Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики – процессов управления

Н. В. Распопова, Л. А. Свиркина

# Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат. Учебные материалы для практических занятий, самостоятельной работы, текущего контроля и промежуточной аттестации

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2018

УДК 514.12
ББК 22.15
Р24

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. *Кликунова К.А.* (Санкт-Петербургский государственный педиатрический медицинский университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. *Тамасян Г.Ш.* (Санкт-Петербургский государственный университет)

*Печатается по рекомендации Учебно-методической комиссии факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета*

Р24 **Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат. Учебные материалы для практических занятий, самостоятельной работы, текущего контроля и промежуточной аттестации:** Учеб.-метод. пособие / Распопова Н.В., Свиркина Л.А. — СПб.: ВВМ, 2018. — 57 с.

ISBN 978-5-9651-1184-8

Настоящее пособие предназначено для более глубокого усвоения материала по теме «Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат». Содержит краткие теоретические сведения, ряд решенных задач, задачи для самостоятельной работы, контрольные задания и тест. Все задачи снабжены ответами. Целью данного пособия является развитие следующих навыков: задание прямых на плоскости с помощью различных уравнений, включая уравнение пучка прямых; анализ взаимного расположение прямых на плоскости; нахождение угла между прямыми; поиск расстояния от точки до прямой на плоскости.

Пособие является результатом многолетнего опыта преподавания авторами дисциплины «Геометрия» на факультете прикладной математики-процессов управления СПбГУ. Предназначено для студентов первого курса физико-математических и экономических специальностей. Также может быть использовано в качестве дополнительного материала при организации преподавателем практических занятий, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Библиогр. 12 назв. Ил.6.

.



ISBN 978-5-9651-1184-8

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Тема «Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат» входит в раздел «Аналитическая геометрия», который является составной частью дисциплины «Геометрия». Данная дисциплина входит в базовую часть математического и естественно-научного блока компетентностно-ориентированного учебного плана основной образовательной программы высшего образования «Прикладная математика, фундаментальная информатика и программирование» по уровню бакалавриат. Вместе с другими дисциплинами учебного плана «Геометрия» участвует в формировании у обучающихся общекультурных/универсальных и профессиональных компетенций. Компетентностный подход акцентирует внимание на результате образования, причем в качестве результата рассматривается не столько сумма усвоенной информации, сколько способность человека действовать в различных ситуациях. Для выпускника образовательного учреждения, для дальнейшей его трудовой деятельности, особо важно формирование у него профессиональных компетенций.

Целью данного пособия является более глубокое усвоение материала по теме «Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат», а также развитие у обучающихся навыков самостоятельного решения практических задач и активного применения полученных знаний в области прикладной математики и информатики.

Пособие способствует формированию и усвоению следующих знаний, умений, навыков (ЗУНов): задание прямых на плоскости с помощью различных уравнений, включая уравнение пучка прямых; анализ взаимного расположение прямых на плоскости; нахождение угла между прямыми; поиск расстояния от точки до прямой на плоскости. В каждом параграфе приведены краткие теоретические сведения, учебные задания для аудиторной работы и учебные задания для самостоятельной работы. Для всех заданий приводятся ответы.

В отдельный раздел авторы вынесли материал, касающийся междисциплинарных связей и применения полученных знаний в профессиональной деятельности.

Последний параграф содержит задания для контроля усвоения материала обучающимися: один вариант контрольной работы из пяти заданий и тест из четырнадцати вопросов, который удобно использовать в электронных ресурсах образовательной организации. Например, в Санкт-Петербургском государственном Университете в качестве такой площадки выступает система дистанционной поддержки образовательного процесса Blackboard.

Пособие снабжено библиографическим списком. Приведенная литература может быть использована как для аудиторной работы, так и для самостоятельного изучения.

При написании пособия учитывались материалы рабочих программ дисциплины «Геометрия», размещенные в открытом доступе в электронных образовательных ресурсах СПбГУ: https://spbu.ru «Открытый университет/Сведения о СПбГУ/Образование/Учебно-методическая документация...».

Перейти к оглавлению на странице: 3

# УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

## §1. Виды задания прямой на плоскости

### 1.1 Краткие сведения

Направляющим вектором $\vec{a}$ прямой $\ell$ называется любой ненулевой вектор коллинеарный этой прямой.

Нормальным вектором $\vec{n}$ прямой $\ell$ называется вектор не равный нулевому и ортогональный направляющему вектору.

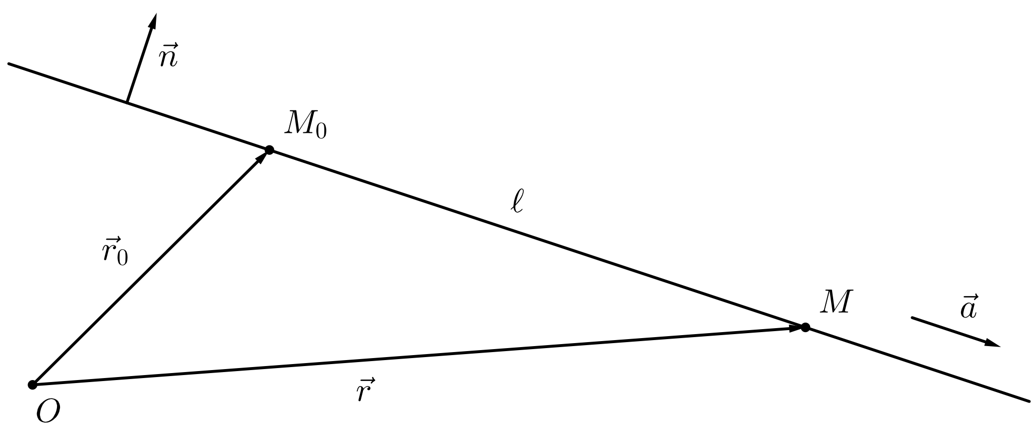


Рис. 1.1.

**«Векторное» уравнение прямой на плоскости**

Пусть прямая $\ell$ задана на плоскости своим нормальным вектором $\vec{n}$ и фиксированной точкой $M_0(\vec{r}_0)$. Пусть точка $M(\vec{r})$ — любая точка прямой $\ell$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0 M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ортогонален вектору $\vec{n}$ (см. Рис. 1.1), и мы получаем следующее скалярное равенство

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Раскрывая скобки по свойству дистрибутивности скалярного произведения и делая замену $D = -\vec{r}_0 \cdot \vec{n}$, получаем «векторное» уравнение прямой на плоскости, выраженное скалярным равенством

$$\vec{r} \cdot \vec{n} + D = 0. \tag{1.1}$$

(1.1) — «векторное» уравнение прямой на плоскости.

**Замечание.** Запись $M(\vec{r})$ и $M_0(\vec{r}_0)$ обозначает, что точкам $M$ и $M_0$ ставятся в соответствие их радиус-векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ (см. Рис. 1.1).

**Общее (координатное) уравнение прямой на плоскости**

Пусть прямая $\ell$ задана на плоскости своим нормальным вектором $\vec{n}\{A, B\}$ и фиксированной точкой $M_0(x_0, y_0)$. Пусть точка $M(x, y)$ — любая точка прямой $\ell$. Учитывая, что скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, есть сумма произведений их координат, уравнение (1.1) приобретает вид

$$Ax + By + D = 0. \tag{1.2}$$

(1.2) — общее (координатное) уравнение прямой на плоскости.

**Замечание.** Есть разные мнения на счет обозначения координат точки и вектора. В данном пособии условимся координаты точки обозначать $M(x, y)$, координаты вектора $\vec{n}\{A, B\}$.

**Векторно-параметрическое уравнение прямой на плоскости**

Пусть прямая $\ell$ задана на плоскости своим направляющим вектором $\vec{a}$ и фиксированной точкой $M_0(\vec{r}_0)$. Пусть точка $M(\vec{r})$ — любая точка прямой. Тогда, учитывая коллинеарность векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{a}$, можно записать следующее векторное равенство

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{a}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда следует,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}, \quad t \in (-\infty, +\infty). \tag{1.3}$$

(1.3) — векторно-параметрическое уравнение прямой на плоскости.

**Параметрические уравнения прямой на плоскости**

Пусть прямая $\ell$ задана на плоскости своим направляющим вектором $\vec{a}\{\alpha, \beta\}$ и фиксированной точкой $M_0(x_0, y_0)$. Пусть точка

$M(x,y)$ — любая точка прямой. Тогда, ввиду соображений, что одно векторное уравнение распадется на два скалярных уравнения (для каждой координаты запишем свое уравнение, вытекающее из уравнения (1.3)), имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cdot\alpha, \\ y = y_0 + t\cdot\beta, \end{cases} \qquad t\in(-\infty,+\infty). \tag{1.4}$$

(1.4) — параметрические уравнения прямой на плоскости.

**Замечание.** Параметрические уравнения прямой записывают как в виде системы уравнений с фигурной скобкой (см. (1.4)), так и в строчку, через запятую: $x = x_0 + t\cdot\alpha$, $y = y_0 + t\cdot\beta$.

**Каноническое уравнение прямой на плоскости**

Выразим в системе (1.4) параметр $t$:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\alpha} = t, \\ \dfrac{y-y_0}{\beta} = t, \end{cases} \qquad t\in(-\infty,+\infty).$$

Исключив параметр $t$, получим следующее равенство

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}. \tag{1.5}$$

(1.5) — каноническое уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора $\vec{a}\,\{\alpha,\beta\}$.

**Замечание.** Если вектор $\vec{a}\,\{\alpha,\beta\}$ — направляющий вектор прямой $\ell$, то вектор $\vec{n}\,\{-\beta,\alpha\}$ — нормальный вектор прямой $\ell$.

**Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки**

Пусть прямая $\ell$ задана на плоскости двумя фиксированными точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Тогда за направляющий вектор прямой $\ell$ можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2}\,\{x_2-x_1,\ y_2-y_1\}$.
Воспользуемся каноническим уравнением (1.5) прямой $\ell$. Получим

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{1.6}$$

(1.6) — уравнение прямой на плоскости, проходящей через две фиксированные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

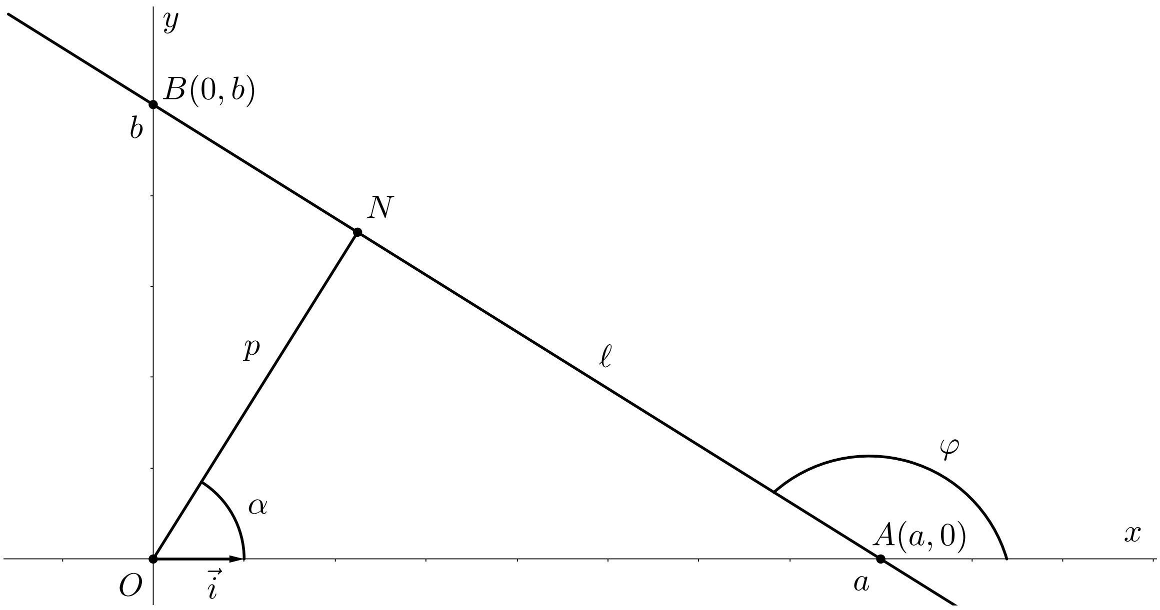


Рис. 1.2.

