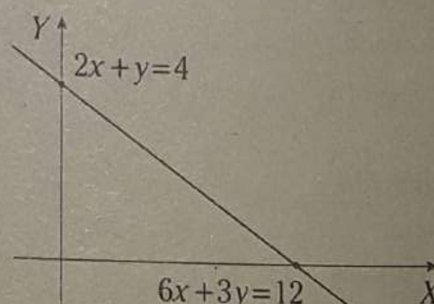
Resuelva

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 6x+3y=12 \end{cases}$$

Resolución

Como $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{12}$ entonces el sistema es compatible indeterminado y CS=$\left\{(0;\,4),(-1;\,6),\left(\dfrac{1}{2};3\right),...\right\}$

Gráficamente tenemos



Las dos rectas son las mismas y cada punto de ellas es solución del sistema.

Problema N.° 1

Si el par (1; a) es solución del sistema

$$\begin{cases} 3x-y=k \\ 5x+y=k-2 \end{cases}$$

halle el valor de a.

UNMSM 2011-I

Resolución

Por definición de solución, al reemplazar el par $x=1 \wedge y=a$ el sistema se verifica

$$\begin{cases} 3(1)-a=k & \text{(I)} \\ 5(1)+a=k-2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Como nos interesa solo el valor de a restamos (I) con (II)

$-2-2a=2$ de donde $a=-2$.

Problema N.° 2

Halle el conjunto de valores reales de m para los cuales el sistema

$mx-2y=5$

$-3x+(m-1)y=1$

tiene solución única.

UNMSM 2010-II

Resolución

Como tiene solución única se cumple

$$\frac{m}{-3} \neq \frac{-2}{(m-1)}$$

Efectuando en aspa $m(m-1) \neq 6$ distributiva y todo al primer miembro

$$m^2-m-6 \neq 0$$

Factorizamos por aspa simple

$$(m-3)(m+2) \neq 0$$

de donde

$$m \neq 3 \wedge m \neq -2$$

$$\therefore \quad m \in \mathbb{R}-\{3; -2\}$$

Problema N.° 3

Si el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución única

$$\begin{cases} x+ky+z=3 \\ kx+y+kz=2 \\ -ky+z=-1 \end{cases}$$

halle los valores reales de k.

UNMSM 2012-I

Resolución

Debemos generar una ecuación con una sola incógnita realizando las siguientes operaciones, por k a la primera ecuación y lo restamos con la segunda ecuación.

$$\left(\cancel{kx}+k^2y+\cancel{kz}\right)-\left(\cancel{kx}+y+\cancel{kz}\right)=3k-2$$

$$\rightarrow \quad \left(k^2-1\right)y=3k-2$$

Para que tenga solución única, el coeficiente de y debe ser diferente de cero, es decir,

$$k^2-1 \neq 0 \text{ de donde } k \neq \pm 1$$

Problema N.° 4

Si x_0; y_0 y z_0 son tres números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ 3x+y+z=0 \\ x+3y+2z=6 \end{cases}$$

halle el valor de $x_0^2+y_0^2+z_0^2$.

UNMSM 2012-II

Resolución

Enumeramos las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+y+3z=5 & (\alpha) \\ 3x+y+z=0 & (\beta) \\ x+3y+2z=6 & (\theta) \end{cases}$$

De $(\beta)-(\alpha)$, tenemos $x-2z=-5$

De $(\theta)-3(\beta)$ tenemos $-8x-z=6$

Se forma el siguiente sistema

$$\begin{cases} x-2z=-5 & (\lambda) \\ 8x+z=-6 & (\varphi) \end{cases}$$

De $(\lambda)+2(\varphi)$se tiene $17x=-17$ de donde $x=-1$ en (λ), $z=2$; además en (α), $y=1$

$$\therefore \quad x^2+y^2+z^2=6$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Sea el sistema compatible

$$\begin{cases} 2x+7=8 \\ bx+10=1 \end{cases}$$

Determine el valor de b.

A) -8 B) 18 C) -9
D) -18 E) 22

2. Si $(-1; 4)$ es la única solución del sistema

$$\begin{cases} 3x+my=1 \\ nx+y=10 \end{cases}$$

señale el valor de $m \cdot n$.

A) -1
B) -2
C) -3
D) -5
E) -6

3. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 5x+8y=1 \\ 4x+8y=\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

A) $\left\{\left(0; \frac{1}{8}\right)\right\}$ B) $\left\{\left(\frac{1}{8}; 0\right)\right\}$ C) $\{(0; 1)\}$
D) $\left\{\left(1; -\frac{1}{2}\right)\right\}$ E) $\left\{\left(0; \frac{1}{4}\right)\right\}$

4. Si $(x_0; y_0)$ es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x-3=y \\ 2y-3=x \end{cases}$$

calcule ${x_0}^{y_0}$.

A) 4 B) 27 C) 256
D) 8 E) 16

5. Luego de resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=x-1 \\ \dfrac{x-y}{4}=y+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

indique el valor de $(x+y)^{x+1}$.

A) 16 B) 25 C) 0
D) 2 E) 8

6. Con respecto al sistema

$$\begin{cases} x+y=666 \\ x-\dfrac{x}{100}+y-\dfrac{y}{100}=99 \end{cases}$$

podemos afirmar que

A) tiene solución única.
B) tiene infinitas soluciones.
C) no tiene solución.
D) tiene dos soluciones.
E) una solución es el par (99; 66).

7. Al dividir un número entre otro, el cociente es 2 y el resto es 14. Si la diferencia entre el dividendo y el divisor es 77, ¿de qué número se trata?

A) 100
B) 130
C) 140
D) 120
E) 150

8. Halle dos números si el mayor más tres veces el menor es igual a 45 y el menor más dos veces el mayor es 27, y luego dé como respuesta el producto de ellos.

A) 60 B) 70 C) 80
D) 90 E) 100

9. Dadas las proposiciones

p: El sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

tiene solución única.

q: El sistema $\begin{cases} 5x+2y=1 \\ 15x+6y=3 \end{cases}$

tiene infinitas soluciones.

r: El sistema $\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 12x+16y=1 \end{cases}$

no tiene solución.

indique el valor de verdad.

A) VVF B) VFF C) FVV
D) VVV E) FFV

10. Teniendo en cuenta que el sistema

$\begin{cases} 2x+ny=\sqrt{3} \\ 7x-5y=\sqrt{2} \end{cases}$

tiene solución única, determine n.

A) $n \neq -\frac{10}{7}$ B) $n \neq -10$ C) $n \neq -\frac{1}{7}$
D) $n \neq \frac{10}{3}$ E) $n \neq \frac{2}{7}$

11. Si el sistema $\begin{cases} mx+9y=1 \\ 6x+ny=3 \end{cases}$

es compatible indeterminado, indique el valor de $n-m$.

A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 29

12. Si el sistema $\begin{cases} ax+2y=1 \\ 6x+(a+1)y=2 \end{cases}$

es inconsistente, halle a.

A) -3 B) -4 C) 3
D) $\{3; -4\}$ E) $\{-3; 4\}$

13. Determine el menor número entero n para que el sistema $\begin{cases} x+y=n-2 \\ x-y=n-6 \end{cases}$

tenga solución única de componentes positivos.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

14. Si el sistema $\begin{cases} ax+5y=4 \\ 5x+by=20 \end{cases}$

tiene más de una solución, calcule $a+\sqrt{b}$.

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

15. Luego de resolver el sistema

$\begin{cases} 4x+1=9 \\ x+y=3 \\ x+y+z=6 \end{cases}$

señale el valor de xyz.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

16. Con respecto al sistema

$\begin{cases} x+5y=4 \\ 2x+3y=1 \\ z=x+y \end{cases}$

se afirma que

A) es incompatible.
B) es compatible indeterminado.
C) tiene dos soluciones.
D) es compatible determinado.
E) si $(x_0; y_0; z_0)$ es solución, entonces $x_0+y_0+z_0=2$.

17. Si $(x_0; y_0; z_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=1 \\ z+x=7 \end{cases}$$

calcule $x_0^4+y_0^4+z_0^4$.

A) 0 B) 256 C) 353
D) 331 E) 341

18. Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ x-3y+2z=-1 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$$

calcule $(x+y+z)^2$.

A) 49 B) 64 C) 81
D) 25 E) 121

19. Si se cumple

$$\begin{cases} m+b=140 \\ n+b=120 \\ m+n=240 \end{cases}$$

indique el valor de $m+n+b$.

A) 200 B) 220 C) 250
D) 300 E) 320

20. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x+y+z=8 \\ x-y-z=1 \\ \dfrac{x}{3}+8y+9z=18 \end{cases}$$

A) $\{(3; 1; 1)\}$
B) $\{(2; 2; 1)\}$
C) $\{(-3; 1; 1)\}$
D) $\{(3; 0; 1)\}$
E) $\{(1; 1; 3)\}$

NIVEL INTERMEDIO

21. En un examen de 100 preguntas, Dante ha dejado sin contestar 10 preguntas y ha obtenido 708 puntos. Si por cada respuesta correcta se suman 10 puntos y por cada respuesta incorrecta, 2 puntos, ¿cuántas preguntas ha contestado bien y cuántas mal?

A) 74 y 16 B) 66 y 24 C) 84 y 6
D) 70 y 20 E) 72 y 18

22. La distancia entre dos ciudades (A y B) es de 255 km. Un coche sale de A hacia B a una velocidad de 90 km/h. Al mismo tiempo, sale otro coche de B hacia A a una velocidad de 80 km/h. Suponiendo su velocidad constante, calcule el tiempo que tardan en encontrarse.

A) 2 h B) 1,5 h C) 2, 25 h
D) 1,8 h E) 1,2 h

23. Si $(x_0; y_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases} \quad \text{con } a; b \in \mathbb{R}^+$$

indique el valor de $x_0^2+y_0^2$.

A) $4ab$ B) a^2+b^2 C) $2(a^2+b^2)$
D) $2ab$ E) $(a+b)^2$

24. Al resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x+p(x+y)=q \\ y+p(x+y)=q \end{cases} \qquad \left(q \neq -\frac{1}{2}\right)$$

se obtiene para x el valor de

A) $\dfrac{q}{1+p}$ B) $\dfrac{q}{1+3p}$ C) $\dfrac{p}{1+2q}$
D) $\dfrac{q}{1+2p}$ E) $\dfrac{p}{1+2p}$

25. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} nx+y=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$$

obtenemos que la solución $(x_0; y_0)$ cumple que $x_0 \in \mathbb{R}^+ \wedge y_0 \in \mathbb{R}^+$. Halle la cantidad de valores enteros que adquiere n.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) infinitos

26. Si el sistema lineal

$$\begin{cases} (n+1)x+nx=7 \\ 4nx+3nx=m \end{cases}$$

es compatible indeterminado, halle el valor de $\frac{m}{n}$.

A) 3 B) 7 C) 7^{-1}
D) 3^{-1} E) 21

27. Teniendo en cuenta que el CS del sistema

$$\begin{cases} ax+5y=1 \\ (a+4)x+(7a+1)y=3 \end{cases}$$

es el vacío, determine el valor de $7a$.

A) 2 B) −2 C) −10
D) −11 E) −12

28. Luego de resolver el sistema

$$\begin{cases} a+b=9 \\ b+c=3 \\ c+d=2 \\ d+a=8 \end{cases}$$

halle el valor de a^{bcd}.

A) 512
B) 1
C) 2^{10}
D) 2^4
E) 256

29. Dado el sistema compatible

$$\begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ x+6y+3z=2 \end{cases}$$

señale la ecuación que se puede agregar de modo que el conjunto solución no varíe.

A) $x+y+z=8$
B) $x-4y-z=-1$
C) $x+y+z=3$
D) $7x+2y+5z=4$
E) $\frac{x}{3}+2y+z=2$

30. Si $(x_0; y_0; z_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2x+y-7z=1 \\ x+y+z=5 \\ x-y-z=3 \end{cases}$$

indique el valor de $x_0 \cdot y_0 \cdot z_0$.

A) 0
B) 6
C) 12
D) −8
E) −30

31. Una empresa ha invertido S/.73 000 en la compra de computadoras portátiles de tres clases (A, B y C), cuyos costos por unidad son S/.2400, S/.1200 y S/.1000, respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 computadoras y que la cantidad invertida en los del tipo A ha sido la misma que la invertida en B, indique cuántos aparatos ha comprado de cada clase, respectivamente.

A) 10; 20; 25
B) 20; 10; 25
C) 20; 20; 15
D) 10; 30; 15
E) 20; 15; 20

32. Calcule λ de modo que el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y = 9 \\ x + y = 4 \\ x + \lambda y = 3 \end{cases}$$

tiene solución única.

A) $\frac{1}{2}$ B) -1 C) 10

D) $\frac{1}{4}$ E) 2

33. Si $(x_0; y_0; z_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} cx + az = b \\ ay + bx = c \\ bz + cy = a \end{cases}$$

calcule x_0.

A) $\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2}$

B) $\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$

C) $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$

D) $\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$

E) $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

34. Luego de resolver el sistema de incógnitas $x; y; z$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b+c)x + (a+c)y + (a+b)z = 0 \\ bcx + acy + abz = 1 \end{cases}$$

donde $a \neq b \neq c$, indique el valor de x.

A) $\dfrac{1}{(c-a)(a-b)}$

B) $\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

C) $\dfrac{1}{(a-c)(a-b)}$

D) $\dfrac{1}{(a+c)(a+b)}$

E) $\dfrac{1}{(b+c)(b+a)}$

35. Si los sistemas α y β son equivalentes y compatibles

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + by = 4 \end{cases} \quad (\alpha) \qquad \begin{cases} 3x - cy = 2a \\ x + 3y = 5 \end{cases} \quad (\beta)$$

determine los parámetros a; b; c si están en progresión aritmética en ese orden, y dé como respuesta abc.

A) 0 B) 4 C) 8

D) 24 E) 48

Sistema de ecuaciones no lineales

Capítulo IX

OBJETIVOS

- Aplicar la resolución de ecuaciones cuadráticas vistas en capítulos anteriores.
- Interpretar a través de sistemas de grado superior un problema de la vida diaria.
- Interpretar geométricamente un sistema de grado superior.
- Resolver un conjunto de ecuaciones que involucren varias incógnitas.

La importancia del estudio de los sistemas no lineales radica en que en este capítulo se tienen que emplear los diversos temas ya estudiados anteriormente, como productos notables, factorización y ecuaciones. Los sistemas no lineales frecuentemente se encontrarán en un sistema físico como las ecuaciones de movimiento; en biología, por ejemplo, un modelo de un sistema biológico es convertido a sistema de ecuaciones y las soluciones describen cómo el sistema biológico se comporta, ya sea en el tiempo o en equilibrio.

¿Qué es un sistema de ecuaciones no lineales?

Es un conjunto de dos o más ecuaciones en el cual al menos un término no es lineal.

Ejemplos

- $\begin{cases} \sqrt{x-y}=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \log x+\log x=1 \\ 2^x=y \end{cases}$
- $\begin{cases} |x+1|=y+2 \\ y=x+1 \end{cases}$

Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales

Para resolver este tipo de sistemas no existe un método general; sin embargo, de acuerdo a la forma que presenta el sistema, se resolverá usando los métodos del sistema de ecuación lineal, productos notables, diversos artificios, inclusive hay problemas que se resuelven geométricamente.

Aplicación 1

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x+y=7 & \text{(I)} \\ xy=12 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolución

De (I) despejamos y

$$y=7-x$$

Reemplazamos én (II)

$$x(7-x)=12$$

tenemos

$$x^2-7x+12=0$$

$$\begin{array}{ll} x & -4 \\ x & -3 \end{array}$$

- Si $x=4$ en (II), se tiene $y=3$
- Si $x=3$ en (II), se tiene $x=4$

$\therefore$ CS=$\{(4; 3), (3; 4)\}$

Aplicación 2

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \text{(I)} \\ 2xy=4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolución

Sumamos (I)+(II)

$(x+y)^2=9$ de donde

$x+y=3 \vee x+y=-3$ (III)

Formamos un nuevo sistema con (II) y (III)

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$$

Resolviendo cada sistema parcial tenemos

CS=$\{(1; 2), (2; 1), (-2; -1), (-1; -2)\}$

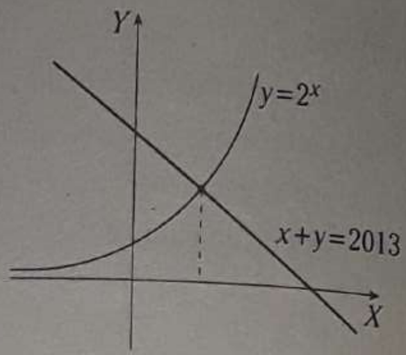
Aplicación 3

Indique el número de soluciones reales que tiene el siguiente sistema.

$$\begin{cases} y=2^x \\ x+y=2013 \end{cases}$$

Resolución

Gráficamente se tiene



Como se cortan en un solo punto, tendremos solo una solución real.

Aplicación 4

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} x^2-x-2=0 & \text{(I)} \\ x+y=5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolución

Factorizamos (I)

$x^2-x-2=0$ de donde $x=2 \vee x=-1$

$$\begin{array}{ll} x & -2 \\ x & 1 \end{array}$$

Reemplazamos en (II)

- Si $x=2 \rightarrow y=3$
- Si $x=-1 \rightarrow y=6$

$\therefore$ CS=$\{(2; 3), (-1; 6)\}$

Problema N.° 1

Si

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{1}{4}}=30 \\ x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{1}{4}}=24 \end{cases}$$

halle el valor de $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

UNMSM 2012-II

Resolución

Sumamos las dos ecuaciones y obtenemos

$$2x^{\frac{3}{4}}=54$$

$$x^{\frac{3}{4}}=27$$

$$\rightarrow \sqrt[3]{x^{\frac{3}{4}}}=\sqrt[3]{27}$$

$$\rightarrow x^{\frac{1}{4}}=3$$

de donde $x=81$

$$\therefore \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=9-\frac{1}{9}=\frac{80}{9}$$

Problema N.° 2

Si x e y son números reales que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7 \\ x^2+y^2+xy=133 \end{cases}$$

halle el valor de $|x-y|$.

UNMSM 2012-II

Resolución

De la primera ecuación $x+y=7+\sqrt{xy}$ elevamos al cuadrado $x^2+y^2+2xy=49+xy+14\sqrt{xy}$

$$\underbrace{x^2+y^2+xy}_{133}=49+14\sqrt{xy}$$

de donde

$$\sqrt{xy}=6 \rightarrow xy=36$$

Reemplazamos en la primera ecuación $x+y=3$, al final tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} xy=36 \\ x+y=13 \end{cases}$$

de aquí tenemos

$$(x=9 \wedge y=4) \vee (x=4 \wedge y=9)$$

$$\therefore \quad |x-y|=5$$

Nota

También podríamos usar la identidad de Legendre

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

Reemplazamos los datos

$$(13)^2-(x-y)^2=4(36) \rightarrow (x-y)^2=25$$

de donde

$$|x-y|=5$$

Problema N.° 3

Si x e y son números enteros positivos que satisfacen las ecuaciones

$$\sqrt{\frac{x+y}{6x}}+\sqrt{\frac{6x}{x+y}}=\frac{5}{2} \wedge xy-x-y=9$$

halle el valor de $13x+9y$.

UNMSM 2010-I

Resolución

De la primera ecuación se tiene la suma de un número con su inversa que nos da $\frac{5}{2}$, concluimos que

$$\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=2 \vee \sqrt{\frac{x+y}{6x}}=\frac{1}{2}$$

- Si $\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=2$, tendremos $y=23x$

  Reemplazamos en la segunda ecuación

  $$x(23x)-x-23x=9 \rightarrow 23x^2-24x-9=0$$

  Aquí no hay soluciones enteros positivos.

- Si $\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{1}{2}$, tendremos $x=2y$ (I)

  Reemplazamos en la segunda ecuación

  $$(2y)y-(2y)-y=9 \rightarrow 2y^2-3y-9=0$$

  $$\begin{array}{ccc} 2y & \diagdown\!\!\!\diagup & +3 \\ y & & -3 \end{array}$$

  Como $y \in \mathbb{Z}^+$, tenemos $y=3$

  Reemplazamos en (I): $x=6$

$\therefore$ $13x+9y=13(6)+9(3)=105$

Problema N.° 4

Si

$$\begin{cases} 3^{2x}-79\left(3^{x+y}\right)=2\cdot 9^{y+2} \\ x^2+2xy+y^2-12x-12y+36=0 \end{cases}$$

halle el valor de $\sqrt{x^2-2y+2}$.

UNMSM 2009-II

Resolución

De la segunda ecuación

$$(x+y)^2-12(x+y)+36=0 \rightarrow ((x+y)-6)^2=0$$

de donde

$$x+y=6$$

De la primera ecuación

$$(3^x)^2-79\cdot 3^x\cdot 3^y-2\cdot 81(3^y)^2=0$$

$$\begin{array}{ccc} 3^x & \diagdown\!\!\!\diagup & 2(3^y) \\ 3^x & & -81(3^y) \end{array}$$

de donde

$$\underbrace{3^x=-2(3^y)}_{\text{absurdo}} \vee \underbrace{3^x=81(3^y)}_{\underbrace{3^x=3^{4+y}}_{x=4+y}} \qquad (\alpha)$$

Tendremos el sistema

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x=4+\cancel{y} \end{cases} (+)$$
$$2x=10$$

$\rightarrow$ $x=5$

De reemplazar en (α) tenemos $y=1$

$\therefore$ $\sqrt{5^2-2(1)+2}=5$

Problema N.° 5

Calcule a para que el sistema

$$\begin{cases} ax^2+y^3=7 & (\alpha) \\ x+y=5 & (\beta) \\ 5x-3y=9 & (\theta) \end{cases}$$

presente solución única.

Resolución

De (β) y (θ)

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 5x-3y=9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+3\cancel{y}=15 \\ 5x-3\cancel{y}=9 \end{cases} +$$
$$8x=24$$
$$x=3$$

Reemplazamos en (β)

$$y=2$$

Tenemos que (3; 2) es solución del sistema.

Por lo tanto, podemos reemplazarlo en (α)

$$a(3)^2+2^3=7$$

de donde

$$a=-\frac{1}{9}$$

NIVEL BÁSICO

1. Si $(a; b; c)$ es una terna solución del sistema

$$\begin{cases} ab = 24 \\ bc = 18 \\ ca = 12 \end{cases}$$

determine el menor valor de $a+b+c$.

A) -72 B) -288 C) 72
D) -18 E) -2012

2. Determine $x_0 \cdot y_0$ si $(x_0; y_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 3 \\ x-y = 2 \end{cases}$$

A) 77 B) $\frac{77}{4}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{5}{4}$ E) 1

3. Si $(x_0; y_0)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x^2+xy+y=-1 \\ y^2+xy+x=13 \end{cases}$$

calcule el máximo valor de x_0+y_0.

A) 4 B) 2 C) 3
D) 13 E) 12

4. Halle $a-b$ teniendo en cuenta el siguiente sistema

$$\begin{cases} a^2-b^2=27 \\ a+b=9 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

5. Resuelva en los reales negativos

$$\begin{cases} x^4y^2 = \frac{1}{4} \\ x^3y^5 = 4 \end{cases}$$

A) $\left\{\left(-\frac{1}{2}; -2\right)\right\}$

B) $\left\{\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; -2\right)\right\}$

C) $\left\{\left(-2; -\frac{1}{2}\right)\right\}$

D) $\left\{\left(-4; -\frac{1}{4}\right)\right\}$

E) $\left\{\left(-\frac{1}{4}; -4\right)\right\}$

6. Determine el número de soluciones en el siguiente sistema.

$$\begin{cases} \sqrt{9}^x + 4^y = 97 \\ 3^x - 2^{2y} = 65 \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

7. Indique $x+y$ teniendo en cuenta el sistema.

$$\begin{cases} \frac{1}{x+2} + \frac{7}{y+1} = 15 \\ \frac{2}{x+2} - \frac{14}{y+1} = 2 \end{cases}$$

A) $\frac{1}{8}$ B) -15 C) $-\frac{1}{8}$
D) $-\frac{15}{8}$ E) $\frac{17}{8}$

8. Dado el sistema

$$\begin{cases} x+y=7 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases}$$

determine $x-y$.

A) 1 B) 14 C) $\frac{14}{3}$
D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{15}{4}$

9. Indique la suma de valores que adquiere y en el sistema

$$\begin{cases} x^2 = 2y + 4 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

A) -3 B) 3 C) $\sqrt{3}$
D) -4 E) 0

10. Resuelva en los reales

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = y \\ y + \dfrac{1}{y} = z \\ z + \dfrac{1}{z} = x \end{cases}$$

indique el número de soluciones.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) infinito

11. Indique el valor de y^2 en el sistema

$$\begin{cases} x + 1 = \dfrac{1}{2y} \\ x - 1 = \dfrac{1}{y} \end{cases}$$

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{1}{25}$ E) 1

12. Con respecto al sistema

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 4 \end{cases}$$

podemos afirmar que

A) tiene soluciones reales.
B) tiene soluciones de componentes positivos.
C) tiene soluciones cuyos componentes son números irracionales.
D) tiene soluciones no reales.
E) solo tiene una solución.

13. Sean x; y números positivos que verifican

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x + y) = 12 \\ \dfrac{y}{x}(x + y) = 3 \end{cases}$$

Con respecto a $x-y$ podemos afirmar que

A) es un número negativo.
B) es un número impar.
C) es un número par.
D) es divisible por 5.
E) es un número irracional.

14. Luego de resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2 \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = 7 \end{cases}$$

calcule el valor de xyz.

A) -1 B) $-\frac{1}{8}$ C) $-\frac{1}{6}$
D) $-\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{24}$

15. Teniendo en cuenta el sistema

$x(y+z)=1$
$y(x+z)=2$
$z(y+x)=-2$

determine el valor de zx.

A) -2 B) 2 C) 1
D) -1 E) 0

16. Resuelva el sistema en los reales

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2x - 4y + z^2 = -10 \end{cases}$$

A) $\{(1; 2; 0)\}$ B) $\{(-1; 2; 0)\}$
C) $\{(2; 1; 0)\}$
D) $\{(-2; 1; 0)\}$ E) $\{(-2; -1; 0)\}$

17. Al resolver el sistema en z.

$$\begin{cases} xz=6 \\ (x+y)^x=10^3 \\ (x+y)^z=10^2 \end{cases}$$

El valor para y es

A) 2. B) 3. C) 7.
D) 8. E) 4.

18. Si x; y; z son números enteros positivos tal que $xy=20 \wedge yz=12$, calcule el máximo valor de $x+z$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 9

19. Determine el número de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2+2x=8 \\ y^2+2y=15 \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

20. Determine los valores de n ($n \in \mathbb{R}$) de modo que el sistema en x e y

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y-nx=4 \end{cases}$$

sea compatible en $\mathbb{R}$.

A) $|n|<\sqrt{3}$ B) $|n|>\sqrt{3}$ C) $|n|\geq\sqrt{3}$
D) $|n|=\sqrt{3}$ E) $|n|\leq\sqrt{3}$

NIVEL INTERMEDIO

21. Sean a; b; c números positivos tales que
$a(b+c)=152$
$b(c+a)=162$
$c(a+b)=170$
Determine abc.

A) 720 B) 762 C) 752
D) 620 E) 670

22. Determine el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x-y=r \end{cases}$$

para $r>0$.

A) $\{(0; 0), (r; 0)\}$
B) $\{(r; 0)\}$
C) $\{(r; 0), (-r; 0)\}$
D) $\{(0; 0)\}$
E) $\{(0; r)\}$

23. Dado el sistema de ecuaciones

$$\frac{-4}{x+y-1}+\frac{5}{2x-y+3}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{x+y-1}+\frac{1}{2x-y+3}=-\frac{7}{5}$$

indique el valor de $(x+y)^2$.

A) 0 B) 8 C) 1
D) 4 E) 9

24. Resuelva el sistema en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x^3+y^3=5 \\ x^2y+xy^2=1 \end{cases}$$

Si $(x_0; y_0)$ es una solución, según ello calcule $x_0^2-2x_0$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0
D) -1 E) 1

25. Luego de resolver el sistema

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}=\frac{1}{x+y+z},$$

calcule xyz.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{9}{4}$
D) $\frac{8}{9}$ E) $\frac{8}{27}$

26. Luego de resolver el sistema

$$\begin{cases} x+y=6xy \\ y+z=12yz \\ z+x=10zx \end{cases}$$

calcule el valor de $x+y+z$.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{5}{8}$

27. Si $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ es solución del sistema de ecuaciones en $\mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} x+xy+y=29 \\ y+yz+z=41 \\ z+zx+x=34 \end{cases}$$

calcule $(x-z)^y$.

A) 32 B) 16 C) −16
D) −32 E) −8

28. Indique el número de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x+y=10 \\ (x+5)(y-2)=36 \end{cases}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

29. Dado el sistema de cuatro incógnitas

$$\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=\omega \end{cases}$$

determine ω para que el sistema tenga solución única.

A) $-\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$
D) −1 E) −2

30. Al resolver el sistema

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3y-7}-\sqrt[3]{x+y+2}=3 \\ 3\sqrt{2x-3y-7}+2\sqrt[3]{x+y+2}=14 \end{cases}$$

el valor de $x+y$ es

A) −1. B) 0. C) 1.
D) 2. E) 3.

31. Si x; y; z son números positivos que verifican

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=4 \\ y+\dfrac{1}{z}=1 \\ z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

entonces xyz es

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{7}{3}$ E) 2

32. Determine el número de soluciones que tiene en $\mathbb{Z}$ $x^6=y^3+53$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

33. Dado el sistema en $\mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} x+2\sqrt{x+y+z}=a \\ y+2\sqrt{x+y+z}=b \\ z+2\sqrt{x+y+z}=c \end{cases}$$

si $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ es la única solución tal que $x_0=22-n\sqrt{a+b+c+9}$, determine el valor de $a+n$.

A) 28 B) 29 C) 30
D) 31 E) 32

34. Determine el número de soluciones en el sistema

$$\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

Desigualdades

Capítulo X

Objetivos

- Conocer las definiciones y los teoremas sobre desigualdades.
- Efectuar operaciones con intervalos y representarlos en la recta numérica real.
- Calcular máximos y mínimos de ciertos conjuntos y/o expresiones definidos en el conjunto $\mathbb{R}$.

Las desigualdades son importantes ya que se aplican en diferentes campos de la matemática y la ciencia. En este capítulo se calcularán máximos y mínimos de expresiones lineales y cuadráticas, así como las desigualdades relacionadas con ellas. Muchas aplicaciones a situaciones prácticas de las matemáticas han hecho, en este siglo, que las desigualdades hayan adquirido una gran importancia debido a su gran utilidad en la resolución de problemas de programación lineal, en su aplicación en la economía, en los negocios y en otras áreas.

Las desigualdades se convierten en la base fundamental para el estudio de los números reales, la resolución de las inecuaciones y el estudio de las funciones matemáticas, y a partir de estas puede iniciarse el estudio del cálculo diferencial.

Una desigualdad muy importante en la matemática es

$$\boxed{\text{media aritmética} \geq \text{media geométrica}}$$

Sean $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^+$

entonces $\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$

La igualdad se cumple si y solo si $x_1=x_2=...=x_n$.

Desigualdad

Es aquella comparación que se establece entre dos números reales mediante los símbolos $<$ (menor que); $\leq$ (menor o igual que); $>$ (mayor que) y $\geq$ (mayor o igual que). Es decir, si a y $b \in \mathbb{R}$, entonces $a<b$, $a>b$, $a \leq b$ y $a \geq b$ se denominan desigualdades.

En particular, $a<b$ y $a>b$ se llaman desigualdades estrictas, mientras que $a \leq b$ y $a \geq b$ reciben el nombre de desigualdades no estrictas.

Ejemplos

- $5>2$ se lee: "5 es mayor que 2".
- $6 \geq 4$ se lee: "6 es mayor o igual que 4".
- $3<7$ se lee: "3 es menor que 7".
- $5 \leq 8$ se lee: "5 es menor o igual que 8".

Definiciones

Sean a, b y c números reales. Se define

- a es positivo si y solo si $a>0$.
- b es negativo si y solo si $b<0$.
- $a>b$ si y solo si $(a-b)$ es positivo.
- $a<b$ si y solo si $(a-b)$ es negativo.
- $a \leq b$ si y solo si $a<b \vee a=b$.
- $a \geq b$ si y solo si $a>b \vee a=b$.
- c no es negativo si y solo si $c \geq 0$

Ejemplos

- $-2 > -7$ porque $-2-(-7)=5$ y 5 es positivo.
- $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$ porque $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ y $\frac{1}{12}$ es positivo.
- $3 < 5$ porque $3-5=-2$ y -2 es negativo.
- $-5 < -1$ porque $-5-(-1)=-4$ y -4 es negativo.
- $x \geq 2$ es equivalente a $x > 2 \vee x=2$.
- $-1 \leq x \leq 4$ equivale a $-1 \leq x \wedge x \leq 4$.
- x no es negativo equivale a $x \geq 0$.

Ley de la tricotomía

Para cualquier número real a una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple

$$\boxed{a < 0 \vee a=0 \vee a > 0}$$

En consecuencia, para cualesquiera dos elementos a y b reales, una y solamente una de las siguientes relaciones se cumple

$$\boxed{a < b \vee a=b \vee a > b}$$

Ley de clausura

Para cualesquiera dos elementos a y b reales positivos se cumple

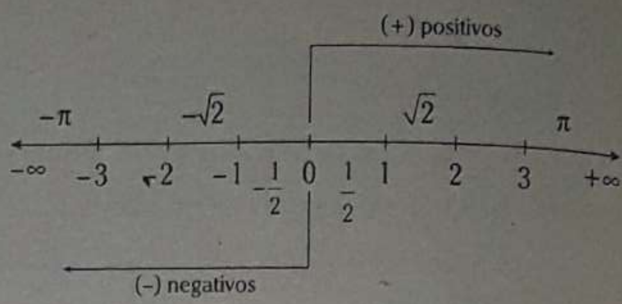
$$\boxed{(a+b) \wedge a \cdot b \text{ son positivos}}$$

Recta numérica real

A continuación se presentará una interpretación geométrica del conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) al asociarlos con los puntos de una recta horizontal denominada recta numérica real.

En conclusión, la recta numérica real es aquella donde existe una correspondencia de uno a uno (biunívoca) entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

Geométricamente



NOTA

Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no representan números reales, se llaman ideales.

Intervalos

Sea I un subconjunto de $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$). Diremos que I es un intervalo si y solo si es el conjunto de todos los números reales que están comprendidos entre dos extremos (que pueden ser finitos o ideales) llamados extremo inferior y extremo superior.

Ejemplo

Si consideramos el conjunto

$S=\{x \in \mathbb{R} / -6 < x \leq 4\}$, este conjunto es un intervalo y está representado en la recta numérica real así

El corchete en 4 significa que 4 pertenece al conjunto y el otro símbolo en -6 indica que -6 no está en el conjunto. Luego denotamos este conjunto en forma de intervalo, así $S=\langle -6; 4]$.

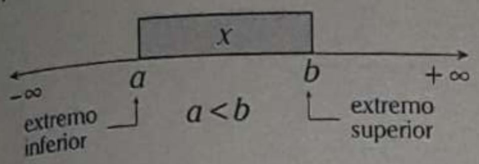
Clases de intervalos

Si I es un intervalo, este puede ser acotado o no acotado.

Intervalo acotado

Es aquel intervalo cuyos extremos son finitos.

Ejemplo



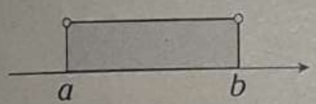
Los intervalos acotados pueden ser:

a. Intervalo abierto

En este intervalo no se tienen en cuenta a los extremos, es decir, solo se consideran los valores que están entre los extremos, y su notación es

$$\boxed{\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}}$$

Geométricamente

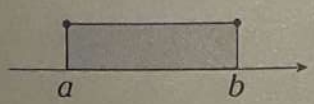


b. Intervalo cerrado

En este intervalo sí se tienen en cuenta a los extremos, es decir, se consideran todos los valores desde el menor hasta el mayor extremo, y se denota así

$$\boxed{[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}}$$

Geométricamente

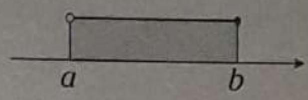


c. Intervalo semiabierto

En este intervalo se consideran todos los valores que están entre el menor y el mayor extremo incluyendo solo a uno de ellos, y se denota así

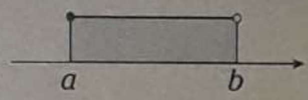
$$\boxed{\langle a; b] = \{x \,/\, a < x \leq b\}}$$

Geométricamente



$$\boxed{[a; b\rangle = \{x \,/\, a \leq x < b\}}$$

Geométricamente



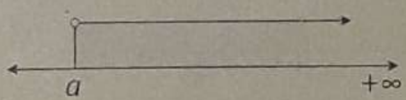
Intervalo no acotado

Es aquel intervalo donde al menos un extremo es el ideal $+\infty$ o $-\infty$.

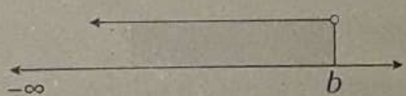
Si un extremo es ideal, en dicho extremo siempre es abierto el intervalo.

Ejemplos

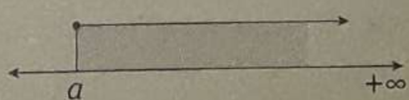
1. $A = \langle a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$



2. $B = \langle -\infty; b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < b\}$



3. $C = [a; +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$



4. $D=\langle -\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b\}$

5. $\mathbb{R}=\langle -\infty; +\infty\rangle$ = toda la recta real

Aplicación 1

Muestre cada conjunto sobre una recta numérica real y expréselos en notación de intervalos.

I. $A=\{x \in \mathbb{R} \,/\, -7 \leq x < -2\}$

II. $B=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 1 \wedge x < 10\}$

III. $C=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -5\}$

IV. $D=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 5\}$

Resolución

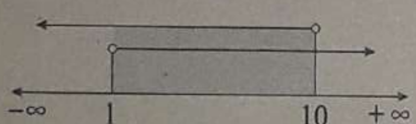
I. $A=\{x \in \mathbb{R} \,/\, -7 \leq x < -2\}$

Luego $A=[-7; -2\rangle$

Aquí se observa que el intervalo es cerrado por izquierda, es decir, x puede tomar el valor de -7, pero es abierto por derecha y x no puede tomar 2, pues $x < 2$.

Por lo tanto, $x_{\text{mín}}=-7$; $x_{\text{máx}}$: no existe.

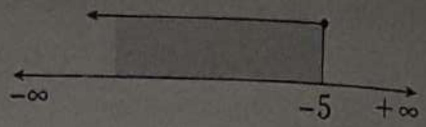
II. $B=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 1 \wedge x < 10\}$



Luego $B=\langle 1; 10\rangle$

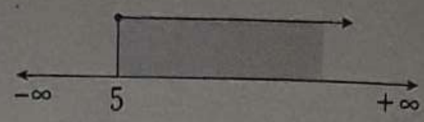
Como el intervalo es abierto, x no puede tomar 1 ni 10, lo que implica que no existe el menor ni el mayor valor de x. Es muy diferente decir: "el menor valor entero de x, que es 2, y el mayor valor entero, que es 9".

III. $C=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq -5\}$



Luego $C=\langle -\infty; -5]$

IV. $D=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 5\}$



Luego $D=[5; +\infty\rangle$

Observación

- $x \in \langle 1; 5\rangle$ equivale a $1 < x < 5$.
- $x \in [-1; 2]$ equivale a $-1 \leq x \leq 2$.
- $x \in \left\langle \frac{1}{2}; \sqrt{3}\right]$ equivale a $\frac{1}{2} < x \leq \sqrt{3}$.
- $x \in [-1; 1\rangle$ equivale a $-1 \leq x < 1$.

Operaciones con intervalos

Sean A y B intervalos. Se definen y se denotan según cada caso.

Unión

$A \cup B=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in A \vee x \in B\}$; se consideran los elementos comunes y no comunes de A y B.