**Уравнение прямой на плоскости в «отрезках»**

Пусть прямая $\ell$ не проходит через начало координат, не параллельна координатным осям, пересекает ось $Ox$ в точке $A\,(a, 0)$, а ось $Oy$ в точке $B\,(0, b)$ (см. Рис. 1.2). Тогда за направляющий вектор прямой $\ell$ можно взять вектор $\overrightarrow{AB}\,\{-a, b\}$. Воспользуемся каноническим уравнением (1.5) прямой. За точку $M_0$ возьмем точку $A\,(a, 0)$. Получим

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y-0}{b} \quad \Rightarrow \quad bx + ay = ab.$$

Разделив обе части уравнения на $ab \neq 0$, получим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{1.7}$$

(1.7) — уравнение прямой на плоскости в «отрезках», где $a$ и $b$ — длины отрезков, отсекаемых прямой $\ell$ по осям координат $Ox$ и $Oy$ соответственно. Знаки $a$ и $b$ показывают, в каком из квадрантов прямая отсекает прямоугольный треугольник с длинами катетов $|a|$ и $|b|$.

**Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом**

Пусть прямая $\ell$ не проходит через начало координат, не параллельна координатным осям и отсекает прямоугольный треугольник с катетами $a$ и $b$ в первом квадранте (см. Рис. 1.2). Пусть $A\,(a, 0)$ — точка пересечения прямой с осью $Ox$, а $B\,(0, b)$ — точка пересечения прямой с осью $Oy$. Пусть угол $\varphi$ — наименьший угол, отсчитываемый от орта $\vec{i}$ оси $Ox$ до прямой $\ell$ против часовой стрелки после параллельного перемещения орта $\vec{i}$ вдоль оси $Ox$ так, чтобы начало вектора $\vec{i}$ совпадало с точкой пересечения прямой $\ell$ и оси $Ox$. Угловым коэффициентом прямой $\ell$ называется величина $k = \mathrm{tg}\varphi$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $BOA$. Тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению противолежащего катета к прилежащему

$$\mathrm{tg}(\angle OAB) = \frac{b}{a}.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{tg}(\angle OAB) = \mathrm{tg}(\pi - \varphi) = -\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Следовательно,

$$k = \mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{b}{a}.$$

Преобразуем уравнение прямой в «отрезках» (см. (1.7)) к виду

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a} \Rightarrow y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Получаем

$$y = kx + b. \tag{1.8}$$

(1.8) — уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом.

**Нормированное (нормальное) уравнение прямой на плоскости в координатном виде**

Пусть прямая $\ell$ не проходит через начало координат, не параллельна координатным осям и отсекает прямоугольный треугольник с катетами $a$ и $b$ в первом квадранте. Пусть точка $N$ — ортогональная проекция точки $O$ на прямую $\ell$ и длина отрезка $ON$ равна $p$ (см. Рис. 1.2).

Пусть угол $\alpha$ — угол, отсчитываемый от орта $\vec{i}$ оси $Ox$ до вектора $\overrightarrow{ON}$ против часовой стрелки. Пусть вектор $\vec{n}'$ — орт вектора $\overrightarrow{ON}$:

$$\vec{n}' = \overrightarrow{ON}/|\overrightarrow{ON}|, \quad |\overrightarrow{ON}| = p.$$

Координатами орта $\vec{n}'$ являются косинусы углов наклона вектора к осями $Ox$ и $Oy$ соответственно:

$$x_{n'} = \cos\alpha, \quad y_{n'} = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha.$$

Тогда координаты вектора $\overrightarrow{ON}$ (и точки $N$) равны

$$\overrightarrow{ON} = p \cdot \vec{n}', \quad x_N = p\cos\alpha, \quad y_N = p\sin\alpha.$$

Пусть точка $M(x, y)$ — любая точка прямой. Вектор $\overrightarrow{NM}$ ортогонален вектору $\vec{n}'$, их скалярное произведение равно нулю

$$\vec{n}'\{\cos\alpha, \sin\alpha\}, \quad \overrightarrow{NM}\{x - p\cos\alpha, y - p\sin\alpha\},$$

$$\vec{n}' \cdot \overrightarrow{NM} = \cos\alpha(x - p\cos\alpha) + \sin\alpha(y - p\sin\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$x\cos\alpha - p\cos^2\alpha + y\sin\alpha - p\sin^2\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0.$$

Учтем, что по основному тригонометрическому тождеству выражение в скобках равно $1$, и получим уравнение

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{1.9}$$

(1.9) — нормированное (нормальное) уравнение прямой на плоскости.

**Замечание.** Для приведения общего уравнения прямой (см. (1.2)) к нормированному (см. (1.9)) необходимо домножить уравнение $Ax + By + D = 0$ на нормирующий множитель

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

причем знак $\lambda$ выбирается таким образом, чтобы $\lambda D$ было отрицательной величиной.

Перейти к оглавлению на странице: 3

## 1.2 Учебные задания для аудиторной работы

В общем случае одна и та же прямая на плоскости, если она не проходит через начало координат и не параллельна координатным осям, может быть представлена одним из вышеперечисленных видов задания, в зависимости от решаемой задачи. Заметим, что из представленных девяти уравнений, два уравнения заданы в векторном виде, и семь — в координатном.

**Задача 1.2.1.**
Представить прямую $\ell$, заданную своим общим уравнением, другими видами задания (каноническим, параметрическим, с угловым коэффициентом, в «отрезках», нормированным)

$$\ell: \; 2x + y - 6 = 0.$$

Сделать соответствующие выводы.

**Решение задачи 1.2.1.**

1. Общий вид прямой (см. (1.2)) дает нам информацию о координатах нормального вектора $\vec{n}$, а также о скалярном произведении $D = -\vec{r}_0 \cdot \vec{n}$ радиус-вектора точки, заданной на прямой, и нормального вектора (см. (1.1)):

$$\vec{n}\,\{2, 1\}, \quad \vec{r} \cdot \vec{n} = 2x + y, \quad \vec{r}_0 \cdot \vec{n} = 6.$$

2. Приведем арифметическими преобразованиями общее уравнение прямой к каноническому виду (см. (1.5)). Для этого, перенесем слагаемое содержащее $y$ направо от знака равенства $2x - 6 = -y$. Далее вынесем 2 за скобки, и переместим 2 и $(-1)$ в знаменатель. Получим каноническое уравнение

$$\frac{x-3}{1/2} = \frac{y}{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2}.$$

Можно сделать вывод, что прямая проходит через точку $M_0\,(3, 0)$ в направлении вектора $\vec{a}\,\{1, -2\}$.

Знная $\vec{a}$ и $M_0$, можно также записать векторно-параметрическое (см. (1.3)) уравнение прямой:

$$\{x, y\} = \{3, 0\} + t \cdot \{1, -2\};$$

и параметрическое (см. 1.4)) уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -2t, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

3. Приведем арифметическими преобразованиями общее уравнение прямой к виду с угловым коэффициентом (см. (1.8)):
$$y = -2x + 6.$$
Отсюда можно сделать вывод о том, что угловой коэффициент прямой равен $k = -2$.

4. Приведем арифметическими преобразованиями общее уравнение прямой к уравнению прямой в «отрезках» (см. (1.7)). Перенесем 6 направо от знака равенства и разделим обе части уравнения на 6:
$$2x + y = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1.$$
Отсюда можно сделать вывод о том, что прямая отсекает отрезки длиной 3 и 6 по осям Ox и Oy соответственно, то есть проходит через точки $(3, 0)$ и $(0, 6)$.

5. Длина нормального вектора $\vec{n}\,\{2, 1\}$ заданной прямой не равна единице. Следовательно, умножив общее уравнение прямой на нормирующий множитель
$$\lambda = +\frac{1}{\sqrt{2^2 + 1}},$$
взятый со знаком $+$, так как должно выполняться условие $\lambda D < 0$, получим нормированное (нормальное) уравнение прямой (см. (1.9)) в следующем виде
$$\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{6}{\sqrt{5}} = 0.$$
Отсюда можно сделать вывод о том, что $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, а расстояние от начала координат до прямой равно $p = 6/\sqrt{5}$.

**Задача 1.2.2.**
Дан треугольник с вершинами $A\,(2,4)$, $B\,(1,-3)$, $C\,(-5,1)$. Написать уравнение медианы этого треугольника, проведенной из вершины $A$.

**Решение задачи 1.2.2.**
Пусть точка $D$ — середина отрезка $BC$. Исходя из того, что координаты середины отрезка есть половина суммы координат концов отрезка, получаем координаты точки $D$:

$$x_D = \frac{1-5}{2} = -2, \quad y_D = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Далее воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $A\,(2,4)$ и $D\,(-2,-1)$ (см. (1.6)):

$$\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y-4}{-1-4} \quad \Rightarrow \quad 5x-4y+6=0.$$

**Ответ.** $5x-4y+6=0$.

**Задача 1.2.3.**
Дан треугольник с вершинами $A\,(6,6)$, $B\,(-4,1)$, $C\,(0,-2)$. Написать уравнение биссектрисы этого треугольника, проведенной из вершины $C$.

**Решение задачи 1.2.3.**
Найдем координаты направляющего вектора биссектрисы угла $ACB$. Для этого найдем векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и нормируем их:

$$\overrightarrow{CA}\,\{6,8\}, \quad |\overrightarrow{CA}| = 10, \quad \overrightarrow{CB}\,\{-4,3\}, \quad |\overrightarrow{CB}| = 5;$$

$$\vec{e}_{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} = \left\{\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right\} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\};$$

$$\vec{e}_{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|} = \left\{-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}.$$

Вектор, равный сумме полученных ортов, по правилу параллелограмма пойдет по диагонали параллелограмма. Стороны такого параллелограмма равны, следовательно, это будет ромб. Диагональ ромба делит угол пополам, то есть вектор, равный сумме ортов, идет по биссектрисе угла, образованного этими ортами:

$$\vec{a} = \vec{e}_{\overrightarrow{CA}} + \vec{e}_{\overrightarrow{CB}} = \left\{ \frac{3}{5} - \frac{4}{5}, \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right\} = \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{7}{5} \right\}.$$

Итак, для искомой прямой мы имеем направляющий вектор $\vec{a}$ и точку $C$, лежащую на прямой. Тогда каноническое уравнение прямой (см. (1.5)) имеет вид:

$$\frac{x}{-1/5} = \frac{y+2}{7/5} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{7},$$

а общее уравнение (см. (1.2)):

$$7x + y + 2 = 0.$$

**Ответ.** $7x + y + 2 = 0$.

**Задача 1.2.4.**
Даны уравнения двух сторон треугольника

$$2x - y - 1 = 0, \quad 5x - y - 4 = 0$$

и уравнение $3x - y - 2 = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $M\,(4, 10)$. Найти координаты всех вершин треугольника

**Решение задачи 1.2.4.**
Найдем координаты вершины (обозначим ее $A$) треугольника, принадлежащей заданным сторонам. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 5x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad A\,(1, 1).$$

Нетрудно заметить, что координаты точки $A$ также удовлетворяют уравнению заданной медианы

$$3 \cdot 1 - 1 - 2 = 0.$$

Следовательно, медиана проведена из вершины $A$ на сторону $BC$ (если две другие вершины треугольника обозначить $B$ и $C$). Координаты точки $M$ удовлетворяют уравнению медианы:

$$3 \cdot 4 - 10 - 2 = 0.$$

Следовательно, точка $M$ не только лежит на третьей стороне $BC$, но и на медиане, т. е. она является серединой $BC$.

Обозначим координаты одной из вершин $B\,(x_B, y_B)$. Учитывая, что $M\,(4, 10)$ — середина $BC$, запишем координаты точки $C$:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2}, \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2}, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 4 = \dfrac{x_B + x_C}{2}, \\ 10 = \dfrac{y_B + y_C}{2}, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_C = 8 - x_B, \\ y_C = 20 - y_B. \end{cases}$$

Точка $B$ лежит на $AB$, точка $C$ лежит на $AC$, следовательно, координаты точек удовлетворяют уравнениям соответствующих сторон:

$$\begin{cases} 2x_B - y_B - 1 = 0\,(AB), \\ 5(8 - x_B) - (20 - y_B) - 4 = 0\,(AC), \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_B - y_B = 1, \\ -5x_B + y_B = -16. \end{cases}$$

Решая систему, находим координаты точки $B$:

$$x_B = 5, \quad y_B = 9.$$

Тогда координаты точки $C$ равны:

$$x_C = 8 - 5 = 3, \quad y_C = 20 - 9 = 11.$$

Уравнение стороны $BC$ запишем как уравнение прямой, проходящей через две точки (см. (1.6)):

$$\frac{x-5}{3-5} = \frac{y-9}{11-9} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y - 28 = 0, \quad \Rightarrow \quad x + y - 14 = 0.$$

**Ответ.** $x + y - 14 = 0$, $(1, 1)$, $(5, 9)$, $(3, 11)$.

## 1.3 Учебные задания для самостоятельной работы

**Задача 1.3.1.**
Записать каноническое и общее уравнения прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 3 + 2t, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Найти угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый ею на оси ординат.

**Подсказка к задаче 1.3.1.**
Воспользоваться формулами (1.5) и (1.2).

**Ответ.** $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{2}, \quad 2x - 3y + 5 = 0\,,\; k = \dfrac{2}{3}\,,\; b = \dfrac{5}{3}\,.$

**Задача 1.3.2.**
Даны вершины треугольника: $A\,(4,6)$, $B\,(-4,0)$, $C\,(-1,-4)$. Составить уравнение медианы, проведенной из вершины $C$, и биссектрисы, проведенной из вершины $B$.

**Подсказка к задаче 1.3.2.**
Найти координаты середины $AB$ и составить уравнение медианы, проходящей через две точки (см. (1.6)). Найти координаты вектора, идущего по биссектрисе из угла $B$ и составить каноническое уравнение прямой (см. (1.5)) по направляющему вектору и точке.

**Ответ.** $7x - y + 3 = 0\,,\; x + 7y + 4 = 0\,.$

**Задача 1.3.3.**
Вычислить площадь треугольника, образованного осями координат и прямой $4x + 3y - 24 = 0$.

**Подсказка к задаче 1.3.3.**
Воспользоваться уравнением прямой «в отрезках» (см. (1.7)).

**Ответ.** $S = 24\,.$

**Задача 1.3.4.**
Даны уравнения $3x - 2y + 8 = 0$, $x - y + 4 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x - y + 3 = 0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

**Подсказка к задаче 1.3.4.**
Найти координаты вершины треугольника, из которой проведена медиана. Найти координаты второй вершины, принадлежащей двум заданным сторонам треугольника. Найти координаты середины стороны треугольника, на которую опущена медиана, используя уравнения стороны треугольника и медианы. Зная координаты конца отрезка (вершины треугольника) и середины отрезка (на которую опущена медиана), найти координаты другого конца отрезка (третьей вершины треугольника). Составить уравнение третьей стороны треугольника, проходящей через две найденные вершины (см. (1.6)).

**Ответ.** $5x - 3y + 10 = 0$.

**Замечание.** Не забывайте делать проверку. Например, проверять, что заданные точки лежат на прямых, уравнения которых вы получили.

# §2. Взаимное расположение прямых на плоскости

## 2.1 Краткие сведения

I случай.

Две прямые заданы своими общими уравнениями (см. (1.2))

$$\ell_1: \ A_1x + B_1y + D_1 = 0,$$
$$\ell_2: \ A_2x + B_2y + D_2 = 0.$$

1. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ пересекаются.

   Следовательно, нормальные векторы этих прямых $\vec{n}_1\,\{A_1, B_1\}$ и $\vec{n}_2\,\{A_2, B_2\}$ не коллинеарны, то есть не пропорциональны их координаты

   $$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}. \tag{2.1}$$

   (2.1) — условие пересечения двух прямых на плоскости, заданных своими общими уравнениями.
   Условие (2.1) иногда записывают в виде:

   $$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.2}$$

2. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ ортогональны.

   Следовательно, нормальные векторы $\vec{n}_1\,\{A_1, B_1\}$ и $\vec{n}_2\,\{A_2, B_2\}$ ортогональны, а значит, сумма произведений координат векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ равна нулю

   $$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{2.3}$$

   (2.3) — условие ортогональности двух прямых на плоскости, заданных своими общими уравнениями.

3. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ параллельны и не совпадают.

   Следовательно, нормальные векторы $\vec{n}_1\{A_1, B_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2, B_2\}$ коллинеарны и прямые не имеют общих точек

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \tag{2.4}$$

   (2.4) — условие параллельности двух прямых на плоскости, заданных своими общими уравнениями.

4. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ совпадают.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{2.5}$$

   (2.5) — условие совпадения двух прямых на плоскости, заданных своими общими уравнениями.

II случай.

Две прямые заданы своими уравнениями с угловым коэффициентом (см. (1.8))

$$\ell_1 : \ y = k_1 x + b_1,$$

$$\ell_2 : \ y = k_2 x + b_2.$$

1. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ ортогональны.

   Запишем уравнения заданных прямых в общем виде (см. (1.2)) для того, чтобы получить координаты их нормальных векторов. Получим $\vec{n}_1\{k_1, -1\}$ и $\vec{n}_2\{k_2, -1\}$. Прямые ортогональны, следовательно, нормальные векторы ортогональны, т. е. их скалярное произведение равно нулю:

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 \cdot k_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \tag{2.6}$$

   (2.6) — условие ортогональности двух прямых на плоскости, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

2. Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ параллельны. Следовательно, прямые пересекают ось $Ox$ под одинаковыми углами, значит, угловые коэффициенты прямых совпадают

$$k_1 = k_2. \tag{2.7}$$

(2.7) — условие параллельности двух прямых на плоскости, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

## 2.2 Учебные задания для аудиторной работы

**Задача 2.2.1.**

Установить взаимное расположение прямых

$$\begin{aligned} \ell_1 :& \quad 2x - y - 5 = 0, \\ \ell_2 :& \quad 4x + 8y + 7 = 0, \\ \ell_3 :& \quad 6y - 12x + 1 = 0. \end{aligned}$$

**Решение задачи 2.2.1.**

В условии задачи все три прямые заданы своими общими уравнениями (см. (1.2)), воспользуемся формулами случая I. Запишем нормальные векторы прямых:

$$\vec{n}_1\,\{2,-1\}, \quad \vec{n}_2\,\{4,8\}, \quad \vec{n}_3\,\{-12,6\}.$$

Для прямых $\ell_1$ и $\ell_2$ выполнено условие пересечения (см. (2.1)):

$$\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{8}.$$

Также для них выполнено условие ортогональности (см. (2.3)):

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 2\cdot 4 - 1\cdot 8 = 0.$$

Для прямых $\ell_1$ и $\ell_3$ выполнено условие параллельности (см. 2.4)):

$$\frac{2}{-12} = \frac{-1}{6} \neq \frac{-5}{1}.$$

Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ ортогональны, прямые $\ell_1$ и $\ell_3$ параллельны, следовательно, прямые $\ell_2$ и $\ell_3$ ортогональны.

**Ответ.**
Прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ ортогональны, прямые $\ell_1$ и $\ell_3$ параллельны, прямые $\ell_2$ и $\ell_3$ ортогональны.

**Задача 2.2.2.**
Дан треугольник с вершинами $A(-1,6)$, $B(4,0)$, $C(-7,1)$. Составить уравнение высоты треугольника $ABC$, опущенной из вершины $A$ на сторону $BC$.

**Решение задачи 2.2.2.**
Рассмотрим два способа решения задачи: через общее уравнение прямой (см. (1.2)) и через уравнение прямой с угловым коэффициентом (см. (1.8)).

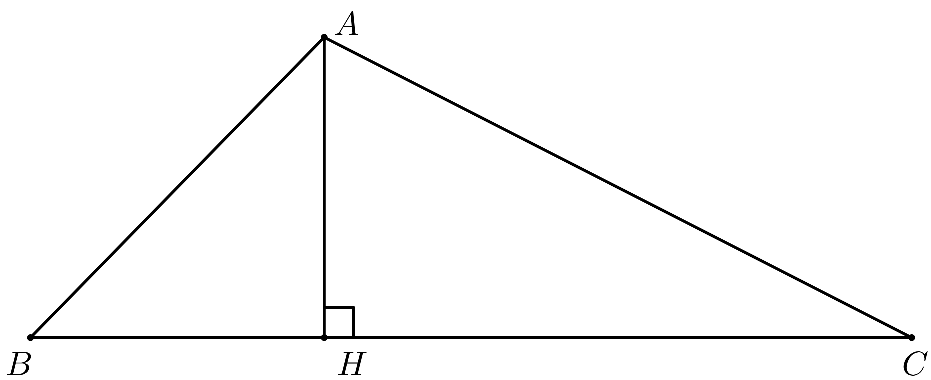


Рис. 2.1.

I способ (через общее уравнение прямой).