Intersección

$A \cap B=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$; solo se consideran los elementos comunes de A y B.

Diferencia

$A-B=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$; solo elementos de A y nada de B.

Complemento

$A^C=A'=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \notin A\}$

A'=complemento de A respecto a $\mathbb{R}$

$A'=\mathbb{R}-A$

Aplicación 2

Sean los conjuntos (intervalos)

$A=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 5\}$

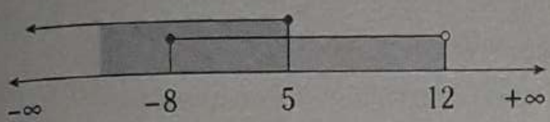
$B=\{x \in \mathbb{R} \,/\, -8 \leq x < 12\}$

Halle $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, A', B'.

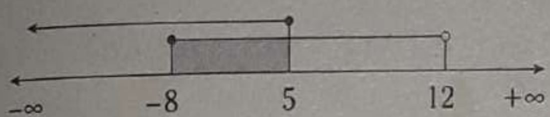
Resolución

Para una mejor interpretación utilizamos la recta numérica real para cada caso.

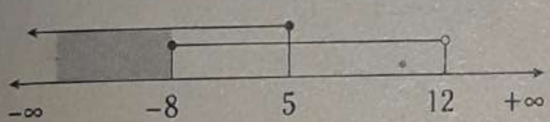
- $A \cup B=\langle -\infty; 12\rangle$



- $A \cap B=[-8; 5]$

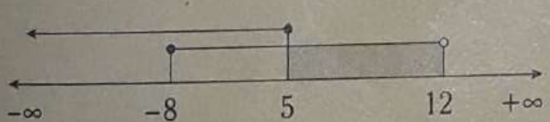


- $A-B=\langle -\infty; -8\rangle$

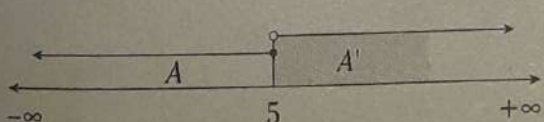


Como solo queremos los elementos de A y no de B y -8 está en ambos intervalos, entonces para $A-B$ ya se toma -8.

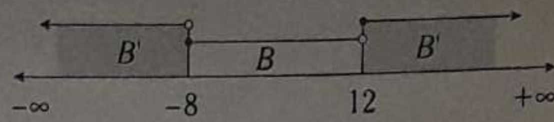
- $B-A=\langle 5; 12\rangle$



- $A'=\mathbb{R}-A=\langle 5; +\infty\rangle$



- $B'=\mathbb{R}-B=\langle -\infty; -8\rangle \cup [12; +\infty\rangle$



Teoremas sobre desigualdades

1. Si en ambos miembros de una desigualdad se le suma o resta un mismo número real, el sentido de la desigualdad no cambia.

Ejemplos

- $15 > 10 \xrightarrow{+5} 15+5 > 10+5$

  $20 > 15$

- $18 > 11 \xrightarrow{-7} 18-7 > 11-7$

  $11 > 4$

- $5 \leq 9 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} 5-\frac{1}{2} \leq 9-\frac{1}{2}$

  $\frac{9}{2} \leq \frac{17}{2}$

También

- Si $3 < x < 5 \xrightarrow{+10}$

  $\rightarrow 13 < x+10 < 15$

- Si $2 \leq x \leq 7 \xrightarrow{-5}$

  $\rightarrow -3 \leq x-5 \leq 2$

- Si $13 \geq x > 7 \xrightarrow{+2}$

  $15 \geq x+2 > 9$

2. Si a ambos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por un mismo número real positivo, el sentido de desigualdad no cambia.

Ejemplos

- $7 > 1$
  $7\times 5 > 1\times 5 \qquad \times 5$
  $35 > 5$

- $12 < 16$
  $\frac{12}{4} < \frac{16}{4} \qquad \div 4$
  $3 < 4$

- $20 \geq 15$
  $\frac{20}{5} \geq \frac{15}{5} \qquad \div 5$
  $4 \geq 3$

También

- Si $1 < x < 5$
  $3 < 3x < 15 \qquad \times 3$

- Si $7 \geq y > \frac{1}{2}$
  $28 \geq 4y > 2 \qquad \times 4$

- Si $-1 \leq a \leq 10$
  $-\frac{1}{2} \leq \frac{a}{2} \leq 5 \qquad \div 2$

3. Si a ambos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por un mismo número real negativo, el sentido de la desigualdad sí cambia.

Ejemplos

- $7 > 2$
  $7(-3) < 2(-3) \qquad \times(-3)$
  $-21 < -6$

- $-1 < 3$
  $(-1)(-4) > 3(-4) \qquad \times(-4)$
  $4 > -12$

- $5 \geq 2$
  $\frac{5}{-2} \leq \frac{-2}{-2} \qquad \div(-2)$
  $-2{,}5 \leq 1$

También

- Si $-12 < x \leq 6$
  $\rightarrow\ 4 > -\frac{x}{3} \geq -2 \qquad \div(-3)$

- Si $-6 \leq y \leq \frac{1}{2}$
  $\rightarrow\ 24 \geq -4y \geq -2 \qquad \times(-4)$

Aplicación 3

Halle la variación de la expresión $\frac{5-3x}{2}$ si $x \in \langle 1; 5\rangle$.

Resolución

A partir del dato formaremos la expresión dada, así

$$\begin{aligned}
1 &< x < 5 \\
-3 &> -3x > -15 && \times(-3) \\
2 &> 5-3x > -10 && +5 \\
1 &> \frac{5-3x}{2} > -5 && \div 2
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left(\frac{5-3x}{2}\right) \in \langle -5; 1\rangle$$

4. Sean a y b números reales del mismo signo. Si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Ejemplos

- $3 < 4 \ \rightarrow\ \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$
- $12 < 35 \ \rightarrow\ \frac{1}{12} > \frac{1}{35}$
- $-6 < -1 \ \rightarrow\ -\frac{1}{6} > -1$
- $-5 \leq -\frac{1}{2} \ \rightarrow\ -\frac{1}{5} \geq -2$

También

- Si $6 < x < 10 \rightarrow \dfrac{1}{6} > \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{10}$
- Si $\dfrac{1}{6} \leq y \leq 2 \rightarrow 6 \geq \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{1}{2}$
- Si $-7 < b \leq -\dfrac{1}{5} \rightarrow -\dfrac{1}{7} > \dfrac{1}{b} \geq -5$

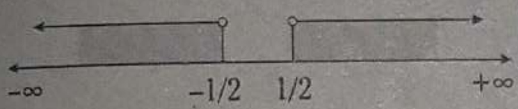
OBSERVACIÓN

Pero cuidado, si $-2 < x < 2$ no se puede aplicar la propiedad directamente puesto que los extremos tienen signos diferentes, en estos casos se procede así

$$-2 < x < 2 \equiv \underbrace{-2 < x < 0}_{(-)} \vee \underbrace{0 < x < 2}_{(+)}$$

$$-2 < x \quad \vee \quad x < 2$$

$$-\frac{1}{2} > \frac{1}{x} \quad \vee \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$



$$\therefore \left(\frac{1}{x}\right) \in \left\langle -\infty; -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{1}{2}; +\infty\right\rangle$$

Aplicación 4

Halle la variación de la expresión f si $f_{(x)} = \dfrac{3}{x+2}$; $x \geq 0$.

Resolución

Por dato

$$x \geq 0 \quad \xrightarrow{+2}$$

$$\underbrace{x+2}_{(+)} \geq 2 \quad \xrightarrow{\text{invierto}}$$

$$0 < \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2} \quad \xrightarrow{\times 3}$$

$$0 < \underbrace{\frac{3}{x+2}}_{f_{(x)}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore f_{(x)} \in \left\langle 0; \frac{3}{2}\right]$$

5. Para todo $x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geq 0$

Aplicación 5

Calcule el menor valor de la expresión f si $f_{(x)} = x^2 + 4$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

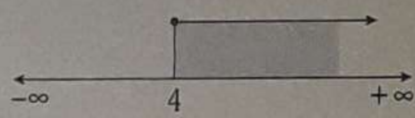
Resolución

Como

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow x^2 \geq 0 \quad \xrightarrow{+4}$$

$$\underbrace{x^2+4}_{f_{(x)}} \geq 4$$

$$f_{(x)} \geq 4$$



$$\therefore \quad f_{\text{mín}} = 4$$

Aplicación 6

Halle la variación de la expresión g si $g_{(x)} = x^2 - 4x + 3$; $x \in \mathbb{R}$.

Resolución

Completando cuadrados se tiene

$$g_{(x)} = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 1$$

$$\rightarrow \quad g_{(x)} = (x-2)^2 - 1$$

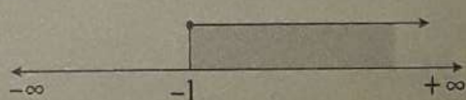
Como $x \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \quad (x-2) \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \quad (x-2)^2 \geq 0 \quad \xrightarrow{-1}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{(x-2)^2 - 1}_{f_{(x)}} \geq -1$$

$$\rightarrow \quad f_{(x)} \geq -1$$



$$\therefore \quad f_{(x)} \in [-1; +\infty\rangle$$

6. Si a y b son positivos y $a < x < b$
$\rightarrow\ a^2 < x^2 < b^2$

Ejemplos

- Si $3 < x < 5 \ \rightarrow\ 9 < x^2 < 25$
- Si $1 < y < 6 \ \rightarrow\ 1 < y^2 < 36$

También

- Si $2 \leq x \leq 7 \ \rightarrow\ 4 \leq x^2 \leq 49$
- Si $\frac{1}{2} \leq y \leq \sqrt{2} \ \rightarrow\ \frac{1}{4} \leq y^2 \leq 2$

7. Si a y b son negativos y $a < x < b$
$\rightarrow\ a^2 > x^2 > b^2$

Ejemplos

- Si $-7 < x < -2 \ \rightarrow\ 49 > x^2 > 4$
- Si $-6 < x < -1 \ \rightarrow\ 36 > x^2 > 1$

También

- Si $-5 \leq x \leq -4 \ \rightarrow\ 25 \geq x^2 \geq 16$
- Si $-10 \leq y \leq -\frac{1}{2} \ \rightarrow\ 100 \geq y^2 \geq \frac{1}{4}$

8. Si a es negativo, b es positivo, además
$a < x < b \ \rightarrow\ 0 \leq x^2 < \text{máx}\,\{a^2; b^2\}$

Ejemplos

- Si $-7 < x < 3$
  $\rightarrow\ 0 \leq x^2 < \text{máx.}\,\{(-7)^2; 3^2\}$
  $\rightarrow\ 0 \leq x^2 < \text{máx.}\,\{49; 9\}$
  $\rightarrow\ 0 \leq x^2 < 49$
- Si $-5 < x < 6 \ \rightarrow\ 0 \leq x^2 < 36$
- Si $-6 < x < 1 \ \rightarrow\ 0 \leq x^2 < 36$

También

- Si $-6 \leq x \leq 8 \ \rightarrow\ 0 \leq x^2 \leq 64$
- Si $-10 \leq x < 4 \ \rightarrow\ 0 \leq x^2 \leq 100$
- Si $-9 \leq x < 11 \ \rightarrow\ 0 \leq x^2 < 121$

Aplicación 7

Si $x \in \langle -1; 5]$, entonces el intervalo que pertenece a la expresión x^2-6x+5 es:

Resolución

$$x^2-6x+5=\underbrace{x^2-6x+9}_{(x-3)^2}-4$$

$$x^2-6x+5=(x-3)^2-4$$

Del dato

$$\begin{aligned}
-1 &< x \leq 5 && \Big) -3\\
-4 &< x-3 \leq 2 && \Big) \text{al cuadrado}\\
0 &\leq (x-3)^2 < 16 && \Big) -4\\
-4 &\leq (x-3)^2-4 < 12
\end{aligned}$$

$\therefore\ ((x-1)^2-3) \in [-4; 12\rangle$

9.
$$\begin{array}{r} a<b \\ x<y \\ \hline a+x<b+y \end{array}\ \Big\downarrow (+)$$

Ejemplos

- $$\begin{array}{r} 5<13 \\ 7<14 \\ \hline 12<27 \end{array}\ \Big\downarrow (+)$$
- $$\begin{array}{r} -3\leq 4 \\ 6\leq 10 \\ \hline 3\leq 14 \end{array}\ \Big\downarrow (+)$$

También

- Si $$\begin{array}{r} 2<x<5 \\ -4<y<7 \\ \hline -2<x+y<12 \end{array}\ \Big\downarrow (+)$$
- Si $$\begin{array}{r} 3\leq a<7 \\ 2\leq b<5 \\ \hline 5\leq a+b<12 \end{array}\ \Big\downarrow (+)$$

10. $\left.\begin{array}{r} 0<a<b \\ 0<m<n \end{array}\right|(\times)$
$$\overline{0<am<bn}$$

Ejemplos

- $\left.\begin{array}{r} 5<7 \\ 2<5 \end{array}\right|(\times)$
$$\overline{10<35}$$

- $\left.\begin{array}{r} 6\leq 10 \\ 3\leq 4 \end{array}\right\}(\times)$
$$\overline{18\leq 40}$$

También

- Si $\left.\begin{array}{r} 4<x<5 \\ 2<y<6 \end{array}\right|(\times)$
$$\overline{8<xy<30}$$

- Si $\left.\begin{array}{r} 6\leq m\leq 7 \\ 5\leq n\leq 8 \end{array}\right|(\times)$
$$\overline{30\leq mn\leq 56}$$

DEFINICIONES

Sean a; b y c números reales positivos. Se define para dos o tres números lo siguiente:

Media aritmética

$$\boxed{MA=\frac{a+b}{2} \ \vee \ MA=\frac{a+b+c}{3}}$$

Media geométrica

$$\boxed{MG=\sqrt{a\times b} \ \vee \ MG=\sqrt[3]{a\times b\times c}}$$

Media armónica

$$\boxed{MH=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \ \vee \ MH=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$$

OBSERVACIÓN

Tanto la MA, MG y MH se definen de manera similar a los anteriores para n números reales positivos.

Teorema

$$\boxed{MA\geq MG\geq MH}$$

Es decir, para los números a; b y c positivos tenemos que

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \vee$$

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

Ejemplo

Para los números $a=8$, $b=12$ y $c=18$ tenemos

$$MA=\frac{8+12+18}{3}=\frac{38}{3}=12{,}666...$$

$$MG=\sqrt[3]{8\times 12\times 18}=\sqrt[3]{8(3\times 4)(2\times 9)}=12$$

$$MH=\frac{3}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}}=\frac{3}{\frac{19}{72}}=11{,}368...$$

Como se puede notar, $MA\geq MG\geq MH$.

Aplicación 8

Si $a+b=6$ con a y b reales positivos, halle la variación de ab.

Resolución

Aquí conviene relacionar la suma y la multiplicación de los números a y b pero $MA\geq MG$.

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

$$\frac{6}{2}\geq\sqrt{ab}>0 \text{ ya que } a \text{ y } b\in\mathbb{R}^{+}$$

$$3\geq\sqrt{ab}>0$$

$$9\geq ab>0$$

$$\therefore \quad (ab)\in\langle 0;9]$$

Problemas Resueltos

Problema N.º 1

Dados los conjuntos

$A=\{x \in \mathbb{Z} / 0 < x < 4\}$

$B=\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 4\}$

calcule la suma de elementos de $A \cap B$.

Resolución

- A tiene elementos enteros tales que

$$\underbrace{0 < x < 4}_{1;\ 2\ y\ 3}$$

es decir

$A=\{1; 2; 3\}$

- B equivale a $[-1; 4]$

es decir, $B=[-1; 4]$ y tiene infinitos elementos.

Luego la intersección entre A y B solo considera a los elementos comunes de ambos, así

$A \cap B=\{1; 2; 3\}$

$\therefore\quad 1+2+3=6$

Problema N.º 2

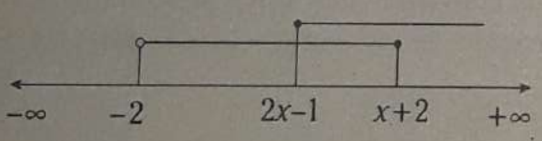
Si los intervalos

$M=\langle -2; x+2]$ y $N=[2x-1; +\infty\rangle$

tienen un solo elemento en común, indique dicho elemento.

Resolución

Ubicamos los intervalos en la recta numérica real teniendo en cuenta que $M \cap N \neq \phi$.



Como los intervalos tienen un solo elemento en común, entonces $2x-1=x+2$.

$\rightarrow\quad x=3$

Luego dicho elemento en común es $x+2=5$

Problema N.º 3

Si $\dfrac{2x+5}{(-3)}$ pertenece al intervalo $[5; 8\rangle$, entonces cuál es el intervalo al cual pertenece $\dfrac{x+1}{x+2}$.

UNMSM-2001

Resolución

Nos piden la variación de

$$\frac{x+1}{x+2}=\frac{x+2-1}{x+2}=\frac{x+2}{x+2}-\frac{1}{x+2}$$

$$\rightarrow\quad \boxed{\frac{x+1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2}}$$

Es conveniente expresarlo así para poder hallar su variación con mayor facilidad a partir del dato, así

$$\frac{2x+5}{-3} \in [5;\ 8\rangle \qquad \left(\begin{array}{l}\text{De aquí despejamos}\\ \text{la variación de } x.\end{array}\right)$$

$$5 \leq \frac{2x+5}{-3} < 8$$
$$\Big) \times(-3)$$
$$-15 \geq 2x+5 > -24$$
$$\Big) -5$$
$$-20 \geq 2x > -29$$
$$\Big) \div 2$$
$$-10 \geq x > -\frac{29}{2}$$

Ahora formamos lo que piden, para ello sumamos 2; así

$$-8 \geq x+2 > -\frac{25}{2}$$
$$\Big) \text{ invirtiendo}$$
$$-\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x+2} < -\frac{2}{25}$$
$$\Big) \times(-1)$$
$$\frac{1}{8} \geq -\frac{1}{x+2} > \frac{2}{25}$$
$$\Big) +(1)$$
$$\frac{9}{8} \geq \underbrace{1-\frac{1}{x+2}}_{\frac{x+1}{x+2}} > \frac{27}{25}$$

$$\therefore\quad \left(\frac{x+1}{x+2}\right) \in \left\langle \frac{27}{25}; \frac{9}{8}\right]$$

Problema N.° 4

Si $a \in \langle h; 2h\rangle$, además $h > 0$, ¿a qué intervalo pertenece la expresión $\dfrac{(a+h)(a-h)}{h^2}$?

Resolución

Del dato $h < a < 2h$; $h > 0$

Ahora

$$h < a < 2h \quad \text{Elevamos al cuadrado}$$

$$h^2 < a^2 < 4h^2 \quad -h^2$$

$$0 < a^2 - h^2 < 3h^2 \quad \div h^2$$

$$0 < \frac{a^2-h^2}{h^2} < 3$$

$$0 < \frac{(a+h)(a-h)}{h^2} < 3$$

$$\therefore \ \frac{(a+h)(a-h)}{h^2} \in \langle 0; 3\rangle$$

Problema N.° 5

Si a y b son dos números reales positivos y $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$, determine el valor de a^2-b^2.

UNMSM 2005-II

Resolución

Por dato $a > 0$ y $b > 0 \ \rightarrow \ a+b > 0$

Además

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \ \rightarrow \ \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \qquad \text{(I)}$$

Pero $\overline{MA} \geq \overline{MG}$, así

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \text{(II)}$$

Ahora de (I) y (II) se tiene

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\rightarrow \ \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$$

$$\rightarrow \ a=b$$

$$\therefore \ a^2-b^2=0$$

Observación

- $\overline{MA}$: media aritmética
- $\overline{MG}$: media geométrica

Problema N.° 6

Dado el intervalo

$$A = \{(1-x) \in \mathbb{R} / (x+2) \notin \langle 1; 2\rangle\}$$

determine el complemento de A.

Resolución

Del dato $(x+2) \notin \langle 1; 2\rangle$ significa que

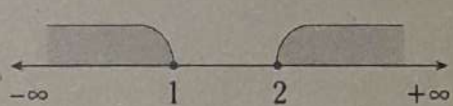
$$\underbrace{x+2 \leq 1}_{} \ \vee \ x+2 \geq 2$$

$$x \leq -1 \ \vee \ x \geq 0$$

Formamos $(1-x)$

$$-x \geq 1 \ \vee \ -x \leq 0$$

$$1-x \geq 2 \ \vee \ 1-x \leq 1$$



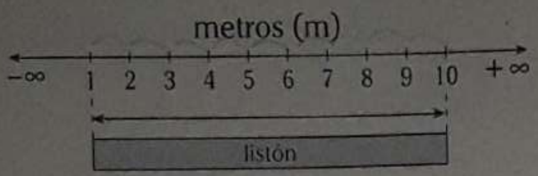
$$\rightarrow \ A=\langle -\infty; 1] \cup [2; +\infty\rangle$$

$$\therefore \ A^C=\langle 1; 2\rangle$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. ¿Cuál es la longitud del listón que se está midiendo?



A) 8 m B) 9 m C) 8,5 m
D) 7,5 m E) 9,5 m

2. Dados los intervalos $A=[-3; 6]$ y $B=[2; 8\rangle$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
   I. En A existen 10 elementos enteros.
   II. La suma de elementos enteros que pertenecen al conjunto B es 27.
   III. 8 no es elemento de B.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVF E) FFF

3. Dados los intervalos
$A=\langle-\infty; 5]$
$B=\langle 5; 15\rangle$
$C=[15; +\infty\rangle$
determine las proposiciones verdaderas.
   I. $A \cup B=\langle-\infty; 15\rangle$
   II. $B \cup C=\langle 5; +\infty\rangle$
   III. $A \cup C=\langle-\infty; 5] \cup [15; +\infty\rangle$

A) solo I B) I ∧ II C) solo III
D) solo II E) todas

4. Sean los intervalos
$M=\langle-1; 6]$
$N=[6; +\infty\rangle$
$Q=\langle 6; +\infty\rangle$
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.
   I. $M \cap Q=\{6\}$
   II. $M \cap N=\phi$
   III. $N \cap Q=\langle 6; +\infty\rangle$

A) VFV B) FFV C) FFF
D) VVV E) FVV

5. Dados los intervalos $S=\langle 3; 8\rangle$ y $T=\langle-5; 7]$, halle la suma de elementos enteros de $T-S$.

A) 0 B) −4 C) −6
D) −7 E) −9

6. Sean los intervalos
$P=\langle-\infty; 6]$ y $Q=\langle 11; +\infty\rangle$.
Determine $P^C \cap Q^C$.

A) $[6; 11]$ B) $[6; 11\rangle$ C) $\langle 6; 11]$
D) $\langle 6; +\infty\rangle$ E) $\langle-\infty; 11\rangle$

7. Sean
$$S=\left\{x \in \mathbb{N} \Big/ \frac{x}{3} \geq 4\right\} \text{ y}$$
$$T=\{x \in \mathbb{N} / x \notin S\}.$$
Calcule la suma de elementos de T.

A) 80 B) 78 C) 72
D) 66 E) 55

8. Halle el valor de verdad de las proposiciones.
   I. Si $m > n > 0 \rightarrow n^2 < mn < m^2$
   II. Si $y < x \rightarrow \frac{x+y}{2} < x$
   III. Si $-2 < 2-x < 1 \rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{x} < 1$

A) VFV
B) VVF
C) VVV
D) FFV
E) VFF

9. Si $1 \leq x \leq 3$, la variación de la expresión $\frac{7-2x}{5}$ es

A) $[1; 5]$. B) $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$. C) $\left[2; \frac{5}{2}\right]$.
D) $\left[1; \frac{5}{2}\right]$. E) $\left[\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right]$.

10. Si $1 < x < 2 \wedge \frac{1}{3} < y < 1$, el mayor valor entero de $(4x+3y)$ es

A) 8. B) 9. C) 10.
D) 11. E) 12.

11. Halle el intervalo al que pertenece $\frac{x+3}{x+1}$ si $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

A) $\langle 1; 2 \rangle$ B) $\left\langle \frac{5}{3}; 2 \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{1}{3}; 2 \right\rangle$
D) $\langle 2; 5 \rangle$ E) $\left\langle \frac{1}{2}; 3 \right\rangle$

12. Si $-5 < x < 2$, el mínimo valor de x^2+3 es

A) 28. B) 27. C) 7.
D) 6. E) 3.

13. Si los números x e y son reales positivos tales que $4x+y=2$, calcule el mayor valor de xy.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 4

14. Halle el mayor valor de K si $x + \frac{25}{x} \geq K$, $\forall x > 0$.

A) $\frac{1}{5}$ B) $\sqrt{5}$ C) 5
D) 10 E) 11

15. Si los números a, b y c son positivos cuyo producto es la unidad, entonces el menor valor de $(a+b+c)$ es

A) 3. B) 6. C) 9.
D) $\frac{1}{3}$. E) $\sqrt{3}$.

NIVEL INTERMEDIO

16. Determine el complemento del siguiente intervalo.

$I=(\langle -\infty; 2] \cup [5; +\infty\rangle \cup \{3\})-\{6\}$

A) $\langle 2; 5 \rangle - \{3\}$
B) $\langle 2; 6] - \{3\}$
C) $\langle 2; 5 \rangle - \{6\}$
D) $\langle 2; 6 \rangle - \{3\}$
E) $\langle 2; 3 \rangle \cup \langle 3; 5 \rangle \cup \{6\}$

17. Dados los conjuntos
$A=\{(x+3) \in \mathbb{R} \,/\, 2 < x \leq 5\}$
$B=\{(2x-1) \in \mathbb{R} \,/\, 1 \leq x \leq 3\}$
halle $B-A$.

A) $[1; 2\rangle$
B) $[1; 2]$
C) $[1; 5\rangle$
D) $[1; 5]$
E) ϕ

18. Dado el conjunto
$M=\{(2x+1) \in \mathbb{R} \,/\, (1-x) \in \langle -1; 1 \rangle\}$,
al escribirlo como intervalo se obtiene

A) $M=\langle -3; 1 \rangle$.
B) $M=\langle 1; 5 \rangle$.
C) $M=\langle -2; 0 \rangle$.
D) $M=\langle 0; 2 \rangle$.
E) $M=\langle -1; 3 \rangle$.

19. Halle el valor de cada una de las siguientes proposiciones.

I. Si $a>0$ y $-b>0$ $\rightarrow$ $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

II. Si $a>0$ y $-b>0$ $\rightarrow$ $b(b-a)>0$

III. Si $a>0$ y $-b<0$ $\rightarrow$ $\left(\frac{a-b}{ab}\right)>0$

IV. $a<b \rightarrow ac>bc$, para todo $a>0; b>0;$ $c>0$

A) VVFF B) VVVF C) FVVF
D) VFVV E) VFFF

UNMSM 2003

20. ¿En qué intervalos se encuentra

$\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}; \forall x>0$?

A) $\langle 0; 1]$ B) $[0; 1]$ C) $\langle 0; 2]$
D) $\langle 2; 4]$ E) $\langle -\infty; 1]$

21. Calcule $A+B$ si

$A \leq \frac{21}{x^2-2x+4} \leq B; \ \forall x \in [-1; 2\rangle.$

A) 3 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

22. Determine el menor elemento del conjunto S si $S=\left\{x+\frac{1}{x+4}+3 \,/\, x>-4\right\}.$

A) 0 B) 1 C) 2
D) $\frac{1}{2}$ E) 4

23. Si $\left(\frac{3x+5}{-2}\right) \in [2; 6\rangle$, ¿a qué intervalo pertenece $\frac{1}{x+2}$?

A) $\left\langle \frac{3}{7}; 1\right]$ B) $\left[-1; \frac{-3}{11}\right\rangle$
C) $\left\langle -\frac{1}{3}; \frac{7}{4}\right]$
D) $\left\langle \frac{5}{9}; 1\right]$ E) $\left\langle \frac{3}{11}; 1\right]$

24. Calcule la longitud de T si

$$T=\left\{\frac{abc}{a^3+b^3+c^3} \,/\, a>0; b>0 \text{ y } c>0\right\}.$$

A) 3 B) 2 C) 1
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

25. Dados los conjuntos

$M=\left\{\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 1\right\}$ y

$N=\left\{\frac{1}{y} \in \mathbb{R} \,/\, y<-1\right\},$

halle $(M \cup N)^C$.

A) $\mathbb{R}-\langle -1; 1\rangle$
B) $\mathbb{R}-\langle -1; 1]$
C) $\langle -1; 1]-\{0\}$
D) $\langle -\infty; -1] \cup \{0\} \cup \langle 1; +\infty\rangle$
E) $\langle -1; 1]$

26. Dados los intervalos no vacíos

$A=[2n-1; n^2\rangle$ y $B=\langle n+1; 9\rangle$,

si $A \subset B$, halle los valores de n.

A) $n \in \langle 2; +\infty\rangle$
B) $n \in \langle 0; 3]$
C) $n \in \langle 2; 3\rangle$
D) $n \in \langle 0; 2]$
E) $n \in \langle 2; 3]$

27. Halle la suma de valores enteros de la expresión f de modo que $f_{(x;\,y)}=\dfrac{2x}{3y}$, además $x\in[2;16\rangle$; $y\in\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right]$.

A) 136 B) 135 C) 130
D) 120 E) 110

28. Dado el siguiente conjunto

$$S=\left\{\frac{a+x}{b+x}\Big/ x>0 \text{ y } a>b>0\right\},$$

indique la alternativa correcta.

A) $S\subset\langle 0;1\rangle$
B) S tiene por lo menos un elemento entero.
C) $S=\left\langle 1;\dfrac{1}{b}\right\rangle$
D) $S\subset\left\langle 1;\dfrac{b}{a}\right\rangle$
E) $S\subset\langle 0;1]$

29. Determine el menor valor de h de modo que

$$h_{(x;\,y)}=\frac{18xy+1}{y}+\frac{36xy+2}{x};$$

si $x>0$; $y>0$.

A) 4 B) 2 C) 12
D) 24 E) 19

30. Si $\sum\limits_{k=1}^{10}x_k=0$; $x_k\in\mathbb{R}$ y $e=2{,}718281...$,

calcule el menor valor de $\sum\limits_{k=1}^{10}e^{x_k}$.

A) 1
B) e
C) 10
D) e^2
E) 5

31. Si a; b; c; d son números reales tales que $a<b<c<d$, entonces necesariamente

A) $d-b>c-a$
B) $d-b<c-a$
C) $d-c>b-a$
D) $d-b>d-c$
E) $d-b>b-a$

UNMSM 2000-I

32. Un número racional de denominador 112 es mayor que $\dfrac{1}{8}$, pero menor que $\dfrac{1}{7}$. Halle la suma de las cifras de su numerador.

A) 15
B) 6
C) 8
D) 14
E) 9

UNMSM 2011-II

Inecuaciones

Capítulo XI

Objetivos

- Aplicar los teoremas sobre desigualdades en el estudio y análisis de las inecuaciones lineales.
- Resolver inecuaciones lineales, cuadráticas y polinomiales de grado superior aplicando el método de los puntos críticos.
- Resolver inecuaciones fraccionarias y otras reducibles a polinomiales.

Las inecuaciones se aplican en diversos campos de la matemática. Uno de ellos es el campo de la optimización, donde se trata de maximizar o minimizar una función con más de una variable en una determinada región R (dominio de la función). Este conjunto R es el conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales que representan las restricciones que tiene esta función.

En este capítulo trataremos de desarrollar aún más nuestra capacidad de análisis, pues la diversidad de problemas que se presentan aquí requieren que el lector sea ordenado, creativo y analítico, y de esa manera lograremos determinar la solución respectiva al problema. En general, las soluciones de las inecuaciones se encuentran en un intervalo o en la unión de intervalos, por lo que aparecen en gran cantidad.

Empezaremos resolviendo inecuaciones lineales utilizando solamente los teoremas sobre las desigualdades estudiadas en el capítulo anterior; luego para la resolución de las inecuaciones cuadráticas haremos uso de la factorización para el cálculo de las raíces (puntos críticos) del polinomio cuadrático o del teorema del trinomio cuadrático positivo. Finalmente, resolveremos otras inecuaciones polinomiales de grado superior a dos e inecuaciones fraccionarias mediante el método de los puntos críticos y algunos otros teoremas complementarios.

Inecuaciones

Las relaciones numéricas que comparan números reales se llaman desigualdades, y las relaciones que comparan expresiones algebraicas se llaman **inecuaciones**. Estas desigualdades pueden ser ciertas o falsas. Esta valoración depende del valor que tome la variable.

Por ejemplo, las siguientes desigualdades
$3x+1 > 7$; $2x-y < 8$; $x-1 < 5$; $2x-1 < x+5$ son inecuaciones.

Nótese que en cada una de estas inecuaciones participa por lo menos una variable, la cual se denominará incógnita.

Ejemplos

1. La inecuación $2x+3 > x+5$ de incógnita x se verifica para valores de x mayores que 2.

2. La inecuación $x^2+1 \leq 0$ nunca se verifica, pues x^2+1 es una cantidad positiva cuyo valor mínimo es 1; es decir, $x^2+1 \geq 1$. Lo cual hace imposible que $x^2+1 \leq 0$.

Solución particular

Es aquel valor (o valores) de la incógnita (o incógnitas) que verifica la inecuación.

Por ejemplo, en la inecuación $2x+1 > x+3$, una solución particular es $x=5$, pues $2(5)+1 > 5+3$ es verdadero.

También en la inecuación $x+y \geq 2$, para $x=1$ e $y=1$ se verifica que $1+1 \geq 2$ es verdadero. Luego, $(1; 1)$ es una solución particular.

Conjunto solución

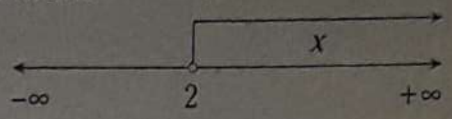
Es aquel conjunto denotado por CS que agrupa a todas las soluciones particulares (si existen) de una inecuación. Si la inecuación no tiene solución, entonces diremos que el CS es el conjunto vacío.

Resolución de una inecuación

Significa hallar su conjunto solución. La resolución se realiza solo empleando pasos equivalentes; por ejemplo, si queremos resolver la inecuación $2x+3 > x+5$, procedemos así

$$\begin{aligned} 2x+3 > x+5 &\leftrightarrow 2x+3+(-3) > x+5+(-3) \\ &\leftrightarrow 2x > x+2 \\ &\leftrightarrow 2x+(-x) > x+(-x)+2 \\ &\leftrightarrow x > 2 \end{aligned}$$

Gráficamente



Luego

$$CS=\{x \in \mathbb{R}/x > 2\}=\langle 2; +\infty\rangle$$

Inecuaciones polinomiales

Inecuación lineal

Una inecuación lineal de incógnita x es aquella cuya forma general es cualquiera de las siguientes:

$$\boxed{ax+b \leq 0 \quad \vee \quad ax+b < 0}$$

$$\boxed{ax+b \geq 0 \quad \vee \quad ax+b > 0}$$

donde a y b son reales; además $a \neq 0$.

Aplicación 1

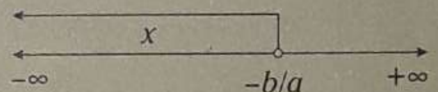
Resuelva la inecuación lineal

$ax+b \geq 0$; $a < 0$.

Resolución

$$\begin{aligned} ax+b \geq 0 &\leftrightarrow ax+b+(-b) \geq 0+(-b) \\ &\leftrightarrow ax \geq -b;\ \text{con } a < 0 \\ &\leftrightarrow \frac{1}{a}\cdot ax \leq \frac{1}{a}(-b);\ \text{pues } \frac{1}{a} < 0 \\ &\leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Gráficamente



Luego

$$CS=\left\{x \in \mathbb{R}\Big/ x \leq -\frac{b}{a}\right\}=\left\langle -\infty; -\frac{b}{a}\right]$$

Aplicación 2

Resuelva la inecuación

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}>2.$$

Resolución

Efectuamos en la inecuación

$$\frac{3x-3+2x}{6}>2$$

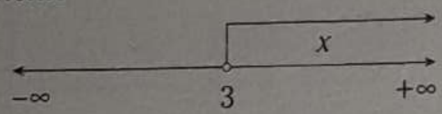
$$5x-3>12$$

$$5x>15$$

$$\rightarrow\quad x>\frac{15}{5}$$

$$x>3$$

Gráficamente



Luego

$$CS=\{x\in\mathbb{R}\,/x>3\}=\langle 3;+\infty\rangle$$

Aplicación 3

Resuelva la inecuación lineal

$$\frac{3x-2}{a-1}<4x+5;\ a<1.$$

Resolución

Sea $b=a-1<0$, luego escribimos la inecuación así

$$\frac{3x-2}{b}<4x+5;\ b<0$$

$$\rightarrow\quad 3x-2<4bx+5b\ \rightarrow\ 3x-4bx<2+5b$$

$$\rightarrow\quad (3-4b)x<2+5b$$

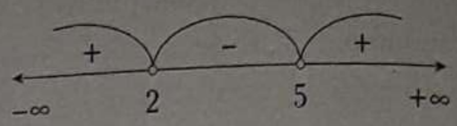
$$\rightarrow\quad x>\frac{2+5b}{(3-4b)};\text{ como } b=a-1\text{, entonces}$$

$$\frac{2+5b}{(3-4b)}=\frac{2+5(a-1)}{3-4(a-1)}=\frac{5a-3}{7-4a}$$

$$\therefore\quad CS=\left\langle\frac{5a-3}{7-4a};+\infty\right\rangle$$

MÉTODO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

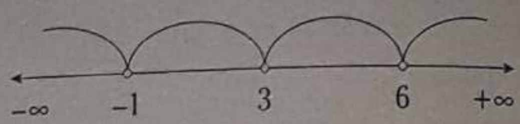
Es utilizado para determinar los signos de los factores lineales de un polinomio en una variable y grado $n\geq 2$, factorizado sobre el conjunto $\mathbb{R}$, y analizar la variación.



Ejemplo

Dado el polinomio $P_{(x)}=(x-3)(x+1)(x-6)$, sus raíces son −1; 3 y 6.

Ubiquemos estas raíces en la recta real

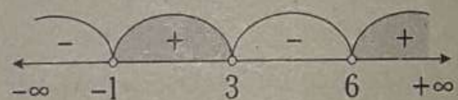


Las raíces del polinomio particionan a la recta $\mathbb{R}$ en 4 zonas (intervalos).

Analicemos los signos de cada factor y del propio polinomio.

Zona \ Factor	$x-3$	$x+1$	$x-6$	$P_{(x)}$
$x<-1$	−	−	−	−
$-1<x<3$	−	+	−	+
$3<x<6$	+	+	−	−
$x>6$	+	+	+	+

La variación de signos del polinomio se muestra en la recta:



Nótese que

$$P_{(x)}=(x-3)(x+1)(x-6)>0$$

$$\leftrightarrow\quad CS=\langle -1;3\rangle\cup\langle 6;+\infty\rangle$$

$$P_{(x)}=(x-3)(x+1)(x-6)\leq 0$$

$$\leftrightarrow\quad CS=\langle -\infty;-1]\cup[3;6]$$

NOTA

A las raíces del polinomio se les llama puntos críticos; además, al procedimiento anterior que resuelve este tipo de inecuaciones se le llama método de los puntos críticos.

Para que la resolución sea más práctica y rápida hay que tener en cuenta lo siguiente:

- El coeficiente principal del polinomio $P_{(x)}$ debe ser positivo.
- Ubicamos sus raíces en la recta numérica y colocamos los signos para cada zona (intervalo) que estas determinan, empezando de derecha a izquierda con el signo + luego – en forma intercalada.
- Finalmente indicamos el CS de acuerdo al sentido del símbolo de la desigualdad final.

INECUACIÓN CUADRÁTICA

Son aquellas inecuaciones de la forma

$$\boxed{P_{(x)}=ax^2+bx+c \gtrless 0}$$

donde a; b y c son reales $\wedge\ a \neq 0$.