Запишем уравнение прямой $BC$, как прямой, проходящей через две точки $B$ и $C$ (см. (1.6)):

$$\frac{x-4}{-7-4}=\frac{y-0}{1-0} \quad \Rightarrow \quad x+11y-4=0.$$

Нормальный вектор полученной прямой $\vec{n}\{1,11\}$ ортогонален стороне $BC$, следовательно, является направляющим вектором для высоты $AH$ (см. Рис. 2.1). Составим параметрические уравнения высоты треугольника по формуле (1.4), используя направляющий вектор и точку $A$, лежащую на прямой:

$$\begin{cases} x=-1+t, \\ y=6+11t, \end{cases} \qquad t\in(-\infty,+\infty).$$

Исключив параметр $t$ из полученной системы, запишем общее уравнение $AH$:

$$11x - y + 17 = 0.$$

II способ (через уравнение прямой с угловым коэффициентом).

Запишем уравнение прямой $BC$, как прямой, проходящей через две точки $B$ и $C$ (см. (1.6)):

$$\frac{x-4}{-7-4} = \frac{y-0}{1-0} \quad \Rightarrow \quad x + 11y - 4 = 0.$$

Перепишем полученное уравнение в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом (см. (1.8)):

$$y = -\frac{1}{11}x + \frac{4}{11}, \quad k = -\frac{1}{11}.$$

Из условия ортогональности двух прямых (см. (2.6)) найдем коэффициент $k_1$ для искомой высоты:

$$k \cdot k_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{-1}{k} = \frac{-1}{-1/11} = 11.$$

Тогда уравнение высоты $AH$ имеет вид $y = 11x + b$.

Найдем $b$, используя тот факт, что высота проходит через точку $A = (-1, 6)$:

$$6 = 11 \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow \quad b = 17.$$

$$y = 11x + 17 \quad \Rightarrow \quad 11x - y + 17 = 0.$$

**Ответ.** $11x - y + 17 = 0$.

**Задача 2.2.3.**

Дано уравнение стороны ромба $x + 3y - 1 = 0$ и уравнение его диагонали $2x + y + 3 = 0$. Написать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $Q(-7, -4)$ лежит на стороне, параллельной данной.

**Решение задачи 2.2.3.**

Обозначим вершины ромба как на Рис. 2.2. Стороны ромба $KN$ и $LM$ параллельны. Следовательно, коэффициенты

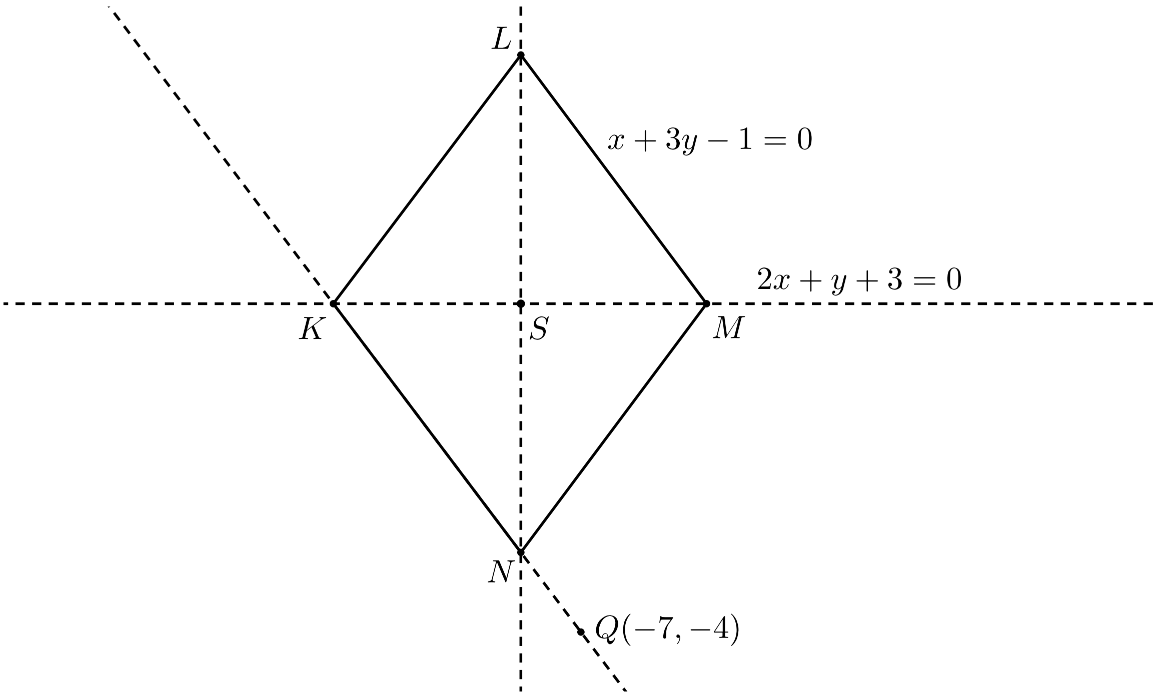


Рис. 2.2.

уравнений прямых, содержащих стороны ромба, пропорциональны (см. условие параллельности (2.4)). Тогда уравнение прямой $KN$ имеет вид:

$$x + 3y + D = 0.$$

Найдем коэффициент $D$, зная, что точка $Q$ лежит на этой прямой, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$-7 + 3 \cdot (-4) + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 19.$$

Получили уравнение $KN$:

$$x + 3y + 19 = 0.$$

Диагонали ромба $LN$ и $KM$ перпендикулярны. Запишем уравнение $KM$ в виде уравнения с угловым коэффициентом:

$$y = -2x - 3, \quad \text{где } k_1 = -2.$$

Тогда угловой коэффициент $LN$ удовлетворяет условию (2.6):

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

и, следовательно, равен $k_2 = 1/2$.

Уравнение $LN$ принимает вид

$$y = \frac{1}{2}x + b_2.$$

Найдем координаты точки $K$. Точка лежит на стороне $KN$ и на диагонали $KM$, следовательно ее координаты найдем из системы уравнений, задающих прямые $KN$ и $KM$:

$$\begin{cases} x + 3y + 19 = 0, \\ 2x + y + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = -7, \end{cases} \Rightarrow \quad K\,(2, -7).$$

Аналогично найдем координаты точки $M$ как точки, лежащей на стороне $LM$ и диагонали $KM$:

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ 2x + y + 3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \end{cases} \Rightarrow \quad M\,(-2, 1).$$

Пусть точка $S$ — точка пересечения диагоналей ромба. Тогда она лежит на середине $KM$ и ее координаты $x_S$ и $y_S$ равны:

$$x_S = \frac{2-2}{2} = 0, \quad y_S = \frac{-7+1}{2} = -3.$$

Точка $S$ лежит на диагонали $LN$, теперь мы можем найти коэффициент $b_2$ уравнения этой диагонали:

$$y = \frac{1}{2}x + b_2 \quad \Rightarrow \quad -3 = \frac{1}{2} \cdot 0 + b_2 \quad \Rightarrow \quad b_2 = -3.$$

Общее уравнение прямой $LN$ примет вид: $x - 2y - 6 = 0$. Найдем координаты вершины $N$, как точки лежащей на $LN$ и $KN$:

$$\begin{cases} x - 2y - 6 = 0, \\ x + 3y + 19 = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -4, \\ y = -5, \end{cases} \Rightarrow \quad N\,(-4, -5).$$

Запишем уравнение $MN$ через две точки $M\,(-2, 1)$, $N\,(-4, -5)$ (см. (1.6)):

$$\frac{x+2}{-4+2} = \frac{y-1}{-5-1} \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 7.$$

Сторона $KL$ параллельна стороне $MN$, следовательно, (используем условие параллельности двух прямых (2.7)) ее уравнение запишем в виде $y = 3x + b_3$. Найдем $b_3$, используя координаты вершины $K(2,-7)$:

$$-7 = 3 \cdot 2 + b_3 \quad \Rightarrow \quad b_3 = -13 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 13.$$

**Ответ.** $x + 3y + 19 = 0$, $3x - y + 7 = 0$, $3x - y - 13 = 0$.

## 2.3 Учебные задания для самостоятельной работы

**Задача 2.3.1.**
При каких значениях $k$ прямые $kx - 4y = 6$ и $x - ky = 3$ ортогональны, параллельны.

**Подсказка к задаче 2.3.1.**
Решение возможно двумя способами. Первый способ — записать общие уравнения прямых (см. (1.2)). Далее воспользоваться условиями ортогональности (2.3) и параллельности (2.4) случая I. Второй способ — записать уравнения прямых с угловым коэффициентом (см. (1.8)) и воспользоваться условиями ортогональности (2.6) и параллельности (2.7) случая II.

**Ответ.** Прямые параллельны при $k = \pm 2$, ортогональны при $k = 0$.

**Задача 2.3.2.**
Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3,4)$ и параллельной прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3}.$$

**Подсказка к задаче 2.3.2.**
Решение возможно двумя способами. Первый способ — записать уравнение заданной прямой в общем виде (см. (1.2)). Для записи уравнения искомой прямой использовать условия параллельности (2.4) случая I. Второй способ — записать уравнение заданной прямой с угловым коэффициентом. Для записи уравнения искомой прямой использовать условия параллельности (2.7) случая II.

**Ответ.** $3x - 2y + 17 = 0$.

**Задача 2.3.3.**
Доказать, что прямые $\ell_1$ и $\ell_2$ пересекаются, найти точку пересечения.

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 + t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

$$\ell_2 : \; 5x - 2y + 5 = 0.$$

**Подсказка к задаче 2.3.3.**
Подставить выражения $x = x(t)$, $y = y(t)$ первой прямой в уравнение второй прямой. Найти значение параметра $t$, соответствующее точке пересечения заданных прямых.

**Ответ.** $(-1, 0)$.

**Задача 2.3.4.**
Найти точку, симметричную точке $M\,(-5, 10)$ относительно прямой $\ell : \; 2x + 3y - 7 = 0$.

**Подсказка к задаче 2.3.4.**
Зная координаты нормального вектора прямой, записать уравнение прямой, перпендикулярной прямой $\ell$, и проходящей через точку $M$. Далее найти точку пересечения заданной прямой и полученного перпендикуляра, это будет проекция точки $M$ на прямую $\ell$. Искомая точка будет лежать на полученном перпендикуляре, причем проекция будет серединой отрезка, соединяющего заданную точку $M$ и искомую.

**Ответ.** $(-9, 4)$.

# §3. Угол между прямыми на плоскости

## 3.1 Краткие сведения

I случай.

Пусть две прямые заданы своими общими уравнениями (см. (1.2))

$$\ell_1 : \ A_1x + B_1y + D_1 = 0,$$
$$\ell_2 : \ A_2x + B_2y + D_2 = 0.$$

Тогда угол между векторами $\vec{n}_1\{A_1, B_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2, B_2\}$ равен одному из углов, образованных этими прямыми, а значит, косинусы этих углов будут вычисляться по формуле

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.1}$$

(3.1) — косинусы углов между двумя прямыми на плоскости, заданными своими общими уравнениями.

II случай.

Пусть две прямые заданы своими уравнениями с угловым коэффициентом (см. (1.8))

$$\ell_1 : \ y = k_1x + b_1,$$
$$\ell_2 : \ y = k_2x + b_2.$$

Тогда угол между ними будет вычисляться по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{3.2}$$

(3.2) — тангенс угла между двумя прямыми на плоскости, заданными своими уравнениями с угловым коэффициентом.