Resolución de una inecuación cuadrática

Para resolver una inecuación cuadrática procedemos así:

1. Consideramos el coeficiente principal $a > 0$. Caso contrario, multiplicamos por -1.
2. Intentamos factorizar el polinomio $P_{(x)}$. Luego
   - Si $P_{(x)}$ es factorizable sobre $\mathbb{R}$, tendremos dos factores lineales, a los cuales les aplicaremos el método de los puntos críticos.
   - Si $P_{(x)}$ no es fácil de factorizar o no es factorizable, optamos por la técnica de completar cuadrados.
3. Analizamos la inecuación para indicar el conjunto solución.

Aplicación 4

Resuelva la inecuación cuadrática

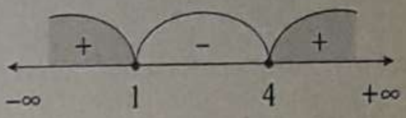
$x^2-5x+4 \geq 0.$

Resolución

Nótese que el coeficiente principal del polinomio es positivo. Luego lo factorizamos por aspa simple y tenemos

$$(x-4)(x-1) \geq 0.$$

Los puntos críticos son 1 y 4 (valores que anulan cada factor). Ubicamos estos puntos en la recta numérica y resolvemos por el método de los puntos críticos.



NOTA

Los signos se colocan alternadamente de derecha a izquierda empezando con el signo +, luego tomamos la zona positiva, pues el símbolo en la inecuación es $\geq$.

Finalmente, $CS=\langle -\infty; 1] \cup [4; +\infty\rangle$.

Aplicación 5

Resuelva la inecuación cuadrática

$x^2-4x+1 <0.$

Resolución

Factorizamos el polinomio completando cuadrados. Así

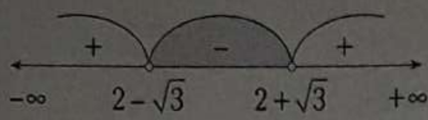
$$x^2-4x+4-3 < 0$$

$$\rightarrow\ (x-2)^2-\sqrt{3}^2 < 0$$

$$\rightarrow\ \left(x-2+\sqrt{3}\right)\left(x-2-\sqrt{3}\right) < 0$$

Resolvemos por el método de puntos críticos

$$x_1 = 2-\sqrt{3};\ x_2 = 2+\sqrt{3}$$



$\therefore\ \ \mathrm{CS} = \left\langle 2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\right\rangle$

Aplicación 6

Resuelva la inecuación cuadrática

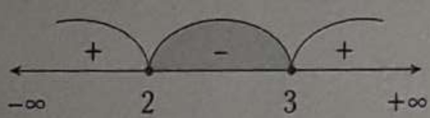
$P_{(x)}=-x^2+5x-6 \geq 0.$

Resolución

Nótese que el coeficiente principal de $P_{(x)}$ es negativo, luego multiplicamos por -1. Así

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

Los puntos críticos son 2 y 3. Aplicamos el método de los puntos críticos.



$\therefore\ \ \mathrm{CS}=[2;\ 3]$

Aplicación 7

Resuelva la inecuación cuadrática

$P_{(x)}=x^2-4x+4 \geq 0.$

Resolución

Nótese que $P_{(x)}=(x-2)^2$ nunca es negativo. Luego la inecuación $P_{(x)}=x^2-4x+4 \geq 0$ se verifica $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Luego, $\mathrm{CS}=\mathbb{R}$.

Es decir

$$P_{(x)}=(x-2)^2 \geq 0 \ \leftrightarrow\ \mathrm{CS}=\mathbb{R}$$

Nótese que la igualdad se verifica para $x=2$.

Además

- $P_{(x)}=(x-2)^2 > 0 \ \leftrightarrow\ \mathrm{CS}=\mathbb{R}-\{2\}$
- $P_{(x)}=(x-2)^2 < 0 \ \leftrightarrow\ \mathrm{CS}=\phi$
- $P_{(x)}= (x-2)^2 \leq 0 \ \leftrightarrow\ \mathrm{CS}=\{2\}$ (I)

Nótese que en (I) solo se verifica la igualdad.

NOTA

Un polinomio de la forma $P_{(x)}=ax^2 + bx+c$...

1. Es factorizable sobre $\mathbb{R}$ si su discriminante es no negativo; es decir, $\Delta = b^2-4ac \geq 0$.
2. No es factorizable sobre $\mathbb{R}$ si su discriminante es negativo; es decir, $\Delta=b^2-4ac < 0$.
3. Es un cuadrado perfecto si y solo si $\Delta=b^2-4ac=0 \wedge a > 0 \wedge c > 0$.

Aplicación 8

La inecuación cuadrática en x

$ax^2-3x+1 \leq 0$ con a y b reales tiene $\mathrm{CS}=\{b\}$.

Calcule el valor de ab.

Resolución

La inecuación tiene conjunto solución unitario, luego debe cumplirse que $\Delta=0 \wedge a > 0$.

Es decir

$$\Delta=(-3)^2-4(a)(1)=0 \wedge a > 0$$

$$\rightarrow\ 9-4a=0 \ \rightarrow\ 9=4a \ \rightarrow\ a=\frac{9}{4}>0$$

Luego la inecuación es

$$\frac{9}{4}x^2-3x+1\leq 0$$

Equivalentemente

$$9x^2-12x+4 \leq 0$$

Factorizamos

$$(3x-2)^2 \leq 0 \ \text{ de donde } \ x=\frac{2}{3} \ \rightarrow\ b=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \ ab=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$$

Teorema del trinomio positivo

Dado el polinomio cuadrático definido sobre $\mathbb{R}$ $P_{(x)}=ax^2+bx+c$, se cumple que

$$P_{(x)} > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R} \ \leftrightarrow\ a > 0 \wedge \Delta < 0.$$

Ejemplos

1. El polinomio $P_{(x)}=x^2-x+1$ siempre es positivo, pues $\Delta=1^2-4(1)\cdot(1)=-3<0$ y su coeficiente principal $a=1>0$. Luego la inecuación cuadrática $P_{(x)}=x^2-x+1>0$ tiene $CS=\mathbb{R}$.

   En efecto, completando cuadrados podemos escribir el polinomio en la forma

   $P_{(x)}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, lo cual muestra que el trinomio siempre es positivo.

2. El polinomio $Q_{(x)}=2x^2+4x+7$ siempre es positivo, pues $\Delta=4^2-4(2)(7)<0$ y su coeficiente principal positivo $a=2>0$. Luego la inecuación $Q_{(x)}=2x^2+4x+7<0$ es absurda; por lo tanto, $CS=\phi$.

   Nótese que el polinomio $Q_{(x)}=2x^2+4x+7$ puede escribirse así

   $Q_{(x)}=2x^2+4x+7=x^2+4x+4+3$

   Luego la inecuación

   $$Q_{(x)}=\underbrace{(x+2)^2+3}_{\text{no negativo}}<0$$

   $\therefore\ CS=\phi$

Corolario (trinomio no negativo)

Dado el polinomio cuadrático definido sobre $\mathbb{R}$

$P_{(x)}=ax^2+bx+c$

si $P_{(x)}\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \rightarrow\ a>0\wedge\Delta\leq 0$

Aplicación 9

Calcule el menor valor de b para que el polinomio $P_{(x)}=2x^2+3x+b$ sea no negativo para cualquier valor real de x.

Resolución

Por dato

$P_{(x)}\geq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\rightarrow\ 2x^2+3x+b\geq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ahora por corolario se debe cumplir

$a=2>0$ y $\Delta\leq 0$

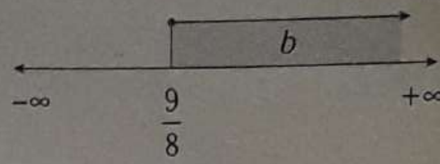
Luego

$\Delta=3^2-4(2)(b)\leq 0$

$\rightarrow\ 9-8b\leq 0$

$\rightarrow\ 9\leq 8b\ \rightarrow\ 9/8\leq b$

Gráficamente



Por lo tanto, el menor valor de b es 9/8.

Inecuación polinomial de grado superior

Consideremos el polinomio de grado $n\geq 3$.

$P_{(x)}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \gtreqless 0;\ a_0\neq 0.$

Además $\{a_0;\ a_1;\ \ldots;\ a_{n-1};\ a_n\}\subset\mathbb{R}$.

Resolución de una inecuación polinomial de grado superior

Para resolver una inecuación polinomial de grado superior a dos procedemos así:

1. Consideramos el coeficiente principal $a>0$. Caso contrario, multiplicamos por -1.
2. Factorizamos el polinomio $P_{(x)}$ sobre $\mathbb{R}$, y obtendremos factores lineales y factores positivos. Los factores positivos se pueden cancelar (no alteran el conjunto solución).
3. A los factores lineales restantes les aplicamos el método de los puntos críticos y resolvemos la inecuación.

Aplicación 10

Resuelva la inecuación polinomial

$P_{(x)}=x^5-x<0.$

Resolución

Nótese que el polinomio tiene coeficiente principal positivo $a=1$, luego resolvemos así

Factorizamos $P_{(x)}=x(x^4-1)<0$

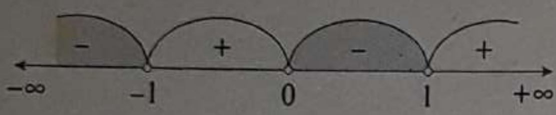
$\rightarrow\quad P_{(x)}=x(x^2-1)(x^2+1)<0$

$\rightarrow\quad P_{(x)}=x(x-1)(x+1)(x^2+1)<0$

Cancelamos el factor positivo (x^2+1)

$\rightarrow\quad P_{(x)}=x(x-1)(x+1)<0$

Por el método de los puntos críticos -1; 0; 1.



$\therefore\quad CS=\langle-\infty;\,1\rangle\cup\langle 0\,;\,1\rangle$

A continuación daremos algunos teoremas que nos ayudarán a resolver inecuaciones polinomiales de grado superior.

Teoremas

Sean a un real y n un número natural. Si $P_{(x)}$ es un polinomio sobre $\mathbb{R}$, entonces

1. $\left[P_{(x)}\right]^{2n}\geq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}$
2. $(x-a)^{2n}\cdot P_{(x)}\geq 0\ \leftrightarrow\ P_{(x)}\geq 0\vee x=a$
3. $(x-a)^{2n}\cdot P_{(x)}>0\ \leftrightarrow\ P_{(x)}>0\wedge x\neq a$
4. $(x-a)^{2n}\cdot P_{(x)}\leq 0\ \leftrightarrow\ P_{(x)}\leq 0\vee x=a$
5. $(x-a)^{2n}\cdot P_{(x)}<0\ \leftrightarrow\ P_{(x)}<0\wedge x\neq a$
6. $(x-a)^{2n+1}\geq 0\ \leftrightarrow\ (x-a)\geq 0$
7. $(x-a)^{2n+1}>0\ \leftrightarrow\ (x-a)>0$
8. $(x-a)^{2n+1}\leq 0\ \leftrightarrow\ (x-a)\leq 0$
9. $(x-a)^{2n+1}<0\ \leftrightarrow\ (x-a)<0$

Aplicación 11

Resuelva la inecuación polinomial $(x-1)^4(x-3)(x+2)^3<0$.

Resolución

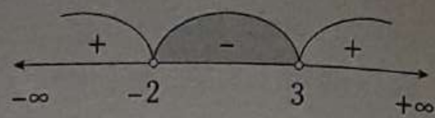
Aplicamos el teorema 5

$(x-3)(x+2)^3<0\ \wedge\ x\neq 1$

Ahora aplicamos el teorema 9

$(x-3)(x+2)<0\wedge x\neq 1$

Los puntos críticos son -2 y 3.



Nótese que el $CS=\langle-2;\,3\rangle$, pero ¡cuidado! El factor $(x-1)^4$, cancelado, tiene a $x=1$ su raíz, y reemplazado en la inecuación original, tendríamos el absurdo $0<0$, esto quiere decir que $x=1$ no es solución de la inecuación.

$\therefore\quad CS=\langle-2;\,3\rangle-\{1\}$

Aplicación 12

Resuelva $(x-2)(5-x)(x^2+x+1)^7\geq 0$

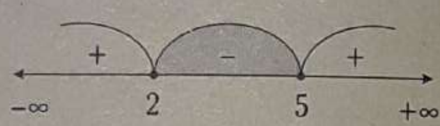
Resolución

Simplificamos el factor $(x^2+x+1)^7$, pues es positivo, y tenemos $(x-2)(5-x)\geq 0$.

Ahora, factorizamos el signo menos

$(x-2)(x-5)\leq 0$.

Por el método de los puntos críticos 2; 5.



$\therefore\quad CS=[2;\,5]$

Expresiones fraccionarias

Dados dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ con $Q_{(x)}$ no constante, la división indicada $P_{(x)}/Q_{(x)}$ es una expresión fraccionaria. Como la división por cero no está definida, entonces el denominador no puede ser cero. Luego $f_{(x)}=\dfrac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ está definida en el conjunto

$S=\{x\in\mathbb{R}/Q_{(x)}\neq 0\}$.

Por ejemplo, la expresión fraccionaria

$f_{(x)}=\dfrac{2x-1}{(x+2)(x-4)}$ está definida $\forall\,x\in\mathbb{R}-\{-2;\,4\}$.

INECUACIONES FRACCIONARIAS

Son aquellas inecuaciones que se reducen a la siguiente forma general:

$$\boxed{f_{(x)}=\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}\geq 0;\quad {}^{o}[Q_{(x)}]\geq 1}$$

Aplicación 13

P y Q son polinomios, además ${}^{o}[Q_{(x)}]$ indica grado de $Q_{(x)}$.

Resolución

Para resolver la inecuación fraccionaria $\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}>0$, procedemos así

como $Q_{(x)}\neq 0 \;\rightarrow\; Q_{(x)}^2>0$.

Multiplicamos ambos lados de la inecuación $\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}>0$ por $Q_{(x)}^2$.

$$\rightarrow\quad Q_{(x)}^2\cdot\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}>Q_{(x)}^2\cdot 0$$

Nótese que el sentido de la desigualdad no se altera. Simplificamos y obtenemos la inecuación polinomial $Q_{(x)}\cdot P_{(x)}>0\wedge Q_{(x)}\neq 0$.

En resumen, una inecuación fraccionaria de la forma

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}>0\quad\text{con}\quad Q_{(x)}\neq 0$$

es equivalente a una inecuación polinomial $Q_{(x)}\cdot P_{(x)}\gtrless 0$ con $Q_{(x)}\neq 0$.

Aplicación 14

Resuelva la inecuación fraccionaria

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}\leq 0.$$

Resolución

Factorizamos el numerador y el denominador, y obtenemos

$$\frac{(x-2)(x-1)}{(x-5)(x-1)}\leq 0.$$

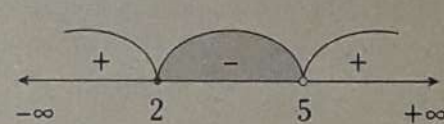
Luego la fracción está definida para todos los $x\in\mathbb{R}$, excepto para 5 y 1; es decir, $S=\mathbb{R}-\{5;\,1\}$.

Procedemos a simplificar la expresión

$$\frac{x-2}{x-5}\leq 0\wedge x\neq 1 \text{ y } 5.$$

Ahora transformamos la inecuación fraccionaria a una polinomial ubicando el denominador en forma práctica al lado del numerador, de modo que esté multiplicando $(x-5)\cdot(x-2)\leq 0$.

Esta inecuación se resuelve con base en el método de los puntos críticos para una inecuación cuadrática, teniendo en cuenta los valores descartados.



$\therefore\quad CS=[2;\,5\rangle$

Problemas Resueltos

Problema N.º 1

Resuelva la siguiente inecuación en x

$$x-1<\frac{b}{a}x-\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \text{ si } a<b<0.$$

Resolución

Se trata de despejar x, así

$$x-\frac{b}{a}x<1-\frac{b}{a}$$

$$\underbrace{\left(1-\frac{b}{a}\right)}_{(+)}x<\underbrace{1-\frac{b}{a}}_{(+)}$$

> **Nota**
>
> El signo de $\left(1-\frac{b}{a}\right)$ se deduce del dato, así
>
> Si
>
> $$\underbrace{a}_{(-)}<\underbrace{b}_{(-)}<0 \;\rightarrow\; a<b$$
>
> $$\rightarrow\; 1>\frac{b}{a}$$
>
> $$\rightarrow\; \underbrace{1-\frac{b}{a}}_{(+)}>0$$
>
> Recuerde que si se multiplica o divide a ambos lados (miembros) de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no cambia si lo que multiplicamos tiene signo positivo, de lo contrario cambia.

Luego de despejar x se tiene $x<1$.

$\therefore\quad CS=\langle-\infty;1\rangle$

Problema N.º 2

Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases}9x-27>0\\ x^2-7x+10\leq 0.\end{cases}$$

Resolución

En este caso se trata de encontrar todos los valores de x que verifican ambas inecuaciones del sistema.

- De la primera inecuación tenemos

  $9x>27 \;\rightarrow\; x>3$ (I)

- De la segunda inecuación tenemos .

  $x^2-7x+10\leq 0$

  $$\begin{array}{ll} x & -5\\ x & -2\end{array}$$

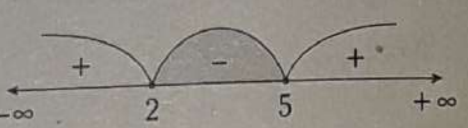
  $(x-5)(x-2)\leq 0$

  Ahora hallamos los puntos críticos o raíces de la cuadrática.

  $x-5=0 \;\rightarrow\; x=5$

  $x-2=0 \;\rightarrow\; x=2$

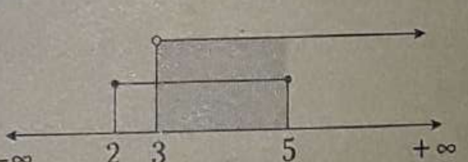
  Luego en la recta numérica.



  $2\leq x\leq 5$ (II)

Finalmente

$CS=(I)\cap(II)=\langle 3;5]$



Problema N.º 3

Si $[a;b]$ representa el conjunto solución de la inecuación $3(x^2+x)\leq(x+2)^2$, calcule el valor de a^2+b^2.

Resolución

En la inecuación se tiene

$$3x^2+3x\leq x^2+4x+4$$

$$2x^2-x-4\leq 0$$

Se nota que no se puede factorizar por aspa simple, pero como $[a; b]$ es el conjunto solución, a y b son raíces de la cuadrática, luego por teorema de cardano

$a+b=1/2$ (I)

$a \cdot b=-4/2=-2$ (II)

Ahora elevamos al cuadrado (I)

$$(a+b)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$a^2+2\underbrace{ab}_{-2}+b^2=\frac{1}{4}$$

$$a^2-4+b^2=\frac{1}{4} \rightarrow a^2+b^2=\frac{1}{4}+4$$

$$\therefore \; a^2+b^2=\frac{17}{4}$$

Problema N.° 4

Indique el número de soluciones enteras positivas de la inecuación

$x^3-7x^2+10x+20 < (x+3)(x+2)$.

Resolución

Como es una inecuación polinomial, se debe tratar de factorizarla para luego aplicar el criterio de los puntos críticos, así

$$x^3-7x^2+10x+20 < x^2+5x+6$$

$$x^3-8x^2+5x+14 < 0$$

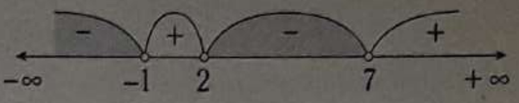
Se nota que $x=-1$ es una raíz de la cúbica, luego

	1	−8	5	14
$x=-1$	↓	−1	9	−14
	1	−9	14	0

$$(x+1)(x^2-9x+14) < 0$$

$$\begin{array}{lr} x & -2 \\ x & -7 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)(x-7) < 0$$



$CS=\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 2; 7\rangle$

Pero si $x \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow x \in \{3; 4; 5; 6\}$

Por lo tanto, hay 4 soluciones enteras y positivas.

Problema N.° 5

Halle la suma de soluciones enteras de la inecuación

$$\frac{4}{x-4}+\frac{7}{x-7}<-2.$$

Resolución

1.^{er} paso

$x \neq 4$ y $x \neq 7$ estas condiciones garantizan la existencia de las fracciones.

2.° paso

En la inecuación

$$\frac{4}{x-4}+\frac{7}{x-7}+\overset{1+1}{2}<0$$

$$\frac{4}{x-4}+1+\frac{7}{x-7}+1<0$$

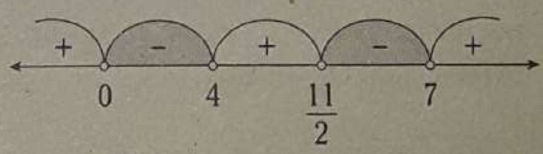
$$\frac{x}{x-4}+\frac{x}{x-7}<0$$

$$x\left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-7}\right)<0$$

$$x\left(\frac{x-7+x-4}{(x-4)(x-7)}\right)<0$$

$$x(2x-11)(x-4)(x-7) < 0$$

Aplicando el criterio de los puntos críticos se tiene



$$CS=\langle 0; 4\rangle \cup \left\langle \frac{11}{2}; 7\right\rangle$$

Si $x \in \mathbb{Z} \rightarrow x \in \{1; 2; 3; 6\}$

$\therefore \; 1+2+3+6=12$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Resuelva la inecuación lineal

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\leq\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$$

e indique la menor solución.

A) -5 B) -4 C) $-3/2$
D) $-1/2$ E) $-2/3$

2. Determine el cardinal del conjunto S.

$$S=\left\{x\in\mathbb{Z}^+ \Big/ \frac{2x+1}{3}+\frac{x-3}{2}<x\right\}$$

A) 7 B) 6 C) 5
D) 9 E) 3

3. Calcule la suma de los elementos del conjunto M.

$$M=\left\{x\in\mathbb{N} \Big/ \frac{7}{2}\leq 2x-1<19\right\}$$

A) 36 B) 39 C) 42
D) 45 E) 52

4. Resuelva la inecuación lineal

$$\sqrt{3}x<\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2}x$$

e indique la mayor solución entera.

A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

5. Sean S_1 y S_2 conjuntos soluciones de las inecuaciones $3x^2+x-2\geq 0 \wedge 2+x-6x^2\geq 0$, respectivamente. Halle $S_1\cap S_2$.

A) $\left[\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$ B) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ C) $\left[-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right]$
D) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ E) ϕ

6. Indique cuántos enteros verifican la inecuación cuadrática $x(x-11)<-30$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) más de 3

7. Calcule la suma de soluciones enteras de la inecuación $(x-3)(4-x)>-x$.

A) 20 B) 18 C) 16
D) 9 E) 12

8. Si la inecuación cuadrática $(2x-7)(6-4x)\leq 0$ tiene conjunto solución $S=\mathbb{R}-\langle m;n\rangle$, calcule el valor de $m+n$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 3 E) 15/2

9. Si la inecuación cuadrática $x^2-ax+b\leq 0$ tiene $CS=[-1;5]$, calcule el valor de $a-b$.

A) -1 B) 1 C) 5
D) 7 E) 9

10. Respecto al conjunto solución S de la inecuación $a^2x^2+ax+1>0$; $a\in\mathbb{R}$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. $S=\mathbb{R}^+$
II. $S=\mathbb{R}-\{a\}$
III. Si $a\neq 0$, entonces $S=\mathbb{R}$.

A) VFV B) VFF C) FVF
D) FFV E) FFF

11. Resuelva la inecuación cuadrática $x^2-2ax+2a-1<0$; $a<0$.

A) $S=\mathbb{R}$
B) $S=\langle a-1;1\rangle$
C) $S=\langle -1;1-a\rangle$
D) $S=\langle a-1;-1\rangle$
E) $S=\langle 2a-1;1\rangle$

12. Resuelva la inecuación polinomial
$x^5+x^3+2x<0$.

A) $x \in \mathbb{R}$
B) $x<0$
C) $x \leq 0$
D) $x<1$
E) $-1<x<0$

13. Indique cuántas soluciones enteras tiene la inecuación polinomial $x^2(x+2)^3(x-3)^5<0$.

A) 6 B) 5 C) 3
D) 2 E) 1

14. Resuelva la inecuación polinomial
$(x-1)^6(x-2)^9(x^2+x+1)<0$.

A) $S=\langle -\infty; 1\rangle$
B) $S=\langle -\infty; 2\rangle$
C) $S=\langle 2; +\infty\rangle$
D) $S=\langle 1; +\infty\rangle-\{2\}$
E) $S=\langle -\infty; 2\rangle-\{1\}$

15. Resuelva la inecuación polinomial
$(x-1)(2x^2+1) \leq (x-1)(x^2+2)$.

A) $S=\langle -\infty; 1]$
B) $S=\langle -\infty; -1]$
C) $S=\mathbb{R}^-$
D) $S=\langle -1; 1\rangle$
E) $S=\langle -\infty; -1] \cup \{1\}$

16. Determine el conjunto solución de la inecuación fraccionaria
$\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x}>-2$.

A) $CS=\phi$
B) $CS=\mathbb{R}-\{0\}$
C) $CS=\mathbb{R}^+$
D) $CS=\mathbb{R}^-$
E) $CS=\mathbb{R}$

17. Resuelva la inecuación fraccionaria
$\frac{2x}{x^2+1} \leq -1$.

A) $CS=\{-1\}$ B) $CS=\phi$
C) $CS=\mathbb{R}$
D) $CS=[-1; 1]$ E) $CS=\{-1; 1\}$

18. Halle el complemento del conjunto solución S de la inecuación fraccionaria
$\frac{(x^3-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$.

A) $S'=\left\langle -1; \frac{1}{2}\right\rangle$

B) $S'=\left\langle -\frac{1}{2}; 1\right\rangle$

C) $S'=\phi$

D) $S'=\left\langle -1; \frac{1}{2}\right]$

E) $S'=\left[-1; \frac{1}{2}\right\rangle \cup \{1\}$

19. Respecto al conjunto solución S de la inecuación fraccionaria $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x} \geq 1$, indique lo correcto.

A) $S \subset \mathbb{R}^+$
B) $S=\langle -1; 1\rangle$
C) $S=\langle 0; 1]$
D) $S \subset \mathbb{R}_0^-$
E) $S \subset [-1; +\infty\rangle$

20. Si S es el conjunto solución de la inecuación fraccionaria $\frac{x}{x-3}<4$, entonces es cierto que

A) $S \subset \mathbb{R}^-$.
B) $S=\langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$.
C) $S'=[3; 4]$.
D) $S=\phi$.
E) $S'=\langle 3; 4\rangle$.

NIVEL INTERMEDIO

21. Dados los conjuntos
$R=\{x\in\mathbb{R}/-7\leq -2x+1<3\}$ y
$S=\{y\in\mathbb{R}/2y-1<y+4\leq 2y+4\}$,
halle $S-R$.

A) $\langle 4; 5\rangle$
B) $[0; 4]$
C) $\langle -1; 0\rangle\cup\langle 4; 5\rangle$
D) $\langle -1; 0\rangle$
E) $[4; 5\rangle$

22. Si $a+b=1$, resuelva la inecuación
$a(ax-1)<b(bx-1)$ de incógnita x.
Considere que $a<b$.

A) $CS=\langle -\infty; 1\rangle$
B) $CS=\langle -\infty; a-b\rangle$
C) $CS=\langle 1; +\infty\rangle$
D) $CS=\langle -\infty; 0\rangle$
E) $CS=\langle a-b; +\infty\rangle$

23. Un padre dispone de 320 nuevos soles para ir al estadio con sus hijos. Si compra entradas de S/.50, le falta dinero, y si compra las de S/.40, le sobra dinero. ¿Cuántos hijos tiene?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

24. Respecto al conjunto solución S de la inecuación de incógnita x

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x+b}{a}<0; -1<a<b<0,$$

indique lo correcto.

A) $S\subset\langle -1; 0\rangle$
B) $S=\langle -1; 0\rangle$
C) $S=\langle a-b; 0\rangle$
D) $S=\langle b-a; +\infty\rangle$
E) $S\subset\langle -1; +\infty\rangle$

25. Calcule la suma de las soluciones enteras positivas de la inecuación lineal

$$\frac{x-34}{13}+\frac{x-26}{17}+\frac{x-11}{49}\leq 5.$$

A) 1797 B) 1830 C) 1872
D) 1930 E) 1954

26. Indique un intervalo solución de la inecuación cuadrática
$x^2+2\sqrt{2}x+1\leq 0.$

A) $\langle\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1\rangle$
B) $\langle -1; 0\rangle$
C) $\langle -\sqrt{2}+1; 0\rangle$
D) $\left\langle -2; -\frac{1}{2}\right\rangle$
E) $\mathbb{R}-[-\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}]$

27. Si la ecuación cuadrática de incógnita x
$(m+5)x^2+3mx-4(m-5)=0$, $m\in\mathbb{Z}$, no tiene raíces reales, calcule el menor valor de m.

A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

28. Sea $x^2+(k-1)x+k-2=0$ una ecuación de raíces r y s. Halle el intervalo al cual pertenece el parámetro k si se sabe que $r^2s+rs^2\geq -6$.

A) $k\in[1; 4]$
B) $k\in\langle 1; 4\rangle$
C) $k\in[-1; 1]$
D) $k\in[-4; 1]$
E) $k\in[-1; 4]$

29. Halle el conjunto de valores de λ que hacen que la ecuación cuadrática tenga raíces reales $x^2+3\lambda+1=(\lambda+2)x$.

A) $\lambda \in \mathbb{R}^+$
B) $\lambda \in \langle -1; 1\rangle$
C) $\lambda \in \mathbb{R}^-$
D) $\lambda \in \mathbb{R}-\langle 0; 8\rangle$
E) $\lambda \in [0; 8]$

30. Luego de resolver la inecuación cuadrática $x^2+(m+n)x+\dfrac{mn}{2}<0$ se obtiene $CS=\langle -6; -1\rangle$. Calcule el valor de m^3+n^3.

A) 64
B) 35
C) 91
D) 25
E) 102

31. Si la inecuación cuadrática en x $(k+2)x^2+(k-1)x+k \geq 6$ tiene $CS=\mathbb{R}$, calcule el menor valor entero que admite el parámetro k.

A) 7
B) 3
C) −1
D) −2
E) 2

32. Determine el conjunto de valores de m que hacen que el polinomio $P_{(x)}=3x^2+mx+m^2+6m$ tenga valores negativos en $x=0$ y $x=2$.

A) $m \in \langle -6; 0\rangle$
B) $m \in \langle -6; -2\rangle$
C) $m \in \langle -\infty; 0\rangle$
D) $m \in \langle 0; 6\rangle$
E) $m \in \langle -6; -2\rangle \cup \langle 2; 6\rangle$

33. Resuelva la inecuación polinomial $(x^2+3x-4)^2<36+(x^2+3x+2)^2$ e indique el complemento de su conjunto solución S.

A) $S'=\langle 1; 2\rangle$
B) $S'=[-1; 2]$
C) $S'=\langle -3; 2\rangle$
D) $S'=[1; 2]$
E) $S'=[-2; -1]$

34. Dada la inecuación polinomial $x^3-10x^2+31x-30 \geq 0$, indique el intervalo que no es solución.

A) $\langle 2; 3\rangle$
B) $\langle 5; +\infty\rangle$
C) $[5; 10\rangle$
D) $\langle 3; 5\rangle$
E) $\langle 10; +\infty\rangle$

35. Respecto al conjunto solución S de la inecuación polinomial $x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4<0$, indique lo correcto.

A) $S=[1; +\infty\rangle-\{2\}$
B) $S=\langle -\infty; 1\rangle$
C) $S=\phi$
D) $S=\langle -\infty; -1\rangle-\{-2\}$
E) $S=\langle -\infty; 1\rangle-\{-2\}$

36. Si el conjunto

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \middle/ \frac{x^2-\alpha x+1}{x^2+2}\leq 5\right\}$$

es equivalente al conjunto $\mathbb{R}$, calcule el mayor valor de α.

A) 12
B) 9
C) 6
D) 3
E) 1

37. Indique cuántas soluciones enteras tiene la inecuación fraccionaria $\dfrac{2}{x^2-x}\geq 1$.

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) más de 3

38. Resuelva la inecuación fraccionaria

$$\frac{3x}{3x^2+2x-5} \leq \frac{x}{x^2-2x+1}$$

e indique el complemento del conjunto solución S.

A) $S'=\langle -1; 2\rangle$
B) $S'=\langle 0; 5/3\rangle$
C) $S'=\langle -1; 1\rangle$
D) $S'=[-5/3; 0\rangle \cup \{1\}$
E) $S'=[-1; 0\rangle \cup \{1\}$

39. Si la inecuación fraccionaria

$$\frac{x^2-2}{(x-a)(x-b)} \geq 1, \; 0<a<b,$$

tiene conjunto solución $S=[2; 3\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$, calcule el producto ab.

A) 6 B) 12 C) 8
D) 15 E) 18

40. Halle el conjunto M.

$$M=\left\{(x+1)\in\mathbb{R} \Big/ \frac{x^5+x^2+2x}{x+1}<0\right\}$$

A) $M=\mathbb{R}^-$
B) $M=\langle -\infty; -1\rangle$
C) $M=\langle -1; 1\rangle$
D) $M=\langle -1; 0\rangle$
E) $M=\langle 0; 1\rangle$

41. Si la inecuación polinomial en x $(n-2)x^2-mx<n$, $m\in\mathbb{Z}$, tiene conjunto solución $S\subset\langle -\infty; 1\rangle$, calcule el mayor valor de m.

A) 2
B) 1
C) −1
D) −2
E) −4

42. Resuelva la inecuación cuadrática

$ax^2+x-a^3 \geq a, \; a<0,$

e indique la mayor solución que puede tener dicha inecuación.

A) 1/2 B) 1 C) 2
D) 4 E) $2\sqrt{2}$

43. Si $\forall x\in\mathbb{R}: nx(x+1)+2 \nless n-x$, halle los valores del parámetro n.

A) $n\in\left[\frac{1}{5}; 1\right]$
B) $n\in\left[-\frac{1}{5}; 1\right]$
C) $n\in\left[-1; \frac{1}{5}\right]$
D) $n\in[1; +\infty\rangle$
E) $n\in[1; 5]$

44. Calcule la longitud del conjunto solución de la inecuación polinomial

$x^4-12x-5\leq 0.$

A) 8 B) $4\sqrt{2}$ C) 4
D) 2 E) $2\sqrt{2}$

45. Respecto al conjunto solución S de la inecuación fraccionaria en x

$$\frac{x+1}{bx+a} > \frac{2}{a}; \; 0<a<b,$$

indique lo correcto.

A) $S=\left\langle \frac{a}{a-2b}; \frac{a}{b}\right\rangle$
B) $S=\left\langle -1; -\frac{a}{b}\right\rangle$
C) $S=\left\langle -\frac{a}{b}; 0\right\rangle$
D) $S\subset\langle -1; 0\rangle$
E) $S\subset\langle 0; 1\rangle$

Expresiones irracionales

Capítulo XII

OBJETIVOS

- Reconocer una expresión algebraica irracional.
- Determinar el conjunto de valores en el cual está definida la expresión algebraica irracional.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones irracionales.

Todos conocemos el significado de raíz: cuadrada, cúbica, cuarta, quinta, etc. Podemos decir que la extracción de raíz cuadrada de 2, es 1,414... Hay también radicales compuestos, como $\sqrt{7}+\sqrt[5]{10}$.

En el presente capítulo vamos a estudiar las expresiones irracionales y el conjunto de valores admisibles de dichas expresiones, asimismo se estudiarán las ecuaciones y las inecuaciones irracionales.

¿Qué es una expresión irracional

Es aquella expresión matemática que presenta al menos una de sus variables afectada por al menos un radical.

Ejemplos

- $f_{(x)}=\sqrt{x}+4$
- $h_{(x;\,y)}=x^2+\sqrt{y}-1$
- $P_{(x)}=x^2+\sqrt[3]{x-1}$
- $Q_{(x)}=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}-5$

NOTA

En el conjunto de los números reales, si existe la raíz n-ésima de un número, este es único y tiene el mismo signo que su radicando, así

- $\sqrt{4}=2$
- $\sqrt[4]{16}=2$
- $\sqrt[3]{64}=4$
- $\sqrt[3]{-64}=-4$
- $\sqrt{2}=1,41...$
- $\sqrt{-9}$ no existe en los reales.
- $\sqrt[4]{-3}$ no existe en los reales.
- $\sqrt[5]{-32}=-2$

Es decir, solo cuando el índice es par, el radicando debe ser no negativo para que su raíz exista en los reales.

Conjunto de valores admisibles (C.V.A.)

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable en una expresión matemática para que su valor numérico exista en un determinado conjunto numérico que por ahora será $\mathbb{R}$, salvo indicación alguna.

Ejemplo

Sea la expresión $f_{(x)}=\sqrt{x}$. Ahora como el índice es par, entonces los valores que puede tomar la variable x son no negativos y así el valor numérico de la expresión siempre será un número real. Es decir

$$\text{C.V.A.}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}=[0;+\infty\rangle$$

$$\therefore\quad \text{C.V.A.}=[0;+\infty\rangle$$

En este caso se dirá que la expresión $f_{(x)}=\sqrt{x}$ está bien definida o existe en $\mathbb{R}$ solo si $x\in[0;+\infty\rangle$.

Aplicación 1

En la siguiente expresión

$h_{(x)}=\sqrt{x-2}+3$

halle su conjunto de valores admisibles.

Resolución

$$\text{C.V.A.}=\{x\in\mathbb{R}/x-2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 2\}$$

$$\therefore\quad \text{C.V.A.}=[2;+\infty\rangle$$

En este caso diremos que la expresión $h_{(x)}=\sqrt{x-2}+3$ está bien definida o existe en $\mathbb{R}$ solo si $x\in[2;+\infty\rangle$.

Aplicación 2

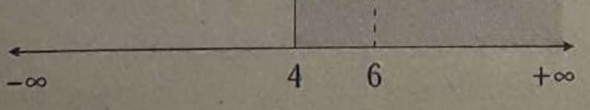
Halle el C.V.A. de la siguiente expresión matemática $P_{(x)}=\sqrt[4]{x-4}+\sqrt[3]{2x-5}-\dfrac{1}{x-6}$.

Resolución

Recuerde que cuando el índice es impar, la raíz existe siempre para todo valor real de su radicando, entonces

$$\text{C.V.A.}=\{x\in\mathbb{R}/x-4\geq 0\wedge x-6\neq 0\}$$

$$\text{C.V.A.}=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 4\wedge x\neq 6\}$$



$$\therefore\quad \text{C.V.A.}=[4;+\infty\rangle-\{6\}$$

Ecuación irracional

Esta ecuación está definida en el conjunto de los números reales y se caracteriza porque presenta la incógnita bajo el signo radical.

Ejemplos

- $\sqrt{x+12}=x$
- $\sqrt[4]{2x-2\sqrt{x^2-1}}=1$
- $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x+3}=3x$
- $\sqrt{x^2-x-6}=x-2$

Para su resolución, dependiendo del índice del radical, se presentan principalmente dos casos:

Caso 1

Cuando se presentan solamente índices impares, directamente se procede a simplificar la raíz y para ello se elevará a ambos miembros a un exponente igual al índice de la raíz para luego efectuar hasta obtener la solución o soluciones de la ecuación.

Aplicación 3

Resuelva la ecuación

$\sqrt[3]{x^3+x^2-x-12}=x$.

Resolución

Elevamos al cubo a ambos miembros

$$\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-x-12}\right)^3=(x)^3$$

$$x^3+x^2-x-12=x^3$$

$$x^2-x-12=0$$

$$\begin{array}{ll} x & -4 \\ x & 3 \end{array}$$

$$(x-4)(x+3)=0$$

$$x-4=0\ \rightarrow\ x_1=4$$

$$x+3=0\ \rightarrow\ x_2=-3$$

$$\therefore\quad \text{CS}=\{-3;4\}$$

Aplicación 4

Resuelva la ecuación

$\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}=\sqrt[9]{\dfrac{x}{(x-1)^3}}$.

Resolución

Como en los radicandos hay expresiones fraccionarias, es necesario garantizar que sus denominadores sean no nulos, así $x-1\neq 0 \rightarrow x\neq 1$.

Ahora en la ecuación elevamos al exponente 9 a ambos miembros

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)^{\cancel{9}^{3}}=\left(\sqrt[9]{\frac{x}{(x-1)^3}}\right)^{\cancel{9}}$$

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^3=\frac{x}{(x-1)^3}$$

$$\frac{x^3}{\cancel{(x-1)^3}}=\frac{x}{\cancel{(x-1)^3}}$$

$$x^3=x \;\rightarrow\; x^3-x=0$$

$$x(x^2-1)=0 \;\rightarrow\; x(x+1)(x-1)=0$$

$$x=0 \;\rightarrow\; x_1=0$$

$$x+1=0 \;\rightarrow\; x_2=-1$$

$$x-1=0 \;\rightarrow\; x_3=1$$

Pero $x\neq 1$ (de la restricción inicial)

$\therefore\;$ CS$=\{0;-1\}$

Caso 2

Cuando se presenta al menos un radical de índice par, se sugiere tener en cuenta lo siguiente:

1. Garantizar la existencia de la expresión irracional, es decir, se halla su C.V.A.
2. Dar sentido lógico a la igualdad para luego eliminar el radical o los radicales que nos permitan despejar la incógnita con mayor facilidad.
3. Para dar el conjunto solución se debe tener en cuenta el C.V.A.

Aplicación 5

Resuelva la ecuación $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$.

Resolución

1.$^{\text{er}}$ paso

Hallamos el C.V.A.

$$4-x\geq 0 \;\wedge\; 5+x\geq 0$$

$$4\geq x \;\wedge\; x\geq -5$$

$$-5\leq x\leq 4$$

$\therefore\;$ C.V.A.$=[-5;4]$

2.$^{\text{o}}$ paso

Como ambos miembros de la igualdad no son negativos, los elevamos al cuadrado para tratar de eliminar los radicales, así

$$\left(\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}\right)^2=(3)^2$$

$$\cancel{4}-\cancel{x}+2\sqrt{4-x}\sqrt{5+x}+\cancel{5}+\cancel{x}=\cancel{9}$$

$$2\sqrt{(4-x)(5+x)}=0$$

$$\left(\sqrt{(4-x)(5+x)}\right)^{\cancel{2}}=(0)^2$$

$$(4-x)(5+x)=0$$

$$4-x=0 \;\rightarrow\; x_1=4$$

$$5+x=0 \;\rightarrow\; x_2=-5$$

3.$^{\text{er}}$ paso

Como $4\in$ C.V.A. y $-5\in$ C.V.A.

$\therefore\;$ CS$=\{-5;4\}$

Aplicación 6

Resuelva la ecuación

$\sqrt{x+12}=x$.

Resolución

1.$^{\text{er}}$ paso

C.V.A.: $x+12\geq 0 \;\rightarrow\; x\geq -12$

$\rightarrow\;$ C.V.A.$=[-12;+\infty\rangle$

2.° paso

Dando sentido lógico a la igualdad, elevamos al cuadrado para eliminar la raíz, así

$$x \geq 0 \text{ y } (\sqrt{x+12})^2 = (x)^2$$

$$x \geq 0 \text{ y } x+12=x^2$$

$$x \geq 0 \text{ y } x^2-x-12=0$$

$$\begin{array}{ccc} x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 3 \\ x & & -4 \end{array}$$

$$(x+3)(x-4)=0$$

$$x \geq 0 \text{ y } (x+3=0 \vee x-4=0)$$

$$\underbrace{x \geq 0 \text{ y } (x=-3 \vee x=4)}_{x=4}$$

Como $4 \in [-12; +\infty\rangle$, es decir, $4 \in$ C.V.A.

$\therefore$ CS={4}

Observación

La ecuación $\sqrt{x-2}=-3$ carece de sentido lógico, pues no es posible que la raíz de índice par resulte negativo, y en estos casos no tiene sentido elevar al cuadrado para eliminar la raíz, sino se concluye que la ecuación no tiene solución.

$\therefore$ CS=ϕ

Nota

En una ecuación irracional con índice par se puede despejar la incógnita obviando el C.V.A. y el sentido lógico, pero si luego de obtener los valores de la incógnita para determinar si es o son soluciones, se reemplazan dichos valores en la ecuación inicial y, si lo verifica, es solución, de lo contrario no lo será.

Aplicación 7

Resuelva la ecuación

$\sqrt{2x+29}=3-x$.

Resolución

Elevaremos al cuadrado para eliminar la raíz, así

$$(\sqrt{2x+29})^2=(3-x)^2$$

$$2x+29=9-6x+x^2$$

$$x^2-8x-20=0$$

$$\begin{array}{ccc} x & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -10 \\ x & & 2 \end{array}$$

$$(x-10)(x+2)=0$$

$$x-10=0 \rightarrow x_1=10$$

$$x+2=0 \rightarrow x_2=-2$$

Ahora al reemplazar los valores de x en la ecuación inicial solo cumple $x=-2$, es decir, es la única solución.

$\therefore$ CS = {−2}

Inecuación irracional

Esta inecuación definida en el conjunto de los números reales se caracteriza porque en ella participa al menos una expresión irracional, es decir, la incógnita está afectada por lo menos en un radical.

Ejemplos

- $\sqrt{3x-6}<4$
- $\sqrt[3]{x^3-2x-4}>x$
- $\sqrt{2x-1} \leq \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$

Para su resolución, también dependiendo del índice de los radicales que afectan a la incógnita, se presentan generalmente dos casos.

Caso 1

Si el índice o índices del radical o radicales son impares, se procede a despejar la incógnita directamente.

Aplicación 8

Resuelva la inecuación $\sqrt[3]{x^3+1} < x+1$.

Resolución

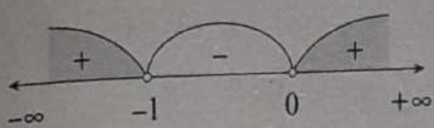
Elevamos al cubo a ambos miembros para eliminar la raíz

$$\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3 < (x+1)^3$$

$$\cancel{x^3+1} < \cancel{x^3+1} + 3x(x+1)$$

$$0 < 3x(x+1)$$

$$x(x+1) > 0$$



$\therefore\ CS = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$

Aplicación 9

Resuelva la inecuación

$\sqrt[5]{x^2+2x-5} - \sqrt[5]{x^2-x+10} \geq 0$.

Resolución

La inecuación equivale a

$$\sqrt[5]{x^2+2x-5} \geq \sqrt[5]{x^2-x+10}$$

$$\left(\sqrt[5]{x^2+2x-5}\right)^{\cancel{5}} \geq \left(\sqrt[5]{x^2-x+10}\right)^{\cancel{5}}$$

$$\cancel{x^2}+2x-5 \geq \cancel{x^2}-x+10$$

$$3x \geq 15$$

$$x \geq 15/3$$

$$x \geq 5$$

$\therefore\ CS = [5; +\infty\rangle$

Caso 2

Cuando se presenta al menos un radical de índice par, se sugiere tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Se debe garantizar la existencia de la expresión irracional, es decir, se halla su C.V.A.
2. Dar sentido lógico a la inecuación para luego eliminar el radical o radicales y después despejar la incógnita con mayor facilidad.
3. El conjunto solución resultará de la intersección del C.V.A. con lo obtenido para la incógnita en el segundo paso.

Aplicación 10

Resuelva la inecuación $\sqrt{2x-6} < 2$.

Resolución

1.^{er} paso

C.V.A.: $2x-6 \geq 0 \ \rightarrow\ x \geq 3$

$\rightarrow$ C.V.A.$=[3; +\infty\rangle$

2.^{o} paso

Como ambos miembros de la inecuación son no negativos, los elevamos al cuadrado para eliminar el radical, así

$$\left(\sqrt{2x-6}\right)^{\cancel{2}} > (2)^2$$

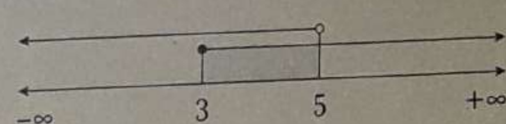
$$2x-6 < 4$$

$$2x < 10$$

$$x < 5 \qquad \text{(I)}$$

3.^{er} paso

CS=C.V.A. $\cap$ (I)$=[3; 5\rangle$



Aplicación 11

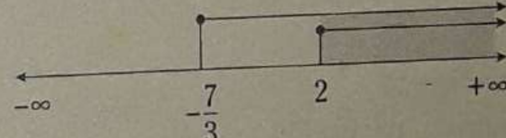
Resuelva la inecuación $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x-2} > 3$.

Resolución

1.^{er} paso

C.V.A.: $3x+7 \geq 0 \ \wedge\ x-2 \geq 0$

$$x \geq -\frac{7}{3} \ \wedge\ x \geq 2$$



$\therefore$ C.V.A.$=[2; +\infty\rangle$

2.º paso

La inecuación equivale a $\sqrt{3x+7} > 3+\sqrt{x-2}$, lo que garantiza que ambos miembros son no negativos y para ir eliminando radicales los elevamos al cuadrado, así

$$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 > \left(3+\sqrt{x-2}\right)^2$$

$$3x+7 > 9+6\sqrt{x-2}+x-2$$

$$2x > 6\sqrt{x-2}$$

$$x > 3\sqrt{x-2}$$

Ahora aquí también tenemos que ambos miembros no son negativos, pues $x \geq 2$ del C.V.A.; luego lo elevamos al cuadrado.

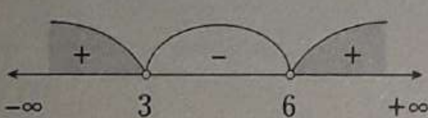
$$(x)^2 > \left(3\sqrt{x-2}\right)^2$$

$$x^2 > 9(x-2)$$

$$x^2-9x+18 > 0$$

$$\begin{array}{ll} x & -6 \\ x & -3 \end{array}$$

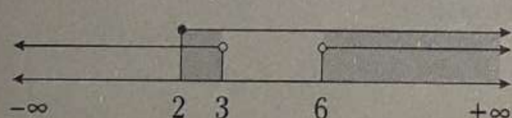
$$(x-6)(x-3) > 0$$



$x \in \langle -\infty; 3\rangle \cup \langle 6; +\infty\rangle$ (I)

3.^{er} paso

CS=C.V.A. ∪ (I)



∴ CS=$[2; 3\rangle \cap \langle 6; +\infty\rangle$

Aplicación 12

Resuelva la inecuación

$\sqrt{2x-1} \leq x-2.$

Resolución

1.^{er} paso

C.V.A.: $2x-1 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 1/2$

C.V.A.=$[1/2; +\infty\rangle$

2.º paso

Dando sentido lógico a la inecuación elevamos al cuadrado para eliminar la raíz, así

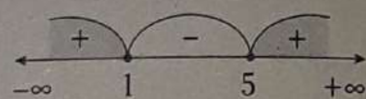
$$x-2 \geq 0 \;\text{ y }\; \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 \leq (x-2)^2$$

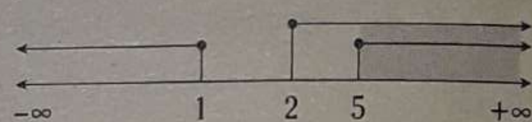
$$x \geq 2 \;\text{ y }\; 2x-1 \leq x^2-4x+4$$

$$x \geq 2 \;\text{ y }\; x^2-6x+5 \geq 0$$

$$x \geq 2 \;\text{ y }\; (x-1)(x-5) \geq 0$$

$x \geq 2$ y

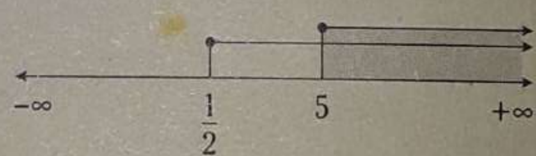




$\rightarrow \; x \in [5; +\infty\rangle$ (I)

3.^{er} paso

CS=C.V.A. ∩ (I)



∴ CS=$[5; +\infty\rangle$

Aplicación 13

Resuelva la inecuación $\sqrt{x-3} > -4$.

Resolución

1.^{er} paso

C.V.A.: $x-3 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 3$

C.V.A.=$[3; +\infty\rangle$

2.º paso
Como el segundo miembro de la inecuación es negativo, analicemos su sentido lógico antes de elevarla al cuadrado.

$$\underbrace{(\sqrt{x-3})}_{\geq 0} > \underbrace{(-4)}_{(-)}$$

Como se observa, la desigualdad es lógica, es decir, tiene sentido, en estos casos se cumple que CS=C.V.A.

$\therefore$ CS=[3; +∞⟩

Aplicación 14
Resuelva la inecuación
$\sqrt{2x-6} \leq -7$.

Resolución

1.^{er} paso
C.V.A.: $2x-6 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

C.V.A.=[3; +∞⟩

2.º paso
Como el segundo miembro de la inecuación es negativo, analicemos el sentido lógico de la inecuación antes de elevarla al cuadrado.

$$\underbrace{(\sqrt{2x-6})}_{\geq 0} \leq \underbrace{(-7)}_{(-)}$$

Como se observa, la desigualdad es ilógica, es decir, no tiene sentido, lo que implica que no hay valor alguno de x que verifique a la inecuación, entonces $x \in \phi$ (I)

3.^{er} paso

CS=C.V.A. ∩ (I)=[3; +∞⟩ ∩ ϕ=ϕ

$\therefore$ CS= ϕ

Aplicación 15
Resuelva la siguiente inecuación irracional
$\sqrt{x}-\sqrt[3]{x} \leq 4$.

Resolución

1.^{er} paso
C.V.A.: $x \geq 0$

2.º paso
Aquí antes de elevar a cierto exponente es conveniente eliminar uno de los radicales; sería conveniente el de mayor índice. Para ello se puede hacer el siguiente cambio de variable.

$$x=t^3$$

Al reemplazar en la inecuación se tiene

$$\sqrt{t^3}-\sqrt[3]{t^3} \leq 4 \leftrightarrow \sqrt{t^3}-t \leq 4$$

$$\leftrightarrow \sqrt{t^3} \leq \underbrace{t+4}_{(+)}; \text{pues } x \geq 0 \wedge x=t^3$$

Ahora elevamos al cuadrado

$$\left(\sqrt{t^3}\right)^2 \leq (t+4)^2 \leftrightarrow t^3 \leq t^2+8t+16$$

$$\leftrightarrow t^3-t^2-8t-16 \leq 0$$

Luego de factorizar por divisores binómicos tenemos

$$(t-4)\underbrace{\cancel{(t^2+3t+4)}}_{\Delta<0} \leq 0$$

$$\leftrightarrow t-4 \leq 0 \leftrightarrow t \leq 4$$

Elevamos al cubo

$$\leftrightarrow t^3 \leq 64$$
$$\downarrow$$
$$x \leq 64 \qquad \text{(I)}$$

3.^{er} paso

CS=C.V.A. ∩ (I)=$(x \geq 0) \cap (x \leq 64)$

$\therefore$ CS=[6; 64]

Problemas Resueltos

Problema N.º 1

Halle el C.V.A. de la siguiente expresión

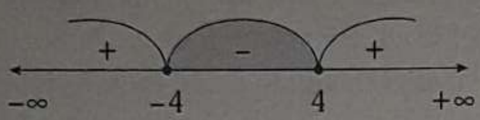
$f_{(x)}=\sqrt{16-x^2}+\sqrt[3]{x-8}+1.$

Resolución

La expresión f está bien definida en los reales solo si $16-x^2\geq 0$.

$\rightarrow\ x^2-16\leq 0$

$\rightarrow\ (x+4)(x-4)\leq 0$



> **Observación**
> Cuando el índice es impar, la raíz existe siempre para todo valor real del radicando.

$\therefore\ $ C.V.A.$=[-4; 4]$

Problema N.º 2

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación irracional $(\sqrt{2}+1)x=\sqrt{x+2}+\sqrt{4+2x}$?

Resolución

1.er paso

C.V.A.: $x+2\geq 0$ y $4+2x\geq 0$

$$\underbrace{x\geq -2 \text{ y } x\geq -2}_{x\geq -2}$$

$\rightarrow$ C.V.A.$=[-2; +\infty\rangle$

2.º paso

La ecuación tiene sentido lógico si $x\geq 0$.

3.er paso

Resolvemos la ecuación

$x\geq 0$ y $(\sqrt{2}+1)x=\sqrt{x+2}+\sqrt{2(x+2)}$

$x\geq 0$ y $(\sqrt{2}+1)x=\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{x+2}$

$x\geq 0$ y $(\cancel{\sqrt{2}+1})x=(\cancel{1+\sqrt{2}})\sqrt{x+2}$

$x\geq 0$ y $x=\sqrt{x+2}$

Elevamos al cuadrado

$x\geq 0$ y $x^2=x+2$

$x\geq 0$ y $x^2-x-2=0$

$x\geq 0$ y $(x-2)(x+1)=0$

$x\geq 0$ y $(x=2 \vee x=-1)$

$\rightarrow\ x=2\in$ C.V.A.

$\therefore\ CS=\{2\}$

Problema N.º 3

¿Cuál es la suma de las raíces de la ecuación $\sqrt{x-1}=\sqrt{3\sqrt{x-1}}$?

UNMSM 2005-I

Resolución

> **Observación**
> En una ecuación irracional se puede despejar la incógnita sin hallar el C.V.A. ni dar sentido lógico, pero luego el valor o valores obtenidos para la incógnita serán solución si verifican la ecuación inicial.

En el problema, elevamos al cuadrado

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{3\sqrt{x-1}}\right)^2$$

$$x-1=3\sqrt{x-1}$$

Nuevamente elevamos al cuadrado

$(x-1)^2=9(x-1)$

$(x-1)^2-9(x-1)=0$

$(x-1)(x-1-9)=0$

$x_1=1 \ \vee \ x_2=10$

Ahora, al reemplazar en la ecuación inicial ambos valores lo verifican.

$\therefore\ x_1+x_2=11$

Problema N.° 4

Resuelva la inecuación irracional

$\sqrt{x-2} \geq \sqrt[6]{x^3-8}$ e indique el cardinal de su conjunto solución.

Resolución

En las inecuaciones es indispensable hallar el C.V.A. de las expresiones irracionales como punto de partida.

1.^{er} paso

C.V.A.: $x-2 \geq 0$ y $x^3-8 \geq 0$

$x \geq 2$ y $x^3 \geq 8$

$\underbrace{x \geq 2 \text{ y } x \geq \sqrt[3]{8}}_{x \geq 2}$

$\rightarrow$ C.V.A.$=[2; +\infty\rangle$

2.^{o} paso

En la inecuación elevamos al exponente 6 a ambos lados, así

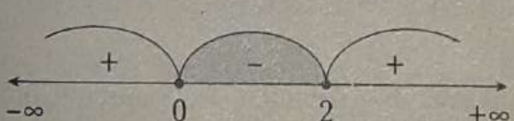
$$\left(\sqrt{x-2}\right)^{\cancel{6}} \geq \left(\sqrt[\cancel{6}]{x^3-8}\right)^{\cancel{6}}$$

$$(x-2)^3 \geq x^3-8$$

$$\cancel{x^3} - \cancel{8} - 3x \cdot 2(x-2) \geq \cancel{x^3} - \cancel{8}$$

$$-6x(x-2) \geq 0$$

$$x(x-2) \leq 0 \quad \div -6$$

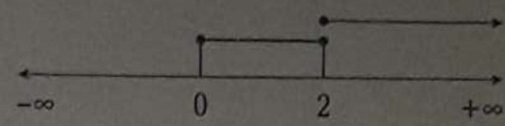


$x \in [0; 2]$ (I)

3.^{er} paso

CS=C.V.A. $\cap$ (I)

CS$=[2; +\infty\rangle \cap [0; 2]=\{2\}$



Por lo tanto, el cardinal es CS=1.

Problema N.° 5

Señale el complemento del conjunto solución de la inecuación

$\sqrt[3]{x^3+x^2} > \dfrac{x^2-x}{x}$.

Resolución

1.^{er} paso

Como hay una expresión fraccionaria, hallamos su C.V.A., así

C.V.A.: $x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$

$\rightarrow$ C.V.A.$=\mathbb{R}-\{0\}$

2.^{o} paso

En la inecuación, elevamos al cubo para luego simplificar.

$$\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3 > (x-1)^3$$

$$\cancel{x^3} + x^2 > \cancel{x^3} - 1 - 3x(x-1)$$

$$x^2 > -1-3x^2+3x$$

$$4x^2-3x+1 > 0$$

Aquí $\Delta < 0$, entonces la inecuación cuadrática se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $CS_1=\mathbb{R}$.

3.^{er} paso

$CS=C.V.A. \cap CS_1$

$CS=(\mathbb{R}-\{0\}) \cap \mathbb{R}$

$CS=\mathbb{R}-\{0\}$

$\therefore$ $(CS)^C=\{0\}$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Halle el C.V.A. de la expresión irracional

$f_{(x)}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-2.$

A) $[1;+\infty\rangle$ B) $[0;+\infty\rangle$ C) $\langle 0;+\infty\rangle$
D) $\langle 1;+\infty\rangle$ E) $\langle 0;1\rangle$

2. Dado el conjunto

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}/\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{6-x}\right)\in\mathbb{R}\right\},$

indique la suma de elementos de A.

A) 9 B) 12 C) 19
D) 21 E) 20

3. Luego de resolver la ecuación irracional $\sqrt{x^2-9}=4$, se puede afirmar que

A) tiene solución única.
B) la suma de soluciones es 10.
C) al dividir sus soluciones se obtiene –1.
D) la suma de soluciones es –10.
E) –5 no es solución.

4. Si x_1 y x_2 ($x_1>x_2$) son soluciones de la ecuación $\sqrt{9-x}+\sqrt{x+16}=5$, calcule la suma de cifras de x_1-x_2.

A) 7
B) 10
C) 25
D) 6
E) No existe la suma de cifras.

5. Si x_0 es solución de la ecuación

$\sqrt{x-2}=6-\sqrt{4x-8},$

calcule el valor de $\sqrt{\frac{2}{3}x_0}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 1/3

6. Calcule la suma de soluciones de la ecuación

$\sqrt{x^2-10x+9}=10\sqrt{x-9}.$

A) 92 B) 108 C) 99
D) 101 E) 110

7. Si x_1 y x_2 ($x_1\in\mathbb{Z}^+$) son soluciones de la ecuación

$\sqrt[3]{x^3+2x^2-11x+12}=x,$

calcule el valor de $x_1^{x_2}$.

A) 1 B) 4 C) 8
D) 9 E) 16

8. Luego de resolver la ecuación irracional $\sqrt{2x+6}=\sqrt{x+7}+2$, halle la suma de los dígitos de la raíz de la ecuación.

A) 5 B) 9 C) 11
D) 29 E) 10

UNMSM 2006-II

9. Resuelva la inecuación $\sqrt{x-2}<3$ y dé la suma de sus soluciones enteras.

A) 16 B) 28 C) 34
D) 54 E) 44

10. El conjunto solución de la inecuación irracional $\sqrt{15+x}\le\sqrt{15-x}$ es

A) $[-15;15]$.
B) $[0;15]$.
C) $[0;+\infty\rangle$.
D) $[-15;+\infty\rangle$.
E) $[-15;0]$.

11. Calcule el producto de todas las soluciones de la inecuación $\sqrt{1-x}+\sqrt{8+x}\leq 3$.

A) -8
B) 8
C) -12
D) -16
E) 16

12. Si $[a;+\infty\rangle$ es el conjunto solución de la inecuación irracional
$\sqrt{9x-27}\geq 12-\sqrt{x-3}$,
calcule la suma de cifras del número a.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

13. Si $\langle a;b\rangle$ es el conjunto solución de la inecuación irracional $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{4x}<1$, calcule $\sqrt[3]{ab}$.

A) 2 B) 4 C) -4
D) 8 E) -8

14. Calcule el valor de $a+b+c+d$ si el conjunto solución de la inecuación irracional
$\sqrt{\dfrac{81-x^4}{9+x^2}}<1$ es $[a;b\rangle\cup\langle c;d]$.

A) 6 B) $6+4\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) 4 E) 0

NIVEL INTERMEDIO

15. Dé la suma de soluciones de la ecuación irracional
$36\sqrt{15-3x}=x^2\sqrt{15-3x}$.

A) 0
B) 1
C) -1
D) 5
E) 17

16. Si x es un número entero tal que

$$\sqrt{\frac{x}{2}}-\frac{7x}{8}+432=0$$

entonces el valor de $\sqrt{2x}+x+20$ es

A) 604 B) 402 C) 320
D) 240 E) 564

UNMSM 2005-II

17. La solución de la ecuación irracional
$7x-\sqrt{7x-59}=61$ es un

A) número par.
B) cubo perfecto.
C) número irracional.
D) cuadrado perfecto.
E) número primo.

18. Resuelva la ecuación irracional

$$\frac{4}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x+3}}=4-\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x+3}\right)$$

y dé como respuesta la solución aumentada de su cuadrado.

A) -3
B) 0
C) 2
D) 6
E) 12

19. Calcule el conjunto solución de la inecuación irracional
$x\sqrt{x-5}\leq x^2-3x-2\left(5+\sqrt{x-5}\right)$.

A) $[6;+\infty\rangle$
B) $[5;+\infty\rangle$
C) $[5;6]$
D) $\{5\}\cup[6;+\infty\rangle$
E) $[5;10]$

20. Si $\langle m; n]$ es el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{\sqrt{x-5}-2}{3x-13} \leq \operatorname{sen}^4\pi,$$

calcule $m \cdot n$.

A) 26 B) 39 C) 13
D) 13/27 E) 52

21. Indique el número de elementos enteros del conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} < x-3 \\ \sqrt[3]{x-1} \leq 2 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. Si α es solución de la ecuación irracional

$$\sqrt[3]{4x-1} + 2\sqrt{x} = 1$$

calcule la raíz cuadrada de $(2\alpha^{-1}+1)$.

A) 9 B) 4 C) 2
D) 3 E) 5

23. Sea la ecuación irracional en x
$\sqrt{8x+2k-1} = x + \sqrt{k}$. Si tienen dos soluciones cuya diferencia es 6, indique el producto de valores de k.

A) 16 B) −6 C) 9
D) 25 E) 12

24. Calcule la suma de dígitos del cuadrado de la menor solución de la inecuación

$$\sqrt{3x + 2\sqrt{2x^2 - x} - 1} \geq \sqrt{(\sqrt{x}+5)^2}.$$

A) 5 B) 7 C) 9
D) 13 E) 16

25. Luego de resolver la inecuación irracional

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} < \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x^2-2x+1},$$

indique el complemento del conjunto solución.

A) $\langle -\infty; 1\rangle$
B) $[1; \infty\rangle$
C) $\langle -\infty; 1\rangle \cup \langle 4; +\infty\rangle$
D) ϕ
E) $\mathbb{R}$

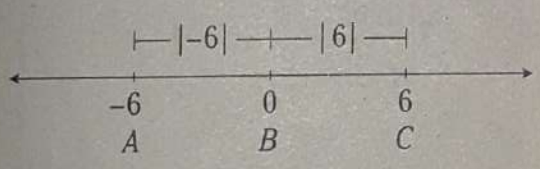
Valor absoluto

Capítulo XIII

OBJETIVOS

- Interpretar el concepto de valor absoluto y comprender su significado geométrico.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.
- Reconocer la desigualdad triangular y sus particularidades para la resolución de problemas específicos.

El valor absoluto nos permite calcular la distancia entre dos puntos en la recta numérica real. La definición es muy sencilla, con base en ello se plantean las propiedades que nos van a permitir resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Debe entenderse que cualquier problema donde se involucre el valor absoluto se puede resolver aun sin conocer las propiedades, interpretando correctamente su definición, que solo significa distancia de cualquier punto de la recta al origen y, si x es un número real, su valor absoluto se denota por $|x|$, el cual es no negativo, así



Como se observa, la distancia de A a B es 6 y puede representarse en términos de valor absoluto como $|-6|=6$, así mismo la distancia de B a C es 6 y se representa $|6|=6$, además notamos que estas distancias son iguales, es decir, $|-6|=|6|=6$.

Definición

Sea x un número real. Su valor absoluto se denota por $|x|$ y se define así

$$|x|=\begin{cases} x; & \text{si } x\geq 0 \\ -x; & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Ejemplos

- $\underbrace{|21|}_{(+)}=21$
- $\underbrace{|-21|}_{(-)}=-(-21)=21$
- $\underbrace{|100|}_{(+)}=100$
- $\underbrace{|-100|}_{(-)}=-(-100)=100$
- $\underbrace{|1-\sqrt{3}|}_{(-)}=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$

- $\underbrace{|1+\sqrt{2}|}_{(+)}=1+\sqrt{2}$

- $\underbrace{|x^2+1|}_{(+)}=x^2+1$

  Pues $x^2 \geq 0;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$

También

- Si $x>3 \rightarrow \underbrace{|x-2|}_{(+)}=x-2$

  $\downarrow$

  $x-2>1$

- Si $x<5 \rightarrow |\underbrace{x-6}_{(-)}|=-(x-6)=6-x$

  $\downarrow$

  $x-6<-1$

- $|0|=0$

Aplicación 1

Si $x \in \langle -2; 1\rangle$, halle el valor de la expresión

$\dfrac{|x-2|+|x+2|}{2}$.

Resolución

En este caso hallaremos la variación de cada expresión que está afectada por el valor absoluto para saber su signo a partir del dato, así

$$-2<x<1=\begin{cases}-4<\underbrace{x-2}_{(-)}<-1\\ 0<\underbrace{x+2}_{(+)}<3\end{cases}$$

Luego, en lo pedido se tiene

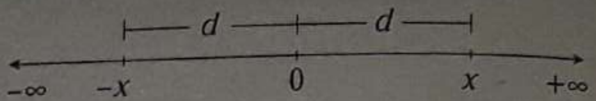
$$\frac{|x-2|+|x+2|}{2}=\frac{-(x-2)+(x+2)}{2}$$

$$=\frac{-\cancel{x}+2+\cancel{x}+2}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{|x-2|+|x+2|}{2}=2$$

Interpretación geométrica

Sea x un número real (consideremos $x>0$) y ubiquémoslo en la recta numérica real.



La distancia d del punto x o $-x$ al origen 0 (cero) representa el valor absoluto de x o $-x$.

Luego $d=|x|=|-x|;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, lo que implica que el número puede ser positivo o negativo, pero su valor absoluto siempre será positivo y, si el número es cero, su valor absoluto también será cero, así

- $|7|=|-7|=7$
- $|-9|=|9|=9$
- $|0|=0$

También si

- $|x|=7 \rightarrow x=7 \vee x=-7$
- $|x|=10 \rightarrow x=10 \vee x=-10$
- $|x|=0 \rightarrow x=0$
- $|x-1|=0 \rightarrow x-1=0$

  $x=1$

Teoremas

Para cualesquiera números reales x e y se cumple

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x|=|x|$
3. $|x^2|=x^2=|x|^2$
4. $\sqrt{x^2}=|x|$
5. $|x\cdot y|=|x||y|$
6. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|};\ y\neq 0$
7. Si $|x|+|y|=0 \rightarrow x=0 \wedge y=0$
8. $|x| \geq x$

Ejemplos

- $|x-1|=|1-x|$ (por propiedad 2)
- $|(x-3)^2|=|x-3|^2=(x-3)^2$ (por propiedad 3)
- $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|$ (por propiedad 4)
- $|4x-12|=|4(x-3)|=|4||x-3|=4|x-3|$ (por propiedad 5)
- $|x^2-1|=|(x+1)(x-1)|=|x+1||x-1|$ (por propiedad 5)
- $\left|\dfrac{3x-1}{4}\right|=\dfrac{|3x-1|}{|4|}$ (por propiedad 6)
- Si $|2x-6|+|y+3|=0$, por propiedad 7 se cumple que

  $2x-6=0 \wedge y+3=0$

  $x=3 \wedge y=-3$

Ecuaciones con valor absoluto

Son aquellas ecuaciones cuya incógnita está afectada por el valor absoluto.

Ejemplos

- $|3x-1|=7$
- $|x-1|+|3x-3|=12x$
- $|x^2-1|=|2-|x||$
- $x^2-|x+1|=1-2x$

Para resolver las ecuaciones con valor absoluto, podríamos utilizar los siguientes teoremas:

Teorema 1

$$|a|=b \leftrightarrow b\geq 0 \text{ y } a=-b \vee a=b$$

Ejemplos

1. Resuelva la ecuación

   $|3x-1|=5.$

   Resolución

   Por teorema

   $$\underbrace{5\geq 0}_{\text{Es evidente.}} \wedge 3x-1=-5 \vee 3x-1=5$$

   $$3x=-4 \vee 3x=6$$

   $$x=-\frac{4}{3} \vee x=2$$

   $$\therefore \text{ CS}=\left\{-\frac{4}{3};2\right\}$$

2. Resuelva la ecuación

   $|2x+3|=x-1.$

   Resolución

   Por teorema

   $$x-1\geq 0 \wedge (2x+3=-(x-1) \vee 2x+3=x-1)$$

   $$x\geq 1 \wedge (2x+3=-x+1 \vee x=-4)$$

   $$x\geq 1 \wedge (3x=-2 \vee x=-4)$$

   $$\underset{(+)}{x}\geq 1 \wedge \left(\underset{(-)}{x}=-\frac{2}{3} \vee \underset{(-)}{x}=-4\right)$$

   $$\therefore \text{ CS}=\phi$$

Teorema 2

$$|a|=|b| \leftrightarrow a=b \vee a=-b$$

Aplicación 2

Resuelva la ecuación

$|3x-5|=|x+1|$.

Resolución

Por teorema

$$\begin{aligned} 3x-5=x+1 \ &\vee\ 3x-5=-(x+1)\\ 2x=6 \ &\vee\ 3x-5=-x-1\\ x=3 \ &\vee\ 4x=4\\ x=3 \ &\vee\ x=1 \end{aligned}$$

$\therefore \quad CS=\{1; 3\}$

> **NOTA**
>
> No toda ecuación con valor absoluto se puede resolver aplicando los dos teoremas anteriores, depende de la forma que presenta.

Aplicación 3

Resuelva la ecuación

$||x|+x|=3$.

Resolución

Aquí lo más conveniente es considerar dos casos:

1.^{er} caso

Si $x \geq 0$, la ecuación es equivalente a

$$\underbrace{|x+x|}_{\geq 0}=3 \rightarrow 2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$

2.° caso

Si $x < 0$, la ecuación es equivalente a

$$|-x+x|=3 \rightarrow \underbrace{|0|=3}_{\text{absurdo}} \rightarrow x \in \phi$$

$\therefore \quad CS=\{3/2\}$

Aplicación 4

Resuelva la ecuación

$x^2-|x|=12$.

Resolución

Como $x^2=|x|^2$ (por propiedad); luego en la ecuación se tiene

$$|x|^2-|x|-12=0$$

$$\begin{array}{ll} |x| & 3 \\ |x| & -4 \end{array}$$

$$(|x|+3)(|x|-4)=0$$

$$|x|+3=0 \ \vee\ |x|-4=0$$

$$\underbrace{|x|=-3}_{\text{absurdo } \rightarrow\ x \in \phi} \ \vee\ |x|=4$$

$\rightarrow \quad x=4 \ \vee\ x=-4$

$\therefore \quad CS=\{-4; 4\}$

Inecuaciones con valor absoluto

Estas inecuaciones se caracterizan porque su incógnita está afectada por el valor absoluto.

Ejemplos

- $|3x-5| < 3$
- $|x^2-x-2| > 13$
- $|x^2-1|+|x+1| \leq 0$
- $x^2-2|x-2| \geq 4x-5$

Para resolver inecuaciones con valor absoluto se debe tener en cuenta los teoremas que se plantearán a continuación:

Teorema 1

$$\boxed{|a| < b \ \leftrightarrow\ b > 0 \wedge (-b < a < b)}$$

Ejemplos

- $|x| < 5 \ \leftrightarrow\ -5 < x < 5$
- $|x-2| < \frac{1}{2} \ \leftrightarrow\ -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2}$

$$\leftrightarrow\ 2-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}+2$$

$$\leftrightarrow\ \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

Aplicación 5

Resuelva la inecuación

$|2x| < x+1.$

Resolución

Por teorema

$x+1 > 0 \wedge (-(x+1) < 2x < x+1)$

$x > -1 \wedge (-x-1 < 2x < x+1)$

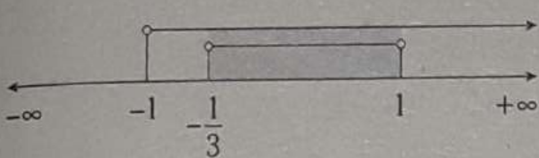
$x > -1 \wedge (-x-1 < 2x \wedge 2x < x+1)$

$x > -1 \wedge (-1 < 3x \wedge x < 1)$

$x > -1 \wedge \underbrace{\left(-\frac{1}{3} < x \wedge x < 1\right)}$

$x > -1 \wedge -\frac{1}{3} < x < 1$

Indica intersecar.



$\therefore \quad CS = \left\langle -\frac{1}{3}; 1 \right\rangle$

Teorema 2

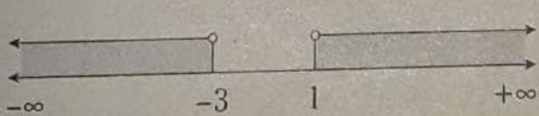
$$|a| > b \;\leftrightarrow\; a < -b \vee a > b$$

Ejemplos

- $|x| > 5 \;\leftrightarrow\; x < -5 \vee x > 5$
- $|x+1| > 2 \;\leftrightarrow\; x+1 < -2 \vee x+1 > 2$

  $\leftrightarrow\; x < -3 \vee x > 1$

  Indica unir.



$\therefore \quad x \in \langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

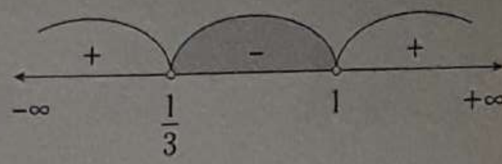
Teorema 3

$$|a| < |b| \;\leftrightarrow\; (a+b)(a-b) < 0$$

Ejemplo

$|2x-1| < |x| \;\leftrightarrow\; (2x-1+x)(2x-1-x) < 0$

$\leftrightarrow\; (3x-1)(x-1) < 0$



$\therefore \quad x \in \left\langle \frac{1}{3}; 1 \right\rangle$

Observación

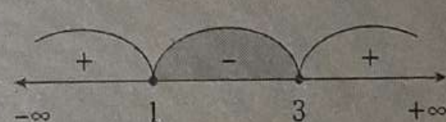
Estos teoremas también se cumplen cuando la desigualdad es no estricta, así

- $|x| \leq 15 \;\leftrightarrow\; -15 \leq x \leq 15$
- $|2x| \leq 3 \;\leftrightarrow\; -3 \leq 2x \leq 3$

  $\leftrightarrow\; -3/2 \leq x \leq 3/2$
- $|x| \geq 1 \;\leftrightarrow\; x \leq -1 \vee x \geq 1$
- $|x-2| \geq 3 \;\leftrightarrow\; x-2 \leq -3 \vee x-2 \geq 3$

  $\leftrightarrow\; x \leq -1 \vee x \geq 5$
- $|2x-3| \leq |x| \;\leftrightarrow\; (2x-3+x)(2x-3-x) \leq 0$

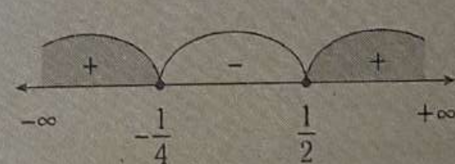
  $\leftrightarrow\; (3x-3)(x-3) \leq 0$



$\therefore \; x \in [1; 3]$

- $|3x| \geq |x+1| \;\leftrightarrow\; (3x+x+1)(3x-x-1) \geq 0$

  $\leftrightarrow\; (4x+1)(2x-1) \geq 0$



$\therefore \quad x \in \left\langle -\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$

Desigualdad triangular

$$\boxed{|a+b| \leq |a|+|b|;\ \forall\, a; b \in \mathbb{R}}$$

Consecuencias

1. $|a+b|=|a|+|b| \quad \leftrightarrow \quad ab \geq 0$
2. $|a+b| < |a|+|b| \quad \leftrightarrow \quad ab < 0$

Aplicación 6

Resuelva la inecuación $|2x-1|+|x+1| \geq |3x|$.