**Замечание.** При нахождении угла от прямой $\ell_1$ до прямой $\ell_2$ необходимо в числителе формулы (3.2) правильно взять угловые коэффициенты $k_1$ и $k_2$. Для этого делаем следующее. Изображаем две заданные прямые в правосторонней декартовой прямоугольной системе координат (ДПСК). За прямую $\ell_1$

(с угловым коэффициентом $k_1$) берем ту прямую, которую нужно повернуть вокруг точки пересечения против часовой стрелки до совмещения с прямой $\ell_2$ (с угловым коэффициентом $k_2$).

## 3.2 Учебные задания для аудиторной работы

**Задача 3.2.1.**
Даны две прямые $\ell_1$ и $\ell_2$. Найти угол между ними.

$$\ell_1 : \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1,$$
$$\ell_2 : \quad \begin{cases} x = 6t, \\ y = -1 - 5t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

**Решение задачи 3.2.1.**
Запишем общие (координатные) уравнения прямых (см. (1.2)). Для прямой $\ell_1$ получим:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0.$$

Для прямой $\ell_2$ исключим параметр $t$ из системы уравнений, получим

$$\frac{x}{6} = \frac{y+1}{-5} \Rightarrow 5x + 6y + 6 = 0.$$

Тогда косинусы углов между прямыми по формуле (3.1) будут равны

$$\cos\varphi_{1,2} = \pm\frac{2 \cdot 5 + (-3) \cdot 6}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{25+36}} = \pm\frac{-8}{\sqrt{13 \cdot 61}} = \mp\frac{8}{\sqrt{793}}.$$

Для простоты можно условиться под углом $\varphi$ между прямыми понимать острый угол. Тогда из двух углов $\varphi_1$ и $\varphi_2$ будем выбирать тот, косинус которого положителен.

**Ответ.** $\arccos\dfrac{8}{\sqrt{793}}$.

**Задача 3.2.2.**
Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x - y + 8 = 0$, $x - y + 2 = 0$, $x + 2y + 10 = 0$.

**Решение задачи 3.2.2.**
Решим задачу, используя формулу для тангенса угла между прямыми (см. (3.2)). Запишем уравнения всех прямых в виде уравнений с угловым коэффициентом (см. (1.8)) и найдем их угловые коэффициенты:

$$\begin{aligned}
\ell_1 : &\quad 3x - y + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3x + 8 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 3.\\
\ell_2 : &\quad x - y + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x + 2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 1.\\
\ell_3 : &\quad 3x + 2y + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - 5 \quad \Rightarrow \quad k_3 = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Учитывая замечание пункта 3.1 углы треугольника будут равны

$$\alpha_1 = \widehat{\ell_1\ell_2}, \quad \alpha_2 = \widehat{\ell_2\ell_3}, \quad \alpha_3 = \widehat{\ell_1\ell_3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}(\widehat{\ell_1\ell_2}) &= \frac{3-1}{1+3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right).\\
\mathrm{tg}(\widehat{\ell_2\ell_3}) &= \frac{1-(-1/2)}{1-1/2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \mathrm{arctg}(3).\\
\mathrm{tg}(\widehat{\ell_1\ell_3}) &= \frac{-1/2-3}{1-3/2} = \frac{7}{1} \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \mathrm{arctg}(7).
\end{aligned}$$

**Ответ.** $\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{arctg}(3)$, $\mathrm{arctg}(7)$.

**Задача 3.2.3.**
Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $\ell_1$, а боковой стороной — прямая $\ell_2$.

$$\ell_1 : \; 2x - 5y + 1 = 0, \quad \ell_2 : \; 12x - y - 23 = 0.$$

Написать уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку $(-1, 2)$.

**Решение задачи 3.2.3.**
Запишем уравнения $\ell_1$ и $\ell_2$ в виде уравнений с угловым коэффицентом (см. (1.8)):

$$\ell_1:\ y=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5};\quad \ell_2:\ y=12x-23.$$

По формуле (3.2) найдем угол от $\ell_1$ до $\ell_2$:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}=\frac{2/5-12}{1+2/5\cdot 12}=-2.$$

Для искомой боковой стороны $y=k_3x+b_3$ имеем:

$$\operatorname{tg}(\pi-\varphi)=-\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_1-k_3}{1+k_1\cdot k_3}\Rightarrow$$

$$\frac{2/5-k_3}{1+2/5\cdot k_3}=2\quad\Rightarrow\quad 2-5k_3=10+4k_3\quad\Rightarrow\quad k_3=-\frac{8}{9}.$$

Найдем $b_3$, зная что боковая сторона проходит через точку $(-1,2)$:

$$2=-\frac{8}{9}\cdot(-1)+b_3\quad\Rightarrow\quad b_3=\frac{10}{9}.$$

Получим уравнение

$$y=-\frac{8}{9}x+\frac{10}{9}\quad\Rightarrow\quad 8x+9y-10=0.$$

**Ответ.** $8x+9y-10=0$.

**Задача 3.2.4.**
Зная уравнения двух сторон треугольника $ABC$:

$$2x+3y-3=0\,(AB),\quad x+2y-4=0\,(AC)$$

и внутренний угол при вершине $B$, равный $\frac{\pi}{4}$, написать уравнение высоты, опущенной из вершины $A$ на сторону $BC$.

**Решение задачи 3.2.4.**
Решим задачу, используя уравнения прямых с угловым коэффициентом (см. (1.8)). Уравнения сторон $AB$ и $AC$ примут вид:

$$(AB):\ 2x+3y-3=0 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{2}{3}x+1,\ k_1=-\frac{2}{3},$$
$$(AC):\ x+2y-4=0 \quad\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{2}x+2,\ k_2=-\frac{1}{2}.$$

Обозначим угловой коэффициент прямой $BC$ через $k_3$, а угловой коэффициент высоты $AE$ через $k_4$. Внутренний угол треугольника $ABC$ при вершине $B$ — это угол от $AB$ к $BC$. Запишем тангенс этого угла, используя формулу (3.2):

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{-\frac{2}{3}-k_3}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)k_3}=1 \quad\Rightarrow\quad k_3=-5.$$

Прямые $BC$ и $AE$ ортогональны, следовательно, по условию (2.6)

$$k_3\cdot k_4=-1 \quad\Rightarrow\quad k_4=\frac{1}{5}.$$

Точка $A$ лежит на сторонах $AB$ и $AC$. Найдем ее координаты, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y-3=0, \\ \ \ x+2y-4=0, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=-6, \\ y=5, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A\,(-6,5).$$

Запишем уравнение высоты $AE$, зная угловой коэффициент прямой и точку, принадлежащую прямой:

$$\ell_4:\ y=k_4x+b_4, \quad k_4=\frac{1}{5},\ A(-6,5)\in\ell_4 \quad\Rightarrow$$
$$5=\frac{1}{5}\cdot(-6)+b_4 \quad\Rightarrow\quad b_4=\frac{31}{5}.$$

Получим уравнение высоты $AE$

$$y=\frac{1}{5}\,x+\frac{31}{5} \quad\Rightarrow\quad x-5y+31=0.$$

**Ответ.** $x-5y+31=0$.

## 3.3 Учебные задания для самостоятельной работы

**Задача 3.3.1.**
Дан треугольник $ABC$ с вершинами $A(-1,2)$, $B(1,1)$, $C(2,-5/2)$. Вычислить угол между стороной $AB$ и медианой, проведенной из вершины $C$.

**Подсказка к задаче 3.3.1.**
Найти координаты середины стороны $AB$. Составить уравнения стороны $AB$ и медианы, проведенной из вершины $C$ в середину $AB$, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки (см. (1.6)).

**Ответ.** $\arccos\dfrac{4}{5}$ или $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

**Задача 3.3.2.**
Основанием равнобедренного треугольника служит прямая

$$\ell:\ 2x+3y=0.$$

Его вершина находится в точке $A(2,6)$, тангенс угла при основании равен $1/3$. Написать уравнения боковых сторон треугольника.

**Подсказка к задаче 3.3.2.**
Применить приемы, описанные в решении задачи 3.2.2:
Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом (см. (1.8)).
Воспользоваться формулой для нахождения тангенса угла от одной стороны треугольника до другой (см. (3.2)), учитывая практическое замечание пункта 3.1.

**Ответ.** $3x+11y-72=0$, $9x+7y-60=0$.

## §4. Пучок прямых на плоскости

### 4.1 Краткие сведения

Собственным пучком прямых на плоскости называется множество всех прямых, проходящих через одну точку (центр пучка).

Несобственным пучком прямых на плоскости называется множество всех параллельных прямых, т. е. прямых, проходящих через несобственную точку (бесконечно удаленную).

Далее будем рассматривать только собственные пучки прямых и называть их просто пучками прямых. Пусть заданы две различные прямые своими общими уравнениями

$$\ell_1 : \; A_1x + B_1y + D_1 = 0,$$

$$\ell_2 : \; A_2x + B_2y + D_2 = 0,$$

которые задают центр пучка (точку пересечения этих прямых).

Уравнение

$$\lambda\,(A_1x + B_1y + D_1) + \mu\,(A_2x + B_2y + D_2) = 0, \tag{4.1}$$

где $\lambda$ и $\mu$ не равны нулю одновременно, называется уравнением пучка прямых, определяемого двумя различными прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$.

**Замечание.** Уравнение пучка прямых (4.1) при фиксированных $\lambda$ и $\mu$ задает какую-то прямую, принадлежащую пучку. В общем виде, координаты нормального вектора прямой, принадлежащей пучку задаются следующим видом

$$\vec{n}\,\{\lambda A_1 + \mu A_2,\, \lambda B_1 + \mu B_2\}. \tag{4.2}$$

**Замечание.** Коэффициенты $\lambda$ и $\mu$ в уравнении пучка прямых (4.1) не равны нулю одновременно, поэтому уравнение можно записать в следующем виде (разделив на один из коэффициентов)

$$(A_1x + B_1y + D_1) + \kappa\,(A_2x + B_2y + D_2) = 0. \tag{4.3}$$

## 4.2 Учебные задания для аудиторной работы

**Задача 4.2.1.**
Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $7x - y - 8 = 0$ и $3x + 5y + 13 = 0$ и через точку $A(3, -5)$.

**Решение задачи 4.2.1.**
Всякая прямая, проходящая через точку пересечениях двух других прямых, принадлежит пучку, определяемому этими прямыми. Следовательно, она может быть задана уравнением (см. (4.1)):

$$\lambda\,(7x - y - 8) + \mu\,(3x + 5y + 13) = 0. \qquad (*)$$

Подберем значения параметров $\lambda$ и $\mu$ так, чтобы прямая проходила через точку $A$, для этого подставим координаты точки в уравнение $(*)$:

$$\lambda\,(7 \cdot 3 - (-5) - 8) + \mu\,(3 \cdot 3 + 5 \cdot (-5) + 13) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$18\lambda - 3\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 6\lambda.$$

Теперь подставим $\mu = 6\lambda$ в уравнение прямой $(*)$

$$\lambda\,(7x - y - 8) + 6\lambda\,(3x + 5y + 13) = 0.$$

Приведем подобные, разделим обе части уравнения на $\lambda$ и получим общее уравнение искомой прямой:

$$25x + 29y + 70 = 0.$$

**Ответ.** $25x + 29y + 70 = 0$.

**Задача 4.2.2.**
Найти уравнения прямых, принадлежащих пучку

$$(x + 2y + 5) + q(3x - y + 6) = 0$$

и ортогональных к каждой из прямых, определяющих данный пучок. Указать значения параметра $q$, соответствующие искомым прямым.

**Решение задачи 4.2.2.**
По формуле (4.2) запишем нормальный вектор прямой, принадлежащей заданному пучку:

$$\vec{n}\,\{1+3q,\,2-q\}$$

и нормальные векторы прямых, определяющих пучок:

$$\vec{n}_1\{1,2\},\quad \vec{n}_2\{3,-1\}.$$

Учитывая, что вектор $\vec{n}$ ортогонален векторам $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, найдем соответствующие значения параметра $q$:

$$\vec{n}\cdot\vec{n}_1=(1+3q_1)\cdot 1+(2-q_1)\cdot 2=0\quad\Rightarrow$$

$$3q_1-2q_1+1+4=0\quad\Rightarrow\quad q_1=-5.$$

$$\vec{n}\cdot\vec{n}_2=(1+3q_2)\cdot 3+(2-q_2)\cdot(-1)=0\quad\Rightarrow$$

$$9q_2+q_2+3-2=0\quad\Rightarrow\quad q_2=-\frac{1}{10}.$$

Подставив найденные значения $q_1$ и $q_2$ в уравнение пучка, найдем искомые прямые:

$$q_1=-5\quad\Rightarrow\quad(x+2y+5)-5(3x-y+6)=0\quad\Rightarrow$$

$$-14x+7y-25=0\quad\Rightarrow\quad 14x-7y+25=0;$$

$$q_2=-\frac{1}{10}\quad\Rightarrow\quad(x+2y+5)-\frac{1}{10}(3x-y+6)=0\quad\Rightarrow$$

$$\frac{7}{10}x+\frac{21}{10}y+\frac{44}{10}=0\quad\Rightarrow\quad 7x+21y+44=0.$$

**Ответ.** $14x-7y+25=0$, $q_1=-5$; $7x+21y+44=0$, $q_2=-\dfrac{1}{10}$.

**Задача 4.2.3.**
Найти прямую, которая принадлежит одновременно двум пучкам:

$$(x+y-1)+\kappa(x-1)=0;$$

$$(2x-3y)+\kappa'(y+1)=0.$$

**Решение задачи 4.2.3.**
I способ.
Найдем центр одного из заданных пучков, например, первого:

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x-1=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$$

Точка $A\,(1,0)$ — центр первого пучка. Подставим координаты точки $A$ в уравнение второго пучка и найдем $\kappa'$, соответствующее прямой, принадлежащей обоим пучкам:

$$(2\cdot 1-3\cdot 0)+\kappa'(0+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \kappa'=-2.$$

Подставим найденное $\kappa'$ в уравнение второго пучка и запишем уравнение искомой прямой:

$$(2x-3y)+(-2)\cdot(y+1)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-5y-2=0.$$

II способ.
Найдем центры заданных пучков. Для первого пучка получим точку $A$:

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x-1=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\,(1,0).$$

Для второго пучка получим точку $B$:

$$\begin{cases} 2x-3y=0, \\ y+1=0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}, \\ y=-1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B\,(-\frac{3}{2},-1).$$

Искомая прямая принадлежит обоим пучкам. Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $A$ и $B$ (см. (1.6)):

$$\frac{x-1}{-3/2-1}=\frac{y-0}{-1-0} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{-5/2}=\frac{y}{-1} \quad \Rightarrow \quad 2x-5y-2=0.$$

**Ответ.** $2x - 5y - 2 = 0$.

**Задача 4.2.4.**
Стороны треугольника заданы уравнениями

$$\begin{aligned} \ell_1 : &\quad 3x - 2y + 16 = 0, \\ \ell_2 : &\quad x + 7y + 13 = 0, \\ \ell_3 : &\quad 7x + 3y - 1 = 0. \end{aligned}$$

Не вычисляя координаты вершин треугольника, написать уравнения прямых, проведенных через вершины треугольника параллельно противолежащим сторонам.

**Решение задачи 4.2.4.**
Пусть прямая $m_1$ проходит через точку пересечения сторон треугольника $\ell_2$, $\ell_3$ и параллельна стороне $\ell_1$. Тогда $m_1$ принадлежит пучку прямых, образованому прямыми $\ell_2$ и $\ell_3$. Следовательно, ее уравнение можно записать в виде:

$$m_1 : \ \lambda\,(x + 7y + 13) + \mu\,(7x + 3y - 1) = 0,$$

причем нормальный вектор прямой имеет вид (см. (4.2)):

$$\vec{n}\,\{\lambda + 7\mu,\, 7\lambda + 3\mu\}.$$

Прямые $m_1$ и $\ell_1$ параллельны, следовательно, по условию (2.4):

$$\frac{\lambda + 7\mu}{3} = \frac{7\lambda + 3\mu}{-2} \ \Rightarrow\ -2\lambda - 14\mu = 21\lambda + 9\mu \ \Rightarrow\quad \lambda = -\mu.$$

Подставим $\lambda = -\mu$ в уравнение $m_1$.

$$-\mu\,(x + 7y + 13) + \mu\,(7x + 3y - 1) = 0.$$

Разделим обе части равенства на $\mu$ и приведем подобные:

$$-x - 7y - 13 + 7x + 3y - 1 = 0 \ \Rightarrow 6x - 4y - 14 = 0 \ \Rightarrow\ 3x - 2y - 7 = 0.$$

Аналогично найдем уравнения двух других прямых $m_2$ и $m_3$ параллельных сторонам треугольника $\ell_2$ и $\ell_3$ соответственно.

**Ответ.** $3x - 2y - 7 = 0$, $x + 7y - 33 = 0$, $7x + 3y + 45 = 0$.

## 4.3 Учебные задания для самостоятельной работы

**Задача 4.3.1.**

Через точку пересечения прямых $2x+5y-1=0$ и $x-3y+2=0$ провести прямую, которая, кроме того,
1) проходит через начало координат;
2) параллельна оси абсцисс;
3) параллельна оси ординат;
4) проходит через точку $M(3,2)$.

**Подсказка к задаче 4.3.1.**

Использовать уравнение пучка прямых (см. (4.1)). Для нахождения значений параметров $\lambda$ и $\mu$ в 1) и 4) использовать заданную точку. В пунктах 2) и 3) использовать условие параллельности прямых осям координат.

**Ответ.**
1) $5x+7y=0$;
2) $11y-5=0$;
3) $11x+7=0$;
4) $17x-40y+29=0$.

**Задача 4.3.2.**

Даны стороны четырехугольника:

$$x-y=0,\ x+3y=0,\ x-y-4=0,\ 3x+y-12=0.$$

Определить его диагонали.

**Подсказка к задаче 4.3.2.**

Найти точку пересечения двух сторон. Записать однопараметрическое уравнение пучка (см. (4.3)), проходящего через две другие стороны четырехугольника. Подставить найденную вершину четырехугольника в уравнение пучка. Найти значение параметра, соответствующее диагонали четырехугольника.
Со второй диагональю поступить аналогично.

**Ответ.** $y=0$ и $x=3$.

**Задача 4.3.3.**
Стороны треугольника заданы уравнениями:

$$y = 10,\ 2x - y - 1 = 0,\ x - 4y + 10 = 0.$$

Не вычисляя координат вершин треугольника, составить уравнения его высот.

**Подсказка к задаче 4.3.3.**
Составить однопараметрическое уравнение пучка прямых (см. (4.3)). Воспользоваться условием ортогональности двух векторов. Первый вектор — нормальный вектор произвольной прямой, принадлежащей пучку, координаты такого вектора будут выражаться через параметр пучка (см. (4.2)). Второй вектор — нормальный вектор стороны, к которой будет проведена высота.

**Ответ.** $4x + y - 32 = 0$, $x = 2$, $x + 2y - 50 = 0$.

# §5. Расстояние от точки до прямой на плоскости

## 5.1 Краткие сведения

Расстояние от точки $M_0\,(x_0, y_0)$ до прямой, заданной своим общим уравнением $Ax + By + D = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{5.1}$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной своим нормированным (нормальным) уравнением $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|. \tag{5.2}$$

**Замечание.** Прямая, заданная своим общим уравнением делит плоскость на две полуплоскости. Для всех точек $M(x, y)$, лежащих на этой прямой, и только для этих точек выражение

$$F(x, y) = Ax + By + D$$

обращается в нуль. Если же точка $M(x, y)$ не лежит на прямой, то для нее $F(x, y) > 0$ либо $F(x, y) < 0$. В первом случае говорят, что точка лежит в положительной полуплоскости по отношению к данной прямой, во втором случае — точка лежит в отрицательной полуплоскости.

**Замечание.** Нормальный вектор прямой всегда направлен в положительную полуплоскость.

## 5.2 Учебные задания для аудиторной работы

**Задача 5.2.1.**
Дан треугольник с вершинами $A\,(-4, 1)$, $B\,(2, 6)$, $C\,(-3, -2)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины $B$.

**Решение задачи 5.2.1.**
Составим уравнение прямой $AC$, проходящей через две точки (см. (1.6)):

$$\frac{x+4}{-3+4} = \frac{y-1}{-2-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{-3}.$$

Приведем его к общему виду:

$$3x + y + 11 = 0.$$

Тогда длина высоты треугольника, проведенной из вершины $B$ к стороне $AC$, будет равна расстоянию от точки $B$ до прямой $AC$:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 6 + 11|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{23}{\sqrt{10}} = \frac{23\sqrt{10}}{10}.$$

**Ответ.** $\dfrac{23\sqrt{10}}{10}$.

**Задача 5.2.2.**
Составить уравнения прямых, параллельных прямой

$$5x + 12y - 7 = 0$$

и отстоящих от нее на расстоянии $3$.

**Решение задачи 5.2.2.**
Воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой на плоскости (5.1). Найдем все точки $M(x, y)$, которые находятся на расстоянии 3 от заданной прямой:

$$3 = \frac{|5x + 12y - 7|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \quad \Rightarrow \quad 5x + 12y - 7 = \pm 3 \cdot 13.$$

Запишем каждое из полученных уравнений прямых по отдельности:

$$\begin{aligned} 5x + 12y - 7 &= 3 \cdot 13 & \Rightarrow \quad & 5x + 12y - 46 = 0, \\ 5x + 12y - 7 &= -3 \cdot 13 & \Rightarrow \quad & 5x + 12y + 32 = 0. \end{aligned}$$

**Ответ.** $5x + 12y - 46 = 0$, $5x + 12y + 32 = 0$.

**Задача 5.2.3.**
Даны две прямые:

$$\ell_1 : x + 3y - 2 = 0 \quad \text{и} \quad \ell_2 : \ x - y + 2 = 0.$$

Найти третью прямую $\ell_3$ так, чтобы $\ell_2$ была биссектрисой угла между $\ell_1$ и $\ell_3$.

**Решение задачи 5.2.3.**
При решении задачи используем тот факт, что точки, лежащие на биссектрисе угла между двумя прямыми, равноудалены от этих прямых.

Найдем точку пересечения прямых $\ell_1$ и $\ell_2$:

$$\begin{cases} x + 3y - 2 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M\,(-1, 1).$$

Запишем общее уравнение искомой прямой в общем виде (см. (1.2))

$$\ell_3 : \ Ax + By + D = 0.$$

Рассмотрим два случая:
I. Прямая $\ell_3$ не проходит через начало координат, следовательно, коэффициент $D \neq 0$;
II. Прямая $\ell_3$ проходит через начало координат, следовательно, коэффициент $D = 0$.