Resolución

Sean

$$\left.\begin{aligned} 2x-1&=a \\ x+1&=b \end{aligned}\right. \quad \longrightarrow \quad 3x=a+b$$

Luego de reemplazar en el problema se tiene

$|a|+|b| \geq |a+b|$, que equivale a

$|a+b| \leq |a|+|b|$ (desigualdad triangular)

Es decir, $a \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad b \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \quad \underbrace{(2x-1) \in \mathbb{R} \ \wedge \ (x+1) \in \mathbb{R}}_{x \in \mathbb{R}}$$

$\therefore \quad CS=\mathbb{R}$

Observación

La desigualdad triangular se cumple para cualesquiera a y b reales, lo que implica que x es también cualesquiera número real.

Aplicación 7

Resuelva la ecuación $|x-2|+|x|=2$.

Resolución

Sea $|x-2|=|2-x|$.

Luego en la ecuación se tiene.

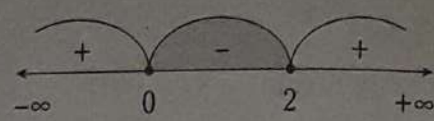
$|2-x|+|x|=2=|2|$

$|2-x|+|x|=|2|=|2-x+x|$

$|2-x|+|x|=|(2-x)+(x)|$

Por la primera consecuencia de la desigualdad triangular se cumple que

$$\left.\begin{aligned} (2-x)x &\geq 0 \\ (x-2)x &\leq 0 \end{aligned}\right) \times(-1)$$



$\therefore \quad CS=[0; 2]$

Aplicación 8

Determine el complemento del conjunto solución de la inecuación

$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}>2.$

Resolución

Si

- $x^2-2x+1=(x-1)^2$
- $x^2+2x+1=(x+1)^2$

Luego en la inecuación

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}>2$$

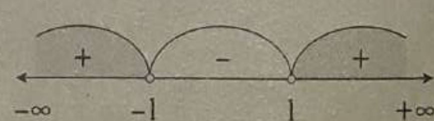
$$|x-1|+|x+1|>|2|;\ 2=(1-x)+(1+x)$$

$$|1-x|+|1+x|>|(1-x)+(1+x)|$$

$$|(1-x)+(1+x)|<|1-x|+|1+x|$$

Por la segunda consecuencia de la desigualdad triangular tenemos

$$\left.\begin{aligned} (1-x)(1+x) &< 0 \\ (x-1)(x+1) &> 0 \end{aligned}\right) \times(-1)$$



$CS=\langle-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

$\therefore \quad (CS)^C=[-1; 1]$

Problema N.° 1

Si $x\in\left\langle \frac{1}{2};1\right\rangle$, calcule el valor de la expresión E.

$$E=\frac{|2x-1|+|2x-3|}{|-2|}$$

Resolución

A partir del dato hallaremos los signos de $(2x-1)$ y $(2x-3)$ para luego hallar sus valores absolutos.

Del dato $\frac{1}{2}<x<1$, de donde

$$1<2x<2=\begin{cases}0<\underbrace{2x-1}_{(+)}<1 \rightarrow |2x-1|=2x-1\\ -2<\underbrace{2x-3}_{(-)}<-1 \rightarrow |2x-3|=-2x+3\end{cases}$$

Ahora reemplazamos en E

$$E=\frac{\cancel{2x}-1+(-\cancel{2x}+3)}{2};\ |-2|=2$$

$$E=\frac{2}{2}=1$$

$\therefore\ E=1$

Problema N.° 2

Resuelva la ecuación $|2x-5|=x-3$.

Resolución

Se tiene por resolver la ecuación $|2x-5|=x-3$, la cual tiene sentido solo si $x-3\geq 0 \ \rightarrow\ x\geq 3$

Ahora, en la ecuación por definición de valor absoluto se tiene

$2x-5=x-3 \ \vee\ 2x-5=-(x-3)$

$x=2 \ \vee\ 3x=8$

$x_1=2 \ \vee\ x_2=8/3$

Notamos que $x_1<3$ y $x_2<3$, los cuales no pueden ser soluciones ya que la ecuación solo tiene sentido si $x\geq 3$.

$\therefore\ CS=\phi$

Problema N.° 3

Calcule la suma de las raíces de la ecuación $2|x-3|^2+|7x-21|-15=0$.

UNMSM 2004-I

Resolución

> **Nota**
> $|7x-21|=7|x-3|$

Luego en la ecuación

$$2|x-3|^2+7|x-3|-15=0$$

$$\begin{array}{lr} |x-3| & 5\\ 2|x-3| & -3\end{array}$$

$$(|x-3|+5)(2|x-3|-3)=0$$

$$|x-3|+5=0 \ \vee\ 2|x-3|-3=0$$

$$\underbrace{|x-3|=-5}_{\text{absurdo}} \ \vee\ |x-3|=\frac{3}{2}$$

$$x\in\phi \ \vee\ x-3=\frac{3}{2} \ \vee\ x-3=-\frac{3}{2}$$

$$x_1=\frac{3}{2}+3 \ \vee\ x_2=3-\frac{3}{2}$$

$$x_1=\frac{9}{2} \ \vee\ x_2=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ x_1+x_2=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=6$$

Problema N.º 4

¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $|4x-6|+|6x-9| \le 15$?

Resolución

> **Observación**
>
> $|4x-6|=|2(2x-3)|=2|2x-3|$
>
> $|6x-9|=|3(2x-3)|=3|2x-3|$

En el problema

$$2|2x-3|+3|2x-3| \le 15$$

$$5|2x-3| \le 15 \leftrightarrow |2x-3| \le 3$$

$$-3 \le 2x-3 \le 3$$

$$\downarrow +3$$

$$0 \le 2x \le 6$$

$$\downarrow \div 2$$

$$0 \le x \le 3$$

$\therefore$ CS=[0; 3]

Problema N.º 5

Halle el conjunto solución de $\dfrac{1}{|x+1|} \le \dfrac{1}{|x-1|}$.

UNMSM 2004-II

Resolución

La inecuación equivale a

$$|x-1| \le |x+1| \ \wedge \ x \ne \pm 1$$

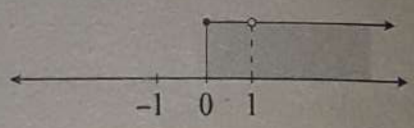
$$(|x-1|)^2 \le (|x+1|)^2 \ \wedge \ x \ne \pm 1$$

$$(x-1)^2 \le (x+1)^2 \ \wedge \ x \ne \pm 1$$

$$x^2-2x+1 \le x^2+2x+1 \ \wedge \ x \ne \pm 1$$

$$0 \le 4x \ \wedge \ x \ne \pm 1$$

$$0 \le x \ \wedge \ x \ne \pm 1$$



$\therefore$ CS=[0; 1⟩ ∪ ⟨1; +∞⟩

NIVEL BÁSICO

1. Reduzca la expresión

$\dfrac{|x-9|+|x-3|}{|1|+|-1|}$ si $x\in\langle 4;7\rangle$.

A) 0 B) −6 C) −3
D) 2 E) 3

2. Si x es un número negativo, simplifique la expresión

$f_{(x)}=|x-5|-|x-1|$.

A) 6 B) −6 C) 4
D) −4 E) $2x-4$

3. Calcule la suma de soluciones de la ecuación $|2x-1|=5$.

A) 5 B) 4 C) −1
D) 1 E) 0

4. Si a, b y c son las soluciones no negativas de la ecuación $||x-3|-5|=2$, entonces el valor de $a+b+c$ es

A) 12 B) 16 C) 6
D) 2 E) 10

UNMSM 2008-II

5. El conjunto solución de la ecuación

$\dfrac{|x-2|+|x|-|x+2|}{|x|}=1$ es

A) $\{0\}$. B) $\{0; 2\}$. C) $\{2\}$.
D) $\{-1; 1\}$. E) ϕ.

6. ¿Cuántas soluciones admite la siguiente ecuación?

$\sqrt{x^2-4x+4}=8-3|x-2|$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

7. Si el conjunto solución de la ecuación $|2x+6|+|x-1|=|x+3|+|3x-3|$ es $\{a; b\}$, calcule $6ab$.

A) −10 B) 10 C) −6
D) 6 E) −30

8. El producto de valores de x que satisfacen la ecuación

$\left|\dfrac{x}{4}-2\right|-3=0$ es

A) 62 B) 72 C) −70
D) −80 E) 80

UNMSM 2005-I

9. Halle la suma de las raíces de la ecuación

$\dfrac{|x|+x^5}{5+4x+x^2}=0$.

A) 2 B) 1 C) 0
D) −1 E) −2

UNMSM 2005-II

10. Indique la menor solución de la ecuación $x^2+80=42|x|$.

A) −2 B) 2 C) 40
D) −42 E) −40

11. Calcule la suma de soluciones enteras de la inecuación $|x-1|<10$.

A) 0
B) 19
C) 30
D) 55
E) 66

12. ¿Cuántos números enteros no pertenecen al conjunto solución de la inecuación $|x-5| \geq |-7|$?

A) 13 B) 12 C) 15
D) 11 E) 114

13. Si el conjunto solución de la inecuación $||x|-3| < 2$ es $\langle a; b\rangle \cup \langle c; d\rangle$, calcule $ab+cd$.

A) 0 B) 5 C) 10
D) 15 E) 20

14. Dé el conjunto solución de la inecuación $|2x|-|x-1| < 0$.

A) $\langle -1; 1\rangle$ B) $\left\langle -1; \frac{1}{3}\right\rangle$ C) $\left\langle -\frac{1}{3}; 1\right\rangle$
D) $\left\langle -1; -\frac{1}{3}\right\rangle$ E) $\langle -1; 3\rangle$

15. El conjunto solución de la inecuación $x^2 \leq 20-|x|$ es

A) $[-5; 4]$. B) $[4; 5]$. C) $[-4; 4]$.
D) $[-4; 5]$. E) $[-5; -4]$.

16. Calcule el valor de $\sqrt{a+b}$ si $[a; b]$ es el conjunto solución de la inecuación $|4x-8|-|2-x| \leq 15$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $\sqrt{10}$

NIVEL INTERMEDIO

17. Se cumple que $|a_n|=n$.
Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.
Además

$$|a_n| = \begin{cases} a_n; & \text{si } n \text{ es par} \\ -a_n; & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Calcule el valor de
$a_1+a_2+a_3+ \ldots +a_{100}$.

A) 5050 B) 1275 C) 100
D) 50 E) 25

18. Si se tiene que $x < 5 < n$, entonces el valor reducido de

$$|x-5|+|x-n|-2\left|x-\frac{n+5}{2}\right| \text{ es}$$

A) 0. B) 5. C) $n+5$.
D) n. E) $n-5$.

19. El conjunto solución de $|x^2-4|=x+2$ es

A) $\{-2; -1; 3\}$ B) $\{-2; 1; -3\}$ C) $\{1; 2; 3\}$
D) $\{2; -3\}$ E) $\{-2; 1; 3\}$

UNMSM 2005-II

20. Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $(x^2-5|x|+6)(|x|^3-5)=0$.

A) 3 B) 6 C) 5
D) 7 E) 4

UNMSM 2005-I

21. Determine la suma de los cuadrados de las soluciones de la ecuación $x^2+2x-2|x+1|=2$.

A) 10 B) 20 C) 22
D) 34 E) 24

UNMSM 2008-II

22. Resuelva el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} |x-2|+|x-3| \leq 3x-12 \\ |x-5| < 4 \end{cases}$$

e indique la suma de las soluciones enteras.

A) 4 B) 1 C) 0
D) 15 E) 24

23. Si el conjunto solución de la inecuación
$|14x-21| > 4x^2 - 12x+1$ es $\langle a; b\rangle$,
calcule el valor de $(b-a)$.

A) 16 B) 8 C) 6
D) 3 E) 1

24. El conjunto solución del sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{4-|4-x|}{|x|+4} < 4 \\ ||x-1|+x| > \sqrt{-x} \end{cases}$$ es

A) ϕ. B) $\langle -1; 0\rangle$. C) $\langle -4; 0]$.
D) $\left\langle -1; -\dfrac{1}{4}\right\rangle$. E) $\langle -1; 0]$.

25. Respecto al conjunto solución de la ecuación $3x|x+1|=x^2+1$, podemos afirmar que

A) es unitario.
B) tiene dos elementos.
C) es vacío.
D) tiene infinitos elementos.
E) sus elementos suman $-3/2$.

26. Al resolver la ecuación $|ax+1|=x+a$ se obtuvo infinitas soluciones. Indique la suma de valores que toma a.

A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) 3

27. Resuelva la ecuación
$||x^2-4|+|x^2-9|-5|=\operatorname{sen}^3\pi$ y dé como respuesta la suma entre la mayor y la menor solución.

A) -5 B) 5 C) 1
D) -1 E) 0

28. Si el conjunto solución de la inecuación
$x^2+|2x+1|+x < 1$ es $\langle a; b\rangle$,
calcule $|a-b|^{|a+b|}$.

A) 0 B) 1 C) 4
D) $\dfrac{1}{4}$ E) 9

29. El conjunto solución de la inecuación
$\left|\dfrac{2|x|-x}{x-1}\right| < \dfrac{1}{x}$ es

A) $\left\langle 0; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

B) $\left\langle 0; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$.

C) $\left\langle \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0\right\rangle$.

D) $\left\langle \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$.

E) $\left\langle 0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\rangle$.

30. Resuelva la inecuación
$\dfrac{|3x-1|+2x}{|x+1|-3x} \geq 0$.

A) $\left[0; \dfrac{1}{4}\right\rangle$

B) $\langle -\infty; 0\rangle$

C) $\left\langle -\infty; \dfrac{1}{4}\right\rangle$

D) $\left\langle -\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}\right]$

E) $[0; +\infty\rangle$

Teoría de logaritmos

Capítulo XIV

Objetivos
- Calcular logaritmos de números reales positivos.
- Conocer y aplicar teoremas sobre logaritmos en la resolución de problemas.
- Resolver ecuaciones logarítmicas.

La invención de los logaritmos, al comienzo del siglo XVII, trajo consigo un enorme ahorro de tiempo. John Napier presentó las primeras tablas de logaritmos en 1614, aunque por no estar en el sistema decimal no fueron de utilidad. Briggs las mejoró presentándolas en forma decimal.

La teoría de logaritmos es una herramienta fundamental para resolver ecuaciones de la forma $a^x=b$, e interviene en química (velocidad de reacciones químicas), en arqueología (antigüedad de un resto fósil), en economía (análisis financiero), entre otros.

Logaritmos en $\mathbb{R}$

El logaritmo de un número N en una base dada b es el exponente x al cual hay que elevar la base para obtener una potencia igual al número N.

Notación $\boxed{\log_b N = x \leftrightarrow b^x = N}$

Condiciones de existencia del logaritmo

$$\boxed{N > 0;\ b > 0 \text{ y } b \neq 1}$$

donde

$\log_b N=x$ se lee: "El logaritmo de N en base b es x"; ($x \in \mathbb{R}$).

Ejemplos

- $\log_2 16=x \leftrightarrow 2^x=16$
  $\leftrightarrow 2^x=2^4$
  $\leftrightarrow x=4$
- $\log_{81} 9=x \leftrightarrow 81^x=9$
  $\leftrightarrow (9^2)^x=9^1$
  $\leftrightarrow 9^{2x}=9^1$
  $\leftrightarrow 2x=1$
  $\leftrightarrow x=1/2$
- $\log_{125} 25=x \leftrightarrow 125^x=25$
  $\leftrightarrow (5^3)^x=5^2$
  $\leftrightarrow 5^{3x}=5^2$
  $\leftrightarrow 3x=2$
  $\leftrightarrow x=2/3$
- $\log_5 1=x \leftrightarrow 5^x=1$
  $\leftrightarrow 5^x=5^0 \leftrightarrow x=0$
- $\log_3 3=x \leftrightarrow 3^x=3^1 \leftrightarrow x=1$

Notar que $\log_5 1=0$ y $\log_3 3=1$

Nota

$\log_2(-4)$; $\log_{(-5)}25$ y $\log_1 3$ no existen en los reales, pues no cumplen las condiciones de existencia.

IDENTIDAD FUNDAMENTAL LOGARÍTMICA

Por definición se tiene

$$\underbrace{\log_b N}_{(I)} = x \leftrightarrow \underbrace{b^x = N}_{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II) y tenemos

$$\boxed{b^{\log_b N} = N}$$

Condición de existencia

$$\boxed{N > 0; b > 0 \text{ y } b \neq 1}$$

Ejemplos

- $2^{\log_2 5} = 5$
- $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 7} = 7$; $(\sqrt{2}+1)^{\log_{(\sqrt{2}+1)} 24} = 24$
- $9^{\log_3 7} = (3^2)^{\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^2$

  $=(7)^2=49$

¿Qué podemos afirmar acerca de $(1-\sqrt{2})^{\log_{(1-\sqrt{2})}\sqrt{5}}$?

Observamos que dicha expresión no existe en los reales, pues $(1-\sqrt{2}) < 0$ (negativo).

Propiedades

Considerando que las expresiones a utilizarse existen en los reales (cumplen las condiciones de existencia) se cumple lo siguiente:

1. $\boxed{\log_b 1 = 0 \text{ y } \log_b b = 1}$

Ejemplos

- $\log_6 1 = 0$; $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$; $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$
- $\log_7 7 = 1$; $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 1$

2. $\boxed{\log_b(A\times B) = \log_b A + \log_b B}$

Ejemplos

- $\log_5 12 = \log_5(2\times 6) = \log_5 2 + \log_5 6$
- $\log_{1/2}(3ab) = \log_{1/2}3 + \log_{1/2}a + \log_{1/2}b$
- $\log_{15}3 + \log_{15}5 = \log_{15}(3\times 5) = \log_{15}15 = 1$
- $\log_{30}2 + \log_{30}3 + \log_{30}5 = \log_{30}(2\times 3\times 5)$

  $=\log_{30}30$

  $=1$
- $\log_3(x+2)(x+5) = \log_3(x+2) + \log_3(x+5)$;

  $x > 0$
- $\log_2(x-3) + \log_2(x+3) = \log_2(x-3)(x+3)$

  $=\log_2(x^2-9)$; $x > 3$

3. $\boxed{\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B}$

Ejemplos

- $\log_4(7/4) = \log_4 7 - \log_4 4 = \log_4 7 - 1$
- $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{x-1}\right) = \log_{\frac{1}{4}} a - \log_{\frac{1}{4}}(x-1)$;

  $a > 0$ y $x > 1$
- $\log_2 26 - \log_2 13 = \log_2\left(\frac{26}{13}\right) = \log_2 2 = 1$
- $\log_3(x^2-1) - \log_3(x-1) = \log_3\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$; $x>1$

  $=\log_3(x+1)$

4. Regla del sombrero

$$\boxed{\log_b A^n = n\log_b A}$$

Ejemplos

- $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4\times 1 = 4$
- $\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \log_5 5^{2/3}$
  $= \frac{2}{3}\log_5 5 = \frac{2}{3}\times 1$
  $= \frac{2}{3}$

También

A. $$\boxed{\log_{b^m} A^n = \frac{n}{m}\log_b A}$$

Ejemplos

- $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}\log_2 2 = \frac{3}{2}\times 1 = \frac{3}{2}$
- $\log_{81} 27 = \log_{3^4} 3^3 = \frac{3}{4}\log_3 3 = \frac{3}{4}\times 1 = \frac{3}{4}$
- $\log_{\frac{1}{4}} x^4 = 4\log_{\frac{1}{4}} |x|$
- $\log_5 (x-2)^2 = 2\log_5 |x-2|$

B. $$\boxed{\log_b A = \log_{b^m} A^n = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{A}}$$

Ejemplos

- $\log_{\sqrt[4]{3}} 3 = \log_{\sqrt[4]{3}^4} 3^4 = \log_3 3^4$
  $= 4\log_3 3 = 4\times 1$
  $= 4$
- $2^{\log_8 27} = 2^{\log_{\sqrt[3]{8}} \sqrt[3]{27}} = 2^{\log_2 3}$
  $= 3$

5. Regla de la cadena

$$\boxed{\log_b A \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d A}$$

Ejemplos

- $\log_3 25 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 = \log_5 25 = \log_5 5^2$
  $= 2\log_5 5 = 2\cdot 1$
  $= 2$
- $\log_7 64 \cdot \log_{32} 7 = \log_{32} 64 = \log_{2^5} 2^6$
  $= \frac{6}{5}\log_2 2 = \frac{6}{5}\cdot 1$
  $= \frac{6}{5}$

Consecuencias

A. De $\log_B A \cdot \log_A B = 1$ se tiene

$$\boxed{\log_B A = \frac{1}{\log_A B}}$$

B. De $\log_C B \cdot \log_B A = \log_C A$ se tiene

$$\boxed{\log_B A = \frac{\log_C A}{\log_C B}}$$ cambio de base

Ejemplos

- $\log_3 4 = \frac{1}{\log_4 3}$
- $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2} = \frac{1}{\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}\right)}$
- $\log_2 6 = \frac{\log_5 6}{\log_5 2}$
- $\log_{45} 12 = \frac{\log_7 12}{\log_7 45}$
- $\frac{\log_4 12}{\log_4 8} = \log_8 12$
- $\frac{\log_{\sqrt{2}} 9}{\log_{\sqrt{2}} 3} = \log_3 9 = 2$

6. Regla de intercambio

$$\boxed{A^{\log_b N} = N^{\log_b A}}$$

Ejemplos

- $4^{\log_3 6} = 6^{\log_3 4}$; $\sqrt{2}^{\log_8 5} = 5^{\log_8 \sqrt{2}}$
- $\dfrac{3^{\log_2 5} + 5^{\log_2 3}}{3^{\log_4 25}} = \dfrac{3^{\log_2 5} + 3^{\log_2 5}}{3^{\log_{\sqrt{4}} \sqrt{25}}}$

$$= \frac{2 \cdot \cancel{3^{\log_2 5}}}{\cancel{3^{\log_2 5}}} = 2$$

Cologaritmo

El cologaritmo de un número positivo N, en base b, es el logaritmo del inverso multiplicativo de N, en la misma base b.

Notación

$$\boxed{\operatorname{colog}_b N = \log_b\left(\frac{1}{N}\right)} \quad N > 0; b > 0 \text{ y } b \neq 1$$

donde

$\operatorname{colog}_b N = x$ se lee: "El cologaritmo de N en base b es x".

Ejemplos

- $\operatorname{colog}_3 9 = \log_3\left(\frac{1}{9}\right) = \log_3 3^{-2} = -2$
- $\operatorname{colog}_5\left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

Consecuencia

$$\boxed{\operatorname{colog}_b N = -\log_b N}$$

Ejemplos

- $\operatorname{colog}_3 81 = -\log_3 81 = -4$
- $\operatorname{colog}_2 32 = -\log_2 32 = -5$
- $\operatorname{colog}_{25} 125 = -\log_{5^2} 5^3 = -\dfrac{3}{2}$

Antilogaritmo

El antilogaritmo de un número x en base b es lo que resulta de elevar a la base b el exponente x.

Notación

$$\boxed{\operatorname{antilog}_b x = b^x} \quad b > 0; b \neq 1 \text{ y } x \in \mathbb{R}$$

Ejemplos

- $\operatorname{antilog}_2 4 = 2^4 = 16$
- $\operatorname{antilog}_{\left(\frac{1}{5}\right)}(-3) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$
- $\operatorname{antilog}_{36}\left(\frac{1}{2}\right) = 36^{\frac{1}{2}} = 6$
- $\operatorname{antilog}_5(\log_5 12) = 5^{\log_5 12} = 12$
- $\log_5(\operatorname{antilog}_5 12) = \log_5(5^{12}) = 12$

Sistemas de logaritmos

Cada base positiva y diferente de la unidad genera un sistema de logaritmos, es decir, existen infinitos sistemas logarítmicos y los más importantes son:

Sistema decimal, vulgar o de Briggs

Fue creado por el matemático inglés Henry Briggs y tiene como base al número 10.

Notación

$$\boxed{\log_{10} x = \log x}\ ; \ x > 0$$

Ejemplos

- $\log_{10} 5 = \log 5$; $\log_{10} 12 = \log 12$
- $\log_{10} 1 = \log 1 = 0$
- $\log_{10} 10 = \log 10 = 1$
- $\log_{10} 100 = \log 10^2 = 2$
- $\log_{10} 2 = \log 2 = 0{,}3010...$

Sistema natural, neperiano o hiperbólico

Fue creado por el matemático escocés John Napier y tiene como base al número irracional $e=2{,}7181828...$

Notación

$$\boxed{\log_e x=\ln x}$$

Ejemplos

- $\log_e=\ln 5$
- $\log_e 1{,}2=\ln 1{,}2$
- $\log_e 17=\ln 17$

Propiedad

$$\boxed{\ln e=1}$$

Ejemplos

- $\ln e^x=x\ln e=x$
- $\ln\sqrt{e}=\ln e^{1/2}=\dfrac{1}{2}$
- $e^{\ln 6}=6$
- $\ln(2e)=\ln 2+\ln e$

  $=\ln 2+1$

Observación

Como se puede notar, si la base es el número 10 ($\log x$), este no se escribe ya que se sobreentiende, así mismo si la base es el número e ($\ln x$), este no se escribe, se sobreentiende.

Ecuaciones logarítmicas

También denominadas ecuaciones trascendentes. Se caracterizan porque la incógnita está afectada por el operador logaritmo.

Ejemplos

- $\log_5(3x-1)=1+\log_5(x-2)$
- $x^2+\log x=12$
- $x^{\ln x}=e^4$
- $\operatorname{colog}_3 x+125=\operatorname{antilog}_5 x-\log_3 x$

Resolución de una ecuación logarítmica

Para resolver una ecuación logarítmica se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1.^{er} paso
Condiciones de existencia del logaritmo.

2.^{o} paso
Se despeja la incógnita aplicando las propiedades de logaritmos.

3.^{er} paso
Para dar el conjunto solución se considera el valor o valores de la incógnita que cumplan con las condiciones de existencia del logaritmo.

Aplicación 1

Resuelva la ecuación
$\log_x(x+2)=2.$

Resolución

1.^{er} paso
Condiciones de existencia

$$x+2>0\ \wedge\ x>0\ \wedge\ x\neq 1$$

$$\underbrace{x>-2\wedge x>0}_{x>0}\ \wedge\ x\neq 1$$

$$\wedge\ x\neq 1$$

2.^{o} paso
En la ecuación, despejando la incógnita por definición de logaritmos, se tiene

$$x+2=x^2\ \rightarrow\ x^2-x-2=0$$
$$\rightarrow\ (x-2)(x+1)=0$$
$$\rightarrow\ x=2\ \vee\ x=-1$$

3.^{er} paso

Del primer paso $x > 0 \wedge x \neq 1$, lo que implica que la única solución es $x=2$.

$\therefore$ CS={2}

Propiedad

$$\boxed{\log_b A = \log_b B \leftrightarrow A=B}$$

Ejemplos

- $\log_3 x = \log_3 5 \leftrightarrow x=5$
- $\log_{1/2}(x-1) = \log_{1/2} 6 \leftrightarrow x-1=6$
  $\leftrightarrow x=7$

Aplicación 2

Resuelva la ecuación

$\log_2(2x-1) = \log_2 x^2$.

Resolución

1.^{er} paso

Condiciones de existencia

$$2x-1 > 0 \wedge x^2 > 0$$

$$\underbrace{x > \frac{1}{2} \wedge x \neq 0}_{x > \frac{1}{2}}$$

2.^{o} paso

Despejando la incógnita de la ecuación se tiene

$2x-1=x^2$

$\rightarrow x^2-2x+1=0$

$\rightarrow (x-1)^2=0$

$\rightarrow x-1=0$

$\rightarrow x=1$

3.^{er} paso

Del primer paso $x > 1/2$, lo que implica que $x=1$ sí es solución.

$\therefore$ CS={1}

Observación

Sabemos que

$\log_3(-5)^2 = \log(5)^2 = \log_3 25$

Pero la igualdad $2\log_3(-5) = 2\log(-5)$ sería incorrecta, pues el primer miembro existe pero no el segundo miembro; para no llegar a estas contradicciones se tendrá en cuenta que

$$\log_3 x^2 = 2\log_3 |x|; x \neq 0$$

Así

- $\log_3(-5)^2 = 2\log_3|-5| = 2\log_3 5$
- $\log_5(-4)^2 = 2\log_5|-4| = 2\log_5 4$
- $\log_7(-3)^2 = 2\log_7|-3| = 2\log_7 3$
- $\log_2 b^2 = 2\log_2|b|$

Aplicación 3

Halle la suma de soluciones de la ecuación

$\log_5(x^2-4x+4) = 2+\log_5 4$.

Resolución

1.^{er} paso

Condición de existencia

$$x^2-4x+4 > 0 \leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \leftrightarrow x \in \mathbb{R}-\{2\}$$

2.^{o} paso

Despejamos la incógnita pero la ecuación equivale a

$$\log_5(x-2)^2 = 2+\log_5 2^2$$

$$2\log_5|x-2| = 2+2\log_5 2$$

$$\cancel{2}\log_5|x-2| = \cancel{2}(1+\log_5 2)$$

$$\log_5 2$$

$$\log_5|x-2| = \log_5 10$$

$$|x-2| = 10$$

$$x-2=10 \vee x-2=-10$$

$$x_1=12 \vee x_2=-8$$

Del primer paso $x \in \mathbb{R}-\{2\}$, entonces $x_1=12 \vee x_2=8$ son soluciones.

$\therefore x_1+x_2=4$

Problemas Resueltos

Problema N.° 1

Si n es un número entero positivo y

$2^{\log_2 4}-1=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+...+\log_2 2^n$.

halle el valor de $\log_{1/n}4$.

UNMSM 2012-II

Resolución

Calculamos n de la igualdad

$$\underbrace{2^{\log_2 4}}-1=\overbrace{\log_2 2^1}+\overbrace{\log_2 2^2}+\overbrace{\log_2 2^3}+...+\overbrace{\log_2 2^n}$$

$$4-1=1+2+3+...+n;\ (\log_2 2=1)$$

$$3=\frac{n(n+1)}{2};\ \{n\in\mathbb{Z}^+ \leftarrow \text{por dato}\}$$

$$2\times 3=n(n+1)\ \rightarrow\ n=2$$

Nos piden

$$\log_{\frac{1}{n}}4=\log_{\frac{1}{2}}4=\log_{2^{-1}}2^2=\frac{2}{-1}\log_2 2$$

$$\therefore\ \log_{\frac{1}{n}}4=-2$$

Problema N.° 2

Si $\log_3 5=x$, ¿cuál es el valor de $\log_{45}243$?

UNMSM 2001

Resolución

Como el dato está en base 3 lo que piden también lo pasamos en base 3, así

$$\log_{45}243=\frac{\log_3 243}{\log_3 45}=\frac{\overbrace{\log_3 3^5}}{\log_3 9\times 5}=\frac{5}{\log_3 9+\log_3 5}$$

$$\log_{45}243=\frac{5}{\overbrace{\log_3 3^2}+x}=\frac{5}{2+x}$$

$$\therefore\ \log_{45}243=\frac{5}{x+2}$$

Problema N.° 3

Si $2^{\log_3 n}=m$, entonces calcule el valor de

$\sqrt{3^{\log_n m}+7m^{\log_n 3}}$.

Resolución

Reducimos en cada sumando del radicando

- $3^{\log_n m}=3^{\overbrace{\log_n 2}^{\log_3 n}}=3^{\log_3 n\,\log_n 2}=3^{\log_3 2}$

  $\rightarrow\ 3^{\log_n m}=2$

- $m^{\log_n 3}=\left(2^{\log_3 n}\right)^{\log_n 3}=2^{\log_3 n\cdot\log_n 3}=2^1$

  $\rightarrow\ m^{\log_n 3}=2$

Luego, en lo pedido se tiene

$$\sqrt{3^{\log_n m}+7m^{\log_n 3}}=\sqrt{2+7\times 2}=\sqrt{16}=4$$

Problema N.° 4

Resuelva la ecuación

$\log(2-x)+\log(3-x)=1-\text{colog}2$.

Resolución

$1.^{\text{er}}$ paso

Condiciones de existencia

$$2-x>0\ \wedge\ 3-x>0$$

$$\underbrace{2>x\ \wedge\ 3>x}_{2>x}$$

$2.^{\text{o}}$ paso

Despejamos la incógnita de la ecuación

$$\log(2-x)(3-x)=1-(-\log 2)$$

$$\log(6-5x+x^2)=\log 10+\log 2$$

$$\log(6-5x+x^2)=\log(10\cdot 2)$$

$$6-5x+x^2=20$$

$$x^2-5x-14=0$$

$$(x-7)(x+2)=0\ \rightarrow\ x=7\ \vee\ x=-2$$

$3.^{\text{er}}$ paso

Del primer paso, $x<2$, lo que implica que la única solución es $x=-2$.

$$\therefore\ \text{CS}=\{-2\}$$

Problema N.° 5

Si $\log_{(x+2)}(x+2)+\log_{(x+2)}4(x+2)=4$,

halle el valor de $x^2+12x+1$.

UNMSM-2002

Resolución

> **Observación**
> Una ecuación logarítmica también se puede resolver sin tener en cuenta las condiciones de existencia, pero sí el valor o valores obtenidos para la incógnita se deben reemplazar en la ecuación inicial para determinar si son o no solución.

De la ecuación se tiene

$$\underbrace{\log_{(x+2)}(x+2)}_{1}+\log_{(x+2)}4+\underbrace{\log_{(x+2)}(x+2)}_{1}=4$$

$$2+\log_{(x+2)}4=4 \rightarrow \log_{(x+2)}4=2$$

$$\rightarrow 4=(x+2)^2 \rightarrow \pm 2=x+2$$

$$2=x+2 \vee -2=x+2$$

$$\rightarrow 0=x \vee -4=x$$

Ahora al reemplazar en la ecuación inicial, solo lo verifica $x=0$ (es la única solución).

$$\therefore \quad x^2+12x+1=0^2+12\cdot 0+1=1$$

Problema N.° 6

Si la ecuación cuadrática en x

$$(2\log_5 m)x^2+(2\log_5 m)x+1=0$$

presenta solución única, entonces, ¿cuál será el valor de m?

Resolución

Si la ecuación tiene solución única, entonces

$$\Delta=0 \rightarrow (2\log_5 m)^2-4(2\log_5 m)(1)=0$$

$$\rightarrow 4\left[(\log_5 m)^2-2\log_5 m\right]=0$$

$$\rightarrow \log_5 m(\log_5 m-2)=0$$

Como la ecuación es cuadrática

$$\log_5 m\neq 0 \wedge \underbrace{\log_5 m-2=0}_{\log_5 m=2}$$

$$m=5^2$$

$$\therefore \quad m=25$$

Problemas Propuestos

NIVEL BÁSICO

1. Calcule el logaritmo de 1/64 en base 2.

A) 16 B) –16 C) –64
D) –6 E) –5

2. Si se sabe que $\log_a 5=3$ y $\log_2 b=4$, entonces determine $\log_{(b-1)}(3a^3)$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 1/2

3. Determine el valor reducido de la expresión
$E=\log_5 25+\log 10000\times\log_{16}2$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

4. Calcule el resultado que se obtiene al efectuar
$\log_2(2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10)-\log_2(2\cdot3\cdot4\cdot5)$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

5. Si tenemos que
$A=\log_{ab}a+\log_{ba}b$ y
$B=\log_{mn}mnp-\log_{mn}p$,
entonces determine $\log_{(A+B)}(AB)$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 0 E) 1

6. Determine la expresión equivalente de
$\left[\log_b a^2+\left(\log_{b^2}a\right)\left(\log_b b^4\right)\right]$.

A) $2\log_b a$ B) $3\log_b a$ C) $4\log_b a$
D) $\log_b a$ E) $5\log_b a$

7. Indique la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones

I. $\log_6 12+\log_6 18=3$

II. $\log 12300-\log 123=2$

III. $\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt[5]{2}=\dfrac{3}{5}$

IV. $\log_{\frac{1}{5}}3=\log_5\left(\dfrac{1}{3}\right)$

A) VFVV B) VVFV C) FVVV
D) VVVF E) VVVV

8. Si se tiene que
$M=3^{\log_3 5}+10^{\log 2}-49^{\log_7 2}$,
calcule el valor de $\log_{\sqrt[3]{3}}M$.

A) 1/3 B) 3 C) 9
D) 0 E) 1/2

9. Reduzca la expresión
$\dfrac{\log_3 5\log_5 7\log_7 27}{\log 3\log_9 7\log_7 10}$.

A) 3 B) 6 C) 2
D) 1 E) 4

10. Si $\log 2=a$, entonces calcule $\log 5$ en términos de a.

A) $1+a$ B) $a+3$ C) $-a$
D) $1-a$ E) $2-a$

11. Determine el $\log_{70}4$, en términos de m y n, si se sabe que
$\log_{70}5=m$ y $\log_{70}7=n$.

A) $2mn$ B) $2-2mn$ C) $1-n-m$
D) $2-2m-2n$ E) $2+m-n$

12. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de
$3^{\log_5 2}-2^{\log_5 3}+\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{2}$?

A) 2 B) 1/2 C) 3
D) 4 E) 1/3

13. Simplifique la expresión
$E=\log_3 5^{\log_7 3^{\log_5 7}}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 7

14. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
I. $\log(a+b)=\log a+\log b$
II. $\log(a+b)=\log a\cdot\log b$
III. $\log(a-b)=\log a\div\log b$

A) VFV B) VVV C) FFV
D) VFF E) FFF

15. Determine el valor de m si se tiene que
$\log_4 m+\log_8 m+\log_{64} m=3$.

A) 6 B) 8 C) 1/8
D) 1/3 E) 9

16. Dado el siguiente sistema
$$\begin{cases}\log(ab)=5\\ \log\left(\dfrac{a}{b}\right)=3\end{cases}$$
calcule el valor de $9a+10^3b$.

A) 2×10^4 B) 10^4 C) 10^6
D) 10^5 E) 4×10^5

17. Determine las proposiciones verdaderas (Considere $e=2,71818...$).
I. $\dfrac{\log 3}{\log 2}=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 2}$
II. $\log_e x=\ln x$; $x>0$
III. $\ln e=1$
IV. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$; $a>0, b>0$

A) II, III y IV B) I y II C) I, II y III
D) I y IV E) todas

18. Calcule el valor de $a+1$ para que se cumpla la igualdad
$\ln(\log_2(a-3))=\log_3 1$.

A) 7 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

19. Determine el valor de k en la ecuación
$125^{\log_5(k+3)}=8$.

A) -3 B) $\sqrt[3]{5}$ C) 3
D) -1 E) -2

20. Calcule el valor de n en
$\log_4(2+\log_3(\log_2(2n)))=1$.

A) 4^6 B) 2^8 C) 6^3
D) 2^{10} E) 2^9

NIVEL INTERMEDIO

21. Calcule el valor reducido de
$(\log 10!-\log 9!)(\log_{12}12!-\log_{12}11!)$.
Tenga en cuenta que
$n!=1\times2\times3\times...\times n$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 12

22. Calcule la expresión equivalente de
$$\frac{\log 2+\log 3+\log 4+...+\log 10}{\log_\pi 2+\log_\pi 3+\log_\pi 4+...+\log_\pi 10}.$$

A) $\log_2\pi$ B) $\log_\pi 10$ C) $\log\pi$
D) $\log_\pi 20$ E) $\log_e\pi$

23. Simplifique

$$\frac{1}{1+\log_3 20}+\frac{2}{2+\log_2 15}+\frac{1}{1+\log_5 12}.$$

A) -1 B) 2 C) 0
D) 1 E) 3

24. Calcule el valor de a^n-b^m si se tiene que

$$\log_{\left(\frac{a}{b}\right)}(ab)=\frac{m+n}{m-n}$$

Considere que a y b son enteros positivos diferentes.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 1/2

25. Si $\log_5 3=1/n$, el valor de $\log_{45}243$ es

A) $\frac{5}{(n+4)}$. B) $\frac{4}{(n+5)}$. C) $\frac{5}{(n+2)}$.
D) $\frac{4}{(n+7)}$. E) $\frac{5}{(n+3)}$.

26. Si $\log\overline{m0}=a$, calcule el equivalente de $\log_m\overline{m00}$.

A) $\frac{a}{a-2}$ B) $\frac{a-1}{a-2}$ C) $\frac{a+2}{a}$
D) $\frac{a-1}{a+1}$ E) $\frac{a+1}{a-1}$

27. Si $\log_5 6=2m$; $\log_5 14=2n$; $\log_5 21=2p$, halle $\log_5 2$ en términos de m; n y p.

A) $mn-p$ B) $m-np$ C) mnp
D) $m+n-p$ E) $m+n+p$

28. Reduzca la expresión

$$M=\log_3 36^{\log_7 3^{\log_6 49}}.$$

A) -1 B) 4 C) 2
D) 5 E) 6

29. Si se tiene que $\log_m n+\log_n m=2$, halle el valor de

$$\ln\left(\frac{n}{m}\right)+\left(\ln\left(\frac{me}{n}\right)\right)^2$$

(e: número neperiano).

A) 0 B) $2e$ C) 3
D) e E) 1

30. Si $x_1, x_2, x_3,..., x_7$ son n números reales positivos y la media aritmética de sus logaritmos en base 10 es 3, ¿cuál es el valor de la media geométrica de $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$?

A) 100 B) 4000 C) 1000
D) 5000 E) 7000

31. Si $\log a$, $\log b$ y $\log c$ están en progresión aritmética (en dicho orden), entonces determine la relación que se establece entre a, b y c.

A) $ac=b^3$ B) $bc=a^2$ C) $ab=c^2$
D) $bc=a^3$ E) $ac=b^2$

32. Los números positivos x e y satisfacen el sistema

$$\begin{cases} 7\log_3 x+7\log_3 y=0 \\ \log_5 x-\log_5 y=2 \end{cases}$$

Halle $x+y$.

A) 125/4 B) 26/5 C) 25/2
D) 1 E) 24/5

33. Determine el menor valor de x si

$$\log x^{\log x}-\log(100x)=0.$$

A) 0,01 B) 0,002 C) 100
D) 0,2 E) 0,1

34. Se definen los operadores
$x_{(n;\,m)}=\operatorname{colog}_n m$ y
$y_{(a;\,b)}=\operatorname{antilog}_b a$.
Calcule el valor de
$$\frac{x_{(2;3)}\,x_{(3;4)}\,x_{(4;5)}\cdots x_{(7;8)}}{y_{(2;3)}\,y_{\left(\frac{1}{2};3\right)}\,y_{(3;4)}\,y_{\left(\frac{1}{3};4\right)}}.$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 6

35. Determine el producto de las soluciones de la ecuación
$x^{\log x}=\operatorname{antilog}4$.

A) 4 B) 1 C) 2
D) 8 E) 16

36. Si $\ln a$ y $\ln b$ son las raíces de la ecuación
$2x^2-7x+4=0$,
halle el valor de
$\ln(a+b)(\ln e^2-\ln a^{\ln b})+\ln(ab)^2$.

A) $2e$ B) 5 C) 7
D) 6 E) e

37. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda. Considere que $\forall\, a; b \in \mathbb{R}-\{0\}$.
I. $\log(ab)=\log|a|+\log|b|$
II. $\log(a/b)=\log|a|-\log|b|$
III. $\log x^2=2\log|x|$; $\forall\, x \in \mathbb{R}-\{0\}$

A) VFV B) VVF C) FFV
D) VFF E) VVV

38. Se tiene que
$\log(abc)=\log(ab)\log(ac)\log(bc)=1$
Calcule el valor de
$$\frac{1}{\log a+\log c^{\log b}}+\frac{1}{\log b+\log a^{\log c}}+\frac{1}{\log c+\log b^{\log a}}$$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 1/3

39. Se define que
$$f_{(n)}=\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k}{k+1}\right)^k;\ n\in\mathbb{Z}^+,$$
entonces determine
$$\frac{10^{f(n)}(n+1)^n}{n!}.$$

A) n B) n^n C) $n-1$
D) 1 E) 2

40. Sabiendo que
$$\log^2_{(2b)}a+\log^2_c(2b)+\log^2_a c=\log_c a+\log_{(2b)}c+\log_a(2b),$$
determine el valor de
$$\frac{a^2+b^2-2ab}{b^2-bc};\ \{a;b;c\}\subset[2;+8[$$

A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) $-1/2$

41. Si $\log(1-\operatorname{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha)=a$,
calcule $\log|\operatorname{sen}2\alpha|$ en términos de a.

A) $\dfrac{(a+\log 2)}{2}$
B) $\dfrac{(a-\log 2)}{2}$
C) $(a+\log 2)$
D) $\dfrac{(a\log 2)}{2}$
E) $\dfrac{(2a+\log 2)}{2}$

42. Se tiene que.

$$S=\underbrace{\frac{\log_a 10}{\log \overline{a0}}+\frac{\log_{\overline{a0}} 10}{\log \overline{a00}}+\frac{\log_{\overline{a00}} 10}{\log \overline{a000}}+\ldots}_{10 \text{ sumandos}}$$

donde a es cifra,
entonces calcule $\dfrac{(10+\log a)S}{10}$.

A) 1 B) $\log_a 10$ C) $\log a$
D) $\log \overline{a0}$ E) $\log_{\overline{a0}} 10$

43. Determine el producto de las soluciones que presenta la ecuación

$x^{3+\ln x}=\pi^{\log^2 x}$.

A) $\dfrac{1}{e^3}$ B) $\dfrac{1}{\pi^3}$ C) e^{π}
D) e^3 E) $\dfrac{1}{e^2}$

44. Luego de resolver la ecuación logarítmica

$$\frac{\ln|x|^{|\ln|x||}}{\log_{|x|} e}+\frac{\ln|x|^2}{\log_{x^3} e}+\frac{4\log|x|^3}{\log(\text{antilog}_e 1)}=-7,$$

determine el valor de

$$e^{\log x}-\frac{1}{e^{\log e}}$$

(e: número neperiano).

A) 1 B) 3 C) e
D) e^{-1} E) 0

45. Calcule el menor valor de $a+b+c+d$ si tenemos que $\{a; b; c; d\} \in \mathbb{R}^+$; además

$$\frac{\log\sqrt{a}}{\log\sqrt{e}}+\frac{\log\sqrt[3]{b}}{\log\sqrt[3]{e}}+\frac{\log\sqrt[4]{c}}{\log\sqrt[4]{e}}+\frac{\log\sqrt[5]{d}}{\log\sqrt[5]{e}}=16.$$

A) $2e^4$ B) $4e^2$ C) $4e^4$
D) e^4 E) e^8

46. Si las raíces de la ecuación $x^2-5x+2=0$ son a y b, calcule el valor de

$$\frac{1}{\log_{(a+1)} ab}+\frac{1}{\log_{(b+1)} ab}.$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

47. Al resolver la ecuación logarítmica

$$81^{\log_3^x}-4\times 9^{\log_3^x}+3^{\log_2^7}=7^{\log_2^3}+4$$

se obtiene que su conjunto solución tiene

A) 2 elementos.
B) 4 elementos.
C) 3 elementos.
D) única solución.
E) más de 4 soluciones.

48. Si α es la solución de la ecuación $\log x_2+\log x_3=\log 6$, entonces, ¿cuál será el valor de $\alpha^{\log_3^{10}}$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

49. Si x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación

$$\log x+\frac{1}{\log x}=3,$$

calcule el valor de

$$\left(\frac{\log x_1}{x_1}\right)\left(\frac{\log x_2}{x_2}\right).$$

A) 0,001
B) 0,1
C) 0,01
D) 1000
E) 1

Teoría de funciones

Capítulo XV

OBJETIVOS

- Definir acertadamente una función, su dominio y su rango.
- Conocer la dependencia que existe entre las variables y hallar el dominio y rango de una función.
- Graficar correctamente una función elemental.

Una gran cantidad de problemas relacionados con la administración, la economía, la biología, etc., requieren interpretarlos en términos matemáticos, como por ejemplo la variación de la temperatura, el movimiento de los planetas, las ondas cerebrales, los ciclos comerciales, etc.

En muchas situaciones el valor de una cantidad puede depender de una o más cantidades; por ejemplo, la reacción de un organismo frente a un fármaco depende de la dosis del medicamento.

Veamos un ejemplo de una modelación, la regla de Cowling es un método para calcular dosis pediátricas. Si a denota la dosis para un adulto (en mg) y t es la edad del niño (en años), entonces la dosis infantil está dada por

$$\boxed{D(t)=\left(\frac{t+1}{24}\right)\cdot a}$$

Definiciones previas

PAR ORDENADO

Es una colección de dos elementos cualesquiera con un orden definido, los cuales son denominados componentes y se denota de la siguiente manera.

$(a; b)$

- b → Segunda componente
- a → Primera componente

Ejemplos

De los pares ordenados $(3; 5)$, $(6; 7)$ y $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$

- Sus primeras componentes son: 3; 6 y −2.
- Sus segundas componentes son: 5; 7 y $\frac{1}{3}$

Teorema

$(a; b)=(c; d) \quad \leftrightarrow \quad a=c \wedge b=d$

Aplicación 1

Calcule x e y si los pares ordenados $(4x-1; 30)$ y $(31; y+2)$ son iguales.

Resolución

Por dato: $(4x-1; 30)=(31; y+2)$, luego

por teorema tenemos

$$\underbrace{4x-1=31}_{x=8} \wedge \underbrace{30=y+2}_{y=28}$$

PRODUCTO CARTESIANO

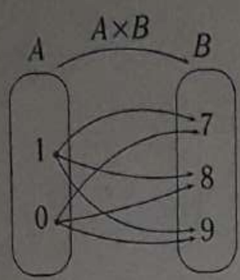
Sean A y B dos conjuntos no vacíos. El producto cartesiano de A con B denotado por $A\times B$ está dado por todos los pares ordenados $(a; b)$ de modo que $a \in A \wedge b \in B$, es decir

$$A\times B=\{(a; b)/a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ejemplo

Sean los conjuntos $A=\{1; 0\}$ y $B=\{7; 8; 9\}$.

Por diagrama de Venn-Euler tendremos



de donde se tiene que

$A\times B=\{(1; 7), (1; 8), (1; 9), (0; 7), (0; 8), (0; 9)\}$

de manera similar se obtiene

$B\times A=\{(9; 1), (9; 0), (8; 1), (8; 0), (7; 1), (7; 0)\}$

Propiedades

Si A y B son dos conjuntos se cumple:

- $A\times B \neq B\times A$
- $A\times B=B\times A \ \rightarrow \ A=B$
- $n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$

donde $n(A)$ representa el número de elementos del conjunto A.

RELACIÓN

Denominada también relación binaria. Se define como relación de A en B a todo subconjunto del producto cartesiano $A\times B$, donde A y B son conjuntos no vacíos.

R es una relación de A en $B \ \leftrightarrow \ R\subset A\times B$

Ejemplo

Sean $A=\{2; 8\}$ y $B=\{0; 1; 5\}$ de donde obtenemos

$A\times B=\{(2; 0), (2; 1), (2; 5), (8; 0), (8; 1), (8; 5)\}$

Algunas relaciones de A en B serán

$R_1=\{(2; 0), (2; 5)\} \subset A\times B$

$R_2=\{(2; 1), (8; 0), (8; 5), (2; 5)\} \subset A\times B$

$R_3=\{(2; 1), (2; 5), (8; 5)\} \subset A\times B$

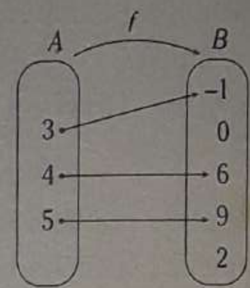
Función

Una relación f de A en B se denomina función f de A en B si para cada $x \in A$ le corresponde un único $y \in B$ y $(x; y) \in f$.

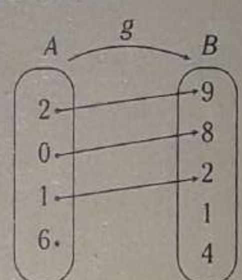
Ejemplos

1. Vemos que f representa una función ya que participan todos los elementos de A, además para cada $x \in A$, existe un único $y \in B$.

   $f=\{(3; -1), (4; 6), (5; 9)\}$

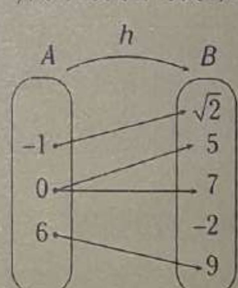


2. Vemos que g no representa a una función debido a que el elemento $6 \in A$ no tiene correspondencia en B.



3. h no representa a una función debido a que el elemento $0 \in A$ tiene dos elementos correspondientes en B.

   $h=\left\{\left(-1; \sqrt{2}\right), (0; 5), (0; 7), (6; 9)\right\}$



Teorema

La relación f con $(a; b) \in f$ y $(a; c) \in f$

es una función solo si $\boxed{b=c}$

Aplicación 2

Determine n si f es una función, tal que

$f=\{(2; 5), (-1; 2), (-1; n), (0; n)\}$.

Resolución

Como $(-1; 2) \in f$ y $(-1; n) \in f \rightarrow n=2$.

Dominio de una función

Denominado también conjunto de preimágenes. Está formado por todos los primeros componentes de los pares ordenados pertenecientes a la función.

Notación

Sea la función $f: A \rightarrow B$.

$$\boxed{D_f=\text{Dom}f=\{x \in A/(x; y) \in f\}=A}$$

Rango de una función

Denominado también conjunto de imágenes. Está formado por todos los segundos componentes de los pares ordenados pertenecientes a la función.

Notación

Sea la función $f: A \rightarrow B$.

$$\boxed{R_f=\text{Ran}f=\{y \in B/(x; y) \in f\} \subset B}$$

Ejemplos

1. Dada la función

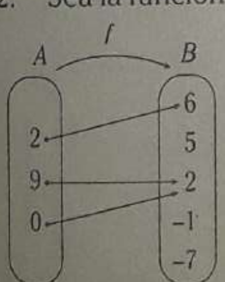
   $f=\{(2; 9), (-1; 6), (3; 5), (8; 5)\}$

   Aquí tenemos

   $\text{Dom}f=\{2; -1; 3; 8\}$

   $\text{Ran}f=\{9; 6; 5\}$

2. Sea la función



De donde

$f=\{(2; 6), (9; 2), (0; 2)\}$

Luego

$\text{Dom}f=\{2; 9; 0\}=A$

$\text{Ran}f=\{6; 2\} \subset B$

Regla de correspondencia

Es aquella fórmula matemática que representa la relación que existe entre los elementos del dominio y el rango de la función.

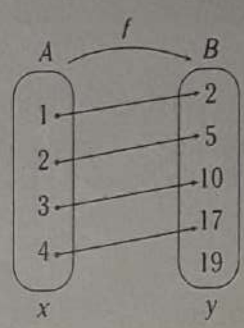
$$\boxed{\text{Sea la función } f: A \rightarrow B, \text{ si } (x; y) \in f, \text{ entonces } y=f_{(x)}}$$

donde

- A: conjunto de partida y $\text{Dom}f=A$.
- B: conjunto de llegada y $\text{Ran}f \subset B$.
- x: variable independiente o preimagen de y vía f.
- y: variable dependiente o imagen de x vía f.

Ejemplos

1.



$f_{(1)}=2=1^2+1$

$f_{(2)}=5=2^2+1$

$f_{(3)}=10=3^2+1$

$f_{(4)}=17=4^2+1$

$f_{(x)}=y=x^2+1$

Es decir

$y=f_{(x)}=x^2+1; \quad x \in \{1; 2; 3; 4\}$

o simplemente

$f_{(x)}=x^2+1; \quad x \in \underbrace{\{1; 2; 3; 4\}}_{\text{Dom}f}$

2. Sea la función g cuya regla de correspondencia es

   $g_{(x)}=6x-7; \quad x \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

   Aquí

   $\text{Dom}g=\{-1; 0; 1; 2; 3\}$

   $\text{Ran}g=\{g_{(-1)}; g_{(0)}; g_{(1)}; g_{(2)}; g_{(3)}\}$

   $\text{Ran}g=\{-13; -7; -1; 5; 11\}$

3. Sea la función h cuya regla de correspondencia es

   $h_{(x)}=x^2-4; \quad x \in \langle 1; 12 \rangle$

   Su dominio es: $\text{Dom}h=\langle 1; 12 \rangle$

Función real de variable real

La función f: $A \to B$ diremos que es real de variable real si $A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$.

Nota

En el tema que vamos a desarrollar todas las funciones serán reales de variable real.

Cálculo del dominio y el rango de una función

Sea la función f, si $(x; y) \in f$ su regla de correspondencia es $y=f_{(x)}$, luego tenemos que

- Hallar su dominio implica obtener todos los valores de x para que la función esté bien definida en el campo de los números reales.
- Hallar el rango implica obtener todos los valores de y o $f_{(x)}$ a partir de su dominio de la función.

Aplicación 3

Halle el dominio de la función

$f_{(x)}=\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}$.

Resolución

Como se observa radicales con índice por la función f quedará bien definida en $\mathbb{R}$ solo si

$$x-2 \geq 0 \ \wedge \ 6-x \geq 0$$
$$x \geq 2 \ \wedge \ 6 \leq x$$
$$\underbrace{x \geq 2 \ \wedge \ x \leq 6}_{2 \leq x \leq 6}$$

$\therefore$ $\text{Dom}f=[2; 6]$

Aplicación 4

Halle el rango de la función

$f_{(x)}=3x^2+5; -3 < x < -2$.

Resolución

Se hallará los valores de $f_{(x)}$ a partir del dominio, así

$$-3 < x < -2$$

elevamos al cuadrado: $9 > x^2 > 4$

por 3: $27 > 3x^2 > 12$

sumamos 5: $32 > \underbrace{3x^2+5}_{f_{(x)}} > 17$

$\therefore$ $\text{Ran}f=\langle 17; 32\rangle$

Gráfica de una función

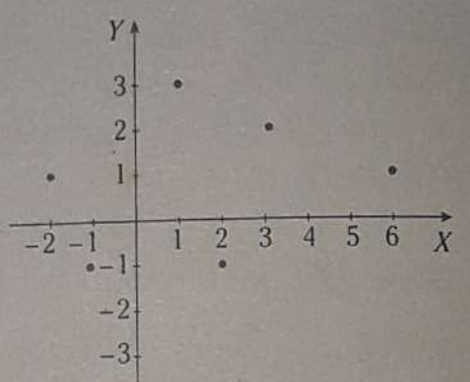
La gráfica de una función f es la representación en el plano cartesiano de todos los pares ordenados que pertenecen a f.

$$G(f)=\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y=f_{(x)} \ \wedge \ x \in \text{Dom}f\}$$

Ejemplo

Grafique la función

$f=\{(-2; 1), (-1; -1), (3; 2), (2; -1), (1; 3), (6; 1)\}$.

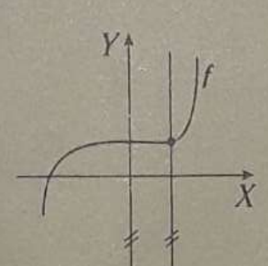


Nota

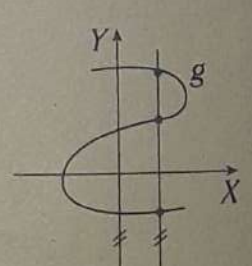
Si los pares ordenados fuesen continuos, la gráfica sería una curva.

Teorema

Toda recta paralela al eje Y corta a la gráfica de una función a lo más en un punto.



f es función.



g no es función.

Gráficas de funciones elementales

Aquí directamente ubicaremos la gráfica de la función elemental.

Función constante

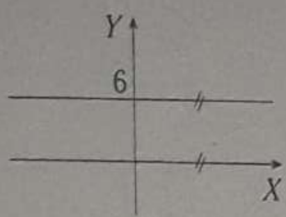
Regla de correspondencia

$$\boxed{f_{(x)}=c,\ \mathrm{Dom}f=\mathbb{R}\ \wedge\ \mathrm{Ran}f=\{c\}}$$

su gráfica es una recta horizontal y corta al eje Y en el número c.

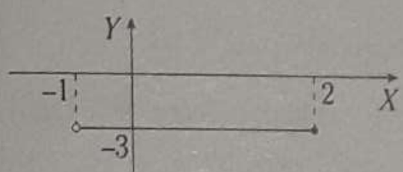
Ejemplos

1. La gráfica de $f_{(x)}=6;\ x\in\mathbb{R}$ es



$\mathrm{Dom}f=\mathbb{R}$ y $\mathrm{Ran}f=\{6\}$

2. La gráfica de $g_{(x)}=-3;\ x\in\langle -1;\ 2]$ es



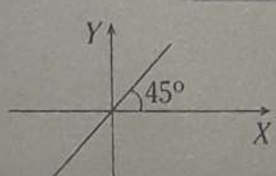
Aquí solo se grafica lo que el dominio permite, es decir, para todo $x\in\langle -1;\ 2]$

3. La gráfica de $h_{(x)}=0;\ x>0$ es

$\mathrm{Dom}h=\langle 0;\ +\infty\rangle$ y $\mathrm{Ran}h=\{0\}$

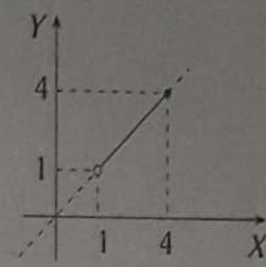
Función identidad

Regla de correspondencia $\boxed{f_{(x)}=x;\ \mathrm{Dom}f=\mathbb{R}}$



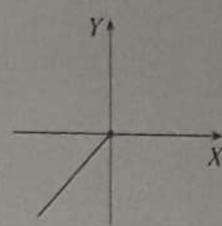
Ejemplos

1. La gráfica de $f_{(x)}=x;\ 1<x\leq 4$ es

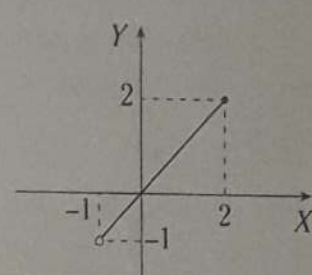


Aquí solo se grafica lo que el dominio de la función nos permite.

2. La gráfica de $g_{(x)}=x;\ x\leq 0$ es



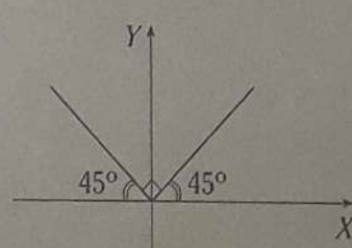
3. La gráfica de $h_{(x)}=x;\ -1<x\leq 2$ es



Función valor absoluto

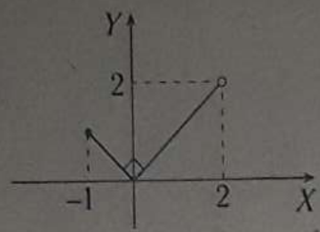
Regla de correspondencia

$$\boxed{f_{(x)}=|x|;\ \mathrm{Dom}f=\mathbb{R}}$$

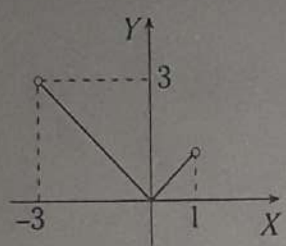


Ejemplos

1. La gráfica de $f_{(x)}=|x|$; $-1 \leq x < 2$ es



2. La gráfica de $g_{(x)}=|x|$; $-3 < x < 1$ es



Función lineal

Regla de correspondencia

$$\boxed{f_{(x)}=ax+b;\ a\neq 0 \ \vee \ y=ax+b}$$

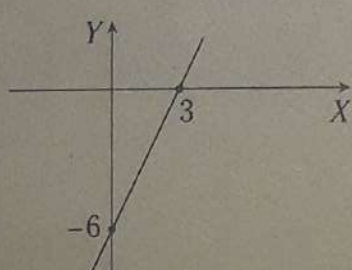
la gráfica es una recta oblicua que corta al eje Y en el número b, ello se determina haciendo

$x=0 \rightarrow f_{(0)}=b$.

Para determinar el punto de corte en el eje X resolvemos la ecuación $ax+b=0$ $(y=0)$.

Ejemplos

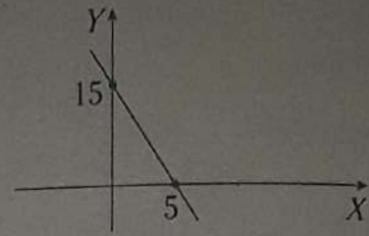
1. La gráfica de $f_{(x)}=2x-6$ es



$f_{(0)}=-6$

$2x-6=0 \rightarrow x=3$

2. Grafique $g_{(x)}=-3x+15$.



$f_{(0)}=15$

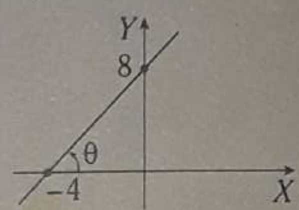
$-3x+15=0 \rightarrow x=5$

NOTA

La pendiente de la recta $f_{(x)}=ax+b$, $a\neq 0$, se define como la tangente del ángulo que hace la recta en el eje X, medido en sentido antihorario.

Ejemplo

Graficamos $f_{(x)}=2x+8$.



Pendiente: $\tan\theta=\dfrac{8}{4}=2$

Se observa que la pendiente de la recta que representa a la función lineal $f_{(x)}=ax+b$ está dada por $\tan\theta=a$.

Función cuadrática

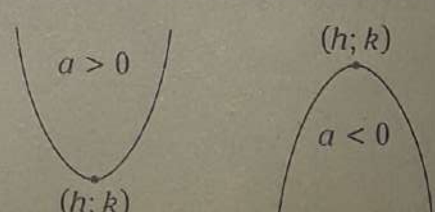
Regla de correspondencia

$$\boxed{f_{(x)}=ax^2+bx+c;\ a\neq 0}$$

luego de completar cuadrados equivale a

$$\underbrace{f_{(x)}=a(x-h)^2+k}_{\text{ecuación de una parábola}}$$

donde el vértice está dado por $V=(h;k)$.



Aplicación 5

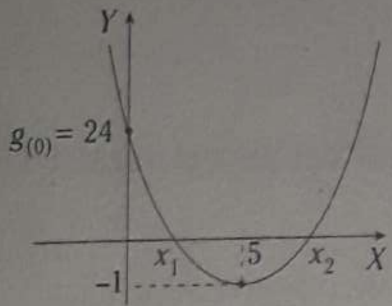
Grafique $g_{(x)}=x^2-10x+24$.

Resolución

Completando cuadrados tenemos

$$g_{(x)}=(x^2-10x+25)+24-25$$
$$g_{(x)}=(x-5)^2-1$$

El vértice está dado por $V=(5;-1)$.



Nótese que Δ es un valor positivo (la parábola corta al eje X en sus dos raíces reales distintas $x_1 \wedge x_2$).

Aplicación 6

Grafique $f_{(x)}=3x^2+12x+13$.

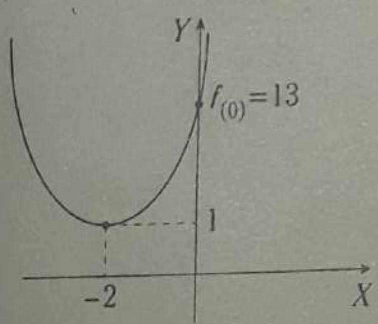
Resolución

Agrupando y completando cuadrados

$$f_{(x)}=(3x^2+12x)+13$$
$$f_{(x)}=3(x^2+4x+4)+(13-12)$$

tenemos $f_{(x)}=3(x+2)^2+1$

de donde el vértice está dado por $V=(-2;1)$.



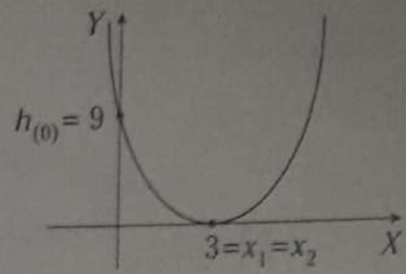
Nótese que $\Delta=12^2-4(3)(13)=-12$ es un valor negativo (la parábola no corta al eje X).

Aplicación 7

Grafique $h_{(x)}=x^2-6x+9$.

Resolución

Tenemos $h_{(x)}=(x-3)^2$, el vértice está dado por $(3;0)$.



Nótese que $\Delta=0$ (la parábola es tangente al eje X en su raíz doble de valor 3.

NOTA

Sea la función f tal que $f_{(x)}=ax^2+bx+c;\ a\neq 0$ y de raíces $x_1 \wedge x_2$ su vértice de la parábola es $V=(h;k)$

Donde

$$h=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{y} \quad k=f_{(h)}$$

Aplicación 8

Resuelva $f_{(x)}=3x^2+7x-1$.

Resolución

Sean $x_1 \wedge y_2$ raíces de la cuadrática, luego

$$x_1+x_2=-\frac{7}{3}$$

$$h=\frac{-\frac{7}{3}}{2}$$

queda $\quad k=f_{\left(-\frac{7}{6}\right)}$

$$\therefore \quad V=\left(-\frac{7}{6};\ f_{\left(-\frac{7}{6}\right)}\right)$$

OBSERVACIÓN

Para determinar el mínimo o máximo de una función cuadrática, basta calcular el vértice, y la segunda componente indicará lo pedido.

Aplicación 9

Calcule el mínimo de $f_{(x)}=2x^2-4x+5$.

Resolución

Completando cuadrados

$$f_{(x)}=2(x^2-2x)+5$$

$$f_{(x)}=2(x^2-2x+1-1)+5$$

$$f_{(x)}=2(x^2-2x+1)+5-2$$

tenemos $f_{(x)}=2(x-1)^2+3$ de donde $V=(1;\,3)$.

Por lo tanto, el mínimo de f es 3 cuando $x=1$.

Aplicación 10

Calcule el máximo de $g_{(x)}=-x^2+x+1$.

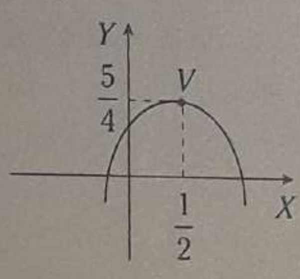
Resolución

Como es dificultoso completar cuadrados, hallaremos el vértice de la parábola a partir de las raíces $x_1 \wedge x_2$ de la cuadrática, así

$$h=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$k=f_{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{4}$$

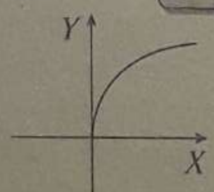
Luego $V=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ y su gráfica es



$$\therefore \quad \text{máx}_f=\frac{5}{4} \text{ cuando } x=\frac{1}{2}$$

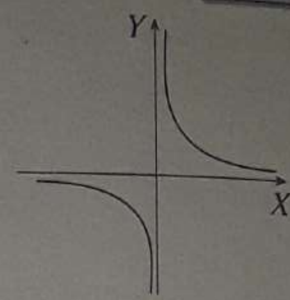
Función raíz cuadrada

Regla de correspondencia $\boxed{f_{(x)}=\sqrt{x}}$



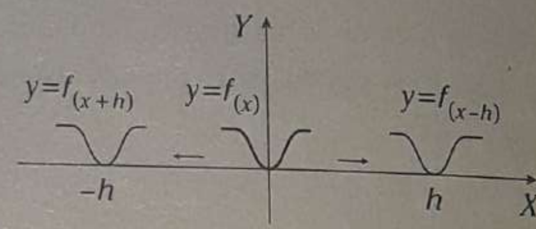
Función inverso multiplicativo

Regla de correspondencia $\boxed{f_{(\alpha)}=\frac{1}{x}}$

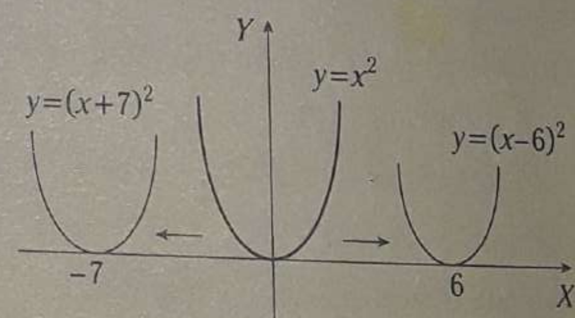


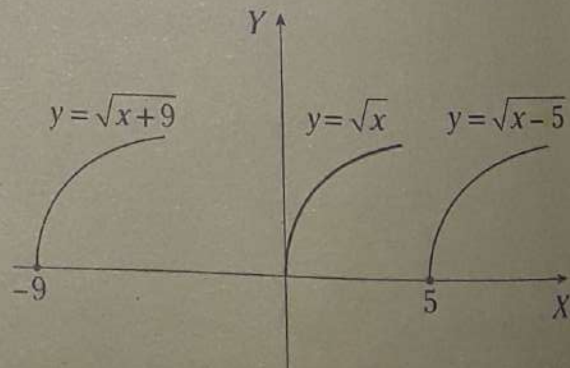
Propiedades para el trazado de gráficas

Desplazamiento horizontal

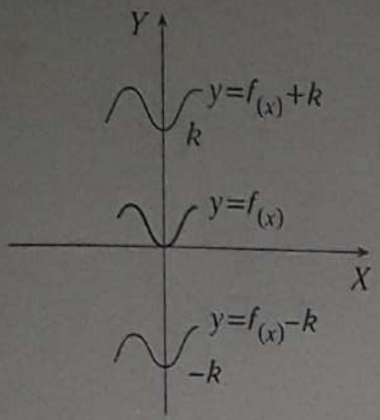


Ejemplos

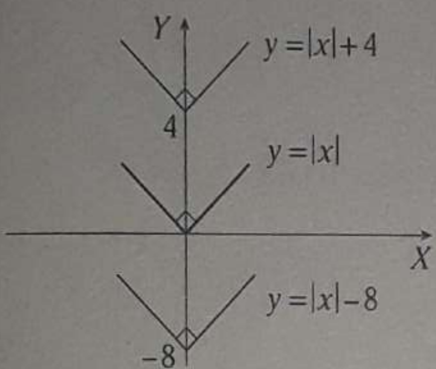


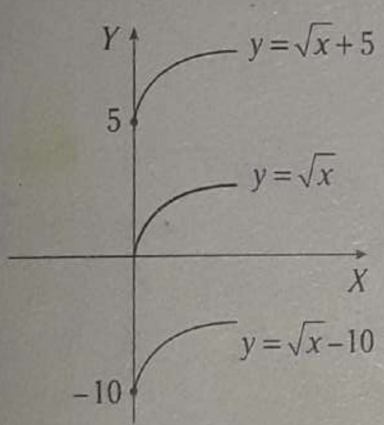


Desplazamiento vertical



Ejemplos



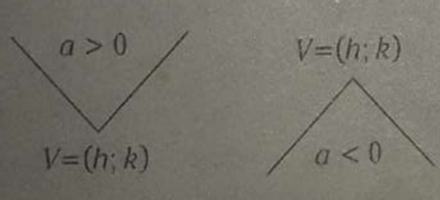


Observación

Para graficar $f_{(x)}=a|x-h|+k$

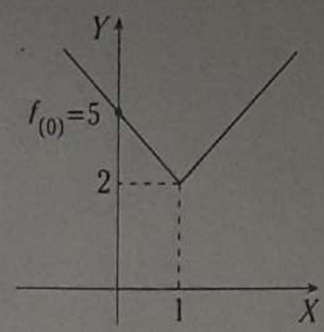
Se determina el vértice $V=(h;\ k)$

$x-h=0 \rightarrow x=h$



Ejemplos

1. La gráfica de $f_{(x)}=3|x-1|+2$ es

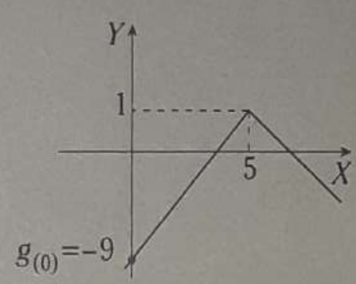


No olvidar que el vértice lo obtenemos así

- $x-1=0$
  $x=1=h$
- $k=2$

$\rightarrow V=(1;\ 2)$

2. $g_{(x)}=-2|x-5|+1.$



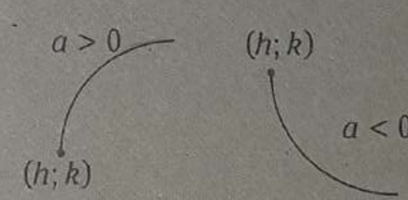
Vértice

- $x-5=0$
  $x=5=h$
- $k=1$

$\rightarrow V=(5;\ 1)$

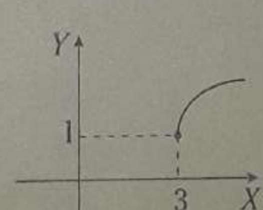
Observación

Para graficar $f_{(x)}=a\sqrt{x-h}+k.$



Ejemplos

1. Grafique $f_{(x)}=2\sqrt{x-3}+1.$

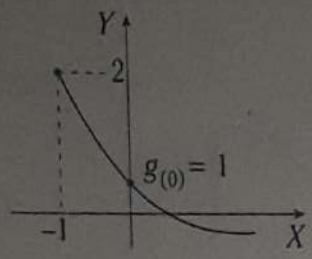


Vértice

- $x-3=0$
  $x=3=h$
- $k=1$

$\rightarrow V=(3;\ 1)$

2. La gráfica de $g_{(x)}=-\sqrt{x+1}+2$ es

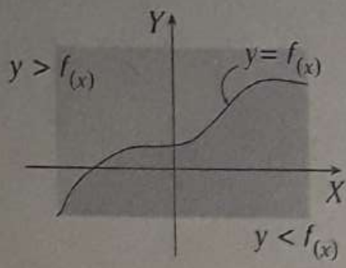


Gráfica de relaciones

Aquí graficaremos cualquiera de las siguientes desigualdades

$y>f_{(x)}$; $y<f_{(x)}$; $y\geq f_{(x)}$; $y\leq f_{(x)}$.

Para ello graficaremos la igualdad $y=f_{(x)}$ y luego las inecuaciones



NOTA

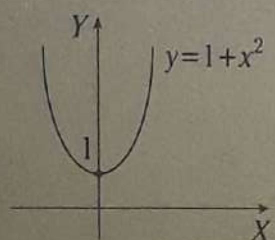
La gráfica de la igualdad $y=f_{(x)}$ es la línea curva, mientras que la gráfica de $y>f_{(x)}$ es la región que está por encima de la línea curva y la gráfica de $y<f_{(x)}$ es la región que está por debajo de la línea curva.

Aplicación 11

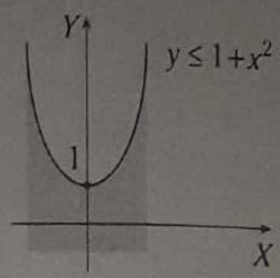
Grafique $f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/y\leq 1+x^2\}$.

Resolución

Graficamos la igualdad $y=1+x^2$.



Luego la gráfica de $y\leq 1+x^2$ es la región que está por debajo de la línea curva, incluyendo la línea curva, así



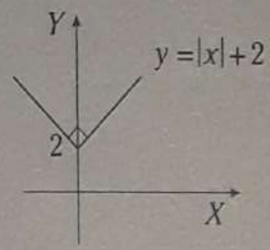
Aplicación 12

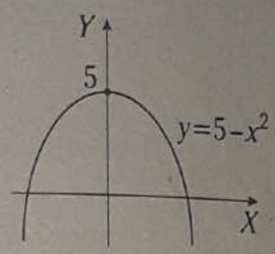
Grafique

$f=\{(x;y)/\in\mathbb{R}^2/y>|x|+2\wedge y<5-x^2\}$.