<u>I случай</u> $(D \neq 0)$.
Учитывая, что $D \neq 0$, разделим обе части уравнения прямой $\ell_3$ на $D$, получим:

$$\ell_3 : \ \widetilde{A}x + \widetilde{B}y + 1 = 0, \quad \text{где } \widetilde{A} = \frac{A}{D}, \ \widetilde{B} = \frac{B}{D}.$$

Возьмем произвольную точку на биссектрисе $\ell_2$, например, $N(0, 2)$. Запишем расстояния $d_1$ и $d_3$ от точки $N$ до прямых $\ell_1$ и $\ell_3$ соответственно:

$$d_1 = \frac{|0 + 3 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}},$$
$$d_3 = \frac{|\widetilde{A} \cdot 0 + \widetilde{B} \cdot 2 + 1|}{\sqrt{\widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2}} = \frac{|2\widetilde{B} + 1|}{\sqrt{\widetilde{A}^2 + \widetilde{B}^2}}.$$

Учтем, что
1) прямая $\ell_3$ проходит через точку пересечения двух заданных прямых, следовательно координаты точки $M$ удовлетворяют уравнению $\ell_3$;
2) точка $N$ равноудалена от прямых $\ell_1$ и $\ell_3$ (так как лежит на биссектрисе угла между прямыми $\ell_1$ и $\ell_3$):

$$\begin{cases} \widetilde{A}\cdot(-1)+\widetilde{B}\cdot 1+1=0, \\ \dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{|2\widetilde{B}+1|}{\sqrt{\widetilde{A}^2+\widetilde{B}^2}}, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \widetilde{A}=\widetilde{B}+1, \\ \dfrac{16}{10}=\dfrac{(2\widetilde{B}+1)^2}{(\widetilde{B}+1)^2+\widetilde{B}^2}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \widetilde{A}=\widetilde{B}+1, \\ \dfrac{16}{10}=\dfrac{4\widetilde{B}^2+4\widetilde{B}+1}{2\widetilde{B}^2+2\widetilde{B}+1}, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \widetilde{A}=\widetilde{B}+1, \\ 4\widetilde{B}^2+4\widetilde{B}-3=0. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение относительно $\widetilde{B}$, находим: $\widetilde{B}_1=1/2$ и $\widetilde{B}_2=-3/2$. Тогда коэффициенты $\widetilde{A}$ равны: $\widetilde{A}_1=3/2$ и $\widetilde{A}_2=-1/2$. Получаем два уравнения прямых:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y+1=0 \quad &\Rightarrow \quad 3x+y+2=0, \\ -\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y+1=0 \quad &\Rightarrow \quad x+3y-2=0. \end{aligned}$$

Второе уравнение — это уравнение $\ell_2$. Следовательно, уравнение $\ell_3$ имеет вид $3x+y+2=0$.

II случай ($D=0$).

Пусть искомая прямая проходит через начало координат, тогда ее уравнение можно записать в виде $Ax+By=0$. Повторим рассуждения случая I и запишем аналогичную систему уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot(-1)+B\cdot 1=0, \\ \dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{|2B|}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} A=B, \\ \dfrac{16}{10}=\dfrac{4B^2}{2B^2}. \end{cases}$$

Система несовместна, так как второе уравнение не имеет корней. Следовательно, предположение, что прямая $\ell_3$ проходит через начало координат, неверно. Задача имеет единственное решение, полученное в случае I.

**Ответ.** $3x + y + 2 = 0$.

## 5.3 Учебные задания для самостоятельной работы

**Задача 5.3.1.**
Дано уравнение прямой $3\sqrt{2}x + 3y - 1 = 0$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

**Подсказка к задаче 5.3.1.**
Использовать формулу (5.1) либо записать уравнение прямой в нормальном (нормированном) виде (см. (1.9)) и учесть, что $p$ — расстояние от начала координат до прямой.

**Ответ.** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

**Задача 5.3.2.**
На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от прямой $4x - 3y + 5 = 0$.

**Подсказка к задаче 5.3.2.**
Искомая точка лежит на оси ординат, следовательно, абсцисса этой точки равна нулю. Расстояние от такой точки до начала координат равно ординате искомой точки. Использовать формулу (5.1) для нахождения неизвестной ординаты.

**Ответ.** $\left(0, -\dfrac{5}{2}\right)$ или $\left(0, \dfrac{5}{8}\right)$.

**Задача 5.3.3.**
Доказать, что внутри треугольника, образованного прямыми

$$\begin{aligned} \ell_1 :&\quad 7x + y - 2 = 0, \\ \ell_2 :&\quad 5x + 5y - 4 = 0, \\ \ell_3 :&\quad 2x - 2y + 5 = 0 \end{aligned}$$

существует точка, равноудаленная от первых двух прямых и отстоящая от третьей прямой на расстояние $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Найти эту точку.

**Подсказка к задаче 5.3.3.**
Изобразить схематично рисунок к задаче. Пусть вершина треугольника $A$ — это точка пересечения прямых $\ell_1$ и $\ell_2$. Вывести первое уравнение для нахождения координат искомой точки $M(x_0, y_0)$, используя заданное расстояние от прямой $\ell_3$ (формула (5.1)) и условие, что точка $M$ и вершина треугольника $A$ должны лежать в одной полуплоскости (см. первое замечание пункта 5.1) относительно прямой $\ell_3$. Второе уравнение для нахождения координат точки $M$ получить, используя условие, что точка $M$ равноудалена от прямых $\ell_1$ и $\ell_2$. При этом необходимо предварительно установить, в какой (положительной или отрицательной) полуплоскости относительно прямых $\ell_1$ и $\ell_2$ находится искомая точка.

**Ответ.** $(0, 1)$.

Перейти к оглавлению на странице: 3

## §6. Применение в экономических задачах

Аналитическая геометрия связана как со школьным курсом геометрии, так и с другими математическими дисциплинами, такими как, дифференциальная геометрия, алгебра и математический анализ. Учитывая важность междисциплинарных связей, можно сделать вывод, что усвоение этого курса влияет на математическую подготовку студента, в частности на её геометрическую составляющую. Специфика дисциплины «Аналитическая геометрия», как и любого другого математического курса, выражается в сильных внутрипредметных связях.

Аналитическая геометрия довольно распространена при решении и визуализации экономических задач на производстве. Рассмотрим примеры, показывающие, как вычислить наиболее экономичное расстояние для перевозок, в котором применяются знания, полученные в процессе изучения темы «Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат».

*Пример 1.* Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями

$$y = 20x + 100 \text{ и } y = 25x + 70,$$

где $x$ — это дальность перевозки в сотнях километров, а $y$ — транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство.

*Решение* Для нахождения требуемого расстояния приравниваем транспортные расходы:

$$20x + 100 = 25x + 70 \quad \Rightarrow \quad 5x = 30 \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

Итак, при перевозке на $x = 6$ сотен километров транспортные расходы совпадают и составляют $y = 20 \cdot 6 + 100 = 220$ денежных единиц. Поэтому, начиная с 600 км, более экономичным становится первый вид транспорта. Это видно на рисунке 6.1.

Рассмотрим вторую задачу, чтобы выяснить разницу между выручкой и издержками. Точка безубыточности — это такой объём производства, начиная с которого выручка покрывает издержки.

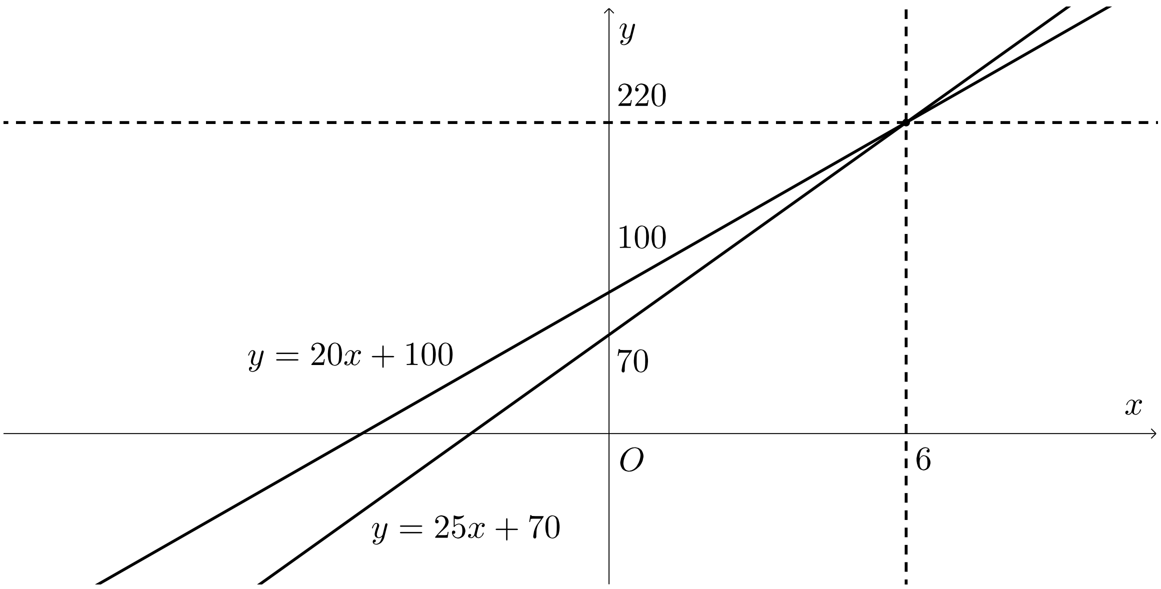


Рис. 6.1.

*Пример 2.* Мебельная фабрика продаёт каждый изготовленный стул по 1600 руб. При этом издержки составляют 15875 руб. за 8 стульев и 18750 руб. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная.

*Решение.* Пусть $x$ — количество стульев, изготовленных мебельной фабрикой (объем производства). Построим функцию издержек $C(x)$ как прямую, проходящую через две точки $M_1(8, 15875)$ и $M_2(13, 18750)$.

$$\frac{C(x) - 15875}{18750 - 15875} = \frac{x - 8}{13 - 8} \quad \Rightarrow \quad \frac{C(x) - 15875}{575} = \frac{x - 8}{1} \quad \Rightarrow$$

$$C(x) = 575x - 4600 + 15875 \quad \Rightarrow \quad C(x) = 575x + 11275.$$

Функция выручки по условию имеет вид $R(x) = 1600x$. Находим точку безубыточности как абсциссу точки пересечения линий издержек и выручки (см. рисунок 6.2):

$$575x + 11275 = 1600x \quad \Rightarrow \quad 1025x = 11275 \quad \Rightarrow \quad x = 11.$$

Точка безубыточности $x = 11$.