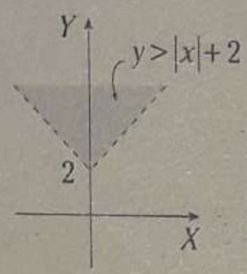
Resolución

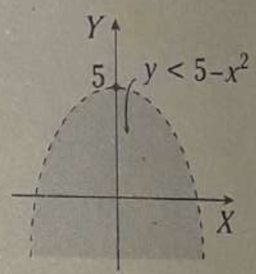
Graficamos $y=|x|+2\wedge y=5-x^2$.



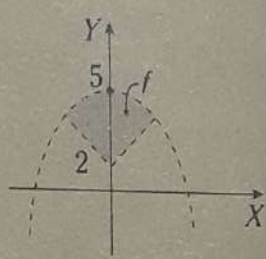


Luego





Ahora intersecando las regiones tenemos



Tengamos en cuenta que no se considera el borde de la región porque las desigualdades que lo generan son estrictas.

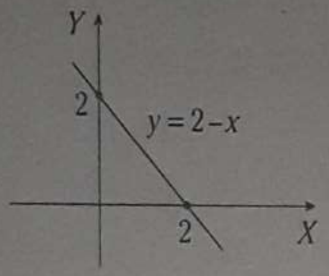
Aplicación 13

Grafique $f=\{(x;y)\in \mathbb{R}^2 / y+x<2\}$.

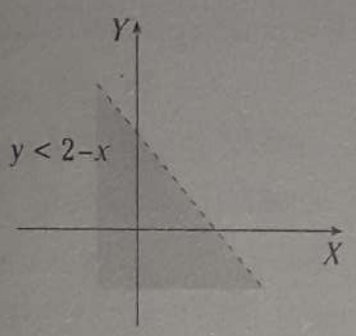
Resolución

Del dato $y+x<2$ de donde $y<2-x$

graficamos la igualdad $y=2-x$, así



Luego la gráfica de $y<2-x$ es la región



Inversa de una función

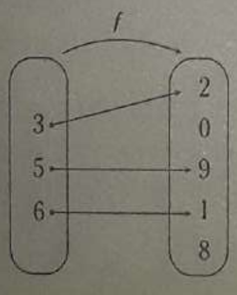
Definiciones previas

Función univalente o inyectiva

La función f es univalente, si para cada elemento del rango le corresponde un solo elemento del dominio, es decir, cada elemento del rango es imagen de un solo elemento del dominio.

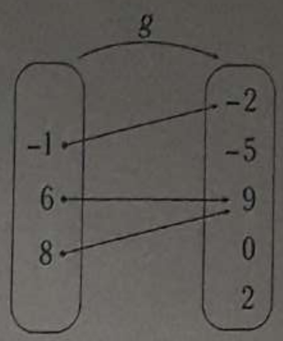
Ejemplos

1.



f es univalente o inyectiva.

2.



g no es univalente, pues en

$g=\{(-1;-2), (6;9), (8;9)\}$

al elemento 9 del rango le corresponde dos elementos del dominio 6 y 8.

Definición

La función $f: A\to B$ es inyectiva solo si para todo $x_1 \wedge x_2 \in \mathrm{Dom}f$

$$f_{(x_1)}=f_{(x_2)} \to x_1=x_2$$

Aplicación 14

Ver si la función f tal que

$f_{(x)}=\dfrac{2x+1}{3x+1}$ es inyectiva.

Resolución

Sean $x_1 \wedge x_2 \in \mathrm{Dom}f$ luego

$$f_{(x_1)}=f_{(x_2)} \to \frac{2x_1+1}{3x_1+1}=\frac{2x_2+1}{3x_2+1}$$

$$\to (2x_1+1)(3x_2+1)=(2x_2+1)(3x_1+1)$$

$$\to \cancel{6x_1x_2}+2x_1+3x_2+\cancel{1}=\cancel{6x_1x_2}+2x_2+3x_1+\cancel{1}$$

$$\to 2x_1+3x_2=2x_2+3x_1$$

$$\to 3x_2-2x_2=3x_1-2x_1$$

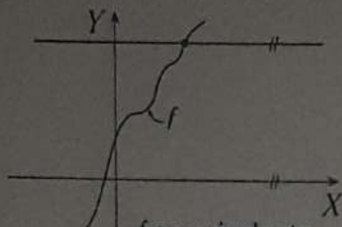
$\to \boxed{x_2=x_1}$ lo que prueba que f sí es inyectiva.

Propiedad

Toda recta paralela al eje X corta a la gráfica de una función univalente a lo más en un punto.

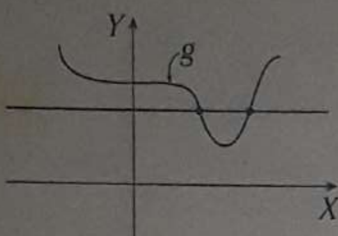
Ejemplos

1.



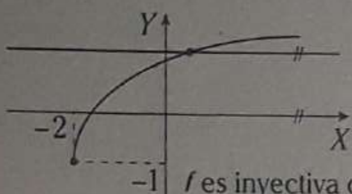
f es univalente.

2.



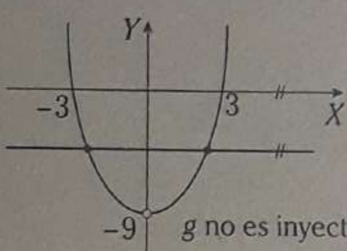
g no es univalente.

3. Sea $f_{(x)}=\sqrt{x+2}-1$, cuya gráfica es



f es inyectiva o univalente.

4. Sea $g_{(x)}=x^2-9$, cuya gráfica es



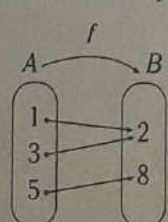
g no es inyectiva.

Función suryectiva o sobreyectiva

La función f: $A \rightarrow B$ es sobreyectiva solo si $\text{Ran}f=B$.

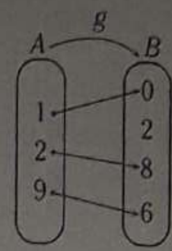
Ejemplos

1. f es suryectiva debido a que $\text{Ran}f=\{2; 8\}=B$.



$f=\{(1; 2), (3; 2), (5; 8)\}$

2. g no es suryectiva porque $\text{Ran}g=\{0; 8; 6\} \neq B$.



$g=\{(1; 0), (2; 8), (9; 6)\}$

3. Sea

$f: \langle 2; 4] \rightarrow \langle 11; 17]$

$x \rightarrow 3x+5$

Del dato tenemos

$f_{(x)}=3x+5$

hallando el rango a partir del dominio

$$2<x\leq 4$$

por 3: $6<3x\leq 12$

sumamos 5: $11<3x+5\leq 17$

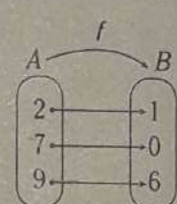
Como $\text{Ran}f=\langle 11; 17]$ coincide con el conjunto de llegada, entonces f es sobreyectiva.

Función biyectiva

Una función f es biyectiva si es simultáneamente univalente y suryectiva.

Ejemplo

Sea la función f



Como f es inyectiva, además es suryectiva, entonces f es biyectiva.

Nota

Si no especifican el conjunto de llegada, para que sea biyectiva es suficiente que sea univalente.

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea la función biyectiva

$f=\{(x; y)/x \in \text{Dom}f \wedge y=f_{(x)}\}$

La inversa de f denotada por f^{-1} o f^* se define

$f^*=\{(y; x)/x \in \text{Dom}f \wedge y=f_{(x)}\}$.

Ejemplo

Sea la función biyectiva

$f=\{(2; 6), (-1; 0), (5; 9), (3; 8)\}$

$\rightarrow \ f^*=\{(6; 2), (0; -1), (9; 5), (8; 3)\}$

Nótese que $\text{Dom}f^*=\{6; 0; 9; 8\}=\text{Ran}f$

$\text{Ran}f^*=\{2; -1; 5; 3\}=\text{Dom}f$

Aplicación 15

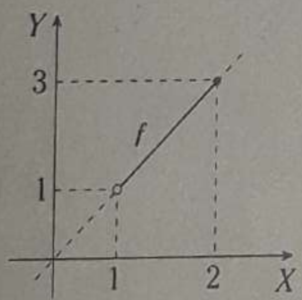
Halle la inversa de $f_{(x)}=2x-1$; $1 < x \leq 2$.

Resolución

1.^{er} paso

Debemos garantizar que sea biyectiva.

Pero la gráfica de $f_{(x)}=2x-1$; $1 < x \leq 2$ es



De donde se tiene que f es biyectiva y $\text{Ran}f=\langle 1; 3]$.

2.^{o} paso

Despejamos x.

Ahora despejamos x en función de y.

Del dato $y=2x-1$ de donde $\underset{\substack{\uparrow \\ f^*_{(y)}}}{x}=\dfrac{y+1}{2}$

$$f^*_{(y)}=\frac{y+1}{2}$$

3.^{er} paso

Intercambiamos x por y en forma simultánea.

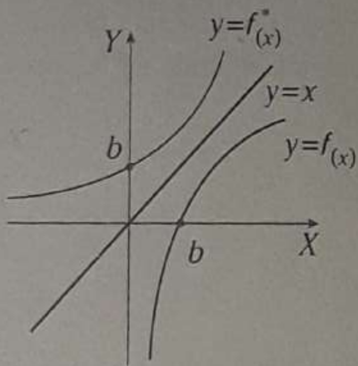
Intercambiando x por y obtenemos

$$f^*_{(x)}=\frac{x+1}{2}; \quad \underbrace{\underbrace{x \in \text{Dom}f^*}_{x \in \text{Ran}f}}_{x \in \langle 1; 3]}$$

Propiedad

Sea f una función biyectiva, las gráficas de f y f^* son simétricas con respecto a la recta identidad ($y=x$).

Ejemplo



Función exponencial

Regla de correspondencia $\boxed{f_{(x)}=b^x}$

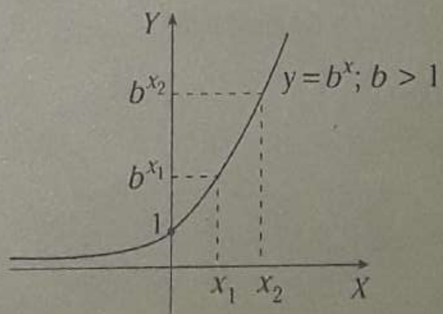
donde $b \in \mathbb{R}^+-\{1\}$.

$\text{Dom}f=\mathbb{R} \wedge \text{Ran}f=\mathbb{R}^+$

Para graficar la función exponencial se presenta 2 casos dependiendo de la base.

CUANDO LA BASE ES MAYOR QUE LA UNIDAD

Para $b > 1 \wedge y=b^x$, la gráfica es



función creciente

Propiedad

Del gráfico tenemos

$$\boxed{b^{x_2} > b^{x_1} \leftrightarrow x_2 > x_1}$$

Se mantiene la relación de orden.

Aplicación 16

Resuelva $8^{x-1} \leq 64$.

Resolución

Generamos la misma base $8^{x-1} \leq 8^2$.

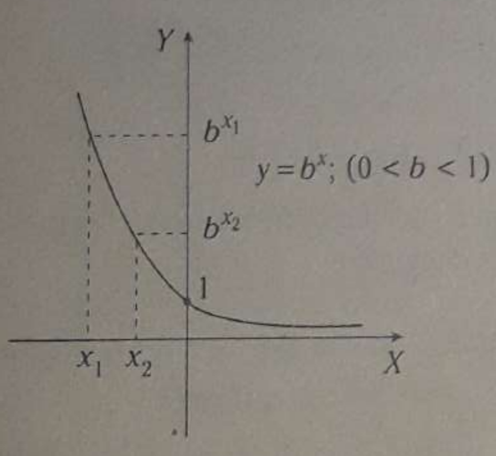
Como la base es mayor que uno, al comparar los exponentes el sentido de la desigualdad no cambia, así

$$\underbrace{x-1 \leq 2}_{x \leq 3}$$

$\therefore$ CS=$\langle -\infty; 3]$

Cuando la base está entre cero y la unidad

Para $0 < b < 1 \wedge y=b^x$ su gráfica es



función decreciente

Propiedad

Del gráfico tenemos

$$\boxed{b^{x_1} > b^{x_2} \leftrightarrow x_1 < x_2}$$

Cambia la relación de orden.

Aplicación 17

Resuelva

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \leq \frac{4}{9}$$

Resolución

Generamos la misma base $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$

Como la base está entre cero y uno, al comparar los exponentes el sentido de la desigualdad cambia, así

$$2x-1 \geq 2$$

$$x \geq 3/2$$

$$\therefore \quad \text{CS}=\left[\frac{3}{2}; +\infty\right\rangle$$

Aplicación 18

Determine el rango de $f_{(x)}=\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$; $2 \leq x < 3$.

Resolución

Del dominio $2 \leq x \leq 3$ restando 1 tenemos

$$1 \leq x-1 \leq 2$$

Tomamos como base $\frac{1}{8}$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^1 \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{1}{8}\right) \geq f_{(x)} \geq \frac{1}{64}$$

$$\therefore \quad \text{Ran} f=\left[\frac{1}{64}; \frac{1}{8}\right]$$

Función logarítmica

Regla de correspondencia

$$\boxed{f_{(x)}=\log_b x \vee y=\log_b x}$$

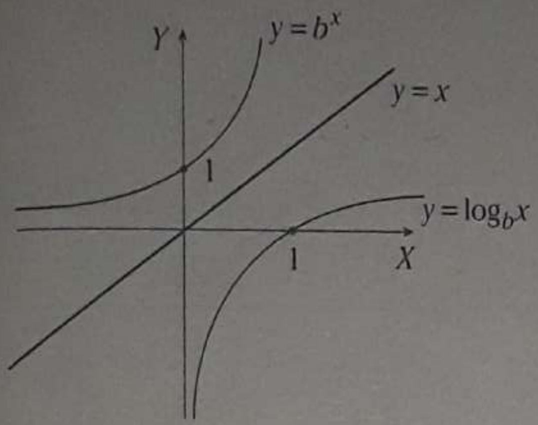
Condición de existencia

$$x > 0 \wedge (b > 0 \wedge b \neq 1).$$

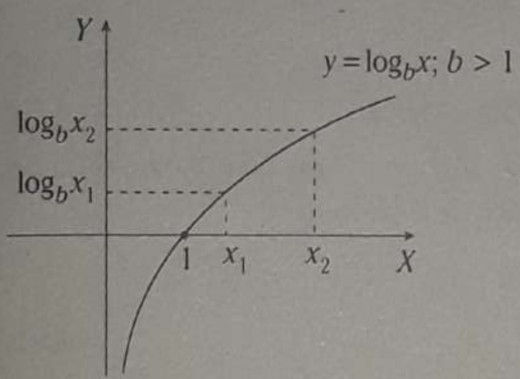
Para graficar la función logaritmo también se presentan 2 casos dependiendo de su base.

Cuando la base es mayor que uno

Sea $b>1$: $y=\log_b x \rightarrow x=b^y$. Ahora al hacer el intercambio de x con y deducimos que la exponencial $y=b^x$ con $y=\log_b x$ son inversas.



Es decir, la gráfica de $y=\log_b x$ es



función creciente

Propiedad

Del gráfico obtenemos

$$\boxed{\log_b x_1 < \log_b x_2 \leftrightarrow x_1 < x_2}$$

Se mantiene la relación de orden.

Aplicación 19

Determine el rango de

$f_{(x)}=\log_5(x-2)$; $3 < x \le 7$.

Resolución

Del dominio

$3 < x \le 7$ restando 2

$1 < x-2 \le 5$

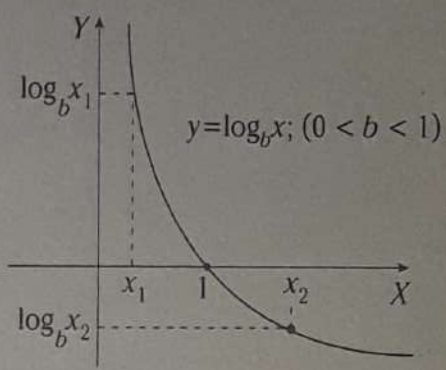
Tomando logaritmo en base 5

$$\overset{0}{\log_5 1} < \underbrace{\log_5 (x-2)}_{f_{(x)}} \le \overset{1}{\log_5 5}$$

$\therefore$ $\operatorname{Ran} f=\langle 0; 1]$

Cuando la base está entre cero y uno

Para $0<b<1 \wedge y=\log_b x$, su gráfica es



función decreciente

Propiedad

Del gráfico tenemos

$$\boxed{\log_b x_1 > \log_b x_2 \leftrightarrow x_1 < x_2}$$

La relación de orden cambia.

Aplicación 20

Resuelva $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x-1} < 7$.

Resolución

Tomando logaritmo en base $\dfrac{2}{5}$

$$\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} > \log_{\frac{2}{5}} 7$$

$$x-1 > \log_{\frac{2}{5}} 7, \text{ de donde } x > 1+\log_{\frac{2}{5}} 7$$

$\therefore$ $CS=\langle 1+\log_{2/5}7; +\infty\rangle$

Problema N.º 1

Si los puntos (0; 0) y (1; −9) pertenecen a la gráfica de la función cuadrática $f_{(x)}=m(x-2)^2-p$, halle $m+p$.

UNMSM 2012-I

Resolución

Como (0; 0) y (1; −9) $\in f$, reemplazamos en

$$f_{(x)}=m(x-2)^2-p$$

$$f_{(0)}=m(-2)^2-p=0$$

$$f_{(1)}=m(-1)^2-p=-9$$

Obtenemos

$$\begin{array}{r} 4m-p=0 \\ m-p=-9 \;(-) \\ \hline 3m=9 \end{array} \qquad \text{(I)}$$

De donde $m=3$ en (I)

$\rightarrow\quad p=12$

$\therefore\quad m+p=15$

Problema N.º 2

Sea f: $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función definida por

$$f_{(x)}=\frac{1}{2}\log_a a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\log_a a\left(\frac{1+4x}{1+x}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\log_a a\left(\frac{1-x}{1+4x}\right)$$

donde $a>0$ y $a\neq 1$, cuyo dominio es un intervalo de la forma $\left\langle -\frac{1}{p};q\right\rangle$. Halle $p-q$.

UNMSM 2011-II

Resolución

Planteamos condición de existencia

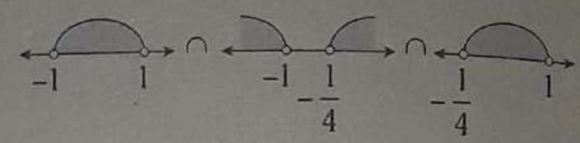
$$a\left(\frac{1+x}{1-x}\right)>0\ \wedge\ a\left(\frac{1+4x}{1+x}\right)>0\ \wedge\ a\left(\frac{1-x}{1+4x}\right)>0$$

Como $a\in\mathbb{R}^+$ cancelamos en cada una de las condiciones

$$\frac{1+x}{1-x}>0\ \wedge\ \frac{1+4x}{1+x}>0\ \wedge\ \frac{1-x}{1+4x}>0$$

$$\underbrace{(1+x)(x-1)>0}_{(1+x)(x-1)<0}\wedge(1+4x)(1+x)>0\wedge\underbrace{(1-x)(1+4x)>0}_{(x-1)(1+4x)<0}$$

Por puntos críticos



$$x\in\left\langle -\frac{1}{4};1\right\rangle=\left\langle -\frac{1}{p};q\right\rangle \text{ por dato}$$

$\rightarrow\quad p=4\ \wedge\ q=1$

$\therefore\quad p-q=3$

Problema N.º 3

Halle el área de la región determinada por el gráfico de la relación

$$R=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/|x|\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\right\}.$$

UNMSM 2011-II

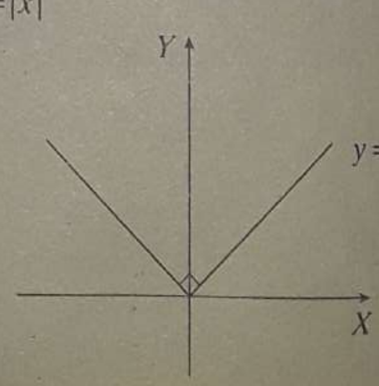
Resolución

De la condición se observa que $y\geq 0$

también $|x|\leq y\ \wedge\ y\leq\sqrt{1-x^2}$.

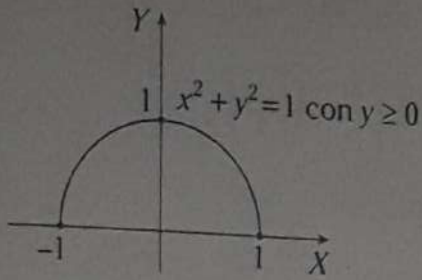
Graficando las igualdades $y=|x|\wedge y=\sqrt{1-x^2}$

1. $y=|x|$

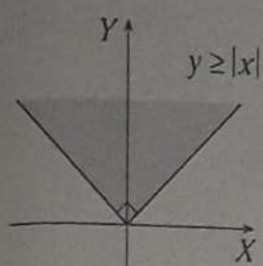


2. $y=\sqrt{1-x^2}$

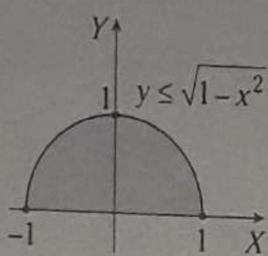
Elevamos al cuadrado $y^2=1-x^2$

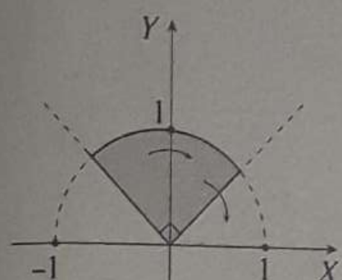


Luego se tiene

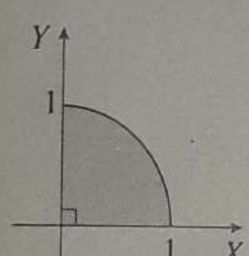


$\cap$





es equivalente a



$\therefore$ Área $=\dfrac{\pi}{4}u^2$

Problema N.º 4

La tabla adjunta muestra parte del dominio y rango de una función lineal f.

x	2	5	8	b
$f_{(x)}$	10	a	28	37

Halle la suma de a y b.

UNMSM 2011-I

Resolución

Como f es lineal tiene la forma

$$f_{(x)}=mx+n;\ m\neq 0.$$

Evaluamos

$$\left.\begin{array}{ll} x=2: & 2m+n=10 \\ x=8: & 8m+n=28 \end{array}\right\}(-) \qquad \text{(I)}$$

$$6m=18 \ \rightarrow\ m=3 \text{ en (I)} \ \rightarrow\ n=4$$

$\rightarrow\ f_{(x)}=3x+4$

Evaluamos

$x=5$: $f_{(5)}=3(5)+4=a \ \rightarrow\ a=19$

$x=b$: $f_{(b)}=3(b)+4=37 \ \rightarrow\ b=11$

$\therefore\ a+b=30$

Problema N.º 5

Halle el conjunto solución de la inecuación

$(|x|+1)^{2x^2-5x+2}>(|x|+1)^{14}$.

UNMSM 2010-II

Resolución

Por teorema con $b>1$: $b^m>b^n \ \rightarrow\ m>n$

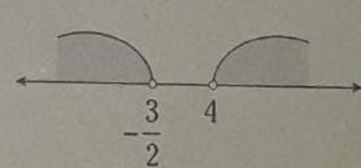
Del dato $x\neq 0 \ \rightarrow\ |x|>0$, de donde $|x|+1>1$

Tenemos

$$\cancel{(|x|+1)}^{2x^2-5x+2}>\cancel{(|x|+1)}^{14} \ \rightarrow\ 2x^2-5x+2>14$$

$$2x^2-5x-12>0 \ \rightarrow\ (2x+3)(x-4)>0$$

$2x \quad 3$
$x \quad -4$



> **Nota**
> Si $x=0$, tendríamos $1^2>1^{14}$ es absurdo.

$$\therefore\ CS=\left\langle -\infty;-\frac{3}{2}\right\rangle\cup\langle 4;+\infty\rangle$$

Problema N.° 6

Halle el rango de la función $f_{(x)}=-x^2+2x$ sabiendo que su dominio es igual al conjunto de los números reales.

UNMSM 2010-I

Resolución

Completamos cuadrados $f_{(x)}=-(x^2-2x)$

$$f_{(x)}=-(x^2-2x+1)-1$$

$$\rightarrow \quad f_{(x)}=-(x-1)^2+1$$

por teoría de función cuadrática

máx $f=1$

$$\rightarrow \quad \underbrace{x-1=0}_{x=1}$$

$$\therefore \quad \text{Ran}f=\langle -\infty; 1]$$

Problema N.° 7

Halle el dominio de la función f, definida por

$$f_{(x)}=\sqrt{\ln\left(\frac{2x-3}{x+5}\right)}.$$

UNMSM 2009-II

Resolución

Planteamos condición de existencia

$$\underbrace{\ln\left(\frac{2x-3}{x+5}\right)\geq 0}_{\log_e\left(\frac{2x-3}{x+5}\right)\geq \log_e 1} \quad \wedge \quad \frac{2x-3}{x+5}>0$$

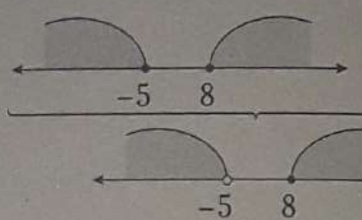
Como base mayor que uno

$$\underbrace{\frac{2x-3}{x+5}\geq 1 \wedge \frac{2x-3}{x+5}>0}_{\frac{2x-3}{x+5}\geq 1}$$

Por inecuación fraccionaria

$$\frac{2x-3}{x+5}-1\geq 0 \rightarrow \frac{(x-8)}{(x+5)}\geq 0$$

$$(x-8)(x+5)\geq 0 \ \wedge \ x\neq -5$$



$\wedge \ x\neq -5$

$$\rightarrow \quad \text{Dom}f=\underbrace{\langle -\infty; -5\rangle \cup [8; +\infty\rangle}_{\mathbb{R}-[-5;\, 8\rangle}$$

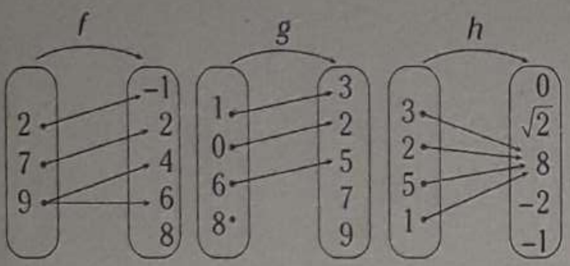
$$\therefore \quad \text{Dom}f=\mathbb{R}-[-5; 8\rangle$$

NIVEL BÁSICO

1. Si los pares ordenados $(x^2+y^2; z+2)$ y $(0; 10)$ donde $x; y; z \in \mathbb{R}$, son iguales, calcule $x+y+z$.

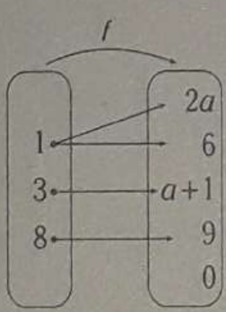
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

2. ¿Cuál de las siguientes correspondencias es una función?



A) solo f B) solo h C) solo g
D) f y g E) g y h

3. Si f representa a una función tal que



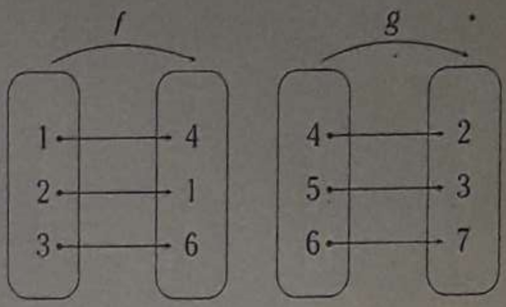
halle la suma de los elementos del rango.

A) 19 B) 20 C) 35
D) 25 E) 9

4. Sea la función
$f=\{(3; a), (9; 6), (3; 2), (9; b), (1; 5)\}$.
Determine $a+b$.

A) 4 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

5. Sean las funciones f y g definidas por



Calcule $f_{(g_{(4)})}+g_{(f_{(3)})}$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 0

6. Sea f una función tal que
$f=\{1; 2; 3; 4\} \rightarrow B$
$x \rightarrow 3x-2$
Halle el rango de f.

A) $\{1; 4; 7; 10\}$
B) $\{1; 4; 7; 12\}$
C) $\{1; 5; 7; 10\}$
D) $\{1; 4; 8; 10\}$
E) $\{1; 2; 7; 10\}$

7. Si $(2; 11)$ es un punto que pertenece a la gráfica de la función $f_{(x)}=x^3+2x+n$, según ello calcule n.

A) 0 B) −1 C) 1
D) 2 E) −2

8. Determine el dominio de la función
$f_{(x)}=\sqrt{3-2x}+\sqrt{x+1}$.

A) $\left[-10; \frac{1}{2}\right]$ B) $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ C) $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$

D) $\left[-2; \frac{3}{2}\right]$ E) $\left[1; \frac{5}{2}\right]$

9. Si $x \in \langle -7; 2\rangle$, calcule el rango de $g_{(x)}=x^2-40$.

A) $[-40; -9\rangle$ B) $\langle 4; 49\rangle$ C) $\langle -36; 9\rangle$
D) $[-40; 9\rangle$ E) $[-40; 0\rangle$

10. Si el rango de $f_{(x)}=\dfrac{5}{x+2}$, $3 \leq x < 8$, es $\left\langle \dfrac{1}{a}; b\right]$, determine a^b.

A) 2 B) 4 C) 9
D) 16 E) 1/4

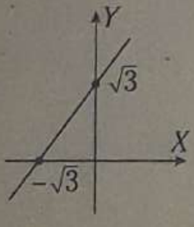
11. Sea la función constante
$f_{(x)}=ax^2+(b-1)x+(a+b)$.
Determine $f_{(a)}+f_{(b)}$.

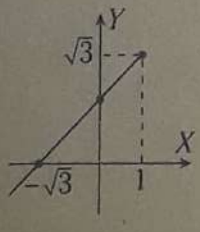
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

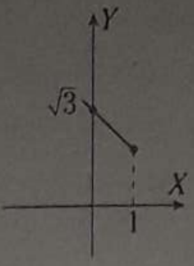
12. Si $f_{(x)}=\left(\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)x^2+x+3n$ representa a una función lineal, calcule $f_{(0)}+f_{(1)}+f_{(2)}$.

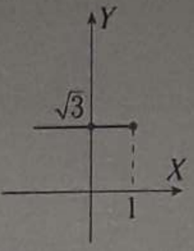
A) 10 B) 11 C) 9
D) 12 E) 13

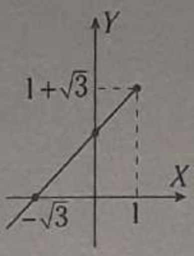
13. Grafique $f_{(x)}=x+\sqrt{3}$; $x \leq 1$.

A)


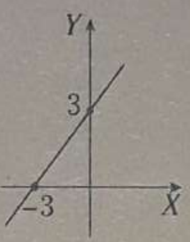
B)


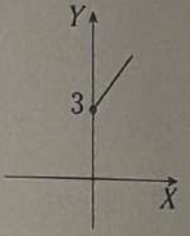
C)


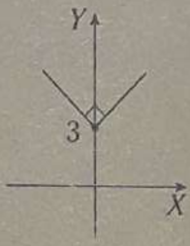
D)


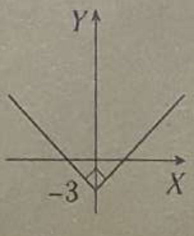
E)


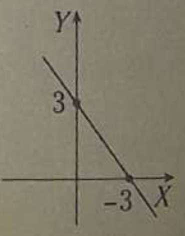
14. Grafique $g_{(x)}=\sqrt{x^2}+\sqrt{9}$.

A)


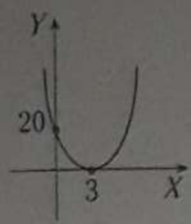
B)


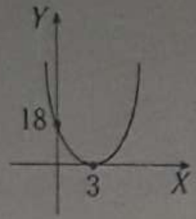
C)


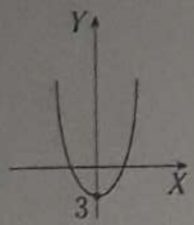
D)


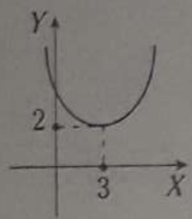
E)


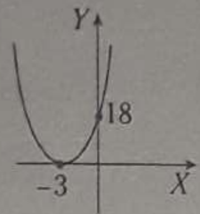
15. Determine la gráfica de $h_{(x)}=2(x-3)^2$.

A) 

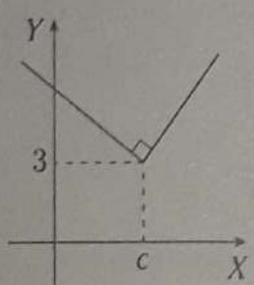
B) 

C) 

D) 

E) 

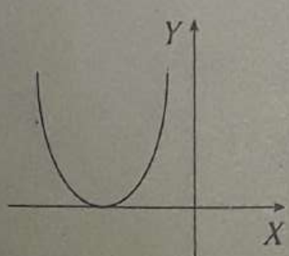
16. Teniendo en cuenta la gráfica de $f_{(x)}=a|x-2|+b$



halle $a+b+c$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

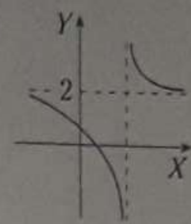
17. Si la gráfica de $f_{(x)}=x^2+(n-1)x+9$ es

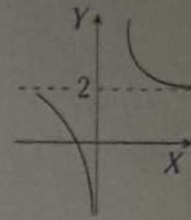


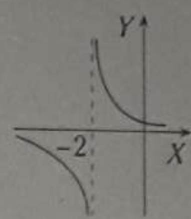
determine el valor de n.

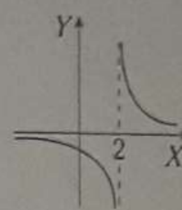
A) 7 B) 6 C) −5
D) −7 E) {7; −5}

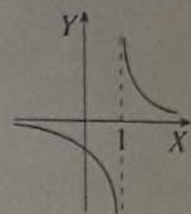
18. Grafique $h_{(x)}=\dfrac{1}{x-2}$.

A) 

B) 

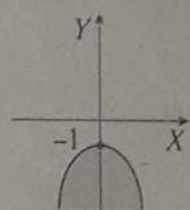
C) 

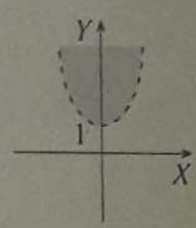
D) 

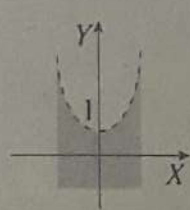
E) 

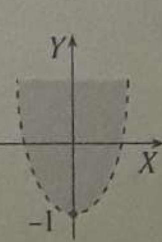
19. Determine la región que representa a

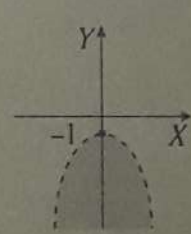
$f=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+1<-y\right\}$.

A) 

B) 

C) 

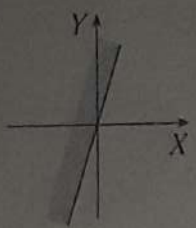
D) 

E) 

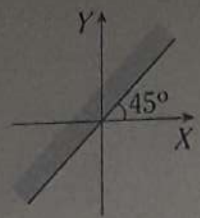
20. La región generada por

$f=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/(x+1)^2-(x-1)^2\le y\}$ es

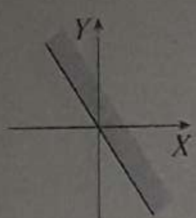
A)



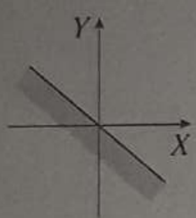
B)



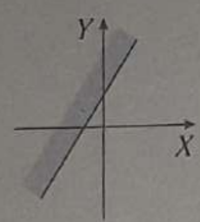
C)



D)



E)



21. Si la función

$f:\langle 1;6\rangle \rightarrow \langle a;b\rangle$

$x \rightarrow 4x-1$

es suryectiva, determine $a+b$.

A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

22. Dada la función biyectiva

$f: A \rightarrow \langle -7;9]$

$x \rightarrow x^3+1$

determine el conjunto A.

A) $\langle -2;2\rangle$ B) $\langle -2;2]$ C) $\langle 0;2]$
D) $\langle -8;8]$ E) $\langle \sqrt[3]{-6};2]$

23. Si la función inversa de $f_{(x)}=2x+8$ es

$f^*_{(x)}=\dfrac{x}{a}-b$, halle ab.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

24. Determine el máximo valor de n para que $f_{(x)}=(x-5)^2$, $1<x\le n$, tenga inversa.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

25. Resuelva la inecuación

$\sqrt[3]{2}^{\,x+1}<8^x$.

A) $\left\langle \dfrac{1}{8};+\infty\right\rangle$ B) $\left\langle -\infty;\dfrac{1}{8}\right\rangle$ C) $\left\langle \dfrac{1}{7};+\infty\right\rangle$
D) $\left\langle \dfrac{1}{2};+\infty\right\rangle$ E) CS=ϕ

26. Si el conjunto solución de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^x<\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1}$ es de la forma $\langle -\infty;a\rangle$, calcule a^3.

A) −8 B) 1 C) 27
D) 8 E) 125

27. Determine el dominio de

$f_{(x)}=\log_{(x-5)}(x^2-1)$.

A) $\langle 5;+\infty\rangle$
B) $\langle 6;+\infty\rangle$
C) $\langle 5;6\rangle\cup\langle 6;+\infty\rangle$
D) $\langle 6;7\rangle-\{8\}$
E) $\langle -\infty;-1\rangle\cup\langle 1;+\infty\rangle$

28. Halle el rango de $g_{(x)}=\log_2(x+1)$; $7<x\le 1023$.

A) $\langle 3;10]$
B) $\langle \log_2 3;\log_2 120]$
C) $\langle \log_2 7;\log_2 1023]$
D) $\left\langle \dfrac{1}{10};3\right]$
E) $\langle 2;10]$

29. Resuelva $2^x \geq 5$.

A) $[5; +\infty\rangle$
B) $[\log 5; +\infty\rangle$
C) $\langle 2; 5]$
D) $[\log_2 5; +\infty\rangle$
E) $\langle 0; \log_2 5]$

30. Resuelva
$(|x|+6)^{4x-1} \leq (|x|+6)^{x^2+4x}$.

A) $\langle -\infty; 0\rangle$ B) $\langle -1; 1\rangle$ C) $[-1; 1]$
D) ϕ E) $\mathbb{R}$

NIVEL INTERMEDIO

31. Si se cumple que
$(a+b+c; ab+bc+ca)=(6; 12)$,
donde $a; b; c \in \mathbb{R}$, calcule abc.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

32. Dada la función
$f=\{(4; 2b-1), (2; 2a-6), (4; a), (2; a^2-3a), (a; 5)\}$,
determine el valor de $a+b$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

33. Dada la función $f_{(x)}=\sqrt{x^2-9}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-6}}$,
si el dominio tiene la forma
$\langle -\infty; -a] \cup [a; +\infty\rangle - \{b\}$,
determine ab.