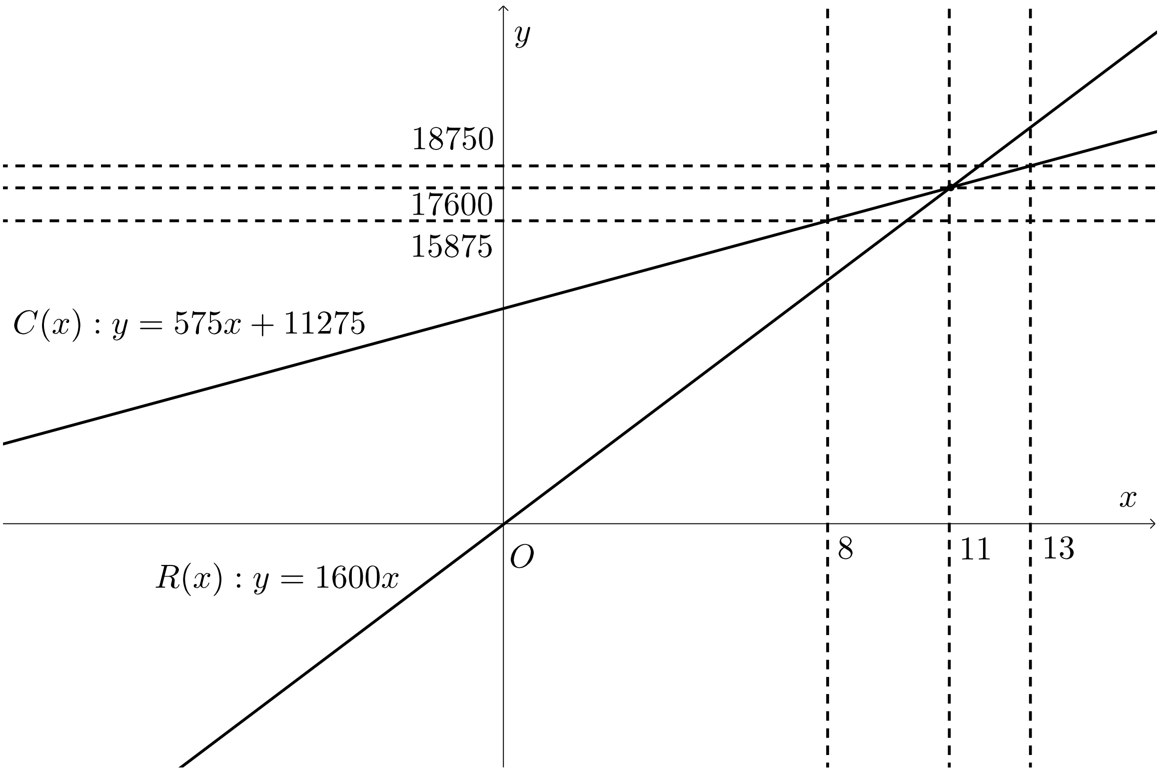


Рис. 6.2.

Таким образом, приведенные примеры показывают, как знания, полученные в процессе изучения темы «Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат», применяются в экономико-математическом моделировании.

Перейти к оглавлению на странице: 3

## §7. Задания для текущего контроля и промежуточной аттестации

В данном параграфе приведены контрольные задания с ответами по теме «Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат» курса «Аналитическая геометрия». Предлагается один вариант контрольной работы из пяти заданий и один вариант теста из четырнадцати вопросов. Контрольная работа может использоваться как для аудиторной работы, так и для самостоятельной/домашней работы обучающихся. Тестовые вопросы проверяют знания, умения и навыки решения практических и теоретических задач. Предложенный тест может быть выполнен с использованием электронных ресурсов образовательной организации. Например, в Санкт-Петербургском государственном Университете в качестве такой площадки может выступать система дистанционной поддержки образовательного процесса Blackboard.

### Контрольная работа

1. Составить уравнение прямой, если точка $M(2,3)$ на прямой служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

2. Установить пересекаются, параллельны или совпадают прямые $\ell_1$ и $\ell_2$. Если прямые пересекаются, найти точку их пересечения: $\ell_1: \ x=5t, y=-2-2t$ и $\ell_2: \ 2x+5y+2=0$.

3. Дан треугольник со сторонами

   $$AB: 3x-2y+5=0,\ BC: x-y-1=0,\ AC: 5x+6y-9=0.$$

   Не вычисляя координат вершин треугольника, составить уравнение высоты треугольника, опущенной из вершина $B$.

4. Через точку $N(2,-5)$ проходит прямая, образующая угол $\pi/4$ с прямой $4x-3y+1=0$. Составить уравнение этой прямой.

5. Точка $A$ лежит на прямой $\ell_1$: $2x-3y+4=0$. Расстояние от точки $A$ до прямой $\ell_2$: $3x=4y$ равно $2$. Найти координаты точки $A$.

Перейти к оглавлению на странице: 3

## Тест

1. Прямая задана уравнением

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B},$$

тогда общее (координатное) уравнение прямой имеет вид:

   (a) $x_0 x + y_0 y + B x_0 - A y_0 = 0$;

   (b) $Ax + By + Ax_0 - By_0 = 0$;

   (c) $-Bx + Ay + Bx_0 - Ay_0 = 0$;

   (d) $Bx - Ay + x_0 y_0 = 0$.

2. Прямая задана векторным уравнением $\vec{r}\cdot\vec{n}+D = 0$, уравнение станет нормированным в случае:

   (a) $|\vec{n}| = 1$;

   (b) $|\vec{n}| = 1,\ D < 0$;

   (c) $|\vec{n}| = 1,\ D > 0$;

   (d) $\dfrac{D}{|\vec{n}|} = 1$.

3. Прямая отсекает в третьем квадранте отрезки длиной 2 и 3 по осям координат $Ox$ и $Oy$ соответственно. Тогда уравнение прямой имеет вид:

   (a) $-\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1$;

   (b) $-\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$;

   (c) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1$;

   (d) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

4. Угловой коэффициент прямой

$$\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 - 3t, \end{cases} \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

равен:

(a) $\frac{1}{2}$;

(b) $-\frac{3}{2}$;

(c) $\frac{2}{3}$;

(d) $3$.

5. Найти нормированное (нормальное) уравнение прямой, которая проходит через две точки $A(-10/3; 0)$, $B(-3; 1/4)$.

(a) $3x - 4y + 1 = 0$;

(b) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 = 0$;

(c) $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$.

(d) $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$.

6. Две прямые $\ell_1$ и $\ell_2$, заданные своими уравнениями

$$\ell_1 : Ax + By + D = 0, \quad \ell_2 : y = kx + b,$$

параллельны (и не совпадают), если:

(a) $\frac{A}{k} = \frac{B}{-1} \neq \frac{D}{b}$;

(b) $\frac{A}{k} = \frac{B}{b} \neq \frac{D}{1}$;

(c) $\frac{A}{b} = \frac{B}{-1} = \frac{D}{k}$;

(d) $\frac{A}{1} = \frac{B}{k} = \frac{D}{b}$.

7. Две прямые $\ell_1$ и $\ell_2$, заданные своими уравнениями

$$\ell_1 : Ax + By + D = 0, \quad \ell_2 : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

ортогональны, если:

(a) $A(y_2 - y_1) + B(x_2 - x_1) = 0$;

(b) $A(y_2 - y_1) - B(x_2 - x_1) = 0$;

(c) $A(x_1 - x_2) = B(y_2 - y_1)$;

(d) $A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0$.

8. Установить пересекаются, параллельны или совпадают прямые

$$\ell_1 : \ 3x + 4y + 5 = 0 \quad \text{и} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = -3 + 4t, \\ y = 1 - 3t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

(a) параллельны

(b) пересекаются под прямым углом

(c) совпадают

(d) пересекаются под углом, не равным $\pi/2$.

9. Даны две прямые

$$\ell_1 : \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1 \quad \text{и} \quad \ell_2 : \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1.$$

Найти косинус угла между ними.

(a) $\dfrac{|a_1 b_1 + a_2 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$;

(b) $\dfrac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{b_1^2}}\sqrt{\dfrac{1}{a_2^2} + \dfrac{1}{b_2^2}}}$;

(c) $\dfrac{|a_1 b_1 + a_2 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

(d) $\dfrac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

10. Даны две прямые

$$\ell_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y+2}{5} \quad \text{и} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 7 + 2t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Найти косинус угла между ними.

(a) $\dfrac{13\sqrt{2}}{7}$;

(b) $\dfrac{7}{26}$;

(c) $\dfrac{7}{13\sqrt{2}}$;

(d) $\dfrac{7}{13}$.

11. Дан пучок прямых

$$\lambda(3x - y + 2) + (x + 6y - 1) = 0$$

и прямая

$$\ell_1 : \; 13x + y - 5 = 0.$$

Найти прямую $\ell_2$, принадлежащую заданному пучку и ортогональную $\ell_1$. Какое значение параметра $\lambda$ соответствует прямой $\ell_2$:

(a) $\lambda = -2$;

(b) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$;

(c) $\lambda = \dfrac{1}{2}$;

(d) $\lambda = 2$.

12. Две прямые $\ell_1$ и $\ell_2$, заданные своими уравнениями

$$\ell_1 : y = 7x - 4, \quad \ell_2 : x = -1 + 4t,\ y = 3 + 2t,$$

образуют пучок:

(a) $\alpha(7x - y - 4) + \beta(x - 2y + 7) = 0$;

(b) $\alpha(x - \frac{1}{7}y - 4) + \beta(x - 2y + 7) = 0$;

(c) $\alpha(7x - 4y) + \beta(2x + 4y - 1) = 0$;

(d) $\alpha(7x - y + 4) + \beta(x - 2y + 1) = 0$.

13. Расстояние $d$ от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $y = kx + b$ равно:

(a) $d = \dfrac{|kx_0 + y_0 - b|}{\sqrt{k^2 + b^2}}$;

(b) $d = \dfrac{|kx_0 - y_0 - b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$;

(c) $d = \dfrac{|kx_0 + y_0|}{\sqrt{1 + k^2}}$;

(d) $d = \dfrac{|kx_0 - y_0 + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

14. Расстояние от начала координат до прямой $\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{5} = 1$ равно:

(a) $-\dfrac{60}{13}$;

(b) $\dfrac{60}{13}$;

(c) $\dfrac{13}{60}$;

(d) $\dfrac{5}{12}$.

Перейти к оглавлению на странице: 3

## Ответы к контрольной работе

1. $2x + 3y - 13 = 0$.

2. Прямые параллельны, не совпадают.

3. $6x - 5y + 2 = 0$. Указание: использовать уравнение пучка прямых (см. (4.1)).

4. $7x + y - 9 = 0$, $x - 7y - 37 = 0$.

5. $(46, 32)$ или $(-14, -8)$.

## Ответы к тесту

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c | b | a | b | d | a | b | c | d | c | b | a | d | b |

# ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия. — М.: Наука, 1990.
2. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ВШ, 1998.
3. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.
4. *Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф.* Геометрия. Старинные и занимательные задачи. Пособие для учащихся 10–11 классов., М., Просвящение, 2008.
5. *Кадомцев С.Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2001.
6. *Кузютин В.Ф., Зенкевич Н.А., Еремеев В.В.* Геометрия. — СПб.: Лань, 2003.
7. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. — М.: 1969.
8. *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976.
9. *Мусхелишвили Н.И.* Курс аналитической геометрии. — СПб.: Изд-во «Лань», 2002.
10. *Мышкис А.Д.* Лекции по высшей математике. — М.: Наука, 1973.
11. *Свиркина Л.А.* Семинары по математическому анализу для студентов экономического факультета. Семестр 1. Учебное пособие. — СПб, СОЛО, 2015.
12. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — СПб.: Изд-во «Лань», 2003.