A) 15 B) 18 C) 12
D) 20 E) 24

34. Indique el rango de
$h_{(x)}=\frac{5x+7}{x-3}; 4<x<5$.

A) $\langle 16; 27\rangle$
B) $\langle -\infty; 16\rangle \cup \langle 27; +\infty\rangle$
C) $\left\langle \frac{1}{27}; \frac{1}{16}\right\rangle$
D) $\langle 8; 27\rangle$
E) $\langle 17; 28\rangle$

35. Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes condiciones
$f_{(8)}=2 \wedge f_{(x+8)}=f_{(x)} \cdot f_{(8)}$.
Indique $f_{(-8)}$.

A) 3 B) 2 C) 1/2
D) 5 E) 4

36. Si $f_{(x)}=ax+b$ verifica las condiciones
$f_{(27)} \leq f_{(28)}$ y
$f_{(29)} \geq f_{(30)}$,
además $f_{(2013)}=8$,
señale la alternativa correcta.

A) $f_{(0)}<0$
B) $f_{\left(\frac{1}{2013}\right)}=0$
C) $f_{(8)}=8$
D) $f_{(28)}<5$
E) $f_{(2011)}<f_{(2012)}<f_{(2013)}$

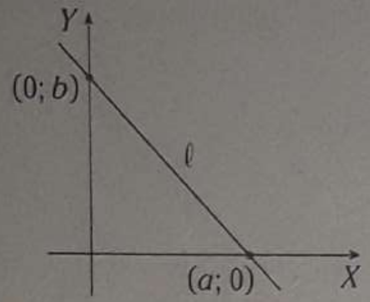
37. Determine el rango de la función
$f: [1; 2\rangle \to \mathbb{R}$
$x \to |x+2|+|x-1|+|x-3|$

A) $\langle 5; 6]$ B) $[5; 6\rangle$ C) $[6; 7\rangle$
D) $[7; 8\rangle$ E) $[1; 16\rangle$

38. Un patio rectangular de 28 m^2 de superficie tiene 3 m más de frente que de fondo. Si x es la medida del fondo, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite calcular las dimensiones del patio?

A) $x(x+3)-28=0$
B) $x^2=28$
C) $(x-3)x=28$
D) $x(x+3)+28=0$
E) $x^2+x=28$

39. Teniendo en cuenta la gráfica de la recta ℓ

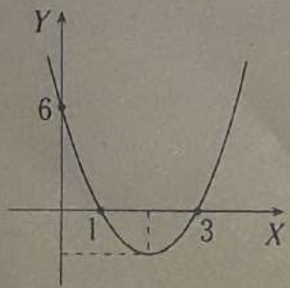


¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. La pendiente de la recta es negativa.
II. El punto $(a; b)$ pertenece a la recta.
III. La recta ℓ es perpendicular a la recta. $y=\frac{ax}{b}$.

A) I y II B) II y III C) I y III
D) solo I E) todas

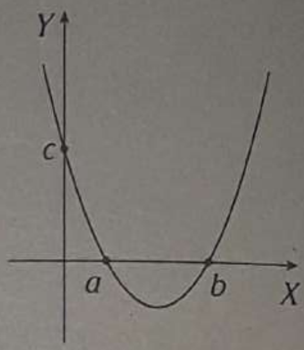
40. Teniendo en cuenta la gráfica de $f_{(x)}=ax^2+bx+c$



indique el vértice.

A) (5; 2)
B) (2; −2)
C) (−2; −2)
D) (3; −2)
E) (5/2; 2)

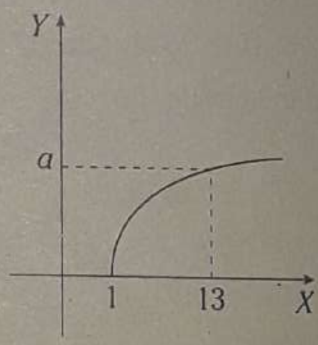
41. La gráfica de $f_{(x)}=x^2-5x+3$ es



Halle $a+b+c$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 6

42. De la gráfica de $f_{(x)}=\sqrt{\frac{x-b}{3}}$



halle $4ab$.

A) 2
B) 4
C) 8
D) 12
E) 6

43. Indique el conjunto A si la función f es suryectiva, donde

$f: A \rightarrow \langle 3; 5]$

$x \rightarrow \dfrac{2x-7}{x-1}$

A) $\left\langle -5; -\dfrac{5}{3}\right]$ B) $\left\langle -6; -\dfrac{1}{3}\right]$ C) $\left\langle -\dfrac{8}{3}; 6\right]$

D) $\left\langle -6; -\dfrac{8}{3}\right]$ E) $\left[\dfrac{1}{3}; 1\right\rangle$

44. Determine el rango de la función exponencial $f_{(x)} = \sqrt{2}^{3x-2}$ tal que $|x-1| \leq 3$.

A) $[-8; 14]$ B) $[-6; 12]$ C) $[1/8; 128]$

D) $[2^{-8}; 2^{14}]$ E) $[2^{-6}; 2^{12}]$

45. Halle el rango de la función

$f: \langle -7; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow \log_{1/2}(|x|+1)$

A) $\langle -3; 0]$ B) $[0; 3\rangle$ C) $[1, 8\rangle$

D) $[0; 1/3\rangle$ E) $\langle -1/3; 0]$

46. Dada la función $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ que satisface $f_{(x;\,y)} = \dfrac{f_{(x)}}{y}$.

Si $f_{(2012)}=2013$, calcule $f_{(2013)}$.

A) 2010 B) 2011 C) 2012

D) 2013 E) 2014

47. Determine el dominio de g donde

$g_{(x)}=3-f_{(x+1)}$

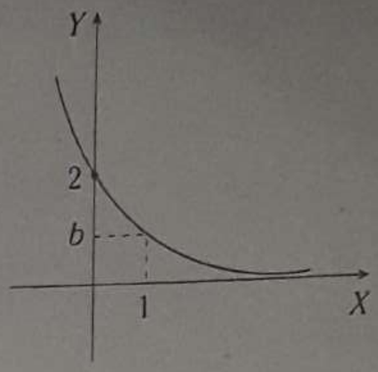
si f tiene como dominio al intervalo $[0; 2]$.

A) $[1; 3]$ B) $[-2; 0]$ C) $[-2; 4]$

D) $[-1; 1]$ E) $[2; 4]$

48. Dada la gráfica de la función exponencial

$$f_{(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}$$



calcule $f_{(b)}+f_{(2b)}+f_{(3b)}+f_{(4b)}+ \ldots$

A) 1 B) $\dfrac{1}{2}$ C) 2

D) 4 E) $\dfrac{1}{4}$

49. Sea $f_{(x)} = \left(\dfrac{1}{81}\right)^{\left|\frac{|x|+1}{4}\right|}$ una función cuyo dominio es $\left\langle -3; \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right]$. Halle el rango.

A) $\left\langle \dfrac{1}{3}; 3\right]$ B) $\left\langle \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}; 3\right]$ C) $\left\langle \dfrac{1}{81}; \dfrac{1}{3}\right]$

D) $[1; 3]$ E) $\left\langle \dfrac{1}{81}; 3\right]$

50. Las gráficas de

$f_{(x)}=b-|x-a|$ y $g_{(x)}=d+|x-c|$

se intersecan en los puntos $(2; 5)$ y $(8; 3)$. Halle $a+c$.

A) 11 B) 5 C) 10

D) $\dfrac{13}{2}$ E) $\dfrac{5}{2}$

51. Dada la función f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f_{(x)} = \begin{cases} x-1; \text{ cuando } x \text{ es impar} \\ x+1; \text{ cuando } x \text{ es par} \end{cases}$$

Determine el número de soluciones en la siguiente ecuación $f_{(x)}=f_{(2x)}$.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

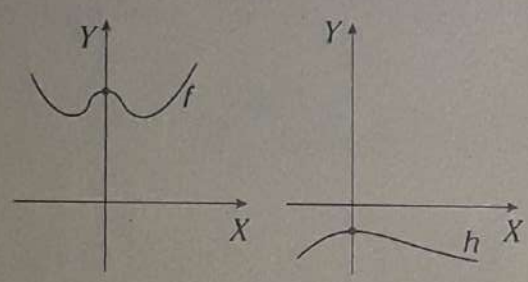
52. Si $f_{(x)}$ representa el mínimo de las siguientes funciones

$h_{(x)}=-x+12$ y $g_{(x)}=2x+5$,

halle el máximo de $f_{(x)}$.

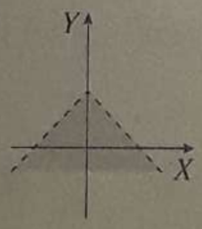
A) 9 B) 8 C) 10
D) 11 E) 7

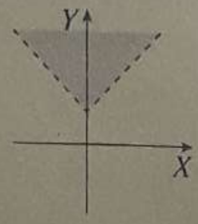
53. Dadas las gráficas de f y h

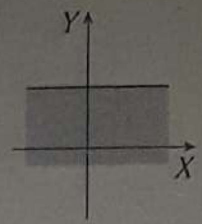


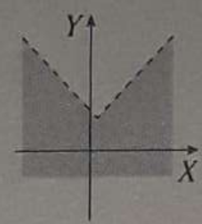
grafique la siguiente relación

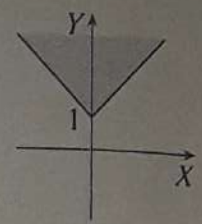
$$R=\left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \Big/ \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \cdot (y-|x|-1) > 0\right\}.$$

A)


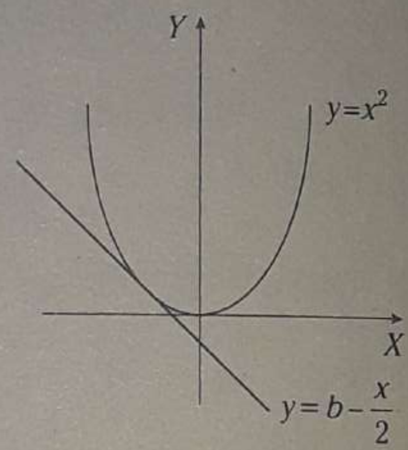
B)


C)


D)


E)


54. Del gráfico, calcule b.



A) -1 B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{8}$
D) -16 E) $-\frac{1}{16}$

55. Señale el mínimo valor de n para que el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} x^2+y+2<4x \\ y \leq n \end{cases}$$

sea el conjunto vacío.

A) 4 B) -2 C) 1
D) 2 E) 3

Programación lineal

Capítulo XVI

Objetivos

- Reconocer un problema de programación lineal.
- Realizar el cálculo de máximos y mínimos en funciones lineales con dos variables.
- Interpretar geométricamente las soluciones factibles y la suma óptima de un problema de programación lineal.

Debido a la necesidad de reducir gastos o maximizar beneficios surgen nuevas teorías en el mundo de las matemáticas. Una de ellas es la denominada programación lineal, que surge en un inicio para optimizar gastos y tiempo en la Segunda Guerra Mundial. Desde ahí se ha aplicado en diversos campos como la biología, economía, etc.

¿Qué es la programación lineal?

Es un método o conjunto de métodos de optimización cuya finalidad es maximizar y/o minimizar una función lineal con dos variables, denominada función objetivo, sujeta a las restricciones.

Un problema de programación lineal bidimensional tiene la siguiente forma:

$$\boxed{f_{(x;\,y)}=ax+by+c} \longleftarrow \text{(función objetivo)}$$

$$\text{sujeta a restricciones}\begin{cases} a_1x+b_1y \gtreqless C_1 \\ a_2x+b_2y \gtreqless C_2 \\ \quad\vdots \\ a_nx+b_ny \gtreqless C_2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \longleftarrow \text{condiciones de} \\ \longleftarrow \text{no negatividad} \end{matrix}$$

Definiciones

Función objetivo

Es la representación matemática de la función a optimizar.

Variables de decisión

Son cantidades desconocidas que indican los valores numéricos que puede adquirir con el fin de lograr el objetivo.

Solución factible

Es el par ordenado $(x_0;\, y_0)$ que verifica todas las restricciones.

Solución óptima

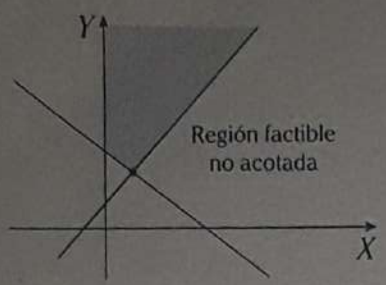
Es la solución factible $(x_0;\, y_0)$ que hace que la función f se optimice cuando $x=x_0 \wedge y=y_0$.

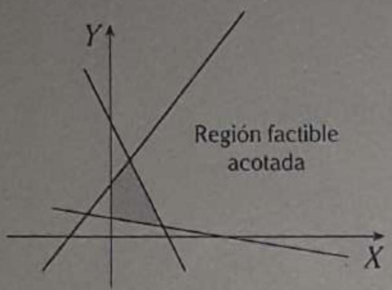
Conjunto factible

Es el conjunto formado por todas las soluciones factibles.

REGIÓN FACTIBLE

Es la representación del conjunto factible en el plano bidimensional (plano cartesiano). La región factible puede ser acotada o no acotada.





Teorema fundamental de programación lineal

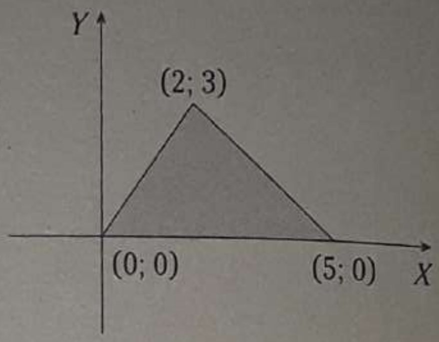
En un problema de programación lineal con dos variables, sí existe solución única que optimice la función objetivo, esta se encuentra en un punto extremo o vértice del polígono convexo (región factible acotada), nunca en el interior de dicha región.

Ejemplo

Sea el problema de programación lineal
máx $f_{(x;\,y)}=5x+y$
sujeta a

$$\begin{cases} y\leq -x+5 \\ y\leq \dfrac{3}{2}x \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{cases}$$

cuya región factible es



Como $f_{(x;\,y)}=5x+y$, evaluamos en los extremos de la región factible

$$f_{(0;\,0)}=5\times 0+0=0$$

$$f_{(5;\,0)}=5\times 5+0=25 \quad \leftarrow \text{ máximo}$$

$$f_{(2;\,3)}=5\times 2+3=13$$

Por lo tanto, la solución óptima es (5; 0) y el máximo de la función es 25.

Problema N.º 1

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+y\le 4 \\ 2x-y\ge 0 \\ x\ge 0 \wedge y\ge 0 \end{cases}$$

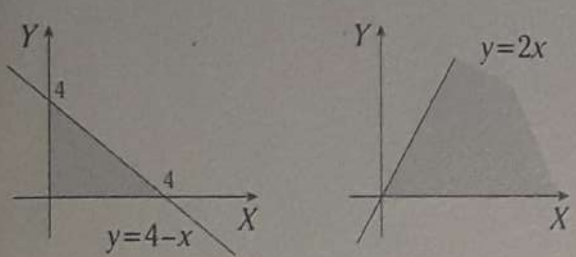
y represente gráficamente su conjunto solución.

Resolución

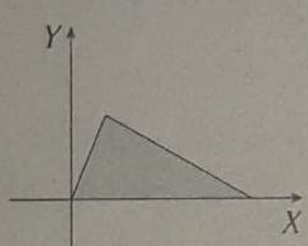
Como tenemos $x\ge 0 \wedge y\ge 0$, las regiones se encuentran en el primer cuadrante.

Graficamos

$$\underbrace{x+y\le 4}_{y\le 4-x} \wedge \underbrace{2x-y\ge 0}_{y\le 2x}$$



Por ser un sistema, se deben de intersecar.



Problema N.º 2

Escriba una función $f_{(x;\,y)}$ que represente los ingresos que se obtienen al vender x chaquetas a S/.50 c/u y pantalones a S/.40 c/u.

Resolución

- Si cada chaqueta cuesta S/.50
  $\rightarrow$ x chaquetas cuestan en total $50x$
- Si cada pantalón cuesta S/.40
  $\rightarrow$ y pantalones cuestan en total $40y$

$\therefore$ $f_{(x;\,y)}=50x+40y$

Problema N.º 3

Represente la región definida por las siguientes restricciones

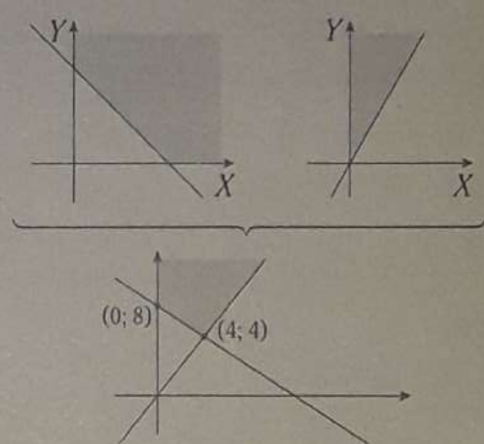
$$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x+y\ge 8 \\ y\ge x \end{cases}$$

Luego determine el valor de verdad con respecto a las siguientes proposiciones.

I. Es acotado.
II. Un vértice de la región factible es (4; 4).
III. Un vértice de la región factible es (0; 8).

Resolución

Graficamos $x+y\ge 8 \wedge y\ge x$, además la región está en el primer cuadrante por $x\ge 0 \wedge y\ge 0$.



De donde se observa que

- La relación obtenida no es acotada.
- (0; 8) y (4; 4) son vértices de la región factible.

Por lo tanto, la respuesta es FVV.

Problema N.º 4

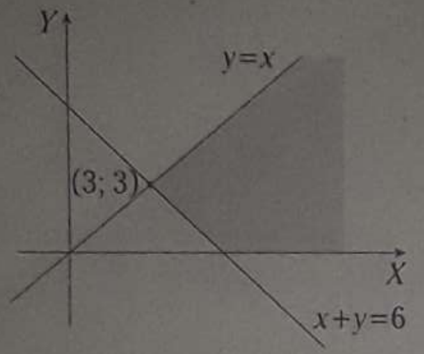
Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x+y\ge 6 \\ x\ge y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

maximice en dicho recinto el valor de la función $f_{(x;\,y)}=7x+11y$.

Resolución

Graficando tenemos



Como la región factible no está acotada, entonces no tiene máximo.

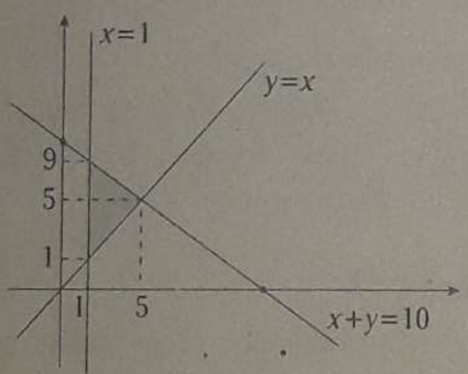
Problema N.º 5

Represente el área de la región determinada por el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x+y\leq 10 \\ x\leq y \\ 1<x \end{cases}$$

Resolución

Graficando tenemos



$\therefore \quad \text{Área}=\dfrac{1}{2}(8)(4)=16\ \text{u}^2$

Problema N.º 6

Resuelva el siguiente problema de programación lineal.

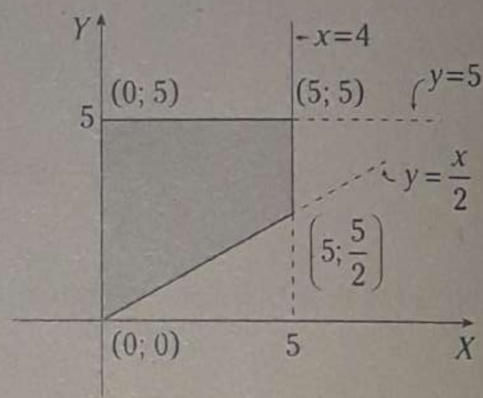
máx $f_{(x;y)}=x+y$

sujeta a

$$\begin{cases} x\leq 5 \\ y\leq 5 \\ 2y-x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Resolución

Dibujando la región factible tenemos



Luego evaluando los extremos de la región factible en la función $f_{(x;\,y)}=x+y$ tenemos

$f_{(0;\,0)}=0+0=0 \;\leftarrow\;$ mínimo

$f_{\left(5;\,\frac{5}{2}\right)}=5+\dfrac{5}{2}=\dfrac{15}{2}$

$f_{(5;\,5)}=5+5=10 \;\leftarrow\;$ máximo

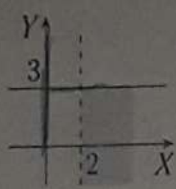
$f_{(0;\,5)}=0+5=5$

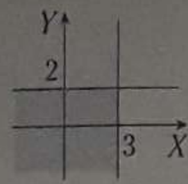
Por lo tanto, el máximo de la función es 10.

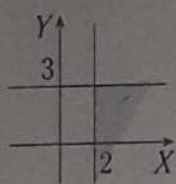
NIVEL BÁSICO

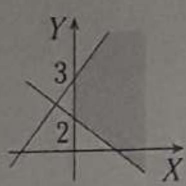
1. Resuelva gráficamente el siguiente sistema

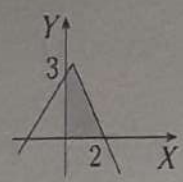
$$\begin{cases} x > 2 \\ y \leq 3 \end{cases}$$

A) 

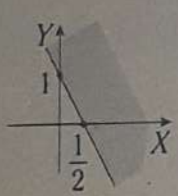
B) 

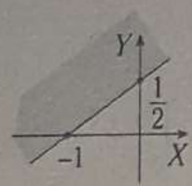
C) 

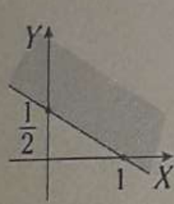
D) 

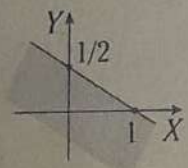
E) 

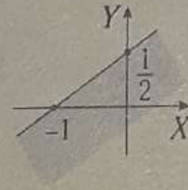
2. Grafique $2x+4y \geq 2$.

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

3. Determine los vértices del polígono formado por el sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} x-y \leq 2 \\ x+3y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A) (0; 0), (0; 2), (3; 1), (2; 0)
B) (0; 0), (2; 0), (1; 3), (0; 2)
C) (0; 0), (1; 1), (3; 3), (2; 0)
D) (1; 1), (2; 0), (0; 0), (0; 2)
E) (3; 3), (1; 1), (2; 2), (0; 0)

4. Para el próximo mes una empresa desea saber cuántas unidades debe producir y vender de cada uno de sus 2 productos principales (*A* y *B*). Los 2 bienes se producen en dos fases de proceso (I y II) con los siguientes coeficientes técnicos.

Producto	Proceso I	Proceso II
A	15 h/unidad	20 h/unidad
B	25 h/unidad	12 h/unidad
Cap. máx. por mes	75 h	60 h

El beneficio unitario estimado por ventas es de \$3000 y \$4000 para los bienes *A* y *B*, respectivamente. Determine la función objetivo y las restricciones.

A) $z=3000x+4000y$
$$\begin{cases} 15x+25y \leq 75 \\ 20x+12y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

B) $z=3000y+4000x$
$$\begin{cases} 15y+25x \leq 75 \\ 20x+12y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

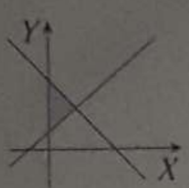
C) $z=3000x+4000y$
$$\begin{cases} 15x+25y \leq 70 \\ 20x+12y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

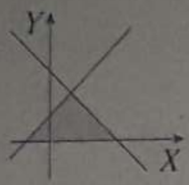
D) $z=300x+400y$
$$\begin{cases} 15x+25y \leq 65 \\ 20x+12y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

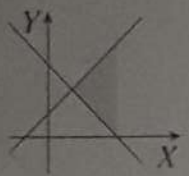
E) $z=3000x+4000y$
$$\begin{cases} 15x+25y \leq 60 \\ 20x+12y \leq 75 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

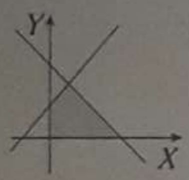
5. Determine la región que se genera al resolver el sistema

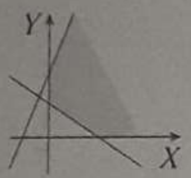
$$\begin{cases} 3x+4y\le 12 \\ x-y\ge -2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

6. Minimice la función objetivo

$f_{(x;\,y)}=x+y$

sujeta a las condiciones

$$\begin{cases} 2x+y\ge 10 \\ x+2y\ge 10 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

A) 10 B) 10/3 C) 1/3
D) 20 E) 20/3

NIVEL INTERMEDIO

7. Maximice la función objetivo

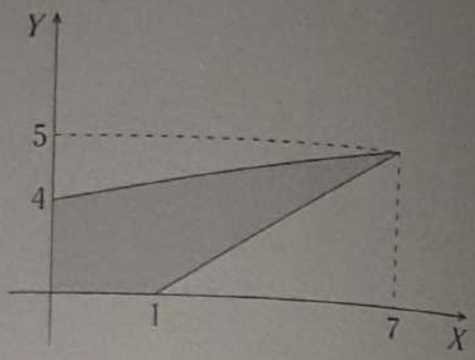
$f_{(x;\,y)}=x-y$

sujeta a las condiciones

$$\begin{cases} 2x+y\ge 10 \\ x+2y\ge 10 \\ x+y\le 10 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

A) 10/3 B) 10 C) −10
D) 0 E) 5

8. Sea f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función definida por $f_{(x;\,y)}=-4x+y$. Determine el punto de la región convexa mostrada en la figura, donde f alcanza su mínimo.



A) (7; 5) B) (0; 0) C) (1; 0)
D) (0; 4) E) (5; 7)

9. Halle el mínimo de la función $z=3x+2y$ con las condiciones

$$\begin{cases} 3x+4y\le 12 \\ 3x+2y\ge 2 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

A) 1 B) 2 C) 6
D) 12 E) 1/2

10. Maximice la función $z=3x+2y$ sujeta a las restricciones

$$\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 2 \\ 3y\le 24-2x \\ y+2x\le 12 \end{cases}$$

A) 0 B) 19 C) 21
D) 17 E) 22

Bibliografía

- ACADEMIA CÉSAR VALLEJO. *Álgebra y principios del análisis*. Lima: Lumbreras Editores, 1999.
- ASNARAN, R. *Ecuaciones polinomiales*. Lima: Editorial San Marcos, 1998.
- FADDIEEV, D. y SOMINSKI, I. *Problemas de álgebra superior*. Moscú: Editorial Mir, 1976.
- GOLOVINA, F. *Matrices y determinantes*. Lima: Editorial San Marcos, 1997.
- HAASER, Norman B.; LA SALLE, Joseph P. y Joseph A. SULLIVAN. *Análisis matemático*. Volumen I. México: Trillas, 1990.
- HALL, H. S. y S. R. KNIGHT. *Álgebra superior*. México: Editorial Mc Graw Hill, 1990.
- LEITHOLD, Louis. *Álgebra*. México: Ediciones Mexicana, 1995.
- LEITHOLD, Louis. *El cálculo*. México: Harla, 1998.
- MATAIX, Carl. *Teoría de ecuaciones*. Moscú: Editorial Mir, 1996.
- PERELMAN, Yakov. *Álgebra recreativa*. Moscú: Editorial Mir, 1985.
- POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1982.
- POTÁPOV M., ALEXÁNDROV V. y P. PASICHENKO. *Álgebra y análisis de funciones elementales*. Moscú: Editorial Mir, 1986.
- PURCELL, Edwin J; RIGDON, Steven E. y Dale VARBERG. *Cálculo*. Novena edición. Pearson Educación. México, 2007.
- RIBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Moscú: Editorial Mir, 1990.
- SPIEGEL, Murray R. *Teoría y problemas de álgebra superior*. México: Editorial Mc Graw Hill, 1987.
- TAYLOR, Howard E. y Thomas I. WADE. *Matemáticas básicas con vectores y matrices*. México: Limusa-Wiley, 1971.
- VENERO, J. Armando. *Análisis matemático I*. Lima: Ediciones Gemar, 1996.
- VENERO, J. Armando. *Matemáticas básicas*. Lima: Ediciones Gemar, 1998.
- YU TAKEUCHI. *Sucesiones y series*. México: Limusa-Wiley, 1985.

Claves

Aritmética

Capítulo I

1 B	6 E	11 D	16 D	21 C	26 D	31 A
2 A	7 B	12 C	17 D	22 B	27 A	32 C
3 C	8 B	13 B	18 A	23 D	28 A	33 D
4 A	9 A	14 D	19 C	24 D	29 D	34 A
5 A	10 C	15 B	20 C	25 E	30 D	35 B

Capítulo II

1 D	6 A	11 D	16 A	21 D	26 A	31 A
2 D	7 B	12 B	17 B	22 C	27 E	32 A
3 C	8 C	13 E	18 D	23 B	28 B	33 D
4 B	9 A	14 B	19 A	24 B	29 A	34 B
5 D	10 D	15 E	20 D	25 D	30 E	35 C

Capítulo III

1 D	6 B	11 D	16 D	21 C	26 C	31 A	36 D
2 A	7 C	12 A	17 E	22 B	27 B	32 B	37 E
3 A	8 D	13 B	18 C	23 E	28 A	33 C	
4 C	9 B	14 A	19 A	24 D	29 D	34 B	
5 C	10 E	15 A	20 D	25 B	30 C	35 C	

Capítulo IV

1 E	6 C	11 B	16 B	21 A	26 A	31 B
2 B	7 C	12 B	17 E	22 B	27 E	32 D
3 C	8 B	13 E	18 E	23 B	28 C	33 A
4 D	9 A	14 E	19 E	24 E	29 C	34 B
5 B	10 E	15 C	20 A	25 A	30 D	35 E

Capítulo V

1 A	6 E	11 C	16 B	21 D	26 D	31 A	36 B
2 B	7 C	12 B	17 B	22 A	27 C	32 A	37 C
3 A	8 A	13 C	18 B	23 C	28 C	33 B	
4 E	9 C	14 C	19 A	24 A	29 A	34 A	
5 C	10 A	15 A	20 A	25 B	30 C	35 B	

Capítulo VI

1 C	6 D	11 B	16 B	21 E	26 B	31 C	36 D
2 A	7 A	12 E	17 A	22 D	27 C	32 C	37 E
3 A	8 A	13 C	18 E	23 A	28 E	33 B	
4 B	9 D	14 B	19 C	24 D	29 D	34 C	
5 B	10 D	15 A	20 C	25 C	30 C	35 E	

Capítulo VII

1 D	6 B	11 A	16 C	21 C	26 C	31 B	36 B
2 C	7 E	12 D	17 B	22 A	27 A	32 B	37 A
3 D	8 C	13 A	18 B	23 D	28 D	33 B	
4 A	9 E	14 D	19 C	24 A	29 A	34 C	
5 D	10 B	15 E	20 B	25 B	30 C	35 E	

Capítulo VIII

1 C	6 B	11 B	16 A	21 D	26 C	31 D
2 C	7 D	12 C	17 D	22 E	27 C	32 E
3 E	8 D	13 A	18 D	23 B	28 B	33 D
4 C	9 B	14 D	19 A	24 C	29 D	34 B
5 B	10 C	15 A	20 A	25 B	30 B	35 B

Capítulo IX

1 B	7 D	13 E	19 A	25 E	31 B	37 C
2 D	8 B	14 C	20 A	26 D	32 C	38 A
3 A	9 A	15 A	21 B	27 C	33 B	
4 B	10 C	16 D	22 D	28 C	34 E	
5 D	11 D	17 C	23 B	29 A	35 D	
6 C	12 A	18 B	24 A	30 C	36 D	

Capítulo X

1 C	6 D	11 D	16 C	21 C	26 C	31 C
2 C	7 E	12 E	17 C	22 D	27 B	32 C
3 C	8 D	13 A	18 C	23 C	28 A	33 B
4 B	9 C	14 E	19 A	24 A	29 A	34 D
5 D	10 A	15 C	20 C	25 A	30 E	35 E

Capítulo XI

1 B	7 E	13 A	19 B	25 E	31 C	37 C
2 B	8 D	14 A	20 D	26 C	32 A	38 B
3 A	9 C	15 C	21 B	27 D	33 D	39 B
4 C	10 E	16 E	22 B	28 C	34 E	
5 D	11 D	17 B	23 A	29 A	35 B	
6 B	12 D	18 B	24 D	30 B	36 A	

Capítulo XII

1 C	6 D	11 A	16 C	21 E	26 C	31 C
2 B	7 D	12 B	17 A	22 C	27 D	32 D
3 C	8 A	13 E	18 D	23 A	28 C	33 A
4 C	9 D	14 B	19 E	24 E	29 B	34 E
5 A	10 B	15 E	20 E	25 B	30 C	35 B

Capítulo XIII

1 A	6 B	11 C	16 A	21 E	26 A	31 B
2 A	7 A	12 E	17 E	22 D	27 E	32 B
3 A	8 E	13 C	18 A	23 D	28 D	33 C
4 C	9 A	14 C	19 D	24 B	29 A	34 C
5 B	10 E	15 B	20 A	25 A	30 D	35 E

Capítulo XIV

1 E	7 B	13 B	19 C	25 E	31 E	37 A
2 C	8 D	14 E	20 A	26 C	32 C	38 C
3 C	9 B	15 A	21 A	27 C	33 E	
4 E	10 A	16 B	22 B	28 B	34 D	
5 B	11 D	17 B	23 E	29 D	35 B	
6 D	12 A	18 A	24 D	30 C	36 C	

Capítulo XV

1 D	6 A	11 D	16 B	21 D	26 A	31 A
2 C	7 D	12 D	17 D	22 C	27 D	32 D
3 B	8 E	13 C	18 E	23 B	28 B	33 C
4 D	9 A	14 C	19 E	24 D	29 C	34 B
5 B	10 D	15 E	20 E	25 A	30 E	35 A

Claves

Álgebra

Capítulo I

1 C	6 A	11 D	16 C	21 C	26 E	31 B
2 B	7 A	12 C	17 E	22 E	27 C	32 A
3 B	8 C	13 A	18 B	23 B	28 D	33 B
4 A	9 E	14 B	19 B	24 A	29 B	34 A
5 A	10 A	15 B	20 D	25 D	30 D	35 E

Capítulo II

1 A	7 C	13 E	19 D	25 C	31 A	37 A	43 A
2 C	8 D	14 E	20 D	26 C	32 C	38 E	44 A
3 C	9 A	15 A	21 B	27 C	33 E	39 A	45 A
4 A	10 B	16 C	22 D	28 C	34 D	40 D	
5 E	11 C	17 B	23 A	29 B	35 B	41 A	
6 D	12 C	18 C	24 D	30 C	36 B	42 E	

Capítulo III

1 B	6 C	11 B	16 A	21 B	26 D	31 C	36 D
2 E	7 D	12 D	17 A	22 C	27 B	32 E	37 B
3 A	8 C	13 A	18 D	23 E	28 E	33 C	38 A
4 B	9 B	14 C	19 D	24 B	29 B	34 A	39 C
5 A	10 E	15 B	20 E	25 C	30 B	35 D	40 A

Capítulo IV

1 C	8 B	15 C	22 E	29 B	36 D	43 A	50 B
2 B	9 E	16 D	23 D	30 E	37 B	44 E	51 C
3 D	10 B	17 E	24 D	31 D	38 A	45 C	52 A
4 C	11 A	18 A	25 C	32 A	39 D	46 A	53 C
5 E	12 E	19 D	26 A	33 B	40 C	47 E	54 C
6 A	13 D	20 E	27 C	34 E	41 B	48 D	
7 D	14 C	21 A	28 C	35 A	42 B	49 A	

Capítulo V

1 C	6 D	11 B	16 D	21 C	26 D	31 E
2 E	7 E	12 A	17 E	22 E	27 A	32 B
3 D	8 C	13 B	18 D	23 D	28 C	33 D
4 C	9 D	14 E	19 A	24 B	29 C	
5 A	10 E	15 C	20 D	25 A	30 E	

Capítulo VI

1 B	3 D	5 A	7 C	9 B
2 B	4 E	6 B	8 B	10 A

Capítulo VII

1 D	6 B	11 B	16 A	21 B	26 C	31 A	36 D
2 B	7 E	12 E	17 B	22 C	27 B	32 B	37 E
3 A	8 D	13 B	18 C	23 B	28 E	33 C	38 C
4 C	9 A	14 C	19 A	24 D	29 C	34 A	
5 A	10 D	15 A	20 C	25 C	30 A	35 D	

Capítulo VIII

1 D	6 C	11 D	16 D	21 A	26 B	31 A
2 E	7 C	12 B	17 C	22 B	27 C	32 E
3 A	8 B	13 C	18 B	23 C	28 B	33 B
4 B	9 D	14 D	19 C	24 D	29 D	34 C
5 E	10 A	15 E	20 A	25 C	30 A	35 C

Capítulo IX

1 A	6 B	11 B	16 B	21 A	26 B	31 A
2 B	7 D	12 D	17 C	22 B	27 D	32 D
3 C	8 D	13 C	18 C	23 C	28 C	33 C
4 C	9 E	14 D	19 E	24 B	29 B	34 E
5 A	10 A	15 E	20 C	25 E	30 A	

Capítulo X

1 D	5 B	9 B	13 A	17 D	21 E	25 D	29 D
2 A	6 C	10 C	14 D	18 B	22 B	26 E	30 C
3 E	7 D	11 B	15 A	19 A	23 B	27 D	31 D
4 B	8 C	12 E	16 E	20 A	24 E	28 B	32 B

Capítulo XI

1 A	6 A	11 E	16 B	21 A	26 D	31 A	36 A	41 D
2 B	7 E	12 B	17 A	22 C	27 B	32 B	37 C	42 C
3 C	8 B	13 C	18 E	23 D	28 E	33 E	38 D	43 A
4 B	9 E	14 E	19 D	24 E	29 D	34 D	39 B	44 E
5 D	10 D	15 E	20 C	25 B	30 C	35 E	40 E	45 D

Capítulo XII

1 C	4 A	7 C	10 E	13 C	16 E	19 D	22 D	25 E
2 E	5 B	8 C	11 A	14 E	17 D	20 B	23 C	
3 C	6 E	9 D	12 B	15 C	18 D	21 C	24 E	

Capítulo XIII

1 E	5 E	9 D	13 C	17 D	21 B	25 A	29 B
2 C	6 C	10 E	14 B	18 A	22 D	26 A	30 C
3 D	7 A	11 B	15 C	19 E	23 B	27 E	
4 B	8 D	12 A	16 C	20 B	24 E	28 B	

Capítulo XIV

1 D	7 E	13 A	19 D	25 C	31 E	37 E	43 E	49 A
2 A	8 B	14 E	20 B	26 E	32 B	38 C	44 E	
3 B	9 B	15 B	21 B	27 D	33 E	39 E	45 C	
4 D	10 D	16 D	22 C	28 B	34 D	40 C	46 C	
5 D	11 D	17 E	23 D	29 E	35 B	41 A	47 D	
6 C	12 C	18 D	24 A	30 C	36 C	42 B	48 B	

Capítulo XV

1 C	8 C	15 B	22 B	29 D	36 C	43 D	50 C
2 B	9 D	16 C	23 D	30 E	37 B	44 C	51 A
3 A	10 A	17 A	24 E	31 B	38 A	45 A	52 A
4 D	11 C	18 D	25 A	32 D	39 C	46 C	53 D
5 C	12 D	19 E	26 D	33 B	40 B	47 D	54 E
6 A	13 E	20 A	27 C	34 A	41 A	48 C	55 D
7 B	14 C	21 C	28 A	35 C	42 C	49 C	

Capítulo XVI

1 A	3 A	5 D	7 C	9 B
2 C	4 A	6 E	8 A	10 C

Afined desea agradecer al equipo que participó en la presente publicación: Marilú Sujey Alberto Mamani y Luigi Aguilar Quintana (cuidado de la edición), César Grados Alatrista, Brunella Sosa Luna y Julian Pacheco Quincho (digitación y diagramación) y Gastón Ruiz Quiroz (diseño de portada